

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи
УДК 519.6

Афанасьев Никита Александрович

**БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕРМОАКУСТИКИ И
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ С
УПРУГИМИ ТЕЛАМИ**

Специальность 1.2.2. —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., проф.
Головизнин Василий Михайлович

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Схема КАБАРЕ для систем уравнений гиперболического типа	21
1.1 Системы одномерных дифференциальных уравнений гиперболического типа	21
1.2 Системы многомерных дифференциальных уравнений гиперболического типа	23
1.3 Схема КАБАРЕ для линейного одномерного уравнения переноса	25
1.3.1 Линейное одномерное уравнение переноса	25
1.3.2 Трехслойная схема КАБАРЕ для линейного одномерного уравнения переноса	27
1.3.3 Трехфазаная схема КАБАРЕ для линейного одномерного уравнения переноса	32
1.4 Схема КАБАРЕ для систем нелинейных одномерных уравнений гиперболического типа	39
1.4.1 Консервативные фазы алгоритма	40
1.4.2 Характеристическая фаза алгоритма	41
1.4.3 Вычисление инвариантов Римана	43
1.4.4 Выбор шага по времени	45
1.5 Схема КАБАРЕ для систем нелинейных многомерных уравнений гиперболического типа	46
1.5.1 Пространственно-временная сетка и сеточные функции	46
1.5.2 Опорная система координат	48
1.5.3 Консервативные фазы алгоритма	49
1.5.4 Характеристическая фаза алгоритма	51
1.5.5 Выбор шага по времени	52
1.6 Некоторые проблемы схемы КАБАРЕ	52

Глава 2. Обратимый по времени алгоритм обработки звуковых точек для балансно-характеристических схем	55
2.1 Обработка звуковых точек для систем уравнений с аналитическими инвариантами Римана	55
2.1.1 Система уравнений мелкой воды	55
2.1.2 Стандартная схема КАБАРЕ для уравнений мелкой воды	56
2.1.3 Проблема обработки звуковых точек	58
2.1.4 Локально-неявный алгоритм обработки звуковых точек . .	61
2.1.5 Лемма о временной обратимости	65
2.1.6 Нелинейная коррекция для алгоритма обработки звуковых точек	71
2.2 Обработка звуковых точек для систем уравнений с локальными инвариантами Римана	73
2.3 Результаты расчетов	76
2.3.1 Задачи о распаде разрыва для уравнений мелкой воды . .	76
2.3.2 Согласование начальных данных	77
2.3.3 Сверхзвуковое течение	78
2.3.4 Сравнение явного и неявного SP-алгоритма	80
2.3.5 Тесты Торо	81
Глава 3. Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами	88
3.1 Дисперсионное улучшение для систем линейных дифференциальных уравнений	88
3.1.1 Дисперсионное улучшение для схемы в трехслойном виде .	88
3.1.2 Дисперсионное улучшение для схемы в трехфазном виде .	91
3.2 Дисперсионное улучшение для систем нелинейных дифференциальных уравнений	93
3.3 Результаты расчетов	96
3.3.1 Тесты для систем линейных уравнений	96
3.3.2 Тесты для уравнений мелкой воды	100
3.3.3 Модулированная акустическая волна	101
Глава 4. Моделирование термоакустической неустойчивости . . .	107
4.1 Математическая модель акустического тракта	107

4.2	Балансно-характеристическая схема КАБАРЕ для задач виброгорения	109
4.3	Модели горения	111
4.4	Задание начальных условий	114
4.5	Задание граничных условий	116
4.6	Поиск неустойчивых мод	118
4.7	Результаты расчетов	119
4.7.1	Прямая труба без области нагрева газа	120
4.7.2	Прямая труба с областью нагрева без запаздывания	122
4.7.3	Прямая труба при разных положениях плоской области горения с запаздыванием	123
4.7.4	Прямая труба при разных перепадах температуры в плоской области горения с запаздыванием	126
Глава 5. Схема КАБАРЕ для задач сопряженной гидроупругости		128
5.1	Уравнения газовой динамики и динамической упругости в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных	128
5.1.1	Уравнения газовой динамики	128
5.1.2	Уравнения динамической упругости	131
5.2	Схема КАБАРЕ на подвижных сетках	133
5.2.1	Общий алгоритм	133
5.2.2	Консервативные фазы алгоритма	134
5.2.3	Характеристическая фаза алгоритма	137
5.2.4	Обратимый по времени алгоритм передвижения сетки	139
5.2.5	Искусственные силы поверхностного натяжения	143
5.3	Результаты расчетов	145
5.3.1	Соударение упругих тел	145
5.3.2	Распространение акустических колебаний из идеального газа в упругое тело	147
5.3.3	Воздушный удар об упругое тело	148
5.3.4	Колебания двумерной упругой балки	150
5.3.5	Свободная граница газа	152
Заключение		161

Список сокращений и условных обозначений	162
Список литературы	163
Публикации автора по теме диссертации	175
Список рисунков	179
Список таблиц	182

Введение

Решение систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа на протяжении многих десятилетий остается одной из самых важных задач вычислительной гидродинамики [1; 2]. Методы высокой разрешающей способности Flux Corrected Transport (FCT) [3] и Total Variation Diminishing (TVD) [4] долгое время оставались одними из основных способов численного решения задач типа конвекции-диффузии. Разработка схем TVD или FCT была основана на нескольких важных идеях о том, как справиться с дисперсионными и диссипативными ошибками эйлеровых схем. Одной из таких идей, разработанной А. Хартеном, является введение антидиффузионных потоков в схему Годунова [5] первого порядка с целью улучшить ее диссипативные свойства и сохранить ограниченность решения [6; 7]. В качестве другого подхода можно модифицировать менее диссипативную, но дисперсионную схему (например, центральные конечные разности второго порядка) с помощью добавления в нее диффузионных потоков с нелинейными ограничителями (лимитерами) [2; 8].

Для достижения более тонкого баланса между диссипативными и дисперсионными ошибками используются улучшения схем FCT и TVD более высоких порядков. Среди них можно отметить семейство методов WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory), которые конструируются из конечных разностей высокого порядка и чей шаблон зависит непосредственно от решения [9; 10]. Также внимания заслуживают разрывные методы Галеркина [11–13], которые, в отличие от методов конечных разностей, для повышения порядка не увеличивают шаблон схемы, а вводят дополнительные степени свободы внутри расчетной ячейки (например, вводятся новые переменные).

Вычислительная сложность методов высокого порядка значительно больше, чем у стандартных методов FCT/TVD. Тем не менее они часто используются при решении линейных задач с гладкими начальными условиями, когда дисперсионные и диссипативные ошибки методов низкого порядка не позволяют достаточно точно моделировать коротковолновые возмущения. Проблемы у методов высокого порядка возникают при расчетах течений с сильными ударными волнами (разрывными решениями). В таких случаях более предпочтительным

является использование относительно простых схем, для которых негладкость решения не столь критична. Таким образом, для линейных гиперболических задач в основном используются схемы высоких порядков, а для нелинейных — низких.

В течение последних двух десятилетий активное развитие получил новый подход к решению уравнений гиперболического типа — балансно-характеристические методы. Такие методы объединяют в себе консервативные методы конечного объема [14; 15] и характеристические методы [16–18]. Обычно, вводятся два типа переменных: консервативные и потоковые [19]. Для консервативных переменных записываются сеточные законы сохранения, а потоковые переменные вычисляются с помощью линейной экстраполяции инвариантов Римана с учетом направления характеристик. Таким образом, и консервативная, и характеристическая природа гиперболических уравнений передается в рамках одного численного метода.

Одной из основных и наиболее широко используемых балансно-характеристических схем является предложенная В.М. Головизниным и А.А. Самарским схема КАБАРЕ [20]. Данная схема имеет ряд важных свойств: она обладает вторым порядком аппроксимации по пространству и времени, имеет минимальный вычислительный шаблон в одну пространственно-временную ячейку, минимальную численную вязкость, временную обратимость при отключенной монотонизации и относительно легко и идеально масштабируется на системы с распределенной памятью. Эти свойства позволяют эффективно использовать КАБАРЕ для решения нелинейных задач. С помощью нее уже были решены многие задачи для уравнений гиперболического типа, среди которых: линейные и нелинейные уравнения переноса [21; 22], уравнения мелкой воды [23; 24], задачи газовой и гидродинамики [25; 26], аэроакустики [27; 28], океанологии [29; 30]. Кроме того, схема была применена и к некоторым гиперболизированным уравнениям параболического типа [31]. Высокая точность и широкая сфера применения балансно-характеристических схем позволяет отнести их к классу алгоритмов вычислительной гидродинамики нового поколения [21].

Несмотря на последние успехи балансно-характеристических методов в решении задач вычислительной гидродинамики, все еще остается много направлений CFD (Computational Fluid Dynamics), к которым эти схемы до сих пор не были применены. Кроме того, некоторых улучшений требует и базовый алго-

ритм схемы (например, обработка звуковых точек, улучшение диссипативных и дисперсионных свойств, обобщение на подвижные сетки). В рамках данной работы схема КАБАРЕ была впервые применена для решения задач вибрационного горения (термоакустической неустойчивости) и задач о взаимодействии поток жидкости и газа с упругими телами (задачи сопряженной гидроупругости или FSI — Fluid-Structure Interaction). Для этого для схемы КАБАРЕ был построен обратимый по времени алгоритм обработки звуковых точек, построено дисперсионное улучшение схемы, а также обобщение на случай подвижных расчетных сеток для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных. Рассмотрим актуальность каждой из этих задач отдельно.

Звуковыми точками называются области решения нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа, в которых дозвуковое течение переходит в сверхзвуковое или наоборот. С математической точки зрения в эти точки либо не приходит недостаточно характеристик с инвариантами Римана, либо их приходит слишком много. Это приводит к тому, что многие методы, так или иначе использующие при построении численного алгоритма характеристическую природу уравнений, дают ошибочное решение в виде нефизичных ударных волн разрежения [32]. В иностранной литературе такие численные артефакты называются «sonic glitch» или «entropy glitch» и наблюдались, например, Вудвордом и Коллелой при моделировании обтекания ступеньки [33], а также другими авторами при, например, дифракции ударных волн [34] и сверхзвуковом обтекании цилиндра [35].

«Sonic glitch» возникает только при наличии трансзвуковых волн разрежения и представляет собой небольшой нефизический скачок или любую видимую ошибку вокруг звуковой точки, сгенерированную численными методами внутри трансзвуковой волны разрежения. Торо [36] заметил, что артефакты на звуковых точках возникают почти во всех противопотоковых (UpWind) схемах, применяемых к нелинейным гиперболическим законам сохранения. Список таких схем включает широко используемые метод Годунова [5], схему Энгквиста–Ошера [37], метод Роу [38] и схемы с расщеплением потока [39–41]. Данная проблема не обошла и балансно-характеристическую схему КАБАРЕ [23; 42].

В случае UpWind-схем все способы борьбы с проблемой звуковых точек сводятся к некоторой коррекции потоков. Такие дополнения в свои схемы вносили, например, ван Лир [43] и Роу [44]. Для балансно-характеристических схем

такие способы разрешения трансзвука не подходят, так как в них потоки вычисляются на основе характеристического подхода, и корректировать надо не их, а инварианты Римана. Для схемы КАБАРЕ было совершено несколько попыток построить универсальный алгоритм обработки звуковых точек. Так, в [23] был построен отдельный явный SP (Sonic Point) алгоритм для переноса «проблемных» инвариантов Римана, в [42] вместо переносов инвариантов на звуковых точках используется аналитическое решение задачи о распаде разрыва. Но эти SP -алгоритмы либо работают для очень узкого класса задач, либо опускают порядок аппроксимации схемы до первого. Актуальной является задача о построении универсального SP -алгоритма, сохраняющего основные свойства схемы КАБАРЕ: второй порядок аппроксимации, минимальную вязкость и временную обратимость при отключенной монотонизации.

Как уже упоминалось ранее, для решения линейных задач с гладкими начальными условиями обычно используются схемы высоких порядков. Так, для решения задач акустики с помощью линеаризованных уравнений газовой динамики применяются классические центральные разности высокого порядка аппроксимации (до 12го) [45], DRP (Dispersion-Relation-Preserving) схемы на больших шаблонах (7 - 15 узлов) [46; 47], а также компактные схемы высоких порядков [48]. В задачах, когда акустические возмущения возникают на каком-то существенно нелинейном нестационарном фоне, такие схемы уже не подходят, и надо пользоваться методами конечного объема [9; 10; 49] или разрывными методами Галеркина [50—52] повышенной точности.

Балансно-характеристическая схема КАБАРЕ уже достаточно долго успешно используется в нелинейных задачах аэроакустики [53; 54] в силу своей малодиссипативности и высокой степени масштабируемости. Однако иногда ее второго порядка аппроксимации недостаточно для моделирования акустических волн [55]. Кроме того, при малых числах Куранта схема обладает плохими дисперсионными свойствами [20], что бывает особенно критично при нелинейных расчетах, когда числа Куранта в отдельных ячейках сетки могут быть очень близки к нулю. Таким образом, задача повышения точности и улучшения дисперсионных свойств схемы КАБАРЕ является актуальной.

Одним из распространенных способов повышения порядка аппроксимации схем для уравнений гиперболического типа является расширение шаблона схемы с помощью аппроксимации ее так называемого дифференциального при-

ближения. Наибольшую популярность этот метод приобрел после публикаций Ю. И. Шокина и соавторов, где он был использован как для линейных, так и для нелинейных задач [56—59]. Для схемы КАБАРЕ для простейшего линейного уравнения переноса дисперсионное улучшение с помощью дифференциального приближения было построено в работе [60]. Получившаяся схема обладает четвертым порядком аппроксимации по времени и пространству, а также улучшенными дисперсионными свойствами во всей области устойчивости, включая окрестность нуля числа Куранта. Долгое время этот метод не использовался из-за того, что его не получалось распространить на более сложные нелинейные уравнения. Относительно недавно на основе этого метода было разработано дисперсионное улучшение схемы КАБАРЕ для нелинейных уравнений газовой динамики [55; 61]. Однако, использование этого метода фактически приводит к улучшению дисперсионных свойств только для наиболее быстро переносимого инварианта Римана. Целесообразно разработать модификацию схемы КАБАРЕ, улучшающую дисперсионные свойства для всех инвариантов Римана системы как в линейном, так и нелинейном случае.

При проектировании газовых турбин нового поколения в первую очередь преследуются две цели — повышение их энергетической эффективности и снижение выбросов NO_x (закиси азота). Большинство газовых турбин, производимых сегодня, имеют камеры сгорания класса DLE (Dry Low Emission) для соответствия нормам выбросов. Такие камеры работают в основном на предварительно перемешанных бедных смесях, в которых условия для развития термоакустической неустойчивости возникают гораздо чаще, чем в обычных камерах сгорания.

Термоакустическая неустойчивость (вибрационное горение) [62] является крайне нежелательным явлением, обусловленным взаимодействием акустического поля с процессом горения. Это взаимодействие может привести к самоподдерживающимся колебаниям большой амплитуды, которые сокращают эксплуатационный ресурс изделия и могут вызвать повреждение газовой турбины. Задача прогнозирования термоакустической неустойчивости на различных режимах работы газовой турбины на проектном уровне является крайне актуальной. Ее важность в будущем будет только возрастать в связи с неизбежным ужесточением норм на выбросы и повышением требований к экономичности.

Основным методом, используемым для исследования неустойчивости горения, в настоящее время является инженерный подход сетевых термоакустических моделей низкого порядка, аналогичный подходу к описанию электрических цепей [63—65]. Двумерные и трехмерные LES (Large Eddy Simulation) и DNS (Direct Numerical Simulation) модели в силу их затратности используются лишь для моделирования особо сложных участков турбин или непосредственно области горения газа [66—70], и их результаты впоследствии используются в более простых моделях.

При инженерном описании акустический тракт представляют в виде сети акустических элементов, которые соответствуют различным компонентам системы, например, устройствам подачи топлива и воздуха, горелке и пламени, камере сгорания, каналам охлаждения и т.д. Элементы в такой сети представляют собой четырехполюсники или шестиполусники (матрицы перехода), связывающие акустическое давление и акустические пульсации скорости (в случае шестиполусников еще и пульсации энтропии) на входе и выходе как функции частоты и амплитуды (в линейном случае только частоты). Для самых простых из этих элементов соответствующие функциональные выражения матриц перехода могут быть получены аналитически. Элементы сложной формы (например, участки конического расширения тракта) зачастую приходится разбивать на множество коротких участков постоянного радиуса, что сильно усложняет модель. Так делается, например, в широко используемом открытом пакете OSCILOS [71]. Кроме того, для анализа термоакустической неустойчивости требуется предварительный расчет стационарного распределения газодинамических параметров вдоль рассматриваемого тракта.

Наиболее тонким моментом при использовании сетевых термоакустических кодов является интеграция в модель процесса горения. Для этого на границе между элементами, где находится плоская область горения, задается функция отклика пламени на акустические воздействия. Для определения этой функции приходится использовать «тяжелые» CFD коды, основанные на LES алгоритмах или результаты натурных измерений. Теорию и примеры использования такого подхода можно найти, например, в публикациях [72—76]. При этом наличие неплоской области горения в тракте вызывает дополнительные трудности и требует использования более сложных моделей горения [77].

Альтернативой методу акустических сетей можно назвать метод анализа термоакустической неустойчивости камер сгорания, основанный на прямом решении нестационарной системы гиперболических уравнений газовой динамики в квазиодномерном приближении с помощью хорошо зарекомендовавшей себя бездиссипативной балансно-характеристической схемы КАБАРЕ. Такой подход позволяет учитывать геометрические детали, которые не могут быть представлены сетевыми моделями, и при этом не требует большого количества времени и ресурсов и может быть реализован на персональном компьютере. Использование схемы КАБАРЕ для решения поставленной задачи возможно благодаря ее бездиссипативности: неустойчивые гармоники не демпфируются схемной вязкостью и могут быть детектированы после их выделения из решения. Кроме того, в отличие от сетевых моделей, при использовании предлагаемого метода нет необходимости в расчете матриц перехода и функций отклика пламени, автоматически учитываются нелинейные эффекты.

Численное моделирование процессов взаимодействия потоков жидкости и газа с деформируемыми объектами (задачи FSI) начало активно развиваться около 2 десятилетий назад, когда вычислительные мощности выпускаемых процессоров позволили решать такие задачи. Сложность этих задач обусловлена одновременным учетом двух физических процессов: течения сжимаемой или несжимаемой жидкости в областях сложной формы и деформации объектов, погруженных в течение. При этом оба процесса влияют друг на друга: как течение влияет на деформацию объектов, так и сами объекты влияют на течение.

Основной областью применения задач сопряженной гидроупругости до сих пор являлись задачи гемодинамики [78], моделирование раскрытия парашютов [79] и задачи об обтекании воздушным потоком лопастей ветрогенераторов [80]. В последнее время актуальными становятся задачи FSI для атомной энергетики [81; 82]. Например, в [83] решается задача об обтекании плоского топливного элемента потоком теплоносителя, в [84] моделируется износ системы охлаждения атомного реактора.

Основные методы решения задач FSI делятся на 2 класса: монолитные (или бесшовные) методы [85] и слабосвязанные (loosely coupled) методы [86]. В монолитных методах для решения систем уравнений, описывающих течение жидкости и деформацию тел, используются схемы одного типа, что позволяет естественным образом моделировать границу раздела между жидкостью и

талами. Так, например, в [87] для обоих процессов используется единый МКЭ (метод конечных элементов), причем для описания деформаций используются уравнения в лагранжевых переменных, а для описания движения жидкости — в СЭЛ переменных. Второй подход предполагает последовательное использование схем разных типов для описания течения жидкости и деформации тел, включающее этап «сшивания» решения на подвижной границе. При этом для моделирования деформаций практически всегда используется МКЭ, а для моделирования течения жидкости могут использоваться как методы конечного объема [88; 89], так и метод частиц [90]. Распространено также и использование неконсервативных сеточно-характеристических методов [91].

Слабосвязанные методы являются более простыми с точки зрения реализации и отладки, но обладают рядом серьезных недостатков, связанных с обработкой границы между жидкостью и телами. Для того чтобы сделать шаг по времени для уравнений динамики жидкости, требуется знать положение и скорость границы раздела уже на следующем шаге. Чтобы избежать этой проблемы, граница раздела некоторым образом аппроксимируется: например, берется положение и скорость границы с предыдущего шага, что приводит к запаздыванию, либо вводится достаточно затратный итерационный процесс согласования граничных условий [92]. Известно, что использование таких аппроксимаций может приводить к возникновению неустойчивости [93; 94].

Монолитные методы позволяют получить физически более точное решение, так как обработка границы естественным образом входит в единый алгоритм расчета течения жидкости и деформации тела, но используются они редко в силу их сложности с точки зрения программирования. Стоит также отметить, что практически все используемые на данный момент монолитные методы принадлежат к классу МКЭ и являются неявными методами. Разработка робастного явного монолитного (бесшовного) метода и его эффективное масштабирование являются крайне актуальной задачей. Балансно-характеристическая схема КАБАРЕ по всем параметрам подходит для решения данной задачи.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. В.М. Головизнину, а также д.ф.-м.н. С.И. Мухину, д.ф.-м.н. В.Н. Семенову, к.ф.-м.н. А.В. Соловьеву, Павлу А. и Петру А. Майоровым, к.ф.-м.н. М.А. Ря-

занову и всему коллективу кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ за плодотворное обсуждение представленных в диссертации результатов.

Целью данной работы является математическое моделирование задач взаимодействия потоков жидкости и газа с упругими телами и вибрационного горения с помощью модифицированной балансно-характеристической схемы КАБАРЕ с добавлением нового алгоритма обработки звуковых точек, введением антидисперсионных поправок и обобщением схемы на подвижные сетки для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать проблему обработки звуковых точек в балансно-характеристических методах. Разработать на основе характеристического подхода обратимый по времени алгоритм обработки звуковых точек для систем гиперболических уравнений с аналитическими или приближенными выражениями для инвариантов Римана. Провести вычислительные эксперименты для трансзвуковых течений, описываемых уравнениями мелкой воды.
2. Изучить диссипативные и дисперсионные свойства стандартной схемы КАБАРЕ и схемы КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для одномерного уравнения переноса. Разработать схему КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем линейных и нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Провести вычислительные эксперименты на линейных и нелинейных системах уравнений.
3. Предложить квазиодномерные модели акустических трактов и модели горения, позволяющие воспроизвести эффект термоакустической неустойчивости. Разработать балансно-характеристический метод для моделирования термоакустической неустойчивости в акустических трактах. Провести математическое моделирование задачи о трубе Рийке и провести сравнение с результатами по сетевой модели OSCILOS.
4. Рассмотреть двумерные уравнения газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и уравнения динамической упругости в лагранжевых переменных. Разработать балансно-характеристический метод решения этих уравнений с обратимым по времени алго-

ритмом передвижения узлов сетки и бесшовной обработкой границы между газом и упругим телом. Провести вычислительные эксперименты на одномерных и двумерных задачах взаимодействия упругих тел, упругих тел и газа, а также на задачах со свободной границей.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Локально- неявный обратимый по времени характеристический метод обработки звуковых точек для решения систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, для которых используются аналитические или приближенные выражения для инвариантов Римана.
2. Явный балансно-характеристический метод с улучшенными по сравнению со схемой КАБАРЕ дисперсионными свойствами для решения систем линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа.
3. Квазиодномерная математическая модель для описания процессов развития термоакустической неустойчивости с учетом различных моделей горения, явный балансно-характеристический метод для решения уравнений данной модели и его сравнение с классическими методами термоакустических цепей.
4. Бесшовный явный балансно-характеристический метод в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для уравнений идеального газа и в лагранжевых переменных для уравнений динамической упругости для решения задач сопряженной гидроупругости.
5. Комплекс программ для моделирования задач термоакустики и взаимодействия газовых потоков с упругими телами с использованием модифицированных балансно-характеристических методов. Результаты численных экспериментов, подтверждающие возможность моделирования трансзвуковых течений и наличие улучшенных дисперсионных свойств. Результаты математического моделирования возникновения термоакустической неустойчивости в трубе Рийке. Результаты численных экспериментов, подтверждающие возможность качественного и устойчивого моделирования задач взаимодействия газовых потоков с упругими телами на подвижных четырехугольных сетках.

Научная новизна:

1. Впервые предложен локально- неявный алгоритм обработки звуковых точек второго порядка для балансно-характеристических методов для расчета трансзвуковых течений и доказана его обратимость по времени.
2. Впервые предложено дисперсионное улучшение схемы КАБАРЕ для линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа, позволяющее повысить точность переноса всех инвариантов Римана системы.
3. Впервые построена балансно-характеристическая схема КАБАРЕ с учетом моделей горения с запаздыванием и использована для моделирования процессов развития термоакустической неустойчивости в акустических трактах с плоскими областями горения.
4. Впервые построена схема КАБАРЕ для уравнений в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных с обратимым по времени алгоритмом передвижения узлов сетки и применена для моделирования задач сопряженной гидроупругости.

Научная и практическая значимость работы заключается в возможности дальнейшего использования разработанных балансно-характеристических методов для решения различных дозвуковых и сверхзвуковых задач аэроакустики, проектировании газовых турбин нового поколения и задач атомной энергетики, связанных с обтеканием деформируемых элементов атомных реакторов.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается достаточным количеством проведенных тестовых и модельных расчетов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах.

1. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2019» (Москва, Россия, 15-25 апреля 2019).
2. IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'19) (Москва, Россия, 19-21 июня 2019).
3. Международная конференция «Многомасштабные Методы и Высокопроизводительные Научные Вычисления» (Сочи, Россия, 8-13 сентября 2020).

4. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2020» (Москва, Россия, 21 октября - 2 ноября 2020).
5. Научная конференция «Тихоновские чтения 2020» (Москва, Россия, 26-31 октября 2020).
6. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, Россия, 20-29 апреля 2021).
7. XIX Всероссийская научная конференция-школа «Современные проблемы математического моделирования» (Пос. Дюрсо, Краснодарский край, Россия, 13-18 сентября 2021).
8. VIII Всероссийская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике» (Геленджик, Краснодарский край, Россия, 20-25 сентября 2021).
9. Научная конференция «Тихоновские чтения 2021» (Москва, Россия, 25-30 октября 2021).
10. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2022» (Москва, Россия, 14-22 апреля 2022).
11. V Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'22) (Москва, Россия, 27-30 июня 2022).
12. Научно-исследовательский семинар кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством д.ф.-м.н., проф. В.М. Головизнина. В работах, написанных в соавторстве, вклад автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов, разработки комплекса программ и проведении расчетов является определяющим.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 печатных изданиях, 6 из которых изданы в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Список опубликованных работ приведён в конце диссертационной работы.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 182 страницы с 54 рисунками и 7 таблицами. Список литературы содержит 124 наименования.

Цель **первой главы** состоит в том, чтобы познакомить читателя с балансно-характеристическими методами для решения уравнений в частных производных гиперболического типа и обозначить их основные проблемные места. В главе вводятся основные определения для одномерных многомерных систем уравнений гиперболического типа. Затем приводится схема КАБАРЕ в ее первоначальном трехслойном виде и показываются ее основные свойства. Демонстрируется обобщение схемы КАБАРЕ в виде трехфазного алгоритма с двумя классами переменных: потоковыми и консервативными. Для трехфазного вида схемы приводятся уравнения и основные свойства для одномерных линейных, одномерных нелинейных и многомерных нелинейных систем уравнений. В конце главы рассматриваются основные проблемы, связанные с использованием схемы: необходимость введения отдельного алгоритма обработки звуковых точек для расчетов трансзвуковых течений, плохие дисперсионные свойства схемы при малых числах Куранта, ограниченность применения схемы только к задачам на фиксированных эйлеровых сетках.

Во **второй главе** решается проблема обработки звуковых точек в схеме КАБАРЕ. На примере уравнений мелкой воды демонстрируются результаты расчетов с неудачными SP-алгоритмами, приводящими к возникновению нефизических ударных волн разрежения. Отдельно для случаев систем уравнений с известными и неизвестными аналитическими выражениями для инвариантов Римана вводится локально-неявный обратимый по времени SP-алгоритм второго порядка аппроксимации, построенный на основе характеристического подхода. Доказывается лемма о временной обратимости некоторого класса балансно-характеристических методов для трансзвуковых течений. В конце главы приводится серия вычислительных экспериментов для задач о распаде разрыва для уравнений мелкой воды. Результаты по построенному SP-алгоритму сравниваются с результатами по предложенному ранее явному SP-алгоритму [23] и аналитическими решениями на различных задачах Римана, включая трансзвуковые тесты Торо [95]. Проведенные расчеты показывают, что предложенный алгоритм позволяет получить качественные результаты для различных трансзвуковых задач, включая задачи с образованием сухого дна.

В **третьей главе** исследуется возможность улучшения дисперсионных свойств схемы КАБАРЕ для линейных и нелинейных задач. Для трехслойного вида схемы для линейного уравнения переноса приводится введенное ранее дисперсионное улучшение [60], построенное с помощью дифференциального приближения [56] исходной схемы. Предлагается дисперсионное улучшение для трехфазного вида схемы для линейного уравнения переноса, обладающее четвертым порядком аппроксимации. Затем данное улучшение обобщается сначала на случай систем линейных уравнений гиперболического типа, а затем и на случай нелинейных систем. В конце главы приводятся результаты численных экспериментов для различных задач о распространении акустических волн для систем линейных и нелинейных (уравнения мелкой воды) гиперболических уравнений. Экспериментально показывается, что в линейном случае улучшенная схема обладает четвертым порядком сходимости, а в нелинейном — вторым. Проводится сравнение с альтернативной схемой КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами [55], которое показывает, что метод [55] улучшает дисперсионные характеристики только для наиболее быстро переносимого инварианта Римана системы, а предложенный в работе метод — сразу для всех инвариантов.

В **четвертой главе** исследуется задача численного моделирования термоакустической неустойчивости в камерах сгорания газовых турбин. Вводится квазиодномерная модель акустического тракта на основе уравнений динамики идеального газа, а также различные модели горения с запаздыванием, обеспечивающие возникновение эффекта вибрационного горения. Для данной квазиодномерной модели строится явный балансно-характеристический метод ее решения, учитывающий запаздывание горения. Отдельное внимание уделяется алгоритму задания начальных и граничных условий в акустическом тракте, а также алгоритму выделения неустойчивой моды. В конце главы приводятся результаты численных экспериментов для задачи о трубе Рийке [96]. Тестирование проводится как для устойчивых, так и для неустойчивых задач с различными положениями плоской области горения и перепадами температуры. Результаты сравниваются с результатами по открытому пакету сетевых моделей OSCILOS [71], а также с некоторыми аналитическими решениями. Предложенный балансно-характеристический метод позволяет получить более точ-

ное решение, чем пакет OSCILOS, при этом имеет сравнимую вычислительную сложность.

В **пятой главе** проводится численное моделирование задач сопряженной гидроупругости. Рассматриваются двумерные системы уравнений идеальной газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и динамической упругости в лагранжевых переменных. Строится явный монолитный (бесшовный) балансно-характеристический метод решения этих задач на подвижных сетках с обратимым по времени алгоритмом передвижения узлов сетки. Дополнительно для решения задач о неустойчивом передвижении границы вводится искусственная сила поверхностного натяжения. Приводятся результаты численных экспериментов для различных одномерных и двумерных задач, включающих: соударение упругих тел, распространение акустических колебаний из газа в упругое тело, воздушный удар об упругое тело, колебания упругой балки в безвоздушном и воздушном пространстве, развитие неустойчивости Рэля-Тейлора на свободной границе газа в поле сил тяжести. Предложенный метод дает качественно хорошие результаты, согласующиеся с теорией.

Глава 1. Схема КАБАРЕ для систем уравнений гиперболического типа

1.1 Системы одномерных дифференциальных уравнений гиперболического типа

Рассмотрим систему одномерных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, x, t), \quad (1.1)$$

где $x \in [a, b]$ — пространственная координата, $t \in [0, T]$ — время, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных, $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ — вектор-функция потоков, $\mathbf{f}(\mathbf{u}, x, t)$ — вектор правой части. Систему (1.1) будем называть **консервативной формой** уравнений, так как эти уравнения чаще всего представляют собой систему законов сохранения (массы, импульса, энергии и т.д.).

Раздифференцируем в (1.1) производную по пространству:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, x, t), \quad (1.2)$$

где $A(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{F}(\mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}$ — якобиан функции \mathbf{F} . Систему (1.2) назовем **простой формой** системы уравнений (1.1). Система уравнений (1.1) называется **гиперболической**, если у матрицы A в ее простой форме (1.2) все собственные значения действительные и существует полный базис из собственных векторов [97]. Другими словами, матрица A должна быть диагонализуемой [98]:

$$A = L^{-1} \Lambda L, \quad (1.3)$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ — диагональная матрица из собственных значений $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ матрицы A , L — матрица из левых собственных векторов \mathbf{l}_i матрицы A . Так как матрица A зависит, вообще говоря, от всех неизвестных \mathbf{u} , то она может быть не всегда диагонализуемой. Если A диагонализуема для $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, то система (1.1) называется **безусловно гиперболической**. Если же при каких-то значе-

ниях \mathbf{u} матрица A перестает быть диагонализуемой (как, например, в системе уравнений двухслойной мелкой воды [99]), то система (1.1) называется **условно гиперболической**. В дальнейшем будем рассматривать только безусловно гиперболические системы законов сохранения (1.1).

Домножим простую форму уравнений (1.2) слева на матрицу из левых собственных векторов L :

$$L \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda L \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = L \mathbf{f}(\mathbf{u}, x, t). \quad (1.4)$$

Система (1.4) называется **характеристической формой** системы (1.1). Консервативная форма (1.1) и характеристическая форма (1.4) играют ключевую роль при построении балансно-характеристических методов: с помощью консервативной формы строятся балансные фазы алгоритмов, а с помощью характеристической — характеристические фазы.

В случае, когда матрицу L удастся занести под производные в (1.4), можно получить систему нелинейных уравнений переноса для инвариантов Римана:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} = L \mathbf{f}(\mathbf{R}, x, t), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{R} : d\mathbf{R} = L d\mathbf{u}$ — вектор так называемых **инвариантов Римана** системы (1.1). Инварианты Римана постоянны вдоль характеристик системы при нулевой правой части $\mathbf{f} = 0$:

$$R_i = \text{const}, \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_i(\mathbf{u}, x, t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.6)$$

Несмотря на то, что в общем случае, когда $\mathbf{f} \neq 0$, равенства (1.6) не выполняются, величины R_i все равно принято называть инвариантами Римана.

Уравнения системы (1.5) в общем случае не являются независимыми из-за того, что Λ и \mathbf{f} зависят от \mathbf{u} . Однако, для простейшего случая линейной однородной системы (1.1) (когда $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ — линейные функции, $\mathbf{f} = 0$) система (1.5) распадается на n независимых простейших уравнений переноса:

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial R_i}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.7)$$

где инварианты Римана $R_i = \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{u}$.

Отметим, что любая гиперболическая система уравнений (1.1) обладает полным набором инвариантов Римана (1.6), вне зависимости от того, получается ли занести матрицу L под производные в (1.4) или нет. Если получается, то известны аналитические выражения для R_i , которыми можно пользоваться при построении балансно-характеристических алгоритмов, и мы будем называть систему (1.1) **системой с аналитическими инвариантами Римана**. Если же занести L под производные не получается, то выражения для инвариантов Римана R_i приходится некоторым образом аппроксимировать. В таком случае мы будем называть систему (1.1) **системой с локальными инвариантами Римана**.

Все перечисленные выше определения [97] были даны для случая системы законов сохранения (1.1), записанных в эйлеровых [100] переменных. Они будут справедливы и для случая смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, когда частицы рассматриваемой среды движутся с некоторой скоростью v (в общем случае зависящей от решения \mathbf{u}):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}, x, t), \quad \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2 Системы многомерных дифференциальных уравнений гиперболического типа

Рассмотрим систему многомерных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка в виде законов сохранения:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{u})}{\partial x_i} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t), \quad (1.9)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ — вектор пространственных координат, $t \in [0, T]$ — время, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных, $\mathbf{F}_i(\mathbf{u})$ — вектор-функция потоков по направлению x_i , $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ — вектор правой части. По аналогии с одномерным случаем систему (1.1) будем называть **консервативной формой** уравнений.

Выделим некоторое произвольное направление \mathbf{n} и перепишем систему (1.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{n}}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{f}_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t), \\ \mathbf{f}_{\mathbf{n}} &:= \mathbf{f} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{u})}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{n}}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\mathbf{F}_{\mathbf{n}}$ — вектор-функция потока по направлению \mathbf{n} , являющаяся некоторой линейной комбинацией исходных потоков \mathbf{F}_i . Раздифференцируем в (1.10) производную по направлению \mathbf{n} :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{f}_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t), \quad (1.11)$$

где $A_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{F}_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}$ — якобиан функции $\mathbf{F}_{\mathbf{n}}$. Систему (1.11) назовем **простой формой по направлению \mathbf{n}** системы уравнений (1.9). Система уравнений (1.9) называется **гиперболической** [97], если для любого произвольного направления \mathbf{n} матрица $A_{\mathbf{n}}$ диагонализуема [97].

Так как вид системы (1.11) совпадает с видом простой формы в одномерном случае (1.2), то по аналогии с (1.4) и (1.5) вводятся понятия **характеристической формы по направлению \mathbf{n}** и **инвариантов Римана по направлению \mathbf{n}** для системы законов сохранения (1.9).

Аналогичные определения можно ввести и для системы законов сохранения (1.9) в смешанных эйлерово-лагранжевых координатах, когда частицы рассматриваемой среды движутся с некоторой скоростью \mathbf{v} (в общем случае зависящей от решения \mathbf{u}):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{u})}{\partial x_i} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t), \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.3 Схема КАБАРЕ для линейного одномерного уравнения переноса

Впервые схема КАБАРЕ была предложена для простейшего линейного одномерного уравнения переноса [20]. Ее первая версия была трехслойной и опиралась лишь на консервативную форму гиперболического уравнения, никак не используя свойства, связанные с характеристиками. Трехслойный вариант схемы обладал рядом серьезных недостатков: авторам не удавалось полноценно обобщить данную схему на нелинейный случай, а также полностью избавиться от проблем, связанных с немонотонностью схемы [101]. Для решения этих проблем была придумана альтернативная трехфазная (балансно-характеристическая) форма схемы, учитывающая и консервативную, и характеристическую форму уравнения переноса. Именно для этой формы удалось построить обобщение на нелинейный случай и решить проблемы с монотонностью.

В этом разделе представлена схема КАБАРЕ в ее изначальном трехслойном виде, а также в более универсальном трехфазном виде. Приведены основные свойства алгоритма, его достоинства и недостатки, и отмечены части алгоритма, требующие улучшений.

1.3.1 Линейное одномерное уравнение переноса

Линейное одномерное уравнение переноса является простейшим представителем семейства уравнений гиперболического типа (1.1) и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const}, \quad (1.13)$$

где $x \in [a, b]$ — пространственная переменная, $t \in [0, T]$ — время, $u \in \mathbb{R}$ — переносимая величина, c — скорость переноса.

Консервативная, простая и характеристическая форма уравнения (1.13) совпадают. Уравнение переноса является гиперболическим и обладает единственным собственным значением $\lambda = c$, которому соответствует единственный инвариант Римана $R = u$.

Уравнение (1.13) легко решается аналитически путем введения новой переменной $\xi = x - ct$ и интегрирования по ней. Решением уравнения (1.13) является

$$u(x,t) = f(x - ct), \quad (1.14)$$

где f — произвольная дифференцируемая функция одного аргумента. Требование дифференцируемости можно ослабить, если рассматривать и слабые решения уравнения (1.13) [102].

С одной стороны, решение (1.14) говорит о том, что инвариант $R = u$ сохраняет свое значение вдоль характеристик $x - ct = \text{const}$. С другой стороны, уравнение (1.13) при интегрировании по отрезку $[a,b]$ представляет собой закон сохранения величины u :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u \, dx = F(a,t) - F(b,t), \quad (1.15)$$

где $F(x,t) = cu$ — поток величины u . В этом заключается двойственная (балансная и характеристическая) природа уравнения (1.13). При построении качественной разностной схемы надо учитывать оба этих свойства.

Для решения задач для простейшего уравнения переноса уравнение (1.13) надо дополнить начальными и граничными условиями. Начальное условие задается стандартным образом в виде функции u на начальный момент времени:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [a,b]. \quad (1.16)$$

Мы будем рассматривать граничные условия 2 типов: условия первого рода и периодические условия. Граничное условие первого рода надо задать только на одной из границ области, в зависимости от знака скорости переноса c :

$$\begin{aligned} u(a,t) &= \alpha_1(t), \quad t \in [0,T], \quad \text{если } c > 0, \\ u(b,t) &= \alpha_2(t), \quad t \in [0,T], \quad \text{если } c < 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Периодическое граничное условие означает равенство переменной u на границах рассматриваемой области:

$$u(a,t) = u(b,t), \quad t \in [0,T]. \quad (1.18)$$

Задачи с периодическими граничными условиями (1.18) удобны тем, что на них можно исследовать процесс переноса начального профиля (1.16) на большие расстояния, проводя расчеты лишь на небольшой области $x \in [a, b]$.

Отметим еще одно важное свойство уравнения переноса (1.13): так называемую обратимость по времени. Это свойство заключается в том, что при замене $t' = -t$, $c' = -c$ (т.е. при обращении времени и перевороте скорости переноса) уравнение (1.13) переходит в само себя. Обратимость по времени можно трактовать следующим образом: если по имеющемуся профилю $u(x, t)$ найти профиль через промежуток по времени Δt , затем перевернуть знак скорости $c' = -c$ и найти профиль через еще один такой же промежуток по времени, то получившийся профиль совпадет с изначальным $u(x, t + 2\Delta t) = u(x, t)$. Этим свойством в той или иной мере обладают все однородные законы сохранения гиперболического типа (1.1). Существует очень мало разностных схем для уравнения (1.13), которые бы повторяли это свойство в разностном случае.

1.3.2 Трехслойная схема КАБАРЕ для линейного одномерного уравнения переноса

Пространственно-временная сетка и сеточные функции

Рассмотрим задачу для уравнения переноса (1.13) на отрезке $x \in [a, b]$ и введем следующую вообще говоря неравномерную сетку по пространству:

$$\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \mid x_i - x_{i-1} = h_{i-1/2}\},$$

где $h_{i-1/2}$ — шаги сетки по пространству. Введем также равномерную сетку по времени:

$$\omega_\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{K-1} < t_K = T \mid t_n - t_{n-1} = \tau = \text{const}\},$$

где τ — шаг сетки по времени.

На получившейся пространственно-временной сетке $\omega_h \times \omega_\tau$ введем сеточные функции $\varphi_i^n \approx \varphi(x_i, t_n)$. Таким образом, сеточные функции задаются в узлах рассматриваемой сетки. Пространство между двумя узлами сетки $[x_{i-1}, x_i]$ будем называть ячейкой сетки.

Основное уравнение схемы

Уравнение для нахождения решения на слое по времени $n + 1$ зависит от знака скорости переноса c и имеет следующий вид (см. шаблон схемы на рис. 1.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} \right) + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} &= 0, \quad \text{если } c > 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\tau} + \frac{u_{i+2}^n - u_{i+2}^{n-1}}{\tau} \right) + c \frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{h_{i+3/2}} &= 0, \quad \text{если } c < 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В таком виде схема КАБАРЕ была впервые представлена в работе [20]. Отметим, что схема (1.19) совпадает со схемой Upwind LeapFrog [103], полученной А. Айзерлисом за несколько лет до публикации [20].

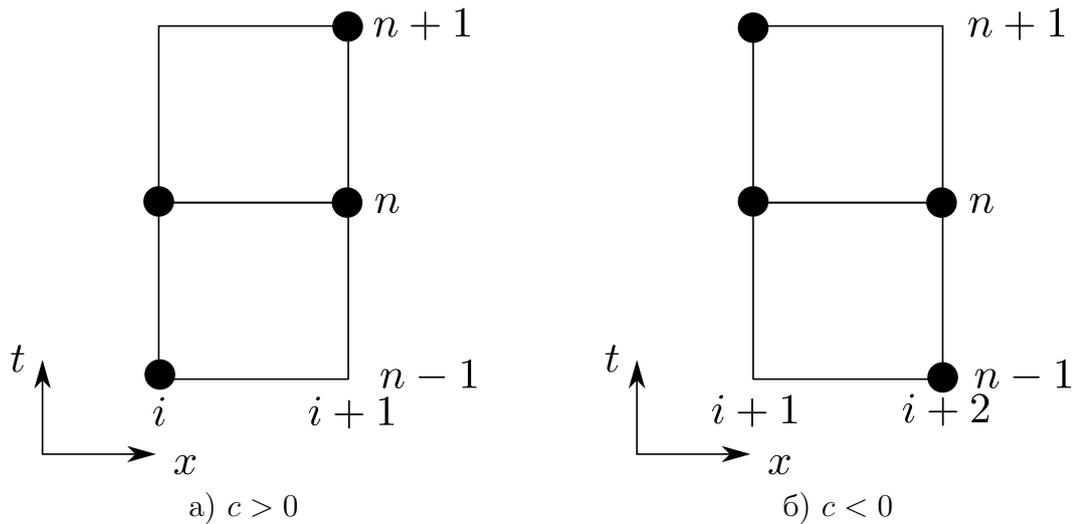


Рисунок 1.1 — Шаблон трехслойной схемы КАБАРЕ (1.19)

Основные свойства трехслойной схемы КАБАРЕ

Схема (1.19) аппроксимирует закон сохранения (1.13) со вторым порядком по времени и пространству. Это можно показать, подставив в уравнение (1.19) аналитическое решение уравнения переноса (1.13) и разложив функцию $u(x, t)$ в ряд Тейлора возле точки $(x_{i+1/2}, t_n)$, где $x_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1})$ — координата центра расчетной ячейки. Также схема является консервативной, так как она аппроксимирует и интегральную форму закона сохранения (1.15).

Так как схема (1.19) имеет второй порядок аппроксимации, то, согласно теореме Годунова [5], она является немонотонной. Действительно, при расчетах переноса разрывного начального профиля (1.16) решение получается немонотонным [104], и схема нуждается в некоторых процедурах коррекции, которые бы позволяли сохранить монотонность решения. Некоторые способы такой коррекции были предложены в работе [101], но получить универсальный способ, позволяющий сохранить и консервативность схемы, так и не удалось.

Одним из основных способов исследования разностных схем для простейшего уравнения переноса является анализ их диссипативных и дисперсионных свойств. Этот процесс аналогичен известному анализу фон Неймана [105] и подробно описан в пособии [104]. Подставим в схему (1.19) для равномерной пространственной сетки с шагом h решение в виде бегущей волны:

$$u_i^n = A \cdot q^n \cdot e^{-Ikih}, \quad (1.20)$$

где q — множитель перехода на следующий временной слой, k — волновое число, I — мнимая единица. Тогда, например, для схемы при $c > 0$ получится следующее так называемое характеристическое уравнение:

$$q^2 - q(2r - 1)(e^{Ikh} - 1) - e^{Ikh} = 0, \quad (1.21)$$

где $r = CFL = c\tau/h$ — число Куранта-Фридрихса-Леви, которое мы в дальнейшем будем кратко называть числом Куранта. Уравнение (1.21) имеет 2 корня $q_1(r, kh)$ и $q_2(r, kh)$, которые зависят от числа Куранта $r \in [0, +\infty]$ и приведенного волнового числа $kh \in [-\pi, \pi]$.

Поверхности $z = |q_m(r, kh)|$ называются **диссипативными поверхностями** разностной схемы и показывают степень «проседания» профиля при переходе от одного слоя по времени на другой. Для того чтобы схема была устойчивой, необходимо (всегда) и достаточно (только в линейном случае), чтобы диссипативные поверхности всех корней характеристического уравнения были не выше единицы: $|q_m(r, kh)| \leq 1$. Для трехслойной схемы КАБАРЕ диссипативные поверхности обоих корней удовлетворяют этому условию при $r \leq 1$. Таким образом, схема (1.19) устойчива при $CFL \leq 1$. Обе ее диссипативные поверхности для диапазона чисел Куранта $CFL \in [0, 1]$ представлены на рис. 1.2.

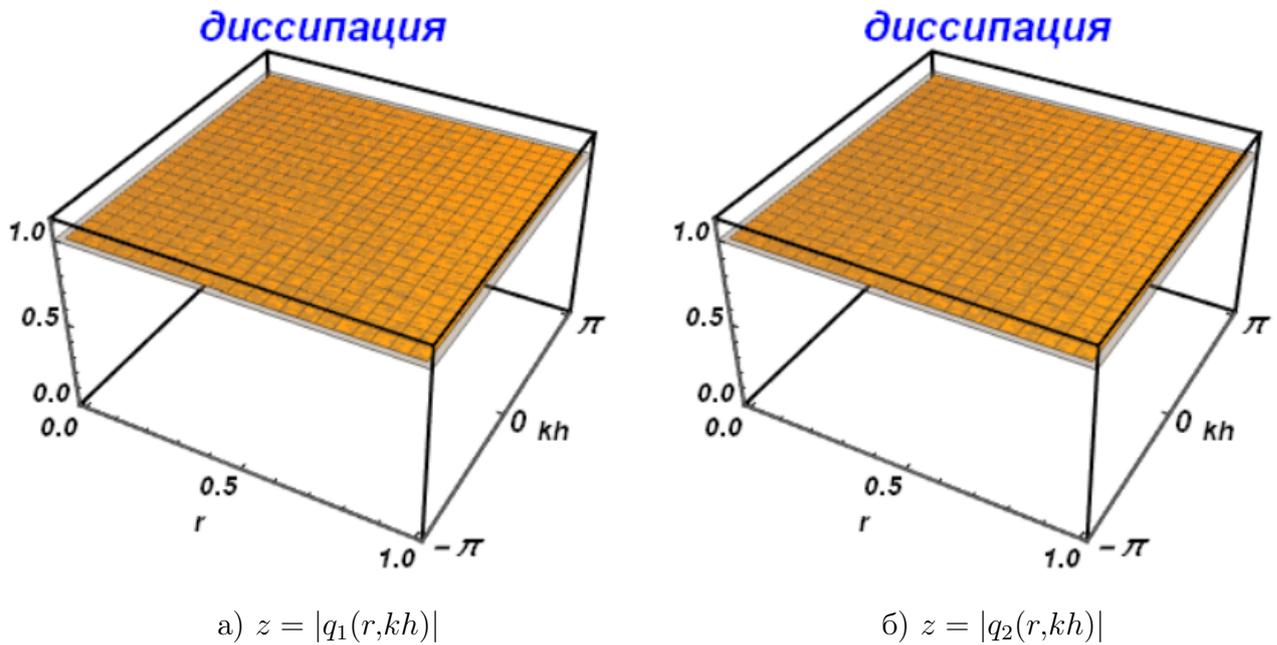


Рисунок 1.2 — Диссипативные поверхности трехслойной схемы КАБАРЕ (1.19)

В указанном промежутке чисел Куранта обе поверхности в точности равны единице, что говорит о **бездиссипативности** схемы КАБАРЕ. Свойство бездиссипативности говорит о том, что бегущие волны (1.20) не меняют своей амплитуды в процессе всего расчета. Кроме того, бездиссипативность означает и временную обратимость разностной схемы. В главе 3 будет дополнительно показано, что для временной обратимости шаблон разностной схемы должен удовлетворять некоторым особым условиям. Шаблон трехслойной схемы КАБАРЕ этим условиям удовлетворяет.

Поверхности $z = \gamma_m(r, kh) = \arctan(\operatorname{Re} q_m / \operatorname{Im} q_m) / (r \cdot kh)$ называются **дисперсионными поверхностями** разностной схемы и показывают отношение приведенных фазовых скоростей разностной и аналитической бегущей волны. При этом только одна из двух дисперсионных поверхностей трехслойной схемы

является «реальной» и передает это отношение, вторая же является «паразитной» и особой информации не несет. Если «реальная» дисперсионная поверхность меньше единицы, то разностное решение отстает от аналитического, и дисперсию называют **нормальной**. Если дисперсионная поверхность больше единицы, то разностное решение опережает аналитическое, и дисперсию называют **аномальной**. Дисперсионные поверхности трехслойной схемы КАБАРЕ для диапазона устойчивости $CFL \in [0,1]$ представлены на рис. 1.3.

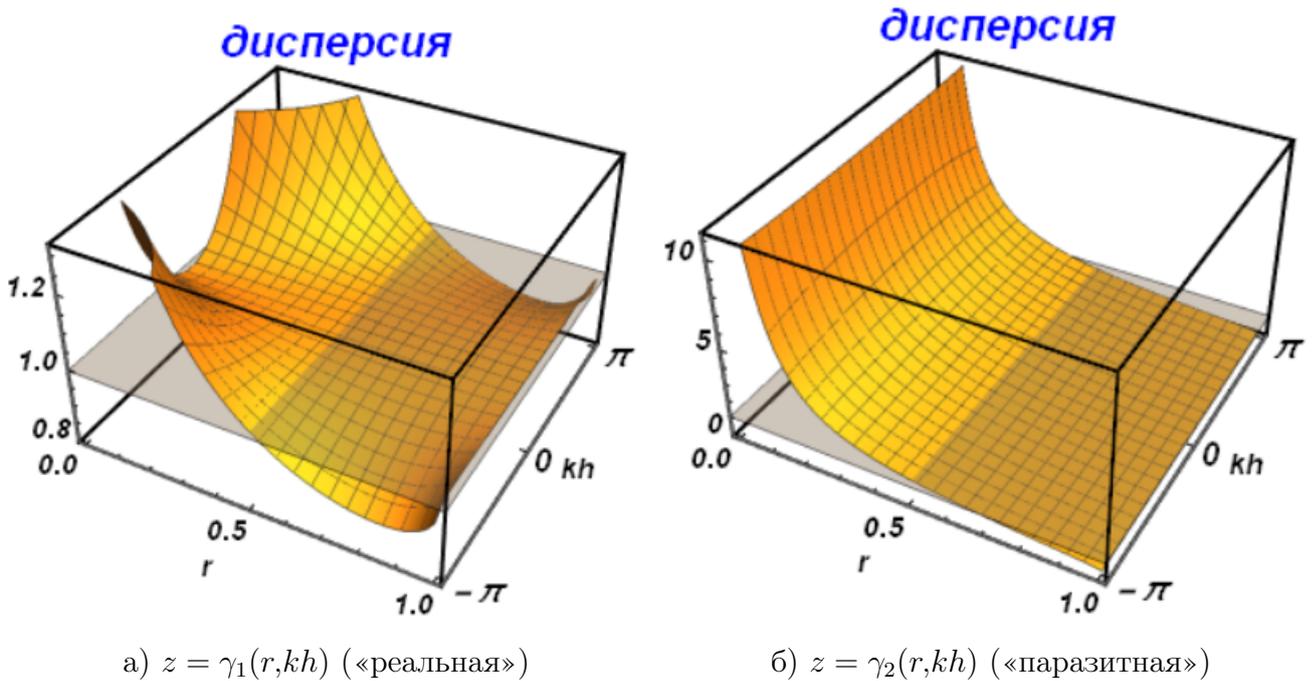


Рисунок 1.3 — Дисперсионные поверхности трехслойной схемы КАБАРЕ (1.19)

«Реальная» дисперсионная поверхность схемы КАБАРЕ позволяет заключить, что при числах Куранта $CFL \in [0, 0.5)$ схема обладает аномальной дисперсией, а при $CFL \in (0.5, 1)$ — нормальной. При этом на линиях $CFL = 0.5$ и $CFL = 1$ и диссипативные, и дисперсионные поверхности равны единице, что говорит о том, что при этих значениях числа Куранта схема дает точное решение. Эти линии называют каналами высокой точности, и все расчеты желательно вести именно при числах Куранта, близких к ним. Отметим также, что в отличие от большинства разностных схем для уравнения переноса, схема КАБАРЕ не только не дает точное решение при $CFL = 0$, но еще и имеет там сингулярность (дисперсионная поверхность при $CFL \rightarrow 0$ стремится к бесконечности). Этот факт в свое время побудил А. Айзерлиса сделать вывод, что данная схема никогда не будет применима для решения реальных прикладных задач. В целом для трехслойной версии схемы КАБАРЕ это оказалось правдой.

Отметим также и типичную проблему трехслойных схем — необходимость задавать каким-то образом решение на момент времени $t = t_1$ для начала счета по трехслойным формулам (1.19). Для этого, вообще говоря, надо делать шаг со слоя 0 на слой 1 по некоторой другой двухслойной схеме, что может привести к серьезной потере точности.

1.3.3 Трехфазаная схема КАБАРЕ для линейного одномерного уравнения переноса

Как уже говорилось ранее, трехслойную схему КАБАРЕ (1.19) не удалось эффективно обобщить на случай систем нелинейных уравнений гиперболического типа. В связи с этим схема КАБАРЕ была перестроена в трехфазном (балансно-характеристическом) виде, в котором отдельные части алгоритма отвечают за аппроксимацию консервативных (1.1) и характеристических (1.4) форм рассматриваемой системы уравнений. В этом разделе приведена схема КАБАРЕ в таком виде для простейшего уравнения переноса (1.13), которая впервые была предложена в работе [19].

Пространственно-временная сетка и сеточные функции

Рассмотрим задачу для уравнения переноса (1.13) на отрезке $x \in [a, b]$ и введем следующую вообще говоря неравномерную сетку по пространству:

$$\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \mid x_i - x_{i-1} = h_{i-1/2}\},$$

где $h_{i-1/2}$ — шаги сетки по пространству. Дополнительно введем сетку, состоящую из центров расчетных ячеек:

$$\omega'_h = \{x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N-3/2} < x_{N-1/2} \mid x_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1})\}.$$

Введем также уже в общем случае неравномерную сетку по времени:

$$\omega_\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{K-1} < t_K = T \mid t_{n+1} - t_n = \tau_n\},$$

где τ_n — шаги сетки по времени. Дополнительно введем сетку из серединных слоев по времени:

$$\omega'_\tau = \{t_{1/2} < t_{3/2} < \dots < t_{K-3/2} < t_{K-1/2} \mid t_{n+1/2} = 0.5(t_n + t_{n+1})\}.$$

В пространстве $\omega_h \times \omega_\tau$ введем сеточные функции $\varphi_i^n \approx \varphi(x_i, t_n)$, которые будем называть **потокowymi переменными**. В пространстве $\omega'_h \times (\omega_\tau \cup \omega'_\tau)$ введем сеточные функции $\varphi_{i+1/2}^n \approx \varphi(x_{i+1/2}, t_n)$ и $\varphi_{i+1/2}^{n+1/2} \approx \varphi(x_{i+1/2}, t_{n+1/2})$, которые будем называть **консервативными переменными**. Таким образом, потокowe переменные заданы во всех узлах пространственно временной сетки, а консервативные — в серединах расчетных ячеек на целых и полуцелых слоях по времени. Введение полуцелых слоев по времени связаны с желанием перейти от трехслойной схемы к двухслойной с промежуточным временным слоем.

Для упрощения записи уравнений схем иногда будем использовать следующие обозначения для индексов:

$$i \longleftrightarrow L, \quad i + 1 \longleftrightarrow R, \quad i + 1/2 \longleftrightarrow c.$$

Основные уравнения схемы

Алгоритм получения решения на слое по времени $n + 1$ по решению на слое n разбит на три отдельные фазы, каждая из которых аппроксимирует консервативную или характеристическую фазу уравнений.

Фаза 1 (консервативная) аппроксимирует консервативную форму уравнения (1.13) и задает способ явного вычисления консервативной переменной на промежуточном слое $u_c^{n+1/2}$ по данным на слое n :

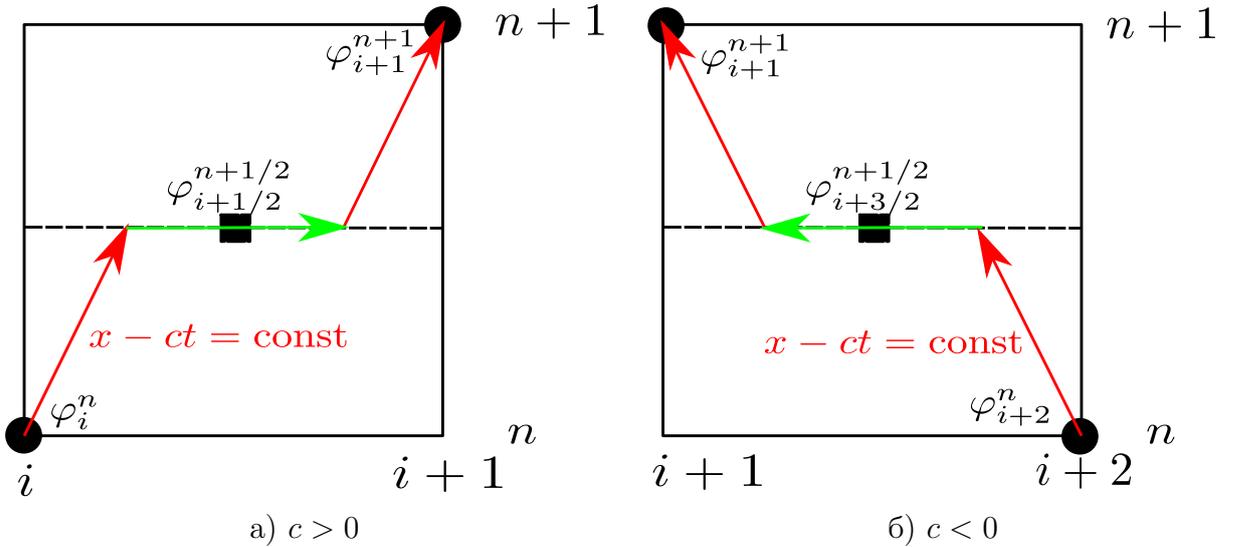
$$\frac{u_c^{n+1/2} - u_c^n}{\tau_n/2} + c \frac{u_R^n - u_L^n}{h_c} = 0. \quad (1.22)$$

Формула (1.22) аппроксимирует исходное уравнение (1.13) со вторым порядком по пространству и с первым — по времени. Она также аппроксимирует и интегральный закон сохранения (1.15) и обладает свойством консервативности.

Фаза 2 (характеристическая) осуществляет перенос инварианта Римана u по характеристике $x - ct = \text{const}$ со слоя n на слой $n + 1$ для нахождения потоковой переменной u_{i+1}^{n+1} :

$$\begin{aligned} u_{i+1}^{n+1} &= 2u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n, \quad \text{если } c > 0, \\ u_{i+1}^{n+1} &= 2u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+2}^n, \quad \text{если } c < 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Так, для случая $c > 0$ инвариант переносится по характеристике из узла (i, n) на серединный слой, там он линейно экстраполируется с помощью консервативного значения $u_{i+1/2}^{n+1/2}$ и еще раз переносится по характеристике на слой $n + 1$ (см. рис. 1.4). Характеристическая фаза аппроксимирует перенос инварианта со вторым порядком.



Красные стрелки — перенос по характеристикам, зеленые — линейная экстраполяция.

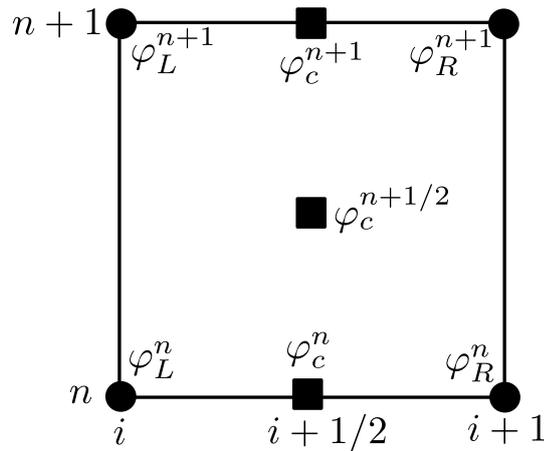
Рисунок 1.4 — Шаблон характеристической фазы схемы КАБАРЕ

Фаза 3 (консервативная) аппроксимирует консервативную форму уравнения (1.13) и задает способ явного вычисления консервативной переменной на следующем временном слое $u_c^{n+1/2}$ через консервативные переменные $u_c^{n+1/2}$, найденные на первой фазе (1.22), и потоковые переменные u_i^{n+1} , найденные на

второй фазе (1.23):

$$\frac{u_c^{n+1} - u_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + c \frac{u_R^{n+1} - u_L^{n+1}}{h_c} = 0. \quad (1.24)$$

Формула (1.24) аппроксимирует исходное уравнение (1.13) со вторым порядком по пространству и с первым — по времени. Она также аппроксимирует и интегральный закон сохранения (1.15) и обладает свойством консервативности. Объединенный шаблон первой и третьей фаз приведен на рис. 1.5.



Круги — потоковые переменные, квадраты — консервативные переменные.

Рисунок 1.5 — Объединенный шаблон первой и третьей фаз схемы КАБАРЕ

Нелинейная коррекция потоков

Для обеспечения монотонности решения при переносе разрывного начального профиля (1.16) схему (1.22) - (1.24) надо дополнить некоторой процедурой коррекции. Известно, что для любой системы гиперболического типа (1.1) ее инварианты Римана должны удовлетворять принципу максимума [102]. Так как за перенос инвариантов Римана в алгоритме отвечают потоковые переменные, то будет целесообразно скорректировать их с помощью разностного аналога этого принципа. Это делается после вычислений по второй фазе (1.23) с помощью

следующих ограничений:

$$\begin{aligned}
 u_{i+1}^{n+1} &= \begin{cases} \min = \min(u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n), & \text{если } u_{i+1}^{n+1} < \min, \\ \max = \max(u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n), & \text{если } u_{i+1}^{n+1} > \max, \\ u_{i+1}^{n+1}, & \text{иначе,} \end{cases} & \text{если } c > 0, \\
 u_{i+1}^{n+1} &= \begin{cases} \min = \min(u_{i+1}^n, u_{i+3/2}^n, u_{i+2}^n), & \text{если } u_{i+1}^{n+1} < \min, \\ \max = \max(u_{i+1}^n, u_{i+3/2}^n, u_{i+2}^n), & \text{если } u_{i+1}^{n+1} > \max, \\ u_{i+1}^{n+1}, & \text{иначе,} \end{cases} & \text{если } c < 0.
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Экспериментально было показано, что ограничения (1.25) позволяют получать монотонное решение только при числах Куранта $CFL \in [0, 0.5]$. Некоторые теоретические обоснования этого факта можно найти в работах Остапенко и др. [106; 107]. Какое-то время считалось, что такая процедура монотонизации работает в областях аномальной дисперсии схемы и не работает в областях нормальной дисперсии. Но эта теория была опровергнута, когда была найдена балансно-характеристическая схема, в областях аномальной дисперсии которой такая монотонизация не давала монотонное решение [108].

Процедура коррекции не только позволяет получить монотонное решение, но и сохраняет консервативность схемы. Действительно, коррекции подвергаются только потоковые переменные, что приводит к коррекции потоков $F = cu$ в узлах сетки. При этом консервативные переменные все еще вычисляются по уравнениям (1.22) и (1.24), которые аппроксимируют интегральный закон сохранения (1.15). Таким образом, свойство консервативности сохраняется для консервативных переменных (отсюда и их название). Порядок аппроксимации потоковых переменных при этом, вообще говоря, падает до первого в областях, где значения инвариантов «обрезаются» с помощью ограничений (1.25).

Отметим, что процедуру коррекции (1.25) можно отключать (и иногда даже нужно для сохранения второго порядка аппроксимации) при расчетах переноса достаточно гладких профилей.

Существуют и другие способы монотонизировать схему КАБАРЕ, как, например, введение диссипатора Паниковского [101] и лимитеры потоков как в схемах Годуновского типа [109]. В данной работе будет рассматриваться только способ (1.25).

Основные свойства трехфазной схемы КАБАРЕ

Рассмотрим схему (1.22) - (1.24) без коррекции потоков (1.25) для равномерной сетки по времени с шагом $\tau = const$. Сложим уравнение третьей фазы (1.24) для перехода со слоя $n - 1/2$ на слой n и уравнение первой фазы (1.22) для перехода со слоя n на слой $n + 1/2$:

$$\frac{u_c^{n+1/2} - u_c^{n-1/2}}{\tau} + c \frac{u_R^n - u_L^n}{h_c} = 0.$$

Теперь если избавиться от консервативных переменных с помощью уравнения второй фазы (1.23), то получится в точности трехслойная схема (1.19). Это говорит о том, что при отключении процедур монотонизации потоковые переменные в трехфазной схеме эквивалентны решению трехслойной схемы (1.19). А значит, для потоковых переменных справедливы все свойства трехслойной схемы.

Покажем, что несмотря на то, что первая и третья фазы по отдельности аппроксимируют исходное уравнение (1.13) только с первым порядком по пространству, для консервативных переменных схемы также справедлив второй порядок аппроксимации. Для этого сложим уравнения первой (1.22) и третьей (1.24) фаз схемы:

$$\frac{u_c^{n+1} - u_c^n}{\tau_n} + c \frac{u_R^n - u_L^n}{2h_c} + c \frac{u_R^{n+1} - u_L^{n+1}}{2h_c} = 0. \quad (1.26)$$

Раскладывая функции в (1.26) в ряды Тейлора возле точки $(x_{i+1/2}, t_{n+1/2})$, получаем второй порядок аппроксимации по времени и пространству.

Также можно показать, что и для консервативных переменных справедливы те же диссипативные и дисперсионные поверхности, что и для трехслойной схемы. Для этого надо подставить во все уравнения схемы (1.22) - (1.24) для равномерной пространственно-временной сетки решения в виде бегущих волн с

разными амплитудами:

$$\begin{aligned} u_i^n &= A \cdot q^n \cdot e^{-Iki h}, \\ u_{i+1/2}^n &= B \cdot q^n \cdot e^{-Ik(i+1/2)h}, \\ u_{i+1/2}^{n+1/2} &= C \cdot q^{n+1/2} \cdot e^{-Ik(i+1/2)h} \end{aligned}$$

и приравнять в получившейся системе трех линейных уравнений от A , B и C определитель к нулю. Тогда получится характеристическое уравнение, совпадающее с (1.21).

Таким образом, для всей схемы в целом (т.е. и для консервативных, и для потоковых переменных) без процедур монотонизации справедливы: второй порядок аппроксимации по времени и пространству, бездиссипативность, обратимость по времени, устойчивость при числах Куранта $CFL \in [0,1]$ и те же дисперсионные свойства, что у трехслойной схемы. При этом при включении коррекции (1.25) теряются бездиссипативность и обратимость по времени, добавляется монотонность при числах Куранта $CFL \in [0,0.5]$ а порядок аппроксимации может локально упасть до первого. К перечисленным выше свойствам можно также добавить и компактность ее шаблона: для вычислений консервативных переменных в ячейках требуется знать информацию только из самой этой ячейки (из центра и из ее узлов). Обмен информацией между ячейками происходит только на характеристической фазе (1.23). Это делает трехслойную схему КАБАРЕ крайне простой для параллелизации на машинах с общей и распределенной памятью.

Задание начальных условий

Для начала счета по формулам (1.22) - (1.25) необходимо задать начальные значения для всех потоковых u_i^0 и консервативных $u_{i+1/2}^0$ переменных. При этом задание начальных значений обоих типов переменных по (1.16) может привести к возникновению артефактов в численном решении. Начальные потоковые и консервативные переменные должны быть между собой некоторым образом согласованы. Подробнее об этом будет рассказано в главе 3.

В работах Остапенко [106; 107] показано, что для сохранения монотонности начальные консервативные и потоковые значения должны быть связаны следующими соотношениями:

$$\varphi_c^0 = 0.5(\varphi_L^0 + \varphi_R^0). \quad (1.27)$$

Если не сказано иное, будем задавать начальные значения потоковых переменных через данную функцию начального условия (1.16), а начальные значения консервативных переменных по формулам (1.27), хотя в случае разрывных начальных условий это не всегда приводит к наилучшим результатам.

Задание граничных условий

Уравнение второй фазы схемы (1.23) позволяет получить значения потоковых переменных на новом временном слое u_i^{n+1} во всех узлах сетки, кроме либо самого левого (в случае $c > 0$), либо самого правого (в случае $c < 0$). В оставшемся узле потоковая переменная задается либо по граничным условиям первого рода (1.17), либо в случае периодических граничных условий копируется значение из узла на противоположной границе. Отметим, что учет граничных условий нужен только на характеристической фазе алгоритма.

1.4 Схема КАБАРЕ для систем нелинейных одномерных уравнений гиперболического типа

Трехфазная схема КАБАРЕ (1.22) - (1.25) относительно легко обобщается на нелинейный случай с сохранением всех ее основных свойств. Впервые это было проделано для уравнений газовой динамики [110]. В этом разделе приведены основные формулы схемы КАБАРЕ для произвольной системы одномерных уравнений гиперболического типа (1.1). Для простоты будем рассматривать такие законы сохранения, где правая часть зависит только от координаты x и времени t (в таком случае схема получается явной).

Как и в линейном случае, введем вообще говоря неравномерную пространственно-временную сетку и консервативные и потоковые переменные на ней. Как и прежде, шаг схемы КАБАРЕ состоит из трех основных фаз: первой (консервативной), второй (характеристической) и третьей (консервативной). Первая фаза отвечает за вычисление консервативных переменных на промежуточном слое $\varphi_c^{n+1/2}$ с помощью данных на слое n . Вторая фаза — за вычисление потоковых переменных φ_i^{n+1} на следующем целом слое с помощью характеристической формы уравнений (1.4). Третья фаза — за вычисление консервативных переменных φ_c^{n+1} на слое $n + 1$.

1.4.1 Консервативные фазы алгоритма

Фаза 1 (консервативная) аппроксимирует законы сохранения (1.1) на каждой ячейке сетки:

$$\frac{\mathbf{u}_c^{n+1/2} - \mathbf{u}_c^n}{\tau_n/2} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u}_R^n) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_L^n)}{h_c} = \mathbf{f}(x_c, t_n). \quad (1.28)$$

С помощью формулы (1.28) явно вычисляются консервативные значения на полуцелом слое $\mathbf{u}_c^{n+1/2}$ для каждой ячейки сетки, и по ним дополнительно находятся собственные значения на полуцелом слое $(\lambda_m)_c^{n+1/2}$ по известным формулам из спектрального разложения якобиана (1.3).

Фаза 3 (консервативная) также аппроксимирует законы сохранения (1.1) на каждой ячейке сетки:

$$\frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u}_R^{n+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_L^{n+1})}{h_c} = \mathbf{f}(x_c, t_{n+1}). \quad (1.29)$$

С помощью формулы (1.29) по известным с фазы 1 значениям $\mathbf{u}_c^{n+1/2}$ и известным с фазы 2 значениям \mathbf{u}_i^{n+1} явно вычисляются консервативные значения на следующем слое \mathbf{u}_c^{n+1} для каждой ячейки сетки.

Нетрудно заметить, что, как и в линейном случае, сумма уравнений (1.28) и (1.29) аппроксимирует закон сохранения (1.1) со вторым порядком по времени и пространству. Шаблоны фаз совпадают с линейным случаем (рис. 1.5).

1.4.2 Характеристическая фаза алгоритма

Рассмотрим алгоритм вычисления потоковой переменной \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} для неграничного узла сетки. Предположим, что по значениям исходных переменных \mathbf{u} на слоях n и $n + 1/2$ каким-то образом были вычислены значения инвариантов Римана R_m в узлах и ячейках на слое n и в ячейках на слое $n + 1/2$. Как и в линейном случае (1.23), экстраполируем значения этих инвариантов по соответствующим им характеристикам (1.6), выбирая направление экстраполяции по знакам собственных значений $(\lambda_m)_c^{n+1/2}$:

$$(R_m)_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \begin{cases} 2(R_m)_{i+1/2}^{n+1/2} - (R_m)_i^n, \\ \text{если } (\lambda_m)_{i+1/2}^{n+1/2} > 0 \text{ и } (\lambda_m)_{i+3/2}^{n+1/2} > 0 \text{ (1*)}, \end{cases} \\ \begin{cases} 2(R_m)_{i+3/2}^{n+1/2} - (R_m)_{i+2}^n, \\ \text{если } (\lambda_m)_{i+1/2}^{n+1/2} < 0 \text{ и } (\lambda_m)_{i+3/2}^{n+1/2} < 0 \text{ (2*)}, \end{cases} \\ SP(\mathbf{u}_{left}, \mathbf{u}_{right}), \text{ иначе.} \end{cases} \quad (1.30)$$

Ситуацию, когда собственные значения слева и справа от узла имеют разные знаки (третья ветка алгоритма (1.30)), назовем **звуковой точкой по инварианту** R_m . В этом случае в узел (x_{i+1}, t_{n+1}) по линейной экстраполяции либо не приходит ни одно значение инварианта R_m , либо приходят сразу 2 значения. В таком случае от линейной экстраполяции инварианта R_m следует отказаться, и применить для нахождения $(R_m)_{i+1}^{n+1}$ некоторый оператор обработки звуковой точки $SP(\mathbf{u}_{left}, \mathbf{u}_{right})$, где \mathbf{u}_{left} и \mathbf{u}_{right} — некоторые наборы значений переменных слева и справа от точки x_{i+1} . Подробнее об обработке звуковых точек будет рассказано в главе 3. Так или иначе, после алгоритма (1.30) в узле (x_{i+1}, t_{n+1}) будет полный набор инвариантов системы.

Для сохранения монотонности значения инвариантов, полученные в результате вычислений по (1.30), надо подвергнуть процедуре коррекции на основе принципа максимума. Так как в отличие от линейного уравнения переноса (1.13) в уравнениях (1.1) может присутствовать ненулевая правая часть, влияющая на принцип максимума, алгоритм (1.25) надо скорректировать следующим

образом:

$$\begin{aligned}
(R_m)_{i+1}^{n+1} &= \begin{cases} \mu = \min((R_m)_i^n, (R_m)_{i+1/2}^n, (R_m)_{i+1}^n) + \tau_n \tilde{Q}_m, & \text{если } (R_m)_{i+1}^{n+1} < \mu, \\ M = \max((R_m)_i^n, (R_m)_{i+1/2}^n, (R_m)_{i+1}^n) + \tau_n \tilde{Q}_m, & \text{если } (R_m)_{i+1}^{n+1} > M, \\ (R_m)_{i+1}^{n+1}, & \text{иначе,} \end{cases} \\
\tilde{Q}_m &= \frac{(R_m)_{i+1/2}^{n+1/2} - (R_m)_{i+1/2}^n}{\tau_n/2} + (\lambda_m)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{(R_m)_{i+1}^n - (R_m)_i^n}{h_{i+1/2}}, \\
(R_m)_{i+1}^{n+1} &= \begin{cases} \mu = \min((R_m)_{i+1}^n, (R_m)_{i+3/2}^n, (R_m)_{i+2}^n) + \tau_n \tilde{Q}_m, & \text{если } (R_m)_{i+1}^{n+1} < \mu, \\ M = \max((R_m)_{i+1}^n, (R_m)_{i+3/2}^n, (R_m)_{i+2}^n) + \tau_n \tilde{Q}_m, & \text{если } (R_m)_{i+1}^{n+1} > M, \\ (R_m)_{i+1}^{n+1}, & \text{иначе,} \end{cases} \\
\tilde{Q}_m &= \frac{(R_m)_{i+3/2}^{n+1/2} - (R_m)_{i+3/2}^n}{\tau_n/2} + (\lambda_m)_{i+3/2}^{n+1/2} \frac{(R_m)_{i+2}^n - (R_m)_{i+1}^n}{h_{i+3/2}}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

для случаев (1*) и (2*), соответственно. Алгоритм коррекции для случая звуковой точки надо задавать отдельно для каждого конкретного алгоритма обработки.

Отметим, что при отсутствии правой части в уравнениях (1.1) учет дополнительного слагаемого $\tau_n \tilde{Q}_m$ в определениях μ и M можно опустить. А при расчетах достаточно гладких решений для уравнений с нулевой правой частью алгоритм коррекции (1.31) и вовсе можно отключить.

После нахождения и коррекции полного набора инвариантов с помощью (1.30) и (1.31) совершается обратный переход к исходным переменным \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} , на чем алгоритм второй фазы завершается.

Приведенный выше алгоритм справедлив для вычислений во внутренних узлах сетки. Учет граничных условий на граничных узлах для каждого конкретного вида системы (1.1) и конкретного граничного условия надо прорабатывать отдельно. Как правило, на граничный узел по линейной экстраполяции (1.30) переносятся и корректируются инварианты, характеристики которых в приграничной ячейке направлены в сторону граничного узла, а недостающие значения инвариантов восстанавливаются с помощью граничных условий.

1.4.3 Вычисление инвариантов Римана

Для вычислений по второй фазе алгоритма (1.30) необходимо найти значения инвариантов Римана в узлах $(R_m)_i^n$ и ячейках $(R_m)_{i+1/2}^n$ сетки по значениям исходных переменных \mathbf{u} . В случае, когда рассматривается гиперболическая система (1.1) с аналитическими инвариантами Римана, все очень просто. В этом случае имеются аналитические выражения, связывающие \mathbf{R} и \mathbf{u} : $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{R})$. С помощью этих выражений и осуществляется сначала прямой переход от \mathbf{u} к \mathbf{R} в начале второй фазы, а затем обратный переход от \mathbf{R} к \mathbf{u} — в конце.

В случае системы (1.1) с локальными инвариантами Римана выражения для инвариантов \mathbf{R} необходимо каким-то образом аппроксимировать. Для каждой системы законов сохранения это надо делать индивидуально, покажем примеры таких аппроксимаций для системы одномерных уравнений газовой динамики для идеального газа (для которой аналитические выражения инвариантов неизвестны):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial E \rho u}{\partial x} + \frac{\partial P u}{\partial x} &= 0, \\ P &= \rho e(\gamma - 1), \end{aligned} \tag{1.32}$$

где ρ — плотность газа, u — скорость газа по оси x , P — давление, E — удельная полная энергия, e — удельная внутренняя энергия, γ — показатель адиабаты.

Характеристическая форма системы (1.32) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \lambda_+ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \lambda_- \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \lambda_0 \left(\frac{\partial P}{\partial x} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) &= 0, \end{aligned} \tag{1.33}$$

где $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$ — скорость звука, $\lambda_+ = u + c$, $\lambda_- = u - c$, $\lambda_0 = u$ — собственные значения.

Самый простой способ получить приближительные формулы для инвариантов — это принять коэффициенты $1/\rho c$ и c^2 постоянным в пределах каждой пространственно-временной ячейки и занести их под соответствующие производные. Тогда в пределах каждой ячейки получаем следующие формулы для инвариантов R , Q , S :

$$R = u + G_c^{n+1/2} P, \quad Q = u - G_c^{n+1/2} P, \quad S = P - (c^2)_c^{n+1/2} \rho, \quad G = \frac{1}{\rho c}. \quad (1.34)$$

Инварианты (1.34) называются **линейными инвариантами**. Теперь, например, если надо перенести инвариант R слева направо по первой формуле (1.30), то значения R_i^n и $R_{i+1/2}^{n+1/2}$ вычисляются с помощью коэффициента G в левой пространственно-временной ячейке:

$$R_i^n = u_i^n + G_{i+1/2}^{n+1/2} P_i^n, \quad R_{i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2} P_{i+1/2}^{n+1/2}.$$

Аналогично при переносе инварианта справа налево по второй формуле (1.30) используется коэффициент из правой пространственно-временной ячейки $G_{i+3/2}^{n+1/2}$.

Локальность коэффициентов G используется и при обратном переходе от инвариантов \mathbf{R} к исходным переменным \mathbf{u} . Допустим, инвариант R был перенесен с использованием коэффициента G_R , а инвариант Q — с использованием G_Q . Тогда справедливы следующие выражения для инвариантов в точке (x_{i+1}, t_{n+1}) :

$$R_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^{n+1} + G_R P_{i+1}^{n+1}, \quad Q_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^{n+1} - G_Q P_{i+1}^{n+1},$$

откуда можно найти выражения для исходных потоковых переменных на новом слое:

$$u_{i+1}^{n+1} = \frac{G_Q R_{i+1}^{n+1} + G_R Q_{i+1}^{n+1}}{G_R + G_Q}, \quad P_{i+1}^{n+1} = \frac{R_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^{n+1}}{G_R + G_Q}.$$

Линейные инварианты (1.34) — не единственный способ аппроксимации инвариантов Римана для уравнений газовой динамики. Вместо того чтобы считать в пределах каждой пространственно-временной ячейки постоянными $1/\rho c$ и c^2 , можно было взять постоянной энтропию газа $\ln(P/\rho^\gamma)$. Тогда получаются

так называемые **изоэнтропические инварианты** R , Q , S :

$$\begin{aligned} R &= u + G_c^{m+1/2} P^\mu, \quad Q = u - G_c^{m+1/2} P^\mu, \quad S = \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right), \\ G &= \frac{2\sqrt{\gamma} S^{\gamma/2}}{\gamma - 1}, \quad \mu = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Существуют и другие выражения для локальных инвариантов Римана для системы уравнений газовой динамики (например, изохорические инварианты [111]).

1.4.4 Выбор шага по времени

Для линейного уравнения переноса (1.13) шаг по времени выбирался из условия $CFL = \lambda\tau/h \in [0,0.5]$, где λ — скорость переноса и оно же единственное собственное число системы. Т.е. по заданному числу Куранта CFL вычислялся шаг $\tau = CFL \cdot h/\lambda$. В нелинейном случае собственные числа зависят от решения, поэтому τ , вообще говоря, надо менять после каждого шага расчета. Пусть для перехода со слоя n на слой $n + 1$ используется шаг τ_n , тогда для каждой ячейки можно определить **локальные числа Куранта**, количество которых совпадает с количеством собственных значений системы:

$$(CFL_m)_c^n = \frac{(\lambda_m)_c^n \tau_n}{h_c}. \quad (1.36)$$

Для устойчивости и монотонности алгоритма необходимо, чтобы все локальные числа Куранта (1.36) для всех ячеек сетки находились в промежутке $[0,0.5]$. Для этого перед первой фазой алгоритма (1.28) шаг по времени τ_n надо выбрать следующим образом:

$$\tau_n = CFL \cdot \min_{c,m} \left(\frac{h_c}{|(\lambda_m)_c^n|} \right), \quad (1.37)$$

где $CFL \in [0,0.5]$ — подающееся на вход глобальное число Куранта, а минимум берется по всем ячейкам сетки и всем собственным значениям.

1.5 Схема КАБАРЕ для систем нелинейных многомерных уравнений гиперболического типа

Опишем обобщение схемы КАБАРЕ (1.28) - (1.31) на многомерный случай. Для простоты изложение будет вестись для двумерных нелинейных уравнений гиперболического типа:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y(\mathbf{u})}{\partial y} = \mathbf{f}(x, y, t), \quad (1.38)$$

где $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая ограниченная область, заданная в декартовой системе координат. Обобщение на трехмерный случай проводится по аналогии. Приведенная ниже схема является обобщением опубликованной в [111] схемы для уравнений газовой динамики на случай произвольной системы законов сохранения гиперболического типа.

1.5.1 Пространственно-временная сетка и сеточные функции

Пусть в области Ω задана некоторая двумерная вообще говоря неортогональная структурированная сетка:

$$\omega_h = \{ \mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}), i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y} \}$$

и пусть узлы сетки ω_h образуют четырехугольные ячейки (т.е. сетка является четырехугольной). Это требование является обязательным для схемы КАБАРЕ, т.к. для характеристической фазы алгоритма надо, чтобы для каждого ребра сетки внутри ячейки однозначно определялось «противоположное» ребро. Дополнительно зададим еще три вспомогательные множества точек, на которых

зададим сеточные функции:

$$\begin{aligned}\omega_{hx} &= \{ \mathbf{x}_{i+1/2,j} = 0.5(\mathbf{x}_{i+1,j} + \mathbf{x}_{ij}), i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y} \}, \\ \omega_{hy} &= \{ \mathbf{x}_{i,j+1/2} = 0.5(\mathbf{x}_{i,j+1} + \mathbf{x}_{ij}), i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y - 1} \}, \\ \omega_{hc} &= \{ \mathbf{x}_{i+1/2,j+1/2} = 0.25(\mathbf{x}_{i+1,j+1} + \mathbf{x}_{i,j+1} + \mathbf{x}_{i+1,j} + \mathbf{x}_{ij}), \\ & i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1} \},\end{aligned}$$

где ω_{hc} — множество середин расчетных ячеек, а ω_{hx} и ω_{hy} — множество середин ребер, индексируемых по i и j , соответственно. В случае ортогональной сетки ω_{hx} задает множество середин ребер, параллельных оси x , ω_{hy} — параллельных оси y .

Так же, как и в одномерном случае, зададим вообще говоря неравномерную сетку по времени с целыми и полуцелыми слоями:

$$\begin{aligned}\omega_\tau &= \{ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{K-1} < t_K = T \mid t_{n+1} - t_n = \tau_n \}, \\ \omega'_\tau &= \{ t_{1/2} < t_{3/2} < \dots < t_{K-3/2} < t_{K-1/2} \mid t_{n+1/2} = 0.5(t_n + t_{n+1}) \},\end{aligned}$$

где τ_n — шаги сетки по времени.

В пространствах $\omega_{hx} \times \omega_\tau$ и $\omega_{hy} \times \omega_\tau$ введем сеточные функции $\varphi_{i+1/2,j}^n \approx \varphi(\mathbf{x}_{i+1/2,j}, t_n)$ и $\varphi_{i,j+1/2}^n \approx \varphi(\mathbf{x}_{i,j+1/2}, t_n)$, которые будем называть **потоковыми переменными**. В пространстве $\omega_{hc} \times (\omega_\tau \cup \omega'_\tau)$ введем сеточные функции $\varphi_{i+1/2,j+1/2}^n \approx \varphi(\mathbf{x}_{i+1/2,j+1/2}, t_n)$ и $\varphi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \approx \varphi(\mathbf{x}_{i+1/2,j+1/2}, t_{n+1/2})$, которые будем называть **консервативными переменными**. Таким образом, потоковые переменные заданы в серединах ребер сетки на целых слоях по времени, а консервативные — в серединах ячеек на целом и полуцелом слоях.

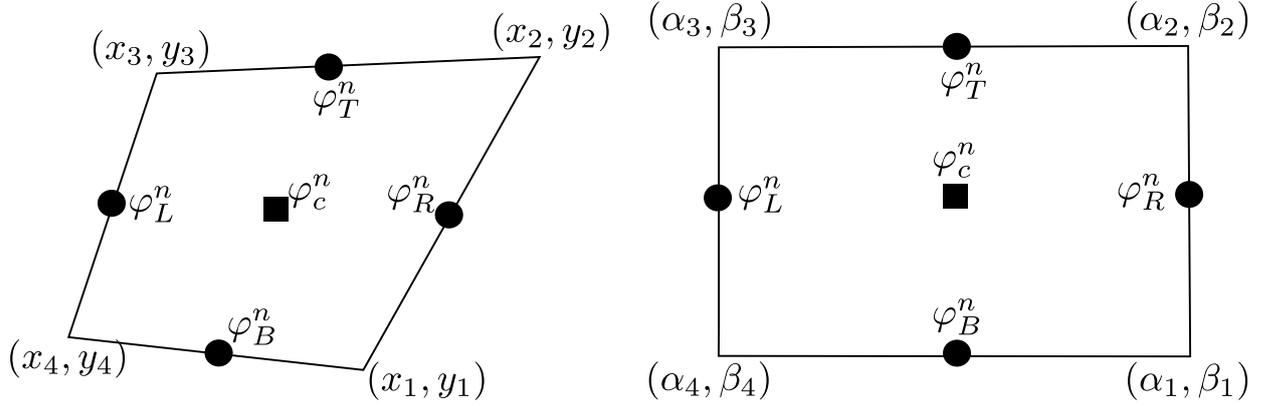
Для упрощения записи уравнений схем иногда будем использовать следующие обозначения для индексов:

$$\begin{aligned}i + 1/2, j + 1/2 &\longleftrightarrow c, \quad i + 1/2, j \longleftrightarrow B, \quad i + 1/2, j + 1 \longleftrightarrow T, \\ i, j + 1/2 &\longleftrightarrow L, \quad i + 1, j + 1/2 \longleftrightarrow R, \quad \varphi^{n+1} \longleftrightarrow \widehat{\varphi}.\end{aligned}$$

и упрощенные обозначения для координат узлов ячейки с центром в $\mathbf{x}_{i+1/2,j+1/2}$:

$$\mathbf{x}_{i+1,j} \longleftrightarrow \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_{i+1,j+1} \longleftrightarrow \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_{i,j+1} \longleftrightarrow \mathbf{x}_3, \quad \mathbf{x}_{ij} \longleftrightarrow \mathbf{x}_4.$$

Пример неортогональной ячейки с заданными в ней потоковыми и консервативными переменными приведен на рис. 1.6а.



а) Исходная система координат (x, y) б) Опорная система координат (α, β)

Круги — потоковые переменные, квадраты — консервативные переменные.

Рисунок 1.6 — Ячейка неортогональной четырехугольной сетки и заданные на ней сеточные функции

1.5.2 Опорная система координат

Рассмотрим ячейку введенной ранее неортогональной сетки. Предположим, что существует достаточно гладкое взаимно-однозначное отображение $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$, переводящее эту ячейку в прямоугольник со сторонами h_α , h_β в плоскости опорных координат (α, β) (рис. 1.6). Пусть J — якобиан этого отображения:

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Домножая исходную систему законов сохранения (1.38) на якобиан J , получим:

$$J \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{D(\mathbf{F}_x, y)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, \mathbf{F}_y)}{D(\alpha, \beta)} = J \mathbf{f}(x, y, t), \quad (1.39)$$

откуда пользуясь выражениями

$$\begin{aligned} \frac{D(\mathbf{F}_x, y)}{D(\alpha, \beta)} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mathbf{F}_x \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\mathbf{F}_x \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right), \\ \frac{D(x, \mathbf{F}_y)}{D(\alpha, \beta)} &= - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mathbf{F}_y \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\mathbf{F}_y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

получим окончательное выражение для системы законов сохранения в опорных координатах (α, β) :

$$J \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mathbf{F}_x \frac{\partial y}{\partial \beta} - \mathbf{F}_y \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\mathbf{F}_x \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \mathbf{F}_y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) = J \mathbf{f}(x, y, t). \quad (1.40)$$

С помощью уравнения (1.40) можно аналогичным случаем переменных x и y образом получить простые и характеристические формы уравнений по направлениям α и β .

1.5.3 Консервативные фазы алгоритма

Аппроксимируем законы сохранения (1.40) методом баланса на прямоугольной ячейке в пространстве координат (α, β) . Для первой фазы, осуществляющей переход со слоя n на слой $n + 1/2$, получим:

$$\begin{aligned} & J_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1/2} - \mathbf{u}_c^n}{\tau_n/2} + \\ & + \frac{1}{h_\alpha} \left((\mathbf{F}_x)_R^n \frac{y_2 - y_1}{h_\beta} - (\mathbf{F}_y)_R^n \frac{x_2 - x_1}{h_\beta} - (\mathbf{F}_x)_L^n \frac{y_3 - y_4}{h_\beta} + (\mathbf{F}_y)_L^n \frac{x_3 - x_4}{h_\beta} \right) + \\ & + \frac{1}{h_\beta} \left(-(\mathbf{F}_x)_T^n \frac{y_2 - y_3}{h_\alpha} + (\mathbf{F}_y)_T^n \frac{x_2 - x_3}{h_\alpha} + (\mathbf{F}_x)_B^n \frac{y_1 - y_4}{h_\alpha} - (\mathbf{F}_y)_B^n \frac{x_1 - x_4}{h_\alpha} \right) = \\ & = J_c \mathbf{f}_c^n, \end{aligned}$$

где J_c — аппроксимация якобиана (1.5.2) на прямоугольной ячейке:

$$\begin{aligned} J_c &= \frac{S_c}{h_\alpha h_\beta}, \\ S_c &= \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_4)], \end{aligned} \quad (1.41)$$

где S_c — площадь ячейки в исходном пространстве координат (x, y) .

Подставляя в полученное уравнение (1.41) и домножая его на $h_\alpha h_\beta$, получим окончательное уравнение первой фазы, не зависящее от конкретного вида

применяемого отображения:

$$\begin{aligned}
& S_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1/2} - \mathbf{u}_c^n}{\tau_n/2} + \\
& + ((\mathbf{F}_x)_R^n(y_2 - y_1) - (\mathbf{F}_y)_R^n(x_2 - x_1) - (\mathbf{F}_x)_L^n(y_3 - y_4) + (\mathbf{F}_y)_L^n(x_3 - x_4)) + \\
& + (-(\mathbf{F}_x)_T^n(y_2 - y_3) + (\mathbf{F}_y)_T^n(x_2 - x_3) + (\mathbf{F}_x)_B^n(y_1 - y_4) - (\mathbf{F}_y)_B^n(x_1 - x_4)) = \\
& = S_c \mathbf{f}_c^n.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Аналогичным образом получается уравнение третьей фазы, осуществляющее переход со слоя $n + 1/2$ на слой $n + 1$:

$$\begin{aligned}
& S_c \frac{\hat{\mathbf{u}}_c - \mathbf{u}_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \\
& + \left((\hat{\mathbf{F}}_x)_R(y_2 - y_1) - (\hat{\mathbf{F}}_y)_R(x_2 - x_1) - (\hat{\mathbf{F}}_x)_L(y_3 - y_4) + (\hat{\mathbf{F}}_y)_L(x_3 - x_4) \right) + \\
& + \left(-(\hat{\mathbf{F}}_x)_T(y_2 - y_3) + (\hat{\mathbf{F}}_y)_T(x_2 - x_3) + (\hat{\mathbf{F}}_x)_B(y_1 - y_4) - (\hat{\mathbf{F}}_y)_B(x_1 - x_4) \right) = \\
& = S_c \hat{\mathbf{f}}_c.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Пространственные шаблоны фаз (1.42) и (1.43) приведены на рис. 1.6а.

За счет того, что аппроксимация проводилась на прямоугольной ячейке в пространстве координат (α, β) , обе фазы (1.42) и (1.43) обладают вторым порядком аппроксимации по пространству и первым — по времени на неортогональных четырехугольных сетках, а сумма этих уравнений — вторым порядком и по пространству, и по времени. В этом несложно убедиться, проведя соответствующие разложения в ряд Тейлора вокруг точки \mathbf{x}_c на нужном слое по времени. Кроме того, так как аппроксимация проводилась по методу баланса, обе фазы обладают свойством консервативности.

Как и прежде, первая фаза (1.42) отвечает за явное вычисление консервативных переменных $\mathbf{u}_c^{n+1/2}$ по данным на слое n , а третья фаза (1.43) — за явное вычисление консервативных переменных \mathbf{u}_c^{n+1} по найденным на первой фазе $\mathbf{u}_c^{n+1/2}$ и найденным на характеристической фазе потоковым переменным на слое $n + 1$.

1.5.4 Характеристическая фаза алгоритма

Имея характеристические формы по направлениям α и β системы уравнений (1.40), можно найти выражения для собственных значений λ_m^α , λ_m^β и инвариантов Римана R_m^α , R_m^β по этим направлениям. В одномерном случае для нахождения инварианта в узле ячейки проводилась линейная экстраполяция со стороны ячейки либо слева, либо справа (1.30). В двумерном случае потоковые переменные располагаются на ребрах сетки, для каждого из которых также однозначно определены левая и правая ячейки. Таким образом, можно аналогично (1.30) провести линейную экстраполяцию через противоположное ребро и центр пространственно-временной ячейки с нужной стороны. Для этого на вертикальных в пространстве координат (α, β) ребер найдем и перенесем инварианты по направлению α , а для горизонтальных — по направлению β . Так, например, при условии $(\lambda_m^\alpha)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} > 0$ и $(\lambda_m^\alpha)_{i+3/2, j+1/2}^{n+1/2} > 0$ вычисление $(\widehat{R}_m^\alpha)_R$ проводится следующим образом:

$$(\widehat{R}_m^\alpha)_R = 2(R_m^\alpha)_c^{n+1/2} - (R_m^\alpha)_L^n \quad (1.44)$$

с последующей монотонизацией:

$$(\widehat{R}_m^\alpha)_R = \begin{cases} \mu = \min((R_m^\alpha)_L^n, (R_m^\alpha)_c^n, (R_m^\alpha)_R^n) + \tau_n \widetilde{Q}_m, & \text{если } (\widehat{R}_m^\alpha)_R < \mu, \\ M = \max((R_m^\alpha)_L^n, (R_m^\alpha)_c^n, (R_m^\alpha)_R^n) + \tau_n \widetilde{Q}_m, & \text{если } (\widehat{R}_m^\alpha)_R > M, \\ (\widehat{R}_m^\alpha)_R, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\widetilde{Q}_m = \frac{(R_m^\alpha)_c^{n+1/2} - (R_m^\alpha)_c^n}{\tau_n/2} + (\lambda_m^\alpha)_c^{n+1/2} \frac{(R_m^\alpha)_R^n - (R_m^\alpha)_L^n}{h_\alpha}.$$

При этом неизвестное h_α будет фигурировать и в выражении, аппроксимирующем $(\lambda_m^\alpha)_c^{n+1/2}$, и в итоговой формуле для \widetilde{Q}_m в (1.45) сократится.

Перенос и монотонизация по направлению α с другой стороны, а также с обеих сторон по направлению β осуществляются аналогичным образом. Проблема обработки звуковых точек остается актуальной и в многомерном случае.

Отметим, что, в отличие от одномерного случая, в процедуре коррекции (1.45) уже нельзя отказаться от учета слагаемого $\tau_n \widetilde{Q}_m$, так как в правой ча-

сти для характеристической формы уравнений по направлению α фигурируют слагаемые с производными по β и наоборот.

После всех переносов и монотонизаций на каждом внутреннем вертикальном ребре сетки получим полный набор инвариантов R_m^α , а на каждом горизонтальном — полный набор R_m^β . С помощью этих значений можно восстановить исходные потоковые переменные \mathbf{u}^{n+1} на всех внутренних ребрах сетки. Реализация граничных условий для каждой конкретной системы уравнений (1.38) оговаривается отдельно.

1.5.5 Выбор шага по времени

Как и в одномерном случае (1.37), выбор шага по времени τ_n осуществляется на каждом шаге алгоритма перед первой фазой (1.42), исходя из условий Куранта $(CFL_m^\alpha)_c^n \leq CFL$, $(CFL_m^\beta)_c^n \leq CFL$, $CFL \in [0, 0.5]$ для каждой ячейки сетки:

$$\tau_n = CFL \cdot \min_{c,m} \left(\frac{h_\alpha}{|(\lambda_m^\alpha)_c^n|}, \frac{h_\beta}{|(\lambda_m^\beta)_c^n|} \right). \quad (1.46)$$

При этом шаги сетки h_α , h_β , как и в случае формул для монотонизации (1.45), сократятся с помощью выражений для собственных значений, а минимум берется по всем ячейкам сетки и по всем собственным значениям по обоим направлениям.

1.6 Некоторые проблемы схемы КАБАРЕ

Перечислим некоторые «уязвимые» места схемы КАБАРЕ, которые требуют уточнений либо улучшений.

Первым недостатком приведенной выше схемы КАБАРЕ можно назвать необходимость в алгоритмах обработки звуковых точек при расчетах трансзвуковых задач. Действительно, как было показано ранее, характеристическая фаза схемы КАБАРЕ (1.30) однозначно определена только когда ни по одному из

инвариантов не возникает звуковая точка. При этом самые казались бы простые алгоритмы их обработки могут приводить к нефизичным решениям. Поэтому необходимо построить универсальный алгоритм, который бы сохранял основные свойства схемы КАБАРЕ (второй порядок аппроксимации, минимальность шаблона, обратимость по времени) и при этом не увеличивал бы сильно вычислительную сложность алгоритма. Этой задаче посвящена глава 2 настоящей диссертации.

Вторым недостатком являются ее плохие дисперсионные свойства при $CFL \rightarrow 0$ (см. дисперсионную поверхность на рис. 1.3а), что может приводить к серьезному «опережению» аналитического решения численным. Особенно серьезной эта проблема становится при решении систем нелинейных уравнений, где каждая ячейка сетки имеет свое локальное число Куранта (1.36). Так, выбор шага по времени с помощью условия (1.37) гарантирует, что каждое локальное число Куранта будет не меньше глобального: $(CFL_m)_c^n \leq CFL$. Если в моделируемой задаче процесс таков, что образуется несколько областей с сильно отличающимися собственными значениями, то для областей с меньшими собственными значениями локальные числа Куранта будут малы, и, как следствие, отвечающие этим собственным значениям инварианты будут переноситься с большой дисперсионной ошибкой.

Так, например, одномерные уравнения газовой динамики (1.32) обладают тремя собственными значениями $\lambda_+ = u + c$, $\lambda_- = u - c$, $\lambda_0 = u$, где u — скорость газа, c — скорость звука. При расчетах течений с малыми скоростями получается, что собственные значения λ_+ и λ_- преобладают над λ_0 , и соответствующий последнему собственному значению так называемый энтропийный инвариант переносит с меньшей точностью, чем остальные инварианты. Аналогичная проблема может возникать и в линейном случае при расчете задач с жесткими системами уравнений. Таким образом, в некоторых случаях схема КАБАРЕ нуждается в улучшении дисперсионных свойств. Этой проблеме посвящена глава 3 настоящей диссертации.

В качестве третьей проблемы можно выделить применимость схемы КАБАРЕ только к неподвижным сеткам для уравнений в эйлеровых переменных. Некоторые задачи математического моделирования невозможно решить оставаясь в рамках эйлеровых переменных. Например, движение упругопластичных тел, также описываемое системой уравнений гиперболического типа, надо моде-

лизовать на чисто лагранжевых или смешанных эйлерово-лагранжевых сетках, так как область расчета, совпадающая с телом, меняется со временем. Основа для построения схемы КАБАРЕ на подвижных сетках уже заложена в виде схемы КАБАРЕ для произвольных неортогональных четырехугольных сеток (1.42) - (1.45). Она будет обобщена на случай сеток в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных в главе 5 настоящей диссертации.

Глава 2. Обратимый по времени алгоритм обработки звуковых точек для балансно-характеристических схем

2.1 Обработка звуковых точек для систем уравнений с аналитическими инвариантами Римана

2.1.1 Система уравнений мелкой воды

Одной из простейших систем уравнений в частных производных гиперболического типа является система одномерных уравнений мелкой воды, состоящая из законов сохранения массы и импульса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $H(x,t)$ — высота слоя воды, $u(x,t)$ — горизонтальная компонента осредненной по высоте скорости слоя воды, g — ускорение свободного падения. Система уравнений (2.1) описывает одномерное течение жидкости над ровным дном, для которой высота много меньше размеров рассматриваемой области (см. рис. 2.1).

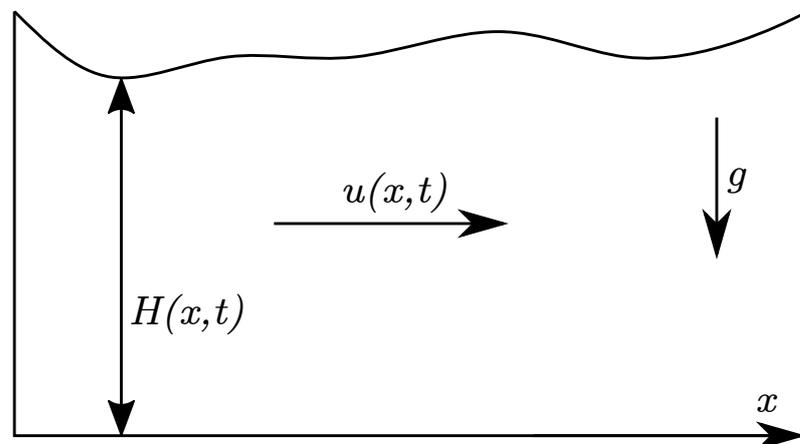


Рисунок 2.1 — Одномерная модель мелкой воды

Для системы уравнений (2.1) известны аналитические выражения для инвариантов Римана, и ее характеристическая форма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial R_1}{\partial x} &= 0, \quad \lambda_1 = u + \sqrt{gH}, \quad R_1 = R = u + 2\sqrt{gH}, \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial R_2}{\partial x} &= 0, \quad \lambda_2 = u - \sqrt{gH}, \quad R_2 = Q = u - 2\sqrt{gH}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где λ_k — собственные значения системы (2.1), R_k — соответствующие им инварианты Римана.

Для определенности рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений (2.1) в области $\Omega = [a, b] \times [0, T]$ с начальными условиями:

$$H(x, 0) = H_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Что касается граничных условий, будем считать, что значения всех инвариантов Римана R_k , приходящих на границы извне рассматриваемой области, известны на все необходимые моменты времени.

На примере относительно простой системы гиперболических уравнений (2.1) рассмотрим проблемы, возникающие при расчетах трансзвуковых течений с помощью схемы КАБАРЕ, и предложим эффективный способ решения этих проблем.

2.1.2 Стандартная схема КАБАРЕ для уравнений мелкой воды

Схема КАБАРЕ для уравнений (2.1) строится по алгоритму, описанному в глав. 1, и включает в себя три фазы, использующие консервативные и потоковые переменные:

Фаза 1 (консервативная). Явное вычисление консервативных переменных $H_{i+1/2}^{n+1/2}$, $u_{i+1/2}^{n+1/2}$ и собственных значений $(\lambda_k)_c^{n+1/2}$ с помощью сеточных аналогов законов сохранения массы и импульса и консервативных и потоковых переменных

ных на слое n :

$$\begin{aligned}
& \frac{H_c^{n+1/2} - H_c^n}{\tau_n/2} + \frac{H_R^n u_R^n - H_L^n u_L^n}{h_c} = 0, \\
& \frac{H_c^{n+1/2} u_c^{n+1/2} - H_c^n u_c^n}{\tau_n/2} + \frac{H_R^n (u_R^n)^2 - H_L^n (u_L^n)^2}{h_c} + \\
& + \frac{g(H_R^n)^2 - (H_L^n)^2}{2h_c} = 0, \\
& (\lambda_1)_c^{n+1/2} = u_c^{n+1/2} + \sqrt{gH_c^{n+1/2}}, \quad (R_1)_c^{n+1/2} = u_c^{n+1/2} + 2\sqrt{gH_c^{n+1/2}}, \\
& (\lambda_2)_c^{n+1/2} = u_c^{n+1/2} - \sqrt{gH_c^{n+1/2}}, \quad (R_2)_c^{n+1/2} = u_c^{n+1/2} - 2\sqrt{gH_c^{n+1/2}}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Фаза 2 (характеристическая). Явное вычисление потоковых значений инвариантов Римана $(R_k)_i^{n+1}$ с помощью линейной экстраполяции инвариантов по соответствующим им характеристикам:

$$(R_k)_i^{n+1} = \begin{cases} 2(R_k)_{i-1/2}^{n+1/2} - (R_k)_{i-1}^n, & \text{если } (\lambda_k)_{i-1/2}^{n+1/2} > 0 \text{ и } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} > 0, \\ 2(R_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (R_k)_{i+1}^n, & \text{если } (\lambda_k)_{i-1/2}^{n+1/2} < 0 \text{ и } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} < 0, \\ SP(H_{left}, u_{left}, H_{right}, u_{right}), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Для сохранения монотонности решения в областях больших градиентов инварианты Римана дополнительно подвергаются коррекции по алгоритму (1.31). Вторая фаза завершается вычислением потоковых высоты и скорости на слое по времени $n + 1$:

$$H_i^{n+1} = \frac{1}{g} \left(\frac{(R_1)_i^{n+1} - (R_2)_i^{n+1}}{4} \right)^2, \quad u_i^{n+1} = \frac{(R_1)_i^{n+1} + (R_2)_i^{n+1}}{2}. \tag{2.5}$$

Фаза 3 (консервативная). Явное вычисление консервативных переменных $H_{i+1/2}^{n+1}$, $u_{i+1/2}^{n+1}$ с помощью сеточных аналогов законов сохранения массы и импульса и консервативных и потоковых переменных на слое вычисленных на

первой фазе (2.3) и второй фазе (2.4),(2.5):

$$\begin{aligned} & \frac{H_c^{n+1} - H_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{H_R^{n+1} u_R^{n+1} - H_L^{n+1} u_L^{n+1}}{h_c} = 0, \\ & \frac{H_c^{n+1} u_c^{n+1} - H_c^{n+1/2} u_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{H_R^{n+1} (u_R^{n+1})^2 - H_L^{n+1} (u_L^{n+1})^2}{h_c} + \\ & + \frac{g (H_R^{n+1})^2 - (H_L^{n+1})^2}{2 h_c} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Шаг по времени вычисляется перед первой фазой (2.3) с помощью числа Куранта $CFL \in (0, 0.5]$:

$$\tau_{n+1} = CFL \cdot \min_c \left\{ \frac{h_c}{|(\lambda_1)_c^{n+1}|}, \frac{h_c}{|(\lambda_2)_c^{n+1}|} \right\}. \quad (2.7)$$

В случае строго дозвукового ($|u| < \sqrt{gH}$ во все моменты времени) или строго сверхзвукового ($|u| > \sqrt{gH}$ во все моменты времени) течения схема КАБАРЕ (2.3) - (2.7) консервативна, имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству и обладает свойством временной обратимости при отключении процедур монотонизации (1.31). Отметим, что алгоритм обработки звуковых точек $SP(H_{left}, u_{left}, H_{right}, u_{right})$ в случае стандартной схемы никак не конкретизируется.

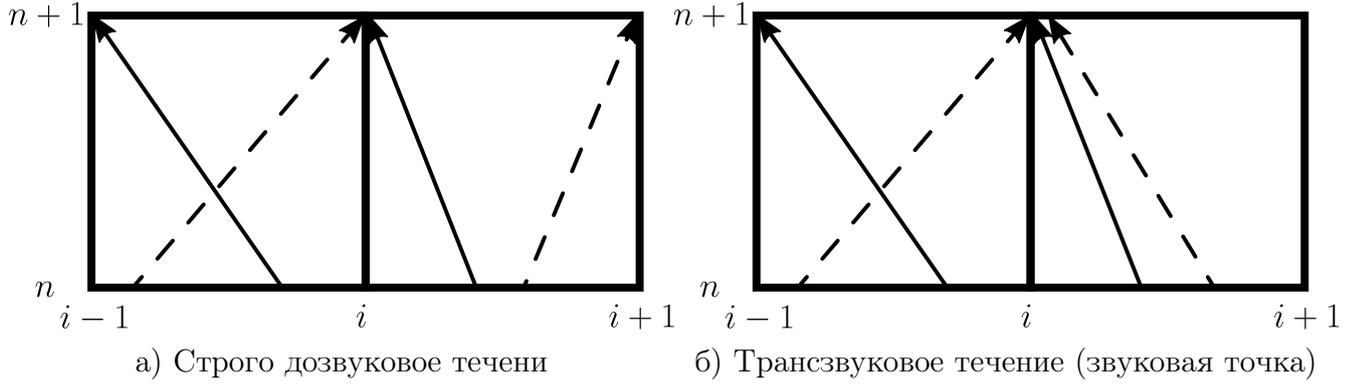
2.1.3 Проблема обработки звуковых точек

Рассмотрим характеристическую фазу алгоритма (2.4) более подробно. В случае строго дозвукового или строго сверхзвукового течения имеем:

$$(\lambda_k)_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} > 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad n \geq 0, \quad k = 1, 2.$$

Из этого неравенства следует, что в каждый внутренний узел сетки на слое $n+1$ приходит ровно одна характеристика с инвариантом R_1 и ровно одна характеристика с инвариантом R_2 (см. рис. 2.2а). Таким образом, потоковые значения

высоты и скорости на следующем слое по времени могут однозначно найдены по формулам (2.5). В общем случае в каждый узел сетки может приходиться от 0 до 2 характеристик для каждого из инвариантов (см. рис. 2.26), и использование формул (2.5) уже может быть невозможным, так как в узле либо не будет значений $(R_k)_i^{n+1}$, либо их будет несколько. Следовательно, для расчетов трансзвуковых течений необходимо задать некоторый алгоритм обработки звуковых точек $SP(H_{left}, u_{left}, H_{right}, u_{right})$.



Штрихованные стрелки — характеристики с инвариантом R_1 , сплошные — с инвариантом R_2 .

Рисунок 2.2 — Направление характеристик на второй фазе схемы КАБАРЕ

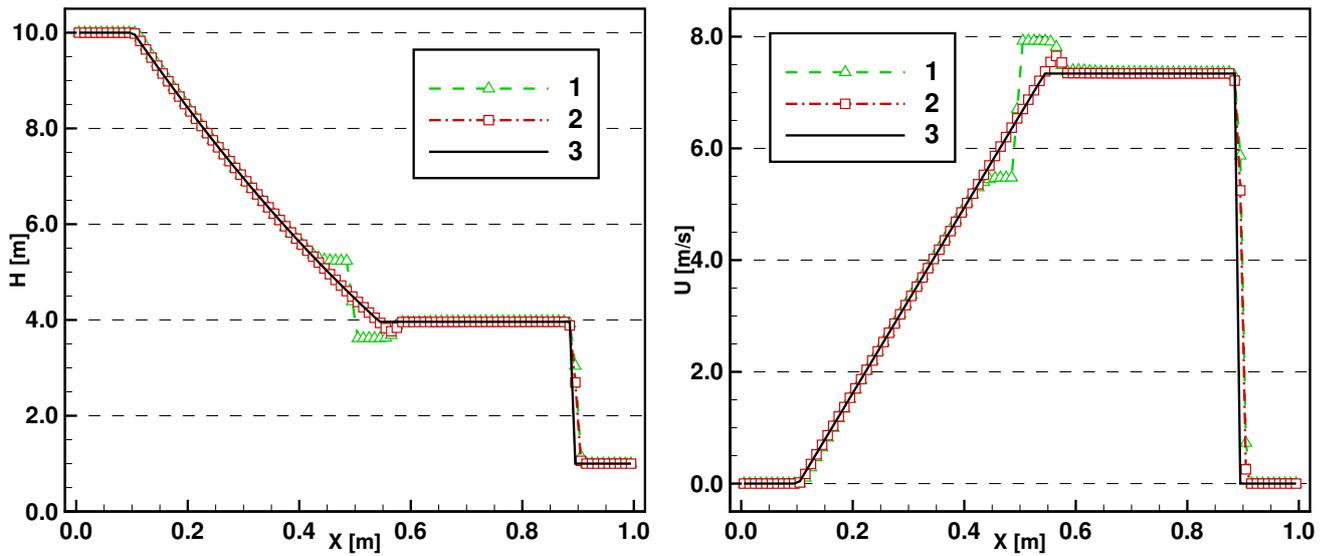
Будем говорить, что по инварианту R_k возникает звуковая точка в пространственно-временном узле (x_i, t_{n+1}) , если $(\lambda_k)_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \leq 0$. Если строить алгоритм обработки звуковой точки $SP()$ используя характеристический подход, то надо каким-то образом переопределить процедуру переноса инварианта и, вообще говоря, процедуру его коррекции. Самым очевидным способом является перенос инварианта по характеристике, определяемой знаком полусуммы собственных значений:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\lambda}_k)_i^{n+1/2} &= 0.5 \left[(\lambda_k)_{i-1/2}^{n+1/2} + (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \right], \quad \text{если } (\lambda_k)_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \leq 0, \\
 (R_k)_i^{n+1} &= \begin{cases} 2(R_k)_{i-1/2}^{n+1/2} - (R_k)_{i-1}^n, & \text{если } (\tilde{\lambda}_k)_i^{n+1/2} > 0, \\ 2(R_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (R_k)_{i+1}^n, & \text{если } (\tilde{\lambda}_k)_i^{n+1/2} < 0, \\ (R_k)_i^n, & \text{если } (\tilde{\lambda}_k)_i^{n+1/2} = 0. \end{cases} \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Последующая коррекция совпадает с (1.31) за исключением того, что направление монотонизации определяется по знаку полусуммы собственных значений $(\tilde{\lambda}_k)_i^{n+1/2}$. К сожалению, этот казался бы естественный (и даже обратимый по

времени) алгоритм обработки звуковой точки может привести к возникновению разрывов на трансзвуковых волнах разрежения. Например, такой разрыв возникает при решении задачи о распаде разрыва со следующими начальными значениями (см. обозначения на (2.29) и решение на рис. 2.3):

$$H_L = 10, \quad H_R = 1, \quad u_L = 0, \quad u_R = 0, \quad x^* = 0.5. \quad (2.9)$$



а) Высота $H(x,t)$

б) Скорость $u(x,t)$

1 — решение по алгоритму SP (2.8); 2 — решение по алгоритму SP (2.10); 3 — аналитическое решение.

Рисунок 2.3 — Результаты расчетов по задаче Римана (2.9) на момент времени $t = 0.04$ на равномерной сетке из 100 ячеек

Вместо обратимого по времени алгоритма (2.8), который может привести к нефизичному решению, можно использовать более простой метод, основанный на осреднении инварианта в звуковой точке по окружающим ее консервативным значениям:

$$(R_k)_i^{n+1} = 0.5 \left[(R_k)_{i-1/2}^{n+1/2} + (R_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \right], \quad \text{если} \quad (\lambda_k)_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \leq 0. \quad (2.10)$$

В этом случае коррекция инвариантов не требуется, так как принцип максимума выполняется автоматически. Действительно, согласно принципу максимум при $CFL \in [0,1]$ инвариант в пространственно-временной точке (x_i, t^{n+1}) перенос-

сится с отрезка $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ на промежуточном слое $n + 1/2$ и должен лежать между значениями $(R_k)_{i-1/2}^{n+1/2}$ и $(R_k)_{i+1/2}^{n+1/2}$. Алгоритм (2.10) позволяет получать относительно качественные профили волн разрежения (например, см. решение задачи (2.9) этим методом на рис. 2.3). Однако, этот алгоритм обладает серьезным недостатком: он не обладает свойством временной обратимости, а значит не является бездиссипативным, что отличает его от стандартного алгоритма для строго дозвуковых и сверхзвуковых течений (2.4). Более того, иногда его использование приводит к нефизичным решениям в случае многомерных уравнений мелкой воды.

Отметим также, что существуют другие, нехарактеристические алгоритмы обработки звуковых точек. Например, в [42] для нахождения потоковых переменных на звуковых точках используется аналитическое решение задачи о распаде разрыва. Этот метод позволяет получать физичные решение для трансзвуковых течений, но обладает только первым порядком аппроксимации.

2.1.4 Локально- неявный алгоритм обработки звуковых точек

Построим алгоритм обработки звуковых точек SP , удовлетворяющий всем основным свойствам стандартной схемы КАБАРЕ: вторым порядком аппроксимации по времени и пространству, свойством временной обратимости и характеристическим способом обработки всех потоковых переменных.

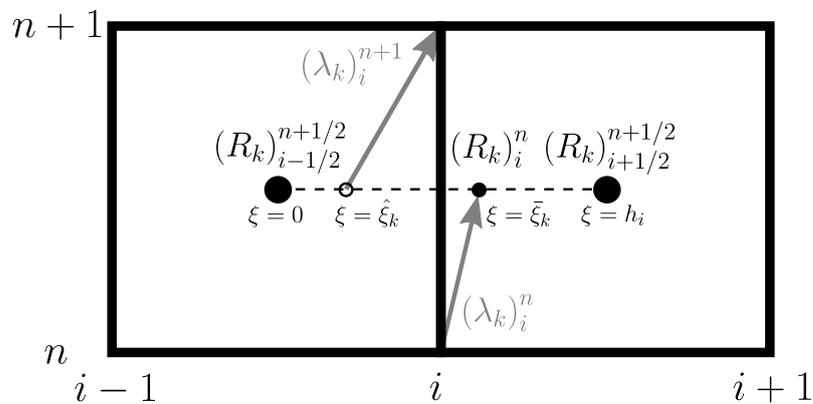


Рисунок 2.4 — Шаблон локально-неявного алгоритма обработки звуковых точек

Для определенности будем считать, что в пространственно-временном узле (x_i, t_{n+1}) возникает звуковая точка по инвариату R_1 : $(\lambda_1)_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot (\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \leq 0$. Рассмотрим окрестность звуковой точки, состоящую из 2 соседних пространственно-временных ячеек (см. рис. 2.4). Выпустим из точки (x_i, t_n) прямую характеристику с наклоном, соответствующим собственному значению $(\lambda_1)_i^n = u_i^n + \sqrt{gH_i^n}$, и перенесем по ней инвариант $(R_1)_i^n$ на промежуточный слой по времени $n + 1/2$. Затем выпустим другую характеристику из точки (x_i, t_{n+1}) с еще неизвестным наклоном, соответствующим собственному значению $(\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1} = u_i^{n+1} + \sqrt{(gH_i^{n+1})}$. Вводя промежуточную систему координат

$$\xi = x - x_{i-1/2}, \quad x_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1}),$$

построим интерполяционный полином второй степени $P_2(\xi)$ для инварианта R_1 на промежуточном слое, используя следующие условия:

$$\begin{cases} P_2(0) = (R_1)_{i-1/2}^{n+1/2}, \\ P_2(\bar{\xi}_1) = (R_1)_i^n, \quad \bar{\xi}_1 = 0.5h_{i-1/2} + 0.5\tau_n(\lambda_1)_i^n, \\ P_2(h_i) = (R_1)_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Тогда полином $P_2(\xi)$ будет иметь следующий вид:

$$P_2(\xi) = (R_1)_{i-1/2}^{n+1/2} \frac{\xi - h_i}{-h_i} \frac{\xi - \bar{\xi}_1}{-\bar{\xi}_1} + (R_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{\xi}{h_i} \frac{\xi - \bar{\xi}_1}{h_i - \bar{\xi}_1} + (R_1)_i^n \frac{\xi}{\bar{\xi}_1} \frac{\xi - h_i}{\bar{\xi}_1 - h_i}. \quad (2.12)$$

С помощью интерполяционного полинома $P_2(\xi)$ можно найти значение инварианта R_1 в точке пересечения опущенной из (x_i, t_{n+1}) характеристики с средним слоем по времени и перенести этот инвариант на слой $n + 1$:

$$(I_1)_i^{n+1} = P_2(\hat{\xi}_1), \quad \hat{\xi}_1 = 0.5h_{i-1/2} - 0.5\tau_n(\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1}. \quad (2.13)$$

Возвращаясь к исходным неизвестным высоте и скорости и используя $h_i = 0.5(h_{i-1/2} + h_{i+1/2})$, $(R_1)_i^{n+1} = u_i^{n+1} + 2\sqrt{gH_i^{n+1}}$, получим следующее уравнение

относительно неизвестных $u_i^{n+1}, c_i^{n+1} = \sqrt{(gH_i^{n+1})}$:

$$\begin{aligned}
& u_i^{n+1} + 2c_i^{n+1} = \\
& = \tau_n (R_1)_{i-1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} + c_i^{n+1} + (\lambda_1)_i^n)}{4h_i \bar{\xi}_1} - \\
& - \tau_n (R_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} + c_i^{n+1} + (\lambda_1)_i^n)}{4h_i (h_i - \bar{\xi}_1)} + \\
& + (R_1)_i^n \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}]) (h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}])}{4\bar{\xi}_1 (h_i - \bar{\xi}_1)}. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Для разрешимости уравнению (2.14) требуется еще одно уравнение, связывающее u_i^{n+1} и c_i^{n+1} . В случае, когда в пространственно-временной точке (x_i, t_{n+1}) нет звуковой точки по инварианту R_2 , значение $(R_2)_i^{n+1}$ может быть рассчитано по стандартному алгоритму линейной экстраполяции (2.4), и уравнение (2.14) дополняется связью между R_2 и u, c (2.2).

В случае, когда по инварианту R_2 тоже возникает звуковая точка, для R_2 можно применить аналогичную (2.14) процедуру интерполяции и переноса по характеристикам, что приведет к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
& u_i^{n+1} - 2c_i^{n+1} = \\
& = \tau_n (R_2)_{i-1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} - c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} - c_i^{n+1} + (\lambda_2)_i^n)}{4h_i \bar{\xi}_2} - \\
& - \tau_n (R_2)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} - c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} - c_i^{n+1} + (\lambda_2)_i^n)}{4h_i (h_i - \bar{\xi}_2)} + \\
& + (R_2)_i^n \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} - c_i^{n+1}]) (h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} - c_i^{n+1}])}{4\bar{\xi}_2 (h_i - \bar{\xi}_2)}, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

где $\bar{\xi}_2 = 0.5h_{i-1/2} + 0.5\tau_n (\lambda_2)_i^n$.

В итоге в каждой звуковой точке на слое $n + 1$ надо решить систему из 2 уравнений (каждое из которых может быть линейным или нелинейным) относительно неизвестных u_i^{n+1} и c_i^{n+1} . Вид этих уравнений определяется тем, возникает ли в рассматриваемом пространственно-временном узле звуковая точка только по одному или сразу по двум инвариантам. Всего возможно три случая:

1. Звуковая точка возникает только для инварианта R_1 .

В этом случае система уравнений состоит из уравнения (2.14), полученного с помощью переноса R_1 по неявно построенной характеристике, и связи между R_2 и исходными потоковыми переменными, где R_2 считается с помощью стандартной линейной экстраполяции (2.4):

$$u_i^{n+1} - 2c_i^{n+1} = (R_2)_i^{n+1} \quad (2.16)$$

2. Звуковая точка возникает только для инварианта R_2 .

В этом случае система уравнений состоит из уравнения (2.15), полученного с помощью переноса R_2 по неявно построенной характеристике, и связи между R_1 и исходными потоковыми переменными, где R_1 считается с помощью стандартной линейной экстраполяции (2.4):

$$u_i^{n+1} + 2c_i^{n+1} = (R_1)_i^{n+1} \quad (2.17)$$

3. Звуковая точка возникает для обоих инвариантов R_1 и R_2 .

В этом случае система уравнений состоит из уравнений (2.14) и (2.15), полученных с помощью переноса R_1 и R_2 по неявно построенным характеристикам.

В случаях 1 и 2 система уравнений может быть приведена к одному квадратному уравнению относительно u_i^{n+1} путем исключения второй неизвестной с помощью уравнения (2.16) или (2.17), соответственно. Итоговое уравнение (или уравнения) решается методом Ньютона. Отметим, что если в качестве начального приближения для метода Ньютона использовать потоковые переменные, полученные с помощью необратимого алгоритма (2.10), то приемлемая точность обычно достигается за две-три итерации. Таким образом, предложенный локально-неявный алгоритм обработки звуковых точек добавляет в общий алгоритм схемы КАБАРЕ относительно мало арифметических действий и практически не «тормозит» расчеты.

После решения вышеупомянутой системы получившиеся значения u_i^{n+1} и c_i^{n+1} можно либо сразу использовать в третьей фазе (2.6), либо сначала монотонизировать. Пока что будет считать, что все процедуры коррекции отключены. Тогда предложенный алгоритм обработки звуковых точек обладает вторым порядком аппроксимации по времени и пространству (т.к. при его построении используется интерполяционный полином второго порядка) и свойством вре-

менной обратимости. Выполнение последнего свойства может быть проверено с помощью относительно простого правила вращения-отражения, которое будет сформулировано в следующем разделе.

2.1.5 Лемма о временной обратимости

В этом разделе вводится несколько определений для балансно-характеристических схем, необходимых для доказательства временной обратимости некоторого класса методов. Затем формулируются условия леммы о временной обратимости и приводится ее доказательство.

Определение 1. *Характеристическая фаза балансно-характеристической схемы имеет шаблон размера $\{m_1, m_2\}$, если в пространственно-временной плоскости (x, t) ее шаблон для вычисления инвариантов Римана в точке (x_i, t_{n+1}) состоит из m_1 точек, m_2 из которых лежат на промежуточном слое $n + 1/2$.*

Например, стандартная характеристическая фаза схемы КАБАРЕ для строго дозвуковых и сверхзвуковых течений (2.4) имеет шаблон размера $\{3, 1\}$ (см. рис. 2.5а и 2.5б). Характеристическая фаза для звуковых точек (2.14), (2.15) имеет шаблон размера $\{4, 2\}$ (см. рис. 2.5в). Необратимый по времени алгоритм (2.10) имеет шаблон размера $\{3, 2\}$.

Определение 2. *Характеристическая фаза с шаблоном размера $\{m_1, m_2\}$ называется симметричной полиномиальной реконструкцией, если все потоковые значения инвариантов Римана $(R_k)_i^{n+1}$ рассчитываются с помощью переноса с полинома $P_{m_1-2}(x)$ $(m_1 - 2)^{oi}$ степени, построенного на промежуточном слое с помощью остальных $m_1 - 1$ значений инвариантов, перенесенных на этот слой по характеристикам с наклонами, определенными либо индивидуальными значениями $(\lambda_k)_\bullet^*$, либо общим значением $(\lambda_k)^{n+1/2} = f(\{(\lambda_k)_\bullet^*\}_{template})$ — функцией всех собственных значений шаблона, удовлетворяющей $f(\{-(\lambda_k)_\bullet^*\}_{template}) = -f(\{(\lambda_k)_\bullet^*\}_{template})$.*

Так, стандартная линейная экстраполяция для дозвуковых и сверхзвуковых течений (2.4) на самом деле является симметричной полиномиальной рекон-

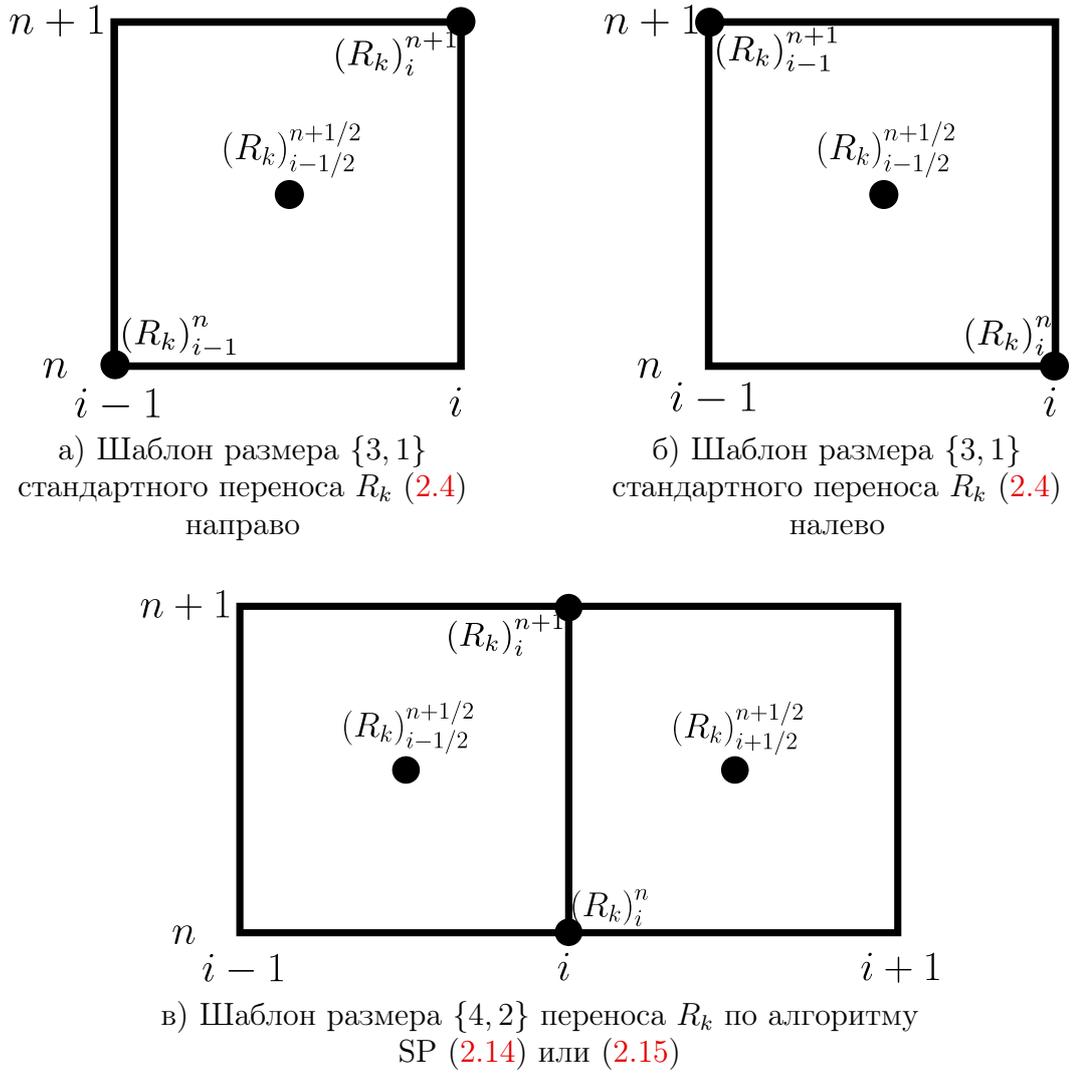


Рисунок 2.5 — Шаблоны различных характеристических фаз

струкцией с помощью полинома $P_1(x)$, где все переносы определяются общим значением $(\lambda_k)_{i-1/2}^{n+1/2}$ или $(\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2}$ в зависимости от знаков этих собственных значений (см. рис. 2.6). Характеристическая фаза для звуковых точек (2.14), (2.15) является симметричной полиномиальной реконструкцией с помощью полинома $P_2(x)$, где все переносы определяются с помощью индивидуальных собственных значений (см. рис. 2.4). Необратимый по времени алгоритм (2.10) не является симметричной полиномиальной реконструкцией.

Определение 3. Характеристическая фаза с шаблоном размера $\{m_1, m_2\}$ для незвуковых точек удовлетворяет правилу вращения-отражения, если ее шаблон для инварианта R_1 , $\lambda_1 > 0$ (< 0) переходит в шаблон для инварианта R_2 , $\lambda_2 < 0$ (> 0) при вращении на 180 градусов вокруг точки $(x^*, t_{n+1/2}^*)$,

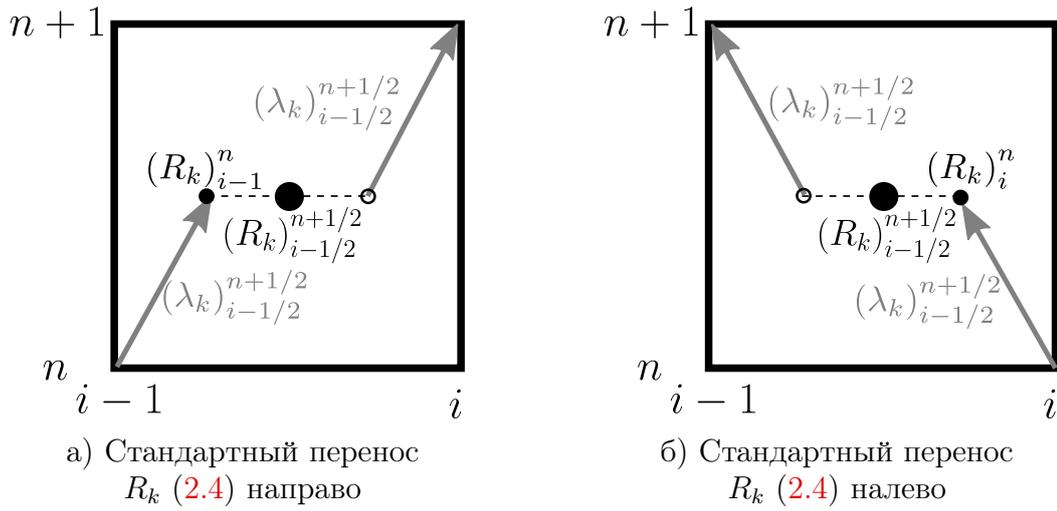


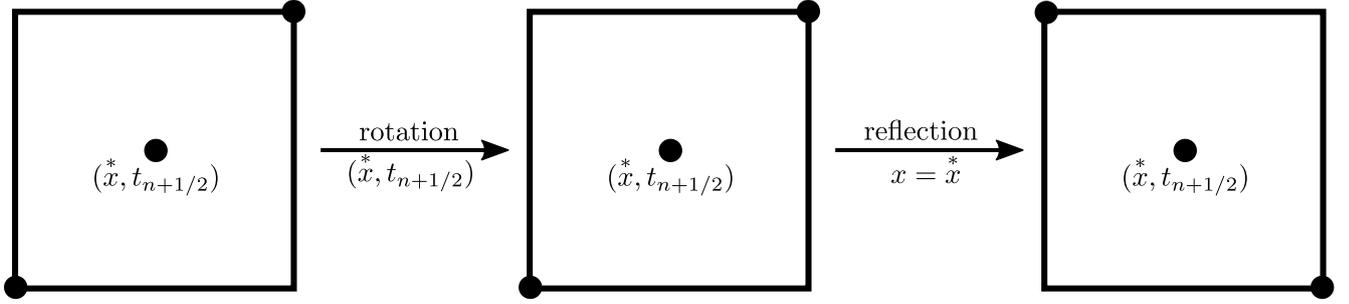
Рисунок 2.6 — Характеристические фазы как симметричные полиномиальные реконструкции

$x^* = \sum_{j=1}^{m_1-m_2} x_j / (m_1 - m_2)$ (x_j — точки шаблона на слоях n и $n+1$) и последующем отражении относительно плоскости $x = x^*$, и так же для R_2 .

Определение 4. Характеристическая фаза с шаблоном размера $\{m_1, m_2\}$ для звуковых точек удовлетворяет правилу вращения-отражения, если ее шаблон для инварианта R_1 переходит в шаблон для инварианта R_2 при вращении на 180 градусов вокруг точки $(x^*, t_{n+1/2})$, $x^* = \sum_{j=1}^{m_1-m_2} x_j / (m_1 - m_2)$ (x_j — точки шаблона на слоях n и $n+1$) и последующем отражении относительно плоскости $x = x^*$, и так же для R_2 .

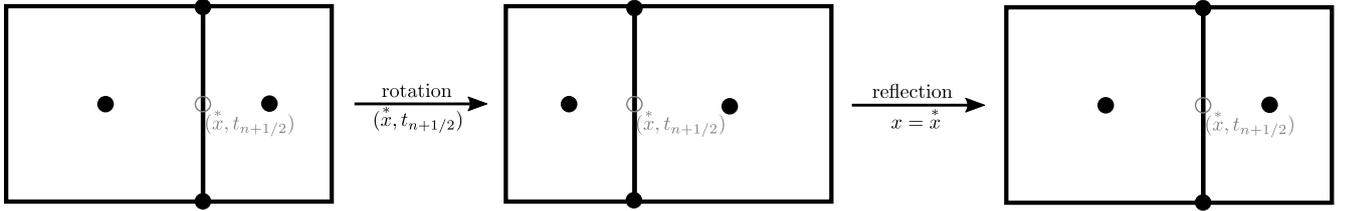
И стандартная линейная экстраполяция (2.4), и алгоритм обработки звуковых точек (2.14), (2.15) удовлетворяют правилу вращения-отражения (см. рис. 2.7 и рис. 2.8, соответственно).

Лемма 1. Балансно-характеристическая схема для уравнений мелкой воды (2.1) с консервативными фазами (2.3), (2.6) и удовлетворяющими правилу вращения-отражения симметричной полиномиальной реконструкцией с шаблоном размера $\{m+2, m\}$ в качестве характеристической фазы для незвуковых точек и симметричной полиномиальной реконструкцией с шаблоном размера $\{\hat{m}+2, \hat{m}\}$ в качестве характеристической фазы для звуковых точек является обратимой по времени при отключенных процедурах монотонизации.



Шаблон для I_1 , $\lambda_1 > 0$ переходит в шаблон для I_2 , $\lambda_2 < 0$.

Рисунок 2.7 — Правило вращения-отражения для стандартной линейной экстраполяции (2.4)



Шаблон для I_1 переходит в шаблон для I_2 .

Рисунок 2.8 — Правило вращения-отражения для алгоритма обработки звуковых точек (2.14),(2.15)

Доказательство. Пусть $\{H_{\bullet}^n\}$, $\{u_{\bullet}^n\}$ — консервативные и потоковые переменные высоты и скорости на слое n , $\{H_{\bullet}^{n+1}\}$, $\{u_{\bullet}^{n+1}\}$ — консервативные и потоковые переменные высоты и скорости на слое $n+1$, полученные с помощью консервативных фаз (2.3),(2.6) и выбранных характеристических фаз. Для определенности будем считать, что переносы в характеристической фазе для незвуковых точек определяются общим значением $(\lambda_k)^{n+1/2} = f(\{(\lambda_k)_{\bullet}^*\}_{template})$, а переносы в характеристической фазе для звуковых точек — индивидуальными значениями $(\lambda_k)_{\bullet}^*$. Как будет видно далее, способ переноса не меняет доказательство значительным образом. Чтобы доказать временную обратимость, надо осуществить еще один шаг алгоритма с тем же шагом по времени τ_n и развернутыми скоростями $\{\hat{u}_{\bullet}^{n+1}\} = \{-u_{\bullet}^{n+1}\}$. Тогда, если $\{H_{\bullet}^{n+2}\} = \{H_{\bullet}^n\}$ и $\{u_{\bullet}^{n+2}\} = \{-u_{\bullet}^n\}$, то временная обратимость будет доказана.

Для начала вычислим промежуточные консервативные переменные с помощью первой характеристической фазы (2.3):

$$\frac{H_{i+1/2}^{n+3/2} - H_{i+1/2}^{n+1}}{\tau_n/2} + \frac{H_{i+1}^{n+1}\hat{u}_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1}\hat{u}_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0$$

Домножая это уравнение на (-1) и пользуясь $\widehat{u}_i^{n+1} = -u_i^{n+1}$, получим:

$$\frac{H_{i+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2}^{n+3/2}}{\tau_n/2} + \frac{H_{i+1}^{n+1}u_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1}u_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0. \quad (2.18)$$

Сравнивая (2.18) с законом сохранения массы в третьей фазе (2.6), приходим к тому, что $H_{i+1/2}^{n+3/2} = H_{i+1/2}^{n+1/2}$. Затем используем закон сохранения импульса первой консервативной фазы (2.3):

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i+1/2}^{n+3/2}u_{i+1/2}^{n+3/2} - H_{i+1/2}^{n+1}\widehat{u}_{i+1/2}^{n+1}}{\tau_n/2} + \frac{H_{i+1}^{n+1}(\widehat{u}_{i+1}^{n+1})^2 - H_i^{n+1}(\widehat{u}_i^{n+1})^2}{h_{i+1/2}} + \\ & + \frac{g(H_{i+1}^{n+1})^2 - (H_i^{n+1})^2}{2h_{i+1/2}} = 0. \end{aligned}$$

Используя $H_{i+1/2}^{n+3/2} = H_{i+1/2}^{n+1/2}$ и $\widehat{u}_{\bullet}^{n+1} = -u_{\bullet}^{n+1}$, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i+1/2}^{n+1}u_{i+1/2}^{n+1} + H_{i+1/2}^{n+1/2}u_{i+1/2}^{n+3/2}}{\tau_n/2} + \frac{H_{i+1}^{n+1}(u_{i+1}^{n+1})^2 - H_i^{n+1}(u_i^{n+1})^2}{h_{i+1/2}} + \\ & + \frac{g(H_{i+1}^{n+1})^2 - (H_i^{n+1})^2}{2h_{i+1/2}} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Сравнивая (2.19) с законом сохранения импульса третьей фазы (2.6), получим $u_{i+1/2}^{n+3/2} = -u_{i+1/2}^{n+1/2}$. Таким образом, промежуточные собственные значения и инварианты Римана меняются местами со сменой знака:

$$\begin{aligned} (\lambda_1)_{i+1/2}^{n+3/2} &= u_{i+1/2}^{n+3/2} + \sqrt{gH_{i+1/2}^{n+3/2}} = -u_{i+1/2}^{n+1/2} + \sqrt{gH_{i+1/2}^{n+1/2}} = -(\lambda_2)_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ (\lambda_2)_{i+1/2}^{n+3/2} &= u_{i+1/2}^{n+3/2} - \sqrt{gH_{i+1/2}^{n+3/2}} = -u_{i+1/2}^{n+1/2} - \sqrt{gH_{i+1/2}^{n+1/2}} = -(\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ (R_1)_{i+1/2}^{n+3/2} &= u_{i+1/2}^{n+3/2} + 2\sqrt{gH_{i+1/2}^{n+3/2}} = -u_{i+1/2}^{n+1/2} + 2\sqrt{gH_{i+1/2}^{n+1/2}} = -(R_2)_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ (R_2)_{i+1/2}^{n+3/2} &= u_{i+1/2}^{n+3/2} - 2\sqrt{gH_{i+1/2}^{n+3/2}} = -u_{i+1/2}^{n+1/2} - 2\sqrt{gH_{i+1/2}^{n+1/2}} = -(R_1)_{i+1/2}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

То же самое выполняется и для собственных значений и инвариантов Римана на слое $n+1$: $(\widehat{\lambda}_1)_{\bullet}^{n+1} = -(\lambda_2)_{\bullet}^{n+1}$, $(\widehat{\lambda}_2)_{\bullet}^{n+1} = -(\lambda_1)_{\bullet}^{n+1}$, $(\widehat{R}_1)_{\bullet}^{n+1} = -(R_2)_{\bullet}^{n+1}$, $(\widehat{R}_2)_{\bullet}^{n+1} = -(R_1)_{\bullet}^{n+1}$. Заметим, что если в узле (x_i, t_{n+1}) возникала звуковая точка для R_1 , то теперь она возникнет в узле (x_i, t_{n+2}) для R_2 , и наоборот. Для

простоты рассмотрим случай, когда звуковая точка в узле (x_i, t_{n+1}) возникает только для R_1 . Все остальные случаи (включая строго дозвуковой и сверхзвуковой случаи) рассматриваются по аналогии.

Теперь нужно осуществить характеристическую фазу алгоритма. Выполнение правила вращения-отражения и размеры шаблонов используемых алгоритмов позволяют заключить, что обе характеристические фазы (и для звуковых, и для незвуковых точек) имеют в шаблоне ровно одну точку на текущем и одну точку на следующем временном слое. Для шаблона вычисления $(R_k)_i^{n+2}$ это точки $(x_{i_k^*}, t_{n+1}) = (2x_k^* - x_i, t_{n+1})$ and (x_i, t_{n+2}) , где $x_k^*, k = 1, 2$ — точки симметрии шаблонов звуковых и незвуковых точек, соответственно. Все другие точки шаблонов характеристических фаз располагаются на промежуточном слое и имеют пространственные координаты $\{x_1^j\}_{j=1}^{\hat{m}}$ и $\{x_2^j\}_{j=1}^m$ для звуковых и незвуковых точек, соответственно. Значения высоты H_i^n и скорости u_i^n участвуют в двух уравнениях характеристических фаз между слоями n и $n + 1$:

$$\begin{aligned} u_i^n + 2\sqrt{gH_i^n} &= P_{\hat{m}}(\bar{x}_1), \quad \bar{x}_1 = x_i + 0.5\tau_n \left(u_i^n + \sqrt{gH_i^n} \right), \\ u_i^n - 2\sqrt{gH_i^n} &= P_m(\bar{x}_2), \quad \bar{x}_2 = x_i + 0.5\tau_n f(\{(\lambda_2)_\bullet^*\}_{template}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где полином $P_{\hat{m}}(x)$ строится по $\hat{m} + 1$ значениям $\{R_1^j\}_{j=1}^{\hat{m}}, (R_1)_{i_1^*}^{n+1}$ в точках $\{x_1^j\}_{j=1}^{\hat{m}}, \hat{x}_1 = x_i - 0.5\tau_n(u_i^{n+1} + \sqrt{gH_i^{n+1}})$, соответственно, а полином $P_m(x)$ — по $m + 1$ значениям $\{R_2^j\}_{j=1}^m, (R_2)_{i_2^*}^{n+1}$ в точках $\{x_2^j\}_{j=1}^m, \hat{x}_2 = x_i - 0.5\tau_n f(\{(\lambda_2)_\bullet^*\}_{template})$, соответственно.

Рассмотрим формулы характеристических фаз, вычисляющих H_i^{n+2} и u_i^{n+2} . В силу правила вращения-отражения шаблон для $(R_1)_i^{n+2}$ состоит из пространственно-временных точек $(x_i, t_{n+2}), (x_{i_2^*}, t_{n+1}), \{(x_2^j, t_{n+3/2})\}_{j=1}^m$, а шаблон для $(R_2)_i^{n+2}$ — из $(x_i, t_{n+2}), (x_{i_1^*}, t_{n+1}), \{(x_1^j, t_{n+3/2})\}_{j=1}^{\hat{m}}$. H_i^{n+2} и u_i^{n+2} теперь вычисляются с помощью следующих уравнений:

$$\begin{aligned} u_i^{n+2} + 2\sqrt{gH_i^{n+2}} &= \tilde{P}_m(x_i - 0.5\tau_n f(\{(-\lambda_2)_\bullet^*\}_{template})), \\ u_i^{n+2} - 2\sqrt{gH_i^{n+2}} &= \tilde{P}_{\hat{m}}(x_i - 0.5\tau_n(u_i^{n+2} - \sqrt{gH_i^{n+2}})), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где полином $\tilde{P}_m(x)$ строится по $m + 1$ значениям $\{-R_2^j\}_{j=1}^m, (-R_2)_{i_2^*}^n$ в точках $\{x_2^j\}_{j=1}^m, \hat{x}_2$, соответственно, а полином $\tilde{P}_{\hat{m}}(x)$ — по $\hat{m} + 1$ значениям $\{-R_1^j\}_{j=1}^{\hat{m}}, (-R_1)_{i_1^*}^{n+1}$ в точках $\{x_1^j\}_{j=1}^{\hat{m}}, \hat{x}_1$, соответственно. Пользуясь свойствами

интерполяционных полиномов, получим: $\tilde{P}_m(x) = -P_m(x)$ и $\tilde{P}_{\hat{m}}(x) = -P_{\hat{m}}(x)$. Тогда система (2.21) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} -u_i^{n+2} + 2\sqrt{gH_i^{n+2}} &= P_{\hat{m}}(x_i + 0.5\tau_n(-u_i^{n+2} + \sqrt{gH_i^{n+2}})), \\ -u_i^{n+2} - 2\sqrt{gH_i^{n+2}} &= P_m(x_i + 0.5\tau_n f(\{(\lambda_2)_\bullet^*\}_{template})), \end{aligned} \quad (2.22)$$

Сравнивая (2.20) с (2.22), заметим, что система (2.22) имеет решение $H_i^{n+2} = H_i^n$, $u_i^{n+2} = -u_i^n$, где $x_i + 0.5\tau_n(-u_i^{n+2} + \sqrt{gH_i^{n+2}}) = \bar{x}_1$, $x_i + 0.5\tau_n f(\{(\lambda_2)_\bullet^*\}_{template}) = \bar{x}_2$.

И окончательно, равенства $H_{i+1/2}^{n+2} = H_{i+1/2}^n$, $u_{i+1/2}^{n+2} = -u_{i+1/2}^n$ могут быть проверены аналогично тому, как в начале доказательства проверялось $H_{i+1/2}^{n+3/2} = H_{i+1/2}^{n+1/2}$, $u_{i+1/2}^{n+3/2} = -u_{i+1/2}^{n+1/2}$. Для этого надо сравнить третью фазу (2.6) для перехода со слоя $n + 3/2$ на слой $n + 2$ с первой фазой (2.3) для перехода со слоя n на слой $n + 1/2$. Таким образом, мы показали, что $\{H_\bullet^{n+2}\} = \{H_\bullet^n\}$ and $\{u_\bullet^{n+2}\} = \{-u_\bullet^n\}$, что означает выполнение свойства временной обратимости. \square

Следствие 1. *Балансно-характеристическая схема для уравнений мелкой воды (2.1) с консервативными фазами (2.3),(2.6), алгоритмом (2.4) в качестве характеристической фазы для незвуковых точек и алгоритмом (2.14),(2.15) в качестве характеристической фазы для звуковых точек является обратимой по времени при отключенных процедурах монотонизации.*

2.1.6 Нелинейная коррекция для алгоритма обработки звуковых точек

Так как предложенный алгоритм обработки звуковых точек имеет второй порядок аппроксимации, то, согласно теореме Годунова [5], решение может стать немонотонным в областях больших градиентов. Поэтому, чтобы сохранить монотонность решения, дополним SP -алгоритм процедурой коррекции на основе принципа максимума, аналогичный (1.31).

Пусть звуковая точка возникает в пространственно-временном узле (x_i, t_{n+1}) либо по одному, либо сразу по двум инвариантам. Тогда значения ско-

рости и высоты будут вычислены по двум из четырех уравнений (2.14) - (2.17). Чтобы монотонизировать эти значения сначала надо найти немонотонизированные значения инвариантов Римана, так как только для них в дифференциальном случае выполняется принцип максимума:

$$(R_{1,2})_i^{n+1} = u_i^{n+1} \pm 2c_i^{n+1}.$$

Согласно шаблону SP -алгоритма (см. рис. 2.4) при $CFL \in [0,1]$ значение $(R_k)_i^{n+1}$ переносится в рассматриваемый узел из некоторой точки, расположенной между точками $x_{i-1/2}$, $x_{i-1/2} + \bar{\xi}_k$ и $x_{i+1/2}$ на полуцелом временном слое. Эти точки содержат значения $(R_k)_{i-1/2}^{n+1/2}$, $(R_k)_i^n$ and $(R_k)_{i+1/2}^{n+1/2}$, соответственно. Из принципа максимума следует, что $(R_k)_i^{n+1}$ должно лежать между этими значениями, поэтому применим следующую нелинейную коррекцию:

$$(R_k)_i^{n+1} = \begin{cases} \min (R_k)_i^{n+1/2}, & \text{если } (R_k)_i^{n+1} < \min (R_k)_i^{n+1/2}, \\ (R_k)_i^{n+1}, & \text{если } \min (R_k)_i^{n+1/2} \leq (R_k)_i^{n+1} \leq \max (R_k)_i^{n+1/2}, \\ \max (R_k)_i^{n+1/2}, & \text{если } (R_k)_i^{n+1} > \max (R_k)_i^{n+1/2}, \end{cases}$$

$$\min (R_k)_i^{n+1/2} = \min \left\{ (R_k)_{i-1/2}^{n+1/2}, (R_k)_i^n, (R_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \right\},$$

$$\max (R_k)_i^{n+1/2} = \max \left\{ (R_k)_{i-1/2}^{n+1/2}, (R_k)_i^n, (R_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \right\}.$$
(2.23)

После нелинейной коррекции (2.23) значения скорости и высоты обратно восстанавливаются с помощью привычных формул (2.5).

Отметим, что, вообще говоря, свойство временной обратимости не выполняется при использовании нелинейной коррекции (2.23). Тем не менее условия для этой коррекции выполняются только в областях больших градиентов решения, и, например, на волнах разрежения временная обратимость, как правило, сохраняется.

2.2 Обработка звуковых точек для систем уравнений с локальными инвариантами Римана

Обобщим приведённый в предыдущем разделе SP -алгоритм на случай гиперболических систем с локальными инвариантами Римана. Сделаем это на примере той же системы уравнений мелкой воды (2.1).

Характеристическую форму уравнений (2.2) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} H \right) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \sqrt{\frac{g}{H}} H \right) &= 0, \quad \lambda_1 = u + \sqrt{gH}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(u - \sqrt{\frac{g}{H}} H \right) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \sqrt{\frac{g}{H}} H \right) &= 0, \quad \lambda_2 = u - \sqrt{gH}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

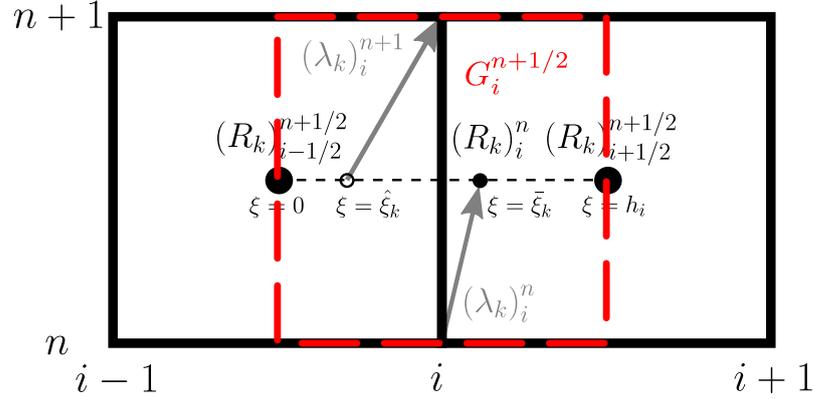
Тогда, исходя из характеристической формы (2.24), можно ввести следующие локальные линейные инварианты:

$$R_1 = R = u + G_c^{n+1/2} H, \quad R_2 = Q = u - G_c^{n+1/2} H, \quad G = \sqrt{\frac{g}{H}} = \frac{c}{H}. \quad (2.25)$$

Основным отличием линейных инвариантов (2.25) от аналитических (2.2) является то, что выражения для инвариантов уже зависят не только от исходных переменных H и u , но и некоторых локальных коэффициентов G . В стандартном алгоритме схемы КАБАРЕ для строго дозвуковых и сверхзвуковых течений эти локальные коэффициенты берутся из центров пространственно-временных ячеек. Так как в этом случае все переносы осуществляются только в пределах одной пространственно-временной ячейки, то этого достаточно. В случае же возникновения звуковых точек в предложенном в предыдущем разделе SP -алгоритме переносы осуществляются уже в пределах двух пространственно-временных ячеек, соседних со звуковой точкой (см. шаблон рис. 2.4). В этом случае уже, вообще говоря, нельзя строить полином второй степени $P_2(\xi)$ по значениям инвариантов R_k на полуцелом слое, так как эти инварианты посчитаны с помощью формул (2.25) с разными локальными коэффициентами G .

Возьмем за основу предложенный ранее SP -алгоритм для аналитических инвариантов, и будем вычислять все необходимые локальные инварианты Ри-

мана в окрестности звуковой точки с некоторым общим локальным коэффициентом $G_i^{n+1/2}$ (см. рис. 2.9).



Красным выделена область, где локальные инварианты (2.25) рассчитываются с помощью общего коэффициента $G_i^{n+1/2}$.

Рисунок 2.9 — Шаблон локально-явного алгоритма обработки звуковых точек для систем с локальными инвариантами

Локальный коэффициент $G_i^{n+1/2}$ будем принимать равным осредненному по времени значению G :

$$G_i^{n+1/2} = 0.5(G_i^n + G_i^{n+1}) = 0.5 \left(\frac{c_i^n}{H_i^n} + \frac{c_i^{n+1}}{H_i^{n+1}} \right). \quad (2.26)$$

Таким образом, общий для инвариантов в окрестности звуковой точки коэффициент $G_i^{n+1/2}$ еще неизвестен на этапе обработки звуковой точки, так как он зависит от величин на слое $n+1$. Отметим, что, казалось бы, можно рассмотреть более простой вариант осреднения по пространству $G_i^{n+1/2} = 0.5(G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2})$, который на момент выполнения характеристической фазы уже можно найти. Но такое осреднение не позволяет рассчитывать трансзвуковые течения (программа заканчивается авостом). Это связано с общей для схемы КАБАРЕ проблемой вычисления локальных инвариантов: их интерполяция по пространству по значениям из нескольких ячеек обычно приводит к плохим результатам.

Теперь для всех инвариантов, участвующих в переносах (2.14), (2.15), можно выписать формулы (2.25) с помощью общего коэффициента $G_i^{n+1/2}$ (2.26). Повторяя аналогичные случаю аналитических инвариантов рассуждения, можно

получить следующее уравнение для звуковой точки по инварианту R_1

$$\begin{aligned}
& u_i^{n+1} + G_i^{n+1/2} H_i^{n+1} = \\
& = \tau_n (R_1)_{i-1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} + c_i^{n+1} + (\lambda_1)_i^n)}{4h_i \bar{\xi}_1} - \\
& - \tau_n (R_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} + c_i^{n+1} + (\lambda_1)_i^n)}{4h_i (h_i - \bar{\xi}_1)} + \\
& + (R_1)_i^n \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}]) (h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} + c_i^{n+1}])}{4\bar{\xi}_1 (h_i - \bar{\xi}_1)}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

и следующее уравнение для звуковой точки по инварианту R_2

$$\begin{aligned}
& u_i^{n+1} - G_i^{n+1/2} H_i^{n+1} = \\
& = \tau_n (R_2)_{i-1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} - c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} - c_i^{n+1} + (\lambda_2)_i^n)}{4h_i \bar{\xi}_2} - \\
& - \tau_n (R_2)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} - c_i^{n+1}]) (u_i^{n+1} - c_i^{n+1} + (\lambda_2)_i^n)}{4h_i (h_i - \bar{\xi}_2)} + \\
& + (R_2)_i^n \frac{(h_{i-1/2} - \tau_n [u_i^{n+1} - c_i^{n+1}]) (h_{i+1/2} + \tau_n [u_i^{n+1} - c_i^{n+1}])}{4\bar{\xi}_2 (h_i - \bar{\xi}_2)}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

В отличие от (2.14),(2.15), уравнения (2.27),(2.28) уже не обладают квадратичной нелинейностью, так как $G_i^{n+1/2}$, $(R_k)_{i-1/2}^{n+1/2}$, $(R_k)_{i+1/2}^{n+1/2}$ и $(R_k)_i^n$ зависят от u_i^{n+1} и H_i^{n+1} . Тем не менее их так же можно решать методом Ньютона за две-три итерации, взяв в качестве начального приближения (2.10). Процедура монотонизации при этом остается той же (2.23), учитывая, что все участвующие в ней инварианты должны быть посчитаны по формулам (2.25) с $G_i^{n+1/2}$, найденным в результате решения уравнений (2.27),(2.28).

Аналогично случаю для систем с аналитическими инвариантами можно показать, что SP -алгоритм (2.27),(2.28) обладает вторым порядком аппроксимации и обратим по времени (обратимость сохраняется за счет симметричной аппроксимации G (2.26)).

2.3 Результаты расчетов

Приведем результаты расчетов для уравнений мелкой воды (2.1) по схеме КАБАРЕ, модифицированной SP -алгоритмом (2.14),(2.15). Результаты будут демонстрироваться только для схемы с аналитическими инвариантами Римана, так как существенных различий между результатами по ней и по схеме с локальными инвариантами нет.

2.3.1 Задачи о распаде разрыва для уравнений мелкой воды

Протестируем предложенную схему на задачах о распаде разрыва (задачах Римана), для которых известно аналитическое решение. Для этого рассмотрим начально-краевую задачу на отрезке $x \in [a, b]$ со следующими начальными условиями:

$$H_0(x) = \begin{cases} H_L, & a \leq x \leq x^*, \\ H_R, & x^* < x \leq b. \end{cases} \quad u_0(x) = \begin{cases} u_L, & a \leq x \leq x^*, \\ u_R, & x^* < x \leq b. \end{cases} \quad (2.29)$$

Граничные условия конкретизировать не будем, так как все вычисления в последующих тестовых задачах проводятся до того, как волны разрежения или ударные волны достигнут границы области. Сравнение результатов будет проводиться с ранее предложенным явным SP -алгоритмом [23], а также с аналитическими решениями на классических тестах Торо [95, с. 120]. Все расчеты выполнялись с $g = 9.80665$ и $CFL = 0.3$, если не оговорено иное.

Отметим, что решение задач Римана с помощью балансно-характеристических схем очень чувствительно к начальному согласованию консервативных и потоковых переменных. Так, например, в областях негладкости решения (а именно на стыке волн разрежения с константным решением) могут образоваться немонотонные «провалы» (см. решение задачи (2.9) по алгоритму (2.10) на рис. 2.3). Эти немонотонные провалы, как правило, имеют фиксированную длину в несколько расчетных ячеек и их амплитуда уменьшается со сгущением

сетки. От таких численных артефактов можно избавиться с помощью аккуратного согласования начальных потоковых и консервативных переменных.

2.3.2 Согласование начальных данных

Согласно [112], стандартная схема КАБАРЕ для дозвуковых течений дает монотонное решение при $CFL \in (0, 0.5]$, если начальные данные согласованы следующим образом:

$$H_{i+1/2}^0 = 0.5 (H_i^0 + H_{i+1}^0), \quad u_{i+1/2}^0 = 0.5 (u_i^0 + u_{i+1}^0). \quad (2.30)$$

Для решения задач Римана (2.29) построим сетку таким образом, чтобы точка разрыва x^* попала в центр ячейки между узлами i^* и $i^* + 1$, и зададим начальные потоковые переменные:

$$H_i^0 = \begin{cases} H_L, & 0 \leq i \leq i^*, \\ H_R, & i^* + 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad u_i^0 = \begin{cases} u_L, & 0 \leq i \leq i^*, \\ u_R, & i^* + 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (2.31)$$

После этого начальные консервативные переменные согласуются с потоковыми с помощью (2.30). Назовем такой способ задания начальных условий «инициализацией А». Как будет показано далее, именно такой способ инициализации позволяет минимизировать немонотонные провалы в решении.

Для сравнения приведем другой способ инициализации для задач Римана (2.29). Для этого построим сетку так, чтобы точка разрыва x^* попала в узел сетки i^* , и зададим начальные консервативные переменные:

$$H_{i+1/2}^0 = \begin{cases} H_L, & 0 \leq i \leq i^* - 1, \\ H_R, & i^* \leq i \leq N - 1. \end{cases} \quad u_{i+1/2}^0 = \begin{cases} u_L, & 0 \leq i \leq i^* - 1, \\ u_R, & i^* \leq i \leq N - 1. \end{cases} \quad (2.32)$$

После этого зададим начальные потоковые переменные с помощью консервативных значений инвариантов Римана:

$$\begin{aligned}
 R_{i+1/2}^0 &= u_{i+1/2}^0 + 2\sqrt{gH_{i+1/2}^0}, & i = \overline{0, N-1}, \\
 Q_{i+1/2}^0 &= u_{i+1/2}^0 - 2\sqrt{gH_{i+1/2}^0}, \\
 H_i^0 &= g^{-1} \left(0.25[R_{i-1/2}^0 - Q_{i+1/2}^0] \right)^2, & i = \overline{1, N-1}. \\
 u_i^0 &= 0.5 \left(R_{i-1/2}^0 + Q_{i+1/2}^0 \right),
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

И отдельно зададим граничные потоковые значения:

$$H_0^0 = H_L, H_N^0 = H_R, u_0^0 = u_L, u_N^0 = u_R. \tag{2.34}$$

Способ задания начальных данных (2.32) - (2.34) назовем «инициализацией Б».

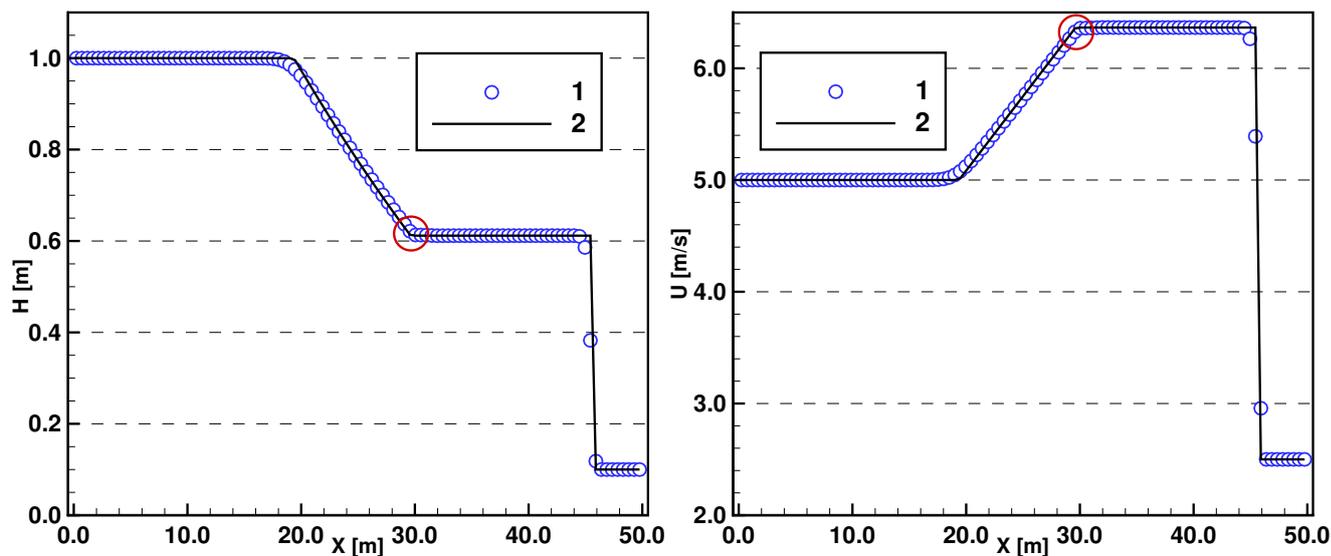
2.3.3 Сверхзвуковое течение

Чтобы описать все основные свойства решения задачи Римана, полученного с помощью схемы КАБАРЕ, приведем результаты расчетов для следующей строго сверхзвуковой задачи Римана на отрезке $x \in [0, 50]$:

$$H_L = 1.0, \quad H_R = 0.1, \quad u_L = 5.0, \quad u_R = 2.5, \quad x^* = 10.0. \tag{2.35}$$

Задача (2.35) является модифицированным первым тестом Торо [95] для одномерных уравнений мелкой воды, в котором значения скорости слева и справа от разрыва были сдвинуты на 2.5. Таким образом, задачу (2.35) можно рассматривать как течение по первому тесту Торо в подвижной системе координат. Числа Фруда $Fr = u/c$ слева и справа от разрыва равны $Fr_L \approx 1.6$ и $Fr_R \approx 2.5$, соответственно.

Результаты расчетов задачи (2.35) на равномерной сетке из 101 ячейки («инициализация А») на момент времени $t = 5.0$ представлены на рис. 2.10. Схема КАБАРЕ дает удовлетворительное решение, обладающее несколькими важными свойствами: ударная волна «размазывается» на 2-3 расчетные ячей-

а) Высота $H(x,t)$ б) Скорость $u(x,t)$

1 — решение по схеме КАБАРЕ; 2 — аналитическое решение. Красным отмечены области сохранения негладкости решения.

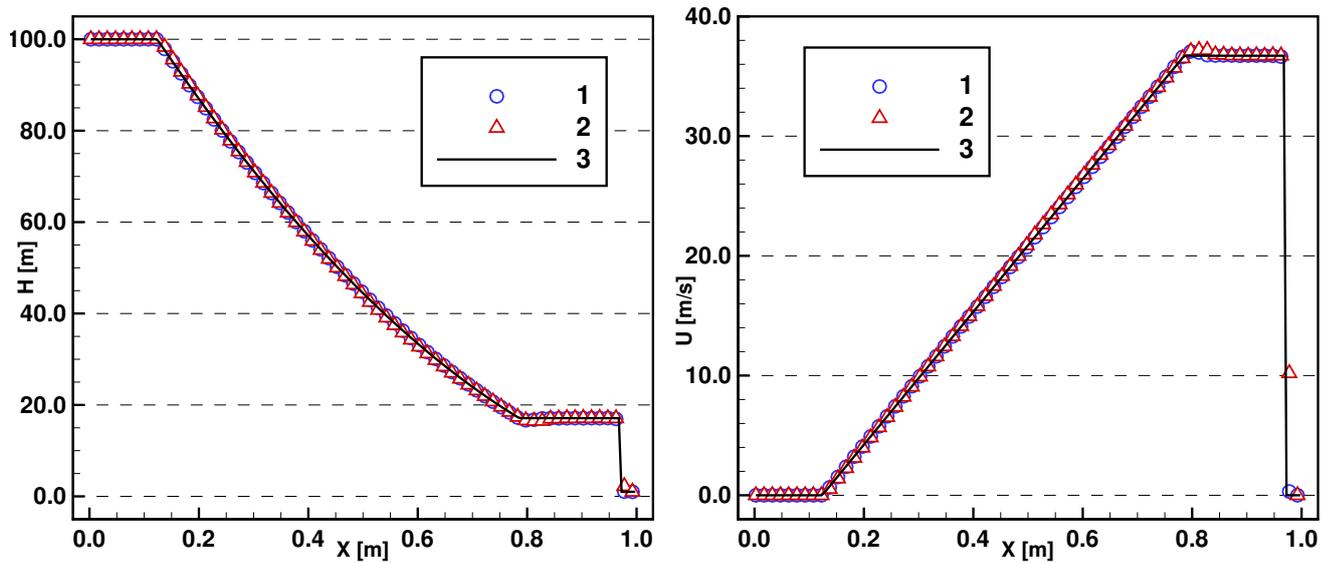
Рисунок 2.10 — Результаты расчетов по задаче Римана (2.35) на момент времени $t = 5.0$ на равномерной сетке из 101 ячейки

ки; левый конец волны разрежения незначительно сглаживается, а правый — сохраняет негладкость, свойственную аналитическому решению. Участки сохранения негладкости отмечены красными кругами на рис. 2.10 и на графиках для всех последующих тестов. В общем случае схема КАБАРЕ сохраняет негладкость волн разрежения с той стороны, куда переносится соответствующий волне разрежения инвариант Римана. Так, в задаче (2.35) волна разрежения образуется непостоянным инвариантом R_2 , который из-за сверхзвука переносится в правую сторону. В трансзвуковых задачах области негладкости могут сохраняться с обеих сторон волны разрежения (см., например, рис. 2.13). Несмотря на это, иногда негладкость может быть потеряна из-за неудачного согласования начальных данных (если они, например, слишком сильно сглажены). Отметим, что описанные в предыдущем разделе немонотонные провалы не возникают в данном тесте, так как для согласования была использована «инициализация А».

2.3.4 Сравнение явного и неявного SP-алгоритма

Сравним результаты расчетов по неявному SP -алгоритму (2.14),(2.15) и предложенному ранее явному SP -алгоритму [23]. Для этого рассмотрим следующую задачу Римана на отрезке $x \in [0,1]$:

$$H_L = 100.0, \quad H_R = 1.0, \quad u_L = 0.0, \quad u_R = 0.0, \quad x^* = 0.5. \quad (2.36)$$



а) Высота $H(x,t)$

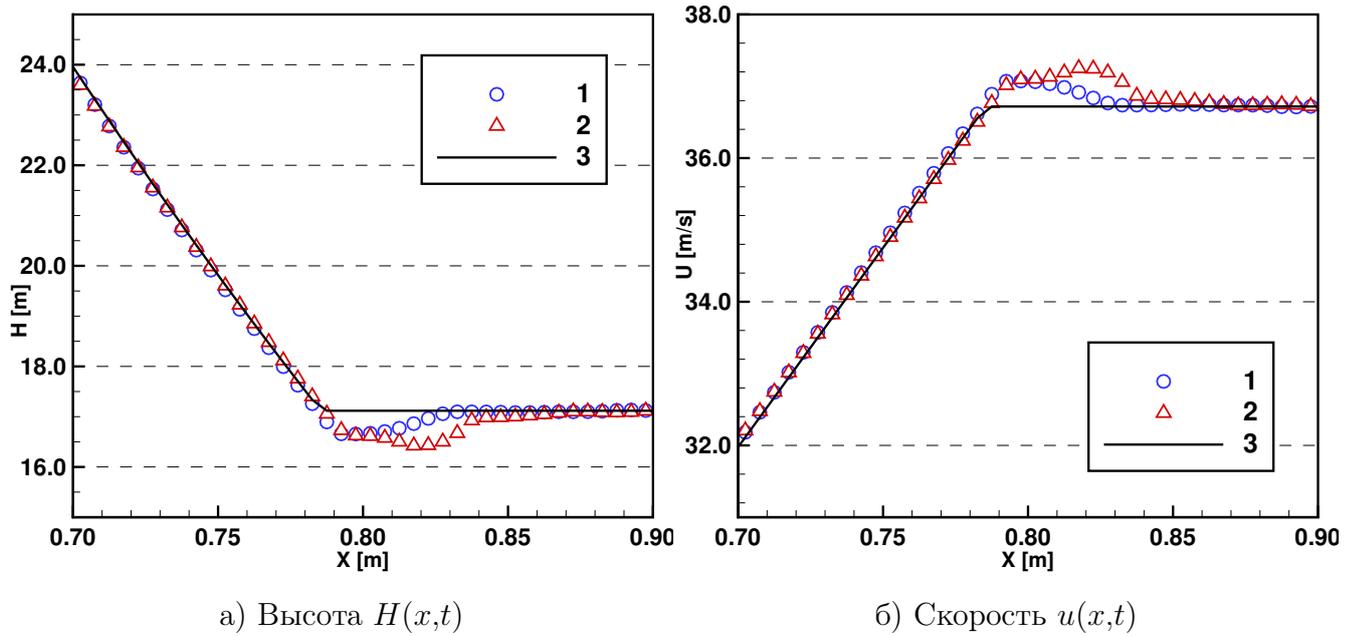
б) Скорость $u(x,t)$

1 — решение по локально-неявному SP -алгоритму; 2 — решение по явному алгоритму [23]; 3 — аналитическое решение. Решение выведено для каждой третьей ячейки сетки.

Рисунок 2.11 — Результаты расчетов по задаче Римана (2.36) на момент времени $t = 0.012$ на равномерной сетке из 200 ячеек

Результаты расчетов на равномерной сетке из 200 ячеек («инициализация Б») на момент времени $t = 0.012$ приведены на рис. 2.11 и 2.12. Результаты приводятся только для «инициализации Б», так как в этом случае результаты по обоим SP -алгоритмам имеют больше отличий. На рис. 2.11 приведены результаты для всего отрезка $x \in [0,1]$, на рис. 2.12 — для сегмента $x \in [0.7,0.9]$, в котором возникают описанные ранее немонотонные провалы.

Результаты показывают, что оба алгоритма размазывают ударную волну на 3 ячейки и достаточно точно воспроизводят волну разрежения. При этом наи-



1 — решение по локально-неявному SP -алгоритму; 2 — решение по явному алгоритму [23]; 3 — аналитическое решение.

Рисунок 2.12 — Результаты расчетов по задаче Римана (2.36) на момент времени $t = 0.012$ на равномерной сетке из 200 ячеек на отрезке $[0.7, 0.9]$

большее отличие между двумя расчетами лежит в области возникновения немонотонного провала (рис. 2.12). В случае локального-неявного SP -алгоритма провал более компактный и его амплитуда уменьшается со сгущением сетки. Отметим, что при расчете с помощью «инициализации А» для локально-неявного алгоритма немонотонный провал не возникнет.

2.3.5 Тесты Торо

Приведем результаты расчетов по схеме КАБАРЕ, модифицированной с помощью локально-неявного SP -алгоритма (2.14), (2.15), на тестах Торо для уравнений мелкой воды над ровным дном [95] на отрезке $x \in [0, 50]$:

1. Волна разрежения слева и ударная волна справа (тест Торо 1)

$$H_L = 1.0, \quad H_R = 0.1, \quad u_L = 2.5, \quad u_R = 0.0, \quad x^* = 10.0 \quad (2.37)$$

2. Две волны разрежения и почти сухое дно между ними (тест Торо 2)

$$H_L = 1.0, \quad H_R = 1.0, \quad u_L = -5.0, \quad u_R = 5.0, \quad x^* = 25.0 \quad (2.38)$$

3. Волна разрежения слева и сухое дно справа (тест Торо 3)

$$H_L = 1.0, \quad H_R = 0.0, \quad u_L = 0.0, \quad u_R = 0.0, \quad x^* = 20.0 \quad (2.39)$$

4. Сухое дно слева и волна разрежения справа (тест Торо 4)

$$H_L = 0.0, \quad H_R = 1.0, \quad u_L = 0.0, \quad u_R = 0.0, \quad x^* = 30.0 \quad (2.40)$$

5. Образование сухого дна (тест Торо 5)

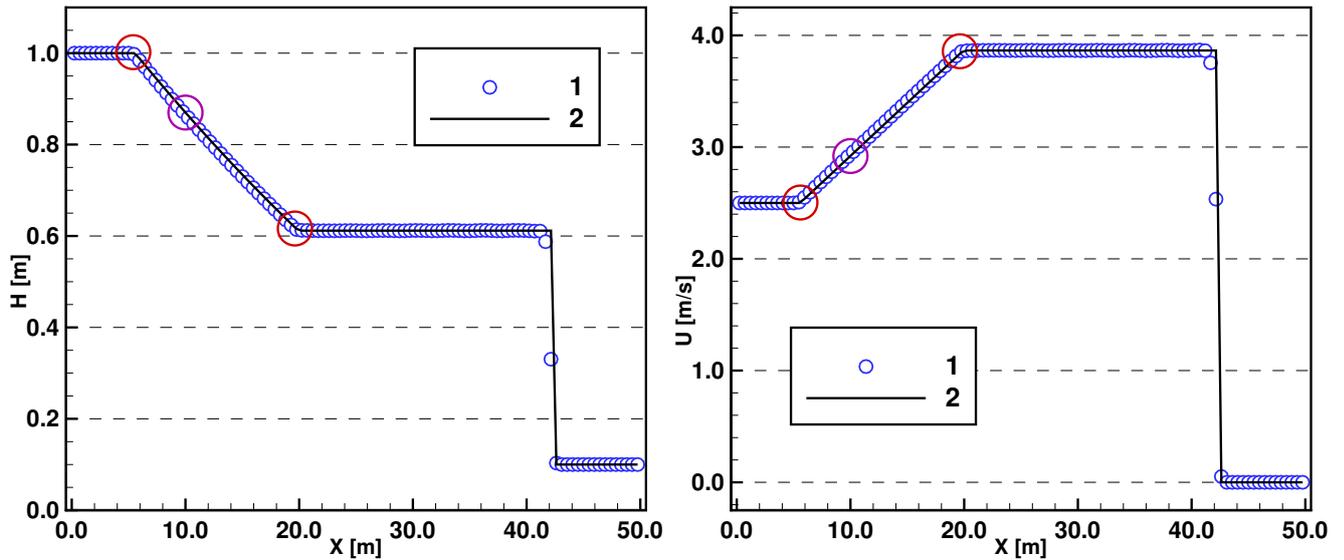
$$H_L = 0.1, \quad H_R = 0.1, \quad u_L = -3.0, \quad u_R = 3.0, \quad x^* = 25.0 \quad (2.41)$$

Для того, чтобы избежать образования немонотонных провалов, для всех вышеперечисленных тестов использовалась «инициализация А». Для моделирования сухого дна вводятся так называемые «сухие ячейки» ($H_c < \varepsilon$), для которых применяется только сеточный аналог закона сохранения массы, а импульс считается равным нулю. Результаты для явного SP -алгоритма [23] не приводятся, так как при «инициализации А» результаты по обоим алгоритмам мало чем отличаются для тестов Торо 1 и 2, а для тестов Торо 3, 4 и 5 алгоритм [23] не работает.

Результаты для теста Торо 1 (2.37) на равномерной сетке из 100 ячеек на момент времени $t = 7.0$ приведены на рис. 2.13. Основные свойства полученного решения: ударная волна размазывается на 3 ячейки; области негладкости сохраняются с обеих сторон волны разрежения.

Результаты для теста Торо 2 (2.38) на равномерной сетке из 200 ячеек на момент времени $t = 2.5$ приведены на рис. 2.14. Отметим, что участки негладкости решения сохраняются только в верхних частях волн разрежения. Их нижние части сглажены относительно гладкой «инициализацией А». Основные свойства полученного решения: ударная волна размазывается на 3 ячейки; области негладкости сохраняются с одной стороны волны разрежения.

Результаты для теста Торо 3 (2.39) на равномерных сетках из 100, 500 и 10000 ячеек на момент времени $t = 4.5$ приведены на рис. 2.15. Параметр ε ,

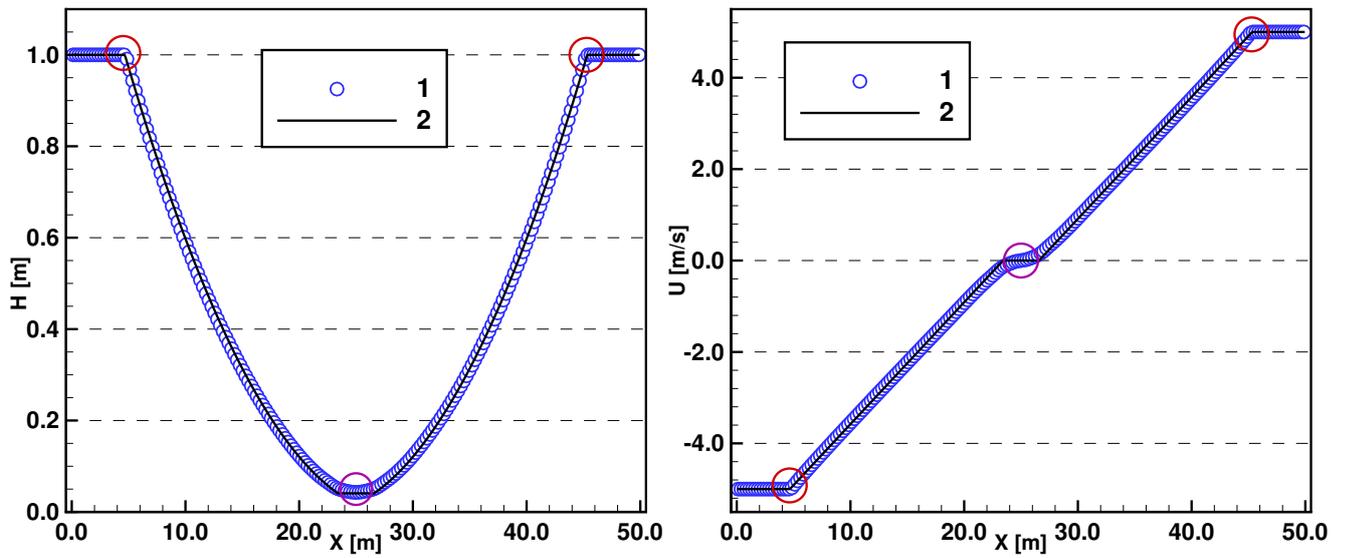
а) Высота $H(x,t)$ б) Скорость $u(x,t)$

1 — решение по локально-неявному SP -алгоритму; 2 — аналитическое решение. Красным отмечены области сохранения негладкости решения, фиолетовым — положение звуковой точки.

Рисунок 2.13 — Результаты расчетов по задаче Римана (2.37) на момент времени $t = 7.0$ на равномерной сетке из 100 ячеек

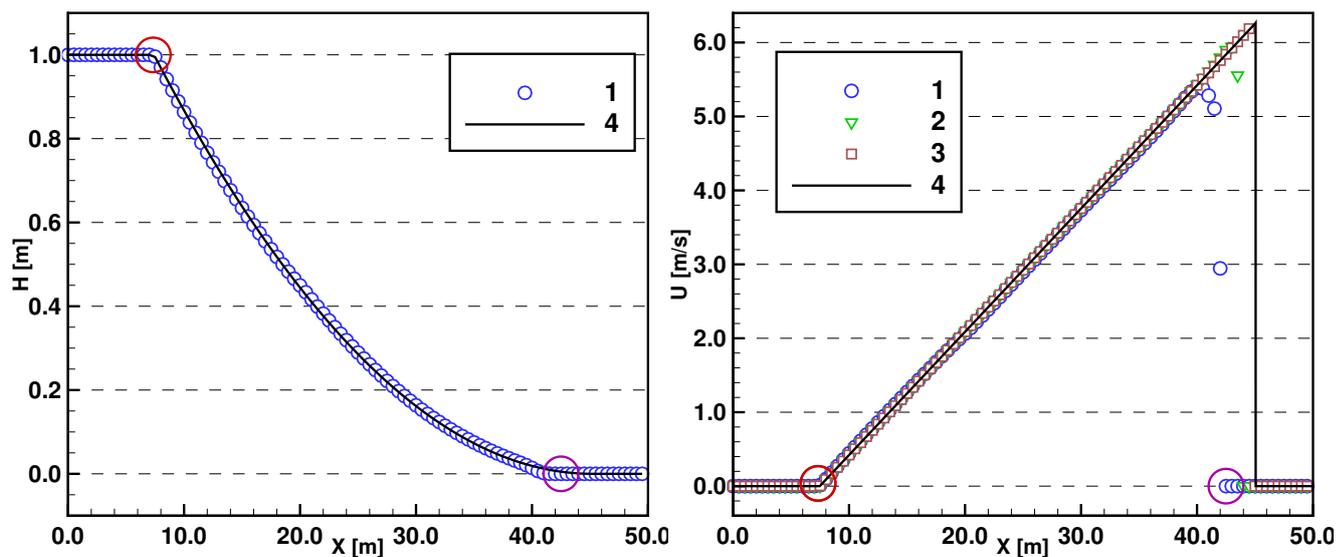
определяющий «сухие ячейки», полагался $\varepsilon = 10^{-5}$ для расчета на 100 ячейках, $\varepsilon = 10^{-8}$ — на 500 ячейках и $\varepsilon = 10^{-11}$ — на 10000 ячейках. Отметим, что положение границы сухого дна определяется с некоторой погрешностью, которая вызвана алгоритмом обработки «сухих ячеек», приводящим к потере импульса на границе сухого дна. Аналогичные результаты для теста Торо 4 (2.40) приведены на рис. 2.16. Результаты для тестов 3 и 4 симметричны, как и должны быть.

Результаты для теста Торо 5 (2.41) на равномерной сетке из 100 ячеек на момент времени $t = 5.0$ приведены на рис. 2.17. Вычисления проводились с числом Куранта $CFL = 0.2$, так как при $CFL = 0.3$ движение жидкости в окрестности звуковой точки слишком быстрое, и нелинейная коррекция (2.23) работает некорректно. Параметр, определяющий «сухие ячейки», $\varepsilon = 10^{-5}$. Отметим, что в отличие от теста Торо 2, негладкость волн разрежения сохраняется с обеих сторон. Это связано с тем, что образование сухого дна не дает размазаться нижним концам волн разрежения.

а) Высота $H(x,t)$ б) Скорость $u(x,t)$

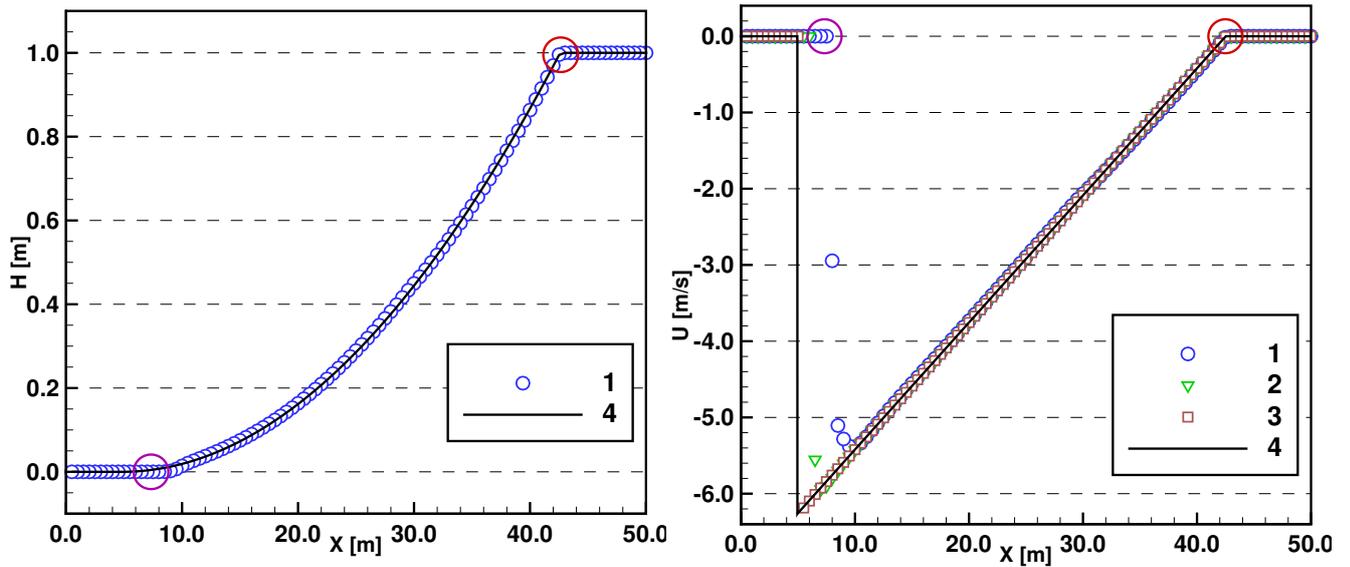
1 — решение по локально-неявному SP -алгоритму; 2 — аналитическое решение. Красным отмечены области сохранения негладкости решения, фиолетовым — положение звуковой точки.

Рисунок 2.14 — Результаты расчетов по задаче Римана (2.38) на момент времени $t = 2.5$ на равномерной сетке из 200 ячеек

а) Высота $H(x,t)$ б) Скорость $u(x,t)$

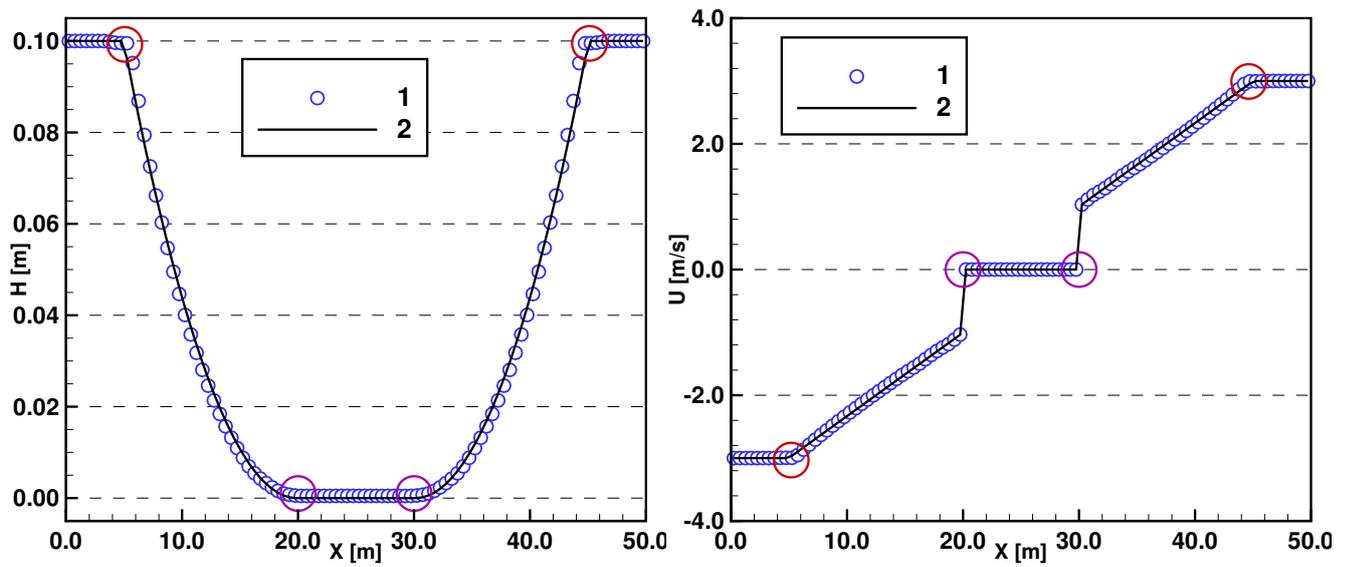
1 — решение по локально-неявному SP -алгоритму на 100 ячейках; 2 — на 500 ячейках; 3 — на 10000 ячейках; 4 — аналитическое решение. Красным отмечены области сохранения негладкости решения, фиолетовым — положение звуковой точки (для расчета на 100 ячейках).

Рисунок 2.15 — Результаты расчетов по задаче Римана (2.39) на момент времени $t = 4.0$

а) Высота $H(x,t)$ б) Скорость $u(x,t)$

1 — решение по локально-неявному SP -алгоритму на 100 ячейках; 2 — на 500 ячейках; 3 — на 10000 ячейках; 4 — аналитическое решение. Красным отмечены области сохранения негладкости решения, фиолетовым — положение звуковой точки (для расчета на 100 ячейках).

Рисунок 2.16 — Результаты расчетов по задаче Римана (2.40) на момент времени $t = 4.0$

а) Высота $H(x,t)$ б) Скорость $u(x,t)$

1 — решение по локально-неявному SP -алгоритму; 2 — аналитическое решение. Красным отмечены области сохранения негладкости решения, фиолетовым — положение звуковых точек.

Рисунок 2.17 — Результаты расчетов по задаче Римана (2.41) на момент времени $t = 5.0$ на равномерной сетке из 100 ячеек

Глава 3. Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами

3.1 Дисперсионное улучшение для систем линейных дифференциальных уравнений

3.1.1 Дисперсионное улучшение для схемы в трехслойном виде

Рассмотрим схему КАБАРЕ для простейшего линейного уравнения переноса (1.13) в ее трехслойном виде (1.19). Не ограничивая общности, будем рассматривать случай $c > 0$. Подставим в схему вместо сеточных функций аналитическое решение $u(x, t)$ и проведем разложения в ряд Тейлора вокруг пространственно-временной точки $(x_{i+1/2}, t_n)$, в результате чего получим так называемое дифференциальное приближение схемы (1.19) в этой точке:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{ch_{i+1/2}^2}{12}(1 - CFL)(1 - 2CFL) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\tau^2 h_{i+1/2}^2) = 0. \quad (3.1)$$

Метод дифференциального приближения [56] широко применяется с середины прошлого века для исследования диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем для систем гиперболических уравнений и является альтернативой анализу фон Неймана [105]. При этом он применим как в линейном [57], так и в нелинейном случае [58]. Например, в случае линейного уравнения переноса слагаемые с пространственными производными четного порядка в дифференциальном приближении отвечают за диссипативные свойства схемы, а нечетного — за дисперсионные. Так, у дифференциального приближения схемы КАБАРЕ (3.1) отсутствуют слагаемые с четными производными (это можно показать, раскладывая функции в ряд Тейлора до бесконечности), что говорит о бездиссипативности схемы. При этом коэффициент перед третьей производной в (3.1) положителен при $CFL \in (0.5, 1)$ (что говорит о наличии нормальной дисперсии) и отрицателен при $CFL \in [0, 0.5)$ (что говорит о наличии аномальной дисперсии).

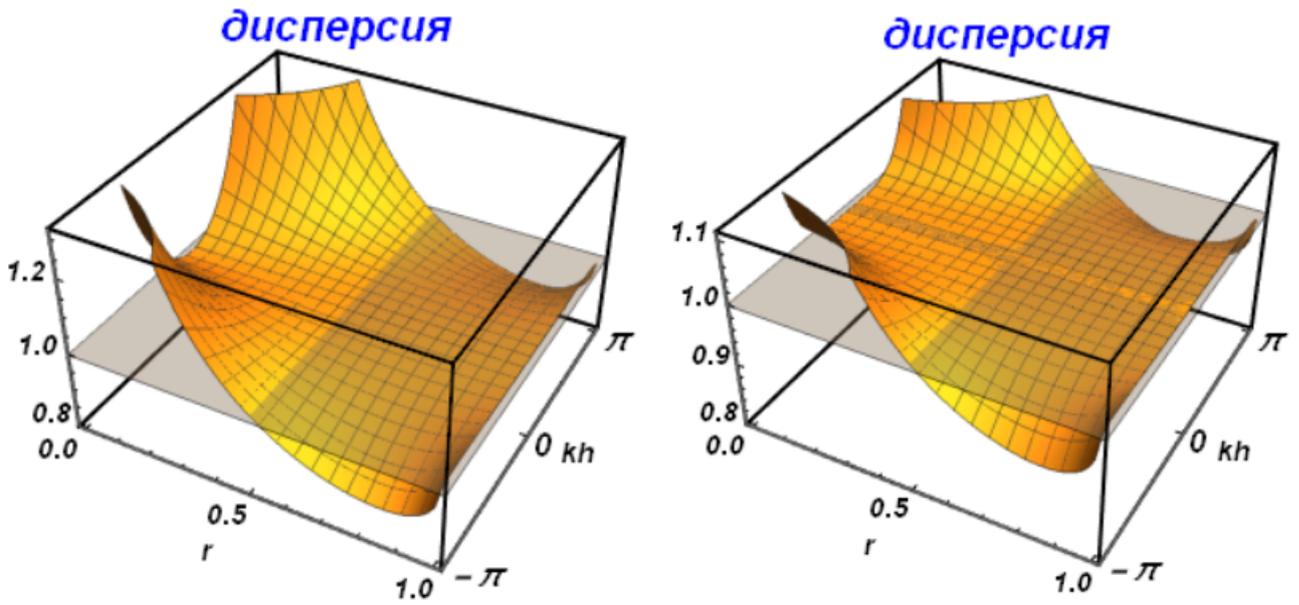
Также с помощью дифференциального приближения можно понять, как улучшить исходную разностную схему (например, повысить порядок аппроксимации или сделать схему монотонной [59]), модифицировав некоторым образом ее дифференциальное приближение. С помощью дифференциального приближения (3.1) можно заметить, что схема КАБАРЕ (1.19) приближает исходное уравнение переноса (1.13) со вторым порядком аппроксимации и модифицированное уравнение переноса с добавочным слагаемым $-c\mu(c,\tau)\partial^3 u/\partial x^3$ — с четвертым порядком (т.к. соблюдение условия Куранта гарантирует τh). Поэтому, чтобы добиться четвертого порядка аппроксимации для исходного уравнения, из уравнений схемы надо вычесть некоторую аппроксимацию этого добавочного слагаемого как минимум второго порядка. Это приведет к следующей «улучшенной» схеме КАБАРЕ [60]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} \right) + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} + c \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\mu(c,\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \right\rangle_{i+1/2}^n = 0, \\ & \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\mu(c,\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \right\rangle_{i+1/2}^n = \frac{1}{h_{i+1/2}} \left[\frac{\mu_{i+1}(c,\tau)}{\bar{h}_{i+1}} \left(\frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{h_{i+3/2}} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_i(c,\tau)}{\bar{h}_i} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} - \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_{i-1/2}} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\bar{h}_i = 0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})$, $\mu_i(c,\tau) = ([h_{i+1/2}]^2 - 3c\tau\bar{h}_i + 2c^2\tau^2)/12$. Отметим что коэффициент μ был занесен под первую производную для сохранения свойства дивергентности, так как в случае неравномерной по пространству сетки μ не является постоянным.

В работе [55] было показано, что улучшенная схема (3.2) обладает четвертым порядком аппроксимации на равномерных сетках и вторым — на неравномерных. При этом она так же, как и исходная схема (1.19), устойчива при $CFL \in [0,1]$ и бездиссипативна (ее диссипативные поверхности в точности равны единице). Для демонстрации дисперсионных свойств схемы (3.2) сравним «реальные» дисперсионные поверхности для (1.19) и (3.2) на рис. 3.1.

Дисперсионная поверхность улучшенной схемы (рис. 3.1б) заметно ближе к единице, чем дисперсионная поверхность стандартной схемы (рис. 3.1а), что говорит о ее улучшенных дисперсионных свойствах. При этом при $CFL \rightarrow 0$ поверхность все еще стремится к бесконечности. От сингулярности в $CFL = 0$ избавиться не удастся, так как схема не дает точного решения при этом числе



а) Стандартная схема КАБАРЕ

б) Улучшенная схема КАБАРЕ

Рисунок 3.1 — Дисперсионные поверхности трехслойных схем

Куранта. Отметим, что улучшенная схема, как и стандартная, дает точное решение на равномерных сетках при $CFL = 0.5$ и $CFL = 1$, так как при этих параметрах схемы совпадают (дисперсионная поправка обращается в ноль). «Ценой» такого улучшения стало расширение шаблона схемы (рис. 3.2).

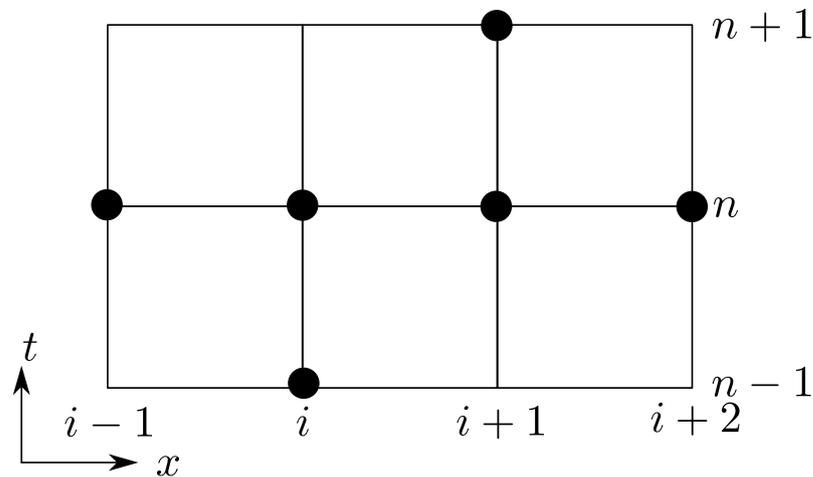


Рисунок 3.2 — Шаблон улучшенной схемы КАБАРЕ в трехслойном виде для случая $c > 0$

3.1.2 Дисперсионное улучшение для схемы в трехфазном виде

Как уже неоднократно упоминалось, трехслойный вид схемы КАБАРЕ не обобщается эффективно на случай нелинейных уравнений. Аналогично стандартной схеме КАБАРЕ (1.22) - (1.24), совершим в улучшенной схеме переход от трехслойного вида (3.2) к трехфазному. Тогда первая, вторая и третья фазы алгоритма будут иметь следующий вид:

$$\frac{u_c^{n+1/2} - u_c^n}{\tau_n/2} + c \frac{u_R^n - u_L^n}{h_c} + c \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\mu(|c|, \tau_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \right\rangle_c^n = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} u_{i+1}^{n+1} &= 2u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n, \quad \text{если } c > 0, \\ u_{i+1}^{n+1} &= 2u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+2}^n, \quad \text{если } c < 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{u_c^{n+1} - u_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + c \frac{u_R^{n+1} - u_L^{n+1}}{h_c} + c \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\mu(|c|, \tau_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \right\rangle_c^{n+1} = 0. \quad (3.5)$$

Схема (3.3) - (3.5) также сводится к схеме (3.2) путем исключения консервативных переменных и наследует все ее свойства. Приведенные формулы показывают, что для улучшения дисперсионных свойств схемы (1.22) - (1.24) требуется внести изменения лишь в первую (3.3) и третью (3.5) фазы схемы. При этом при масштабировании алгоритма на системы с распределенной памятью соседним партициям приходится обмениваться уже не только значениями инвариантов Римана, но и значениями потоковых переменных u_i^{n+1} (по одному слою потоковых переменных с каждой стороны). Для сохранения монотонности вторую фазу алгоритма (3.4) необходимо дополнить процедурой коррекции (1.25).

Обобщим улучшенную схему (3.3) - (3.5) на случай произвольной системы линейных гиперболических уравнений (1.2) с постоянной матрицей $A = \text{const}$ и правой частью, зависящей только от x и t :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{f}(x, t). \quad (3.6)$$

Линейная система (3.6) разбивается на систему независимых линейных уравнений переноса для инвариантов Римана $\mathbf{R} = L\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} = L\mathbf{f}. \quad (3.7)$$

Аппроксимируем каждое из уравнений системы (3.7) с помощью трехфазной улучшенной схемы (3.3) - (3.5), в результате чего получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{R}_c^{n+1/2} - \mathbf{R}_c^n}{\tau_n/2} + \Lambda \frac{\mathbf{R}_R^n - \mathbf{R}_L^n}{h_c} + \Lambda \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x^2} \right) \right\rangle_c^n = L\mathbf{f}_c^n, \\ & (R_m)_{i+1}^{n+1} = 2(R_m)_{i+1/2}^{n+1/2} - (R_m)_i^n, \quad \text{если } \lambda_m > 0, \\ & (R_m)_{i+1}^{n+1} = 2(R_m)_{i+3/2}^{n+1/2} - (R_m)_{i+2}^n, \quad \text{если } \lambda_m < 0, \\ & \frac{\mathbf{R}_c^{n+1} - \mathbf{R}_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \Lambda \frac{\mathbf{R}_R^{n+1} - \mathbf{R}_L^{n+1}}{h_c} + \Lambda \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x^2} \right) \right\rangle_c^{n+1} = L\mathbf{f}_c^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где D — диагональная матрица из антидисперсионных коэффициентов $D_{ij} = \delta_{ij}\mu(|\lambda_j|, \tau_n)$.

Перейдем в консервативных фазах (3.8) от инвариантов Римана \mathbf{R} к исходным переменным \mathbf{u} . Для этого домножим их на L^{-1} и воспользуемся тем, что $\mathbf{R} = L\mathbf{u}$ и постоянные матрицы L^{-1} , L и Λ можно заносить и выносить из разностных производных:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{u}_c^{n+1/2} - \mathbf{u}_c^n}{\tau_n/2} + A \frac{\mathbf{u}_R^n - \mathbf{u}_L^n}{h_c} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \right) \right\rangle_c^n = \mathbf{f}_c^n, \\ & (R_m)_{i+1}^{n+1} = 2(R_m)_{i+1/2}^{n+1/2} - (R_m)_i^n, \quad \text{если } \lambda_m > 0, \\ & (R_m)_{i+1}^{n+1} = 2(R_m)_{i+3/2}^{n+1/2} - (R_m)_{i+2}^n, \quad \text{если } \lambda_m < 0, \\ & \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + A \frac{\mathbf{u}_R^{n+1} - \mathbf{u}_L^{n+1}}{h_c} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \right) \right\rangle_c^{n+1} = \mathbf{f}_c^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где вторую фазу надо дополнить процедурами коррекции (1.25) для инвариантов Римана R_m . Шаг по времени определяется стандартным образом по собственным значениям системы (1.37).

Таким образом, в аппроксимацию каждого уравнения первой и третьей фаз (3.9) входит не только разностный аналог первой пространственной производной от потоков $A\mathbf{u}$, но и аналог третьей разностной производной, вообще

говоря, от всех переменных системы \mathbf{u} . Так, например, для линеаризованных уравнений газовой динамики в аппроксимацию закона сохранения массы будет входить третья разностная пространственная производная от плотности.

Так как схема (3.9) есть не что иное, как комбинация нескольких схем для линейного уравнения переноса (3.3) - (3.5), то она обладает теми же свойствами: имеет второй порядок аппроксимации и улучшенные дисперсионные свойства на неравномерных сетках и четвертый порядок аппроксимации на равномерных сетках, устойчива при числах Куранта $CFL \in [0,1]$ и обладает свойством временной обратимости. При этом система уже, вообще говоря, не будет точна на равномерных сетках при числах Куранта $CFL = 0.5$ и $CFL = 1$. Это связано с тем, что число Куранта для системы уравнений определяется по максимальному по модулю собственному значению системы, и, например, при $CFL = 1$ точно будут переноситься лишь самые быстро распространяющиеся инварианты.

Предложенная схема (3.9) отличается от схемы, предложенной в [55], тем, что антидисперсионная поправка вводится отдельно для каждого инварианта Римана системы, в то время как в [55] ко всем инвариантам Римана применяется одинаковая антидисперсионная поправка, отвечающая максимальному по модулю собственному значению системы, что не позволяет получить четвертый порядок аппроксимации на равномерных расчетных сетках. Заметим, что формулы для схемы [55] можно получить из формул (3.9), заменив диагональную матрицу антидисперсионных коэффициентов D на диагональную матрицу с одинаковыми элементами: $\hat{D}_{ij} = \delta_{ij}\mu(|\lambda_{max}|, \tau_n)$, где λ_{max} - максимальное по модулю собственное значение системы (3.6).

3.2 Дисперсионное улучшение для систем нелинейных дифференциальных уравнений

Обобщим схему КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами (3.9) на нелинейный случай. Сделаем это на примере системы уравнений мелкой воды (2.1). Как и прежде, будем модифицировать только консервативные фазы алгоритма, а характеристическую фазу оставим прежней.

Рассмотрим вариант схемы КАБАРЕ для уравнений мелкой воды с линейными инвариантами Римана:

$$R = u + \frac{g}{c_{loc}}H, \quad Q = u - \frac{g}{c_{loc}}H,$$

где $c = \sqrt{gH}$ — скорость звука. Тогда матрицы из собственных векторов, собственных значений и антидисперсионных поправок будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} -\frac{g}{c_{loc}} & 1 \\ \frac{g}{c_{loc}} & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c_{loc}}{2g} & -\frac{c_{loc}}{2g} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} u + c & 0 \\ 0 & u - c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \mu(|u + c|, \tau_n) & 0 \\ 0 & \mu(|u - c|, \tau_n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Повторяя рассуждения для случая линейных систем, получим, что уравнения на инварианты должны аппроксимировать следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (3.11)$$

Домножая уравнения (3.11) на L^{-1} и пользуясь линейностью линейных инвариантов, получим следующее дифференциальное приближение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} + (1,0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial(H,u)^T}{\partial x^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + (0,1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial(H,u)^T}{\partial x^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Уравнения (3.12) представляют собой дифференциальное приближение не для нужной нам консервативной формы уравнений, а для простой формы. При этом первое уравнение фактически совпадает с законом сохранения массы в консервативной форме. Чтобы получить из второго уравнения (3.12) закон сохранения импульса, надо домножить его на высоту H и прибавить первое уравнение, умноженное на u . Таким образом, дифференциальное приближение для

консервативной формы (2.1) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + (1,0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial(H,u)^T}{\partial x^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} + (H,u) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial(H,u)^T}{\partial x^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, с помощью дифференциального приближения (3.13) можно построить улучшенные консервативные фазы алгоритма. Первая фаза осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{H_c^{n+1/2} - H_c^n}{\tau_n/2} + \frac{(Hu)_R^n - (Hu)_L^n}{h_c} + \\ + (1,0) \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial(H,u)^T}{\partial x^2} \right) \right\rangle_c^n &= 0, \\ \frac{(Hu)_c^{n+1/2} - (Hu)_c^n}{\tau_n/2} + \frac{(Hu^2)_R^n - (Hu^2)_L^n}{h_c} + \frac{g}{2} \frac{(H^2)_R^n - (H^2)_L^n}{h_c} + \\ + \left(\frac{H_R^n + H_L^n}{2}, \frac{u_R^n + u_L^n}{2} \right) \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial(H,u)^T}{\partial x^2} \right) \right\rangle_c^n &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

а третья фаза — следующим:

$$\begin{aligned} \frac{H_c^{n+1} - H_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{(Hu)_R^{n+1} - (Hu)_L^{n+1}}{h_c} + \\ + (1,0) \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial(H,u)^T}{\partial x^2} \right) \right\rangle_c^{n+1} &= 0, \\ \frac{(Hu)_c^{n+1} - (Hu)_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{(Hu^2)_R^{n+1} - (Hu^2)_L^{n+1}}{h_c} + \frac{g}{2} \frac{(H^2)_R^{n+1} - (H^2)_L^{n+1}}{h_c} + \\ + \left(\frac{H_R^{n+1} + H_L^{n+1}}{2}, \frac{u_R^{n+1} + u_L^{n+1}}{2} \right) \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial(H,u)^T}{\partial x^2} \right) \right\rangle_c^{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где все необходимые матрицы вычисляются локально в каждом узле сетки с помощью формул (3.10).

Нетрудно заметить, что алгоритм схемы КАБАРЕ с улучшенными консервативными фазами (3.14),(3.15) сохранил свойство обратимости по времени (при отключенной монотонизации) за счет того, что все антидифперсионные поправки вычисляются с помощью потоковых переменных, которые в свою оче-

редь вычисляются с помощью обратимой по времени линейной экстраполяции. При этом алгоритм обладает, вообще говоря, только вторым порядком аппроксимации из-за локального приближения инвариантов Римана и способа аппроксимации вектора (H, u) в законе сохранения импульса. Дивергентность по закону сохранения массы была сохранена, а по закону сохранения импульса — нет (хотя ошибка в балансе там имеет порядок $O(h^2)$).

Аналогичным образом алгоритм можно обобщить и на другие системы нелинейных уравнений гиперболического типа.

3.3 Результаты расчетов

3.3.1 Тесты для систем линейных уравнений

Для тестирования предложенной схемы (3.9) и демонстрации четвертого порядка сходимости рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа:

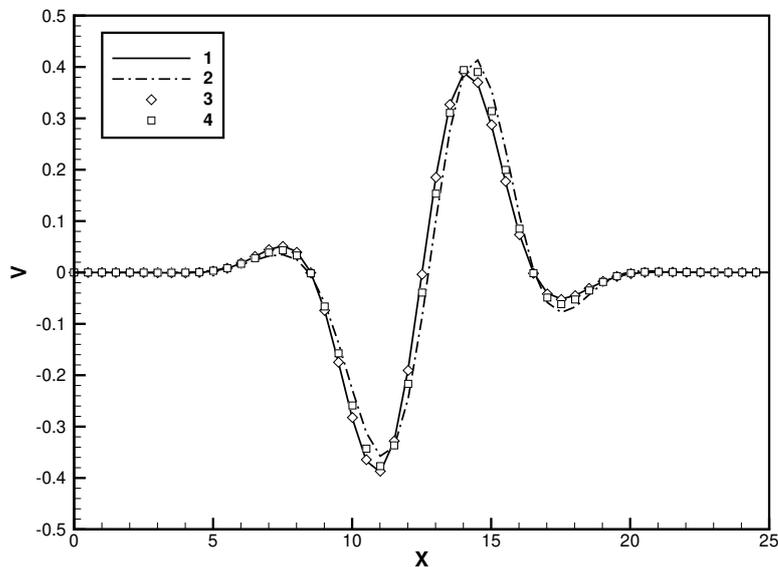
$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad x \in [-200, 200], \quad t > 0. \quad (3.16)$$

Систему (3.16) можно трактовать как уравнение колебаний с коэффициентом $c^2 = 4$ в движущейся системе координат, записанное в виде уравнений в частных производных первого порядка. Дополним систему периодическими граничными условиями, а также начальными условиями в виде промодулированной Гауссианом волны, аналогичные использованным ранее при исследовании свойств схемы КАБАРЕ [47; 113]:

$$\begin{aligned} v(x, t = 0) &= 2 \sin(\pi x/4) \exp(-\ln(2) (x/3)^2), \\ w(x, t = 0) &= \sin(\pi x/4) \exp(-\ln(2) (x/3)^2), \end{aligned} \quad x \in [-200, 200]. \quad (3.17)$$

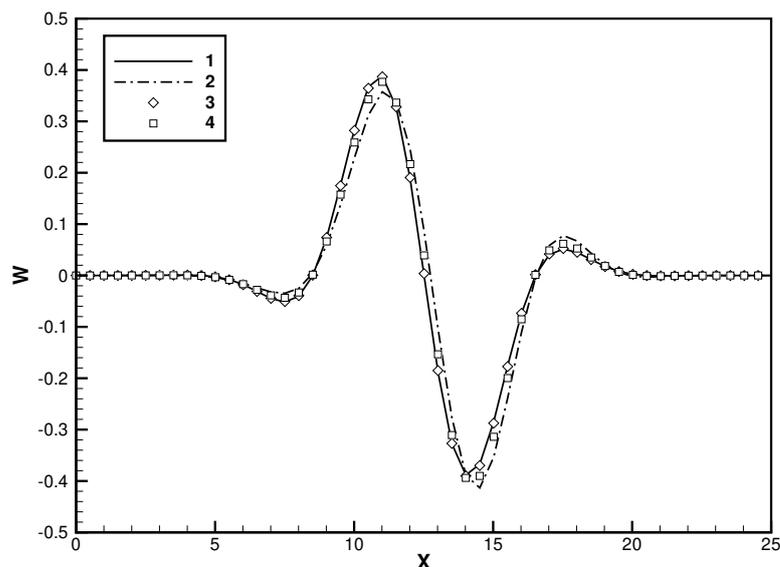
На рис. 3.3 и 3.4 представлены результаты расчетов задачи (3.16),(3.17) на момент времени $t = 12.5$ на отрезке $x \in [0,25]$ по стандартной схеме КАБАРЕ (1.28) - (1.29), схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами (3.9), схеме, предложенной в [55], а также аналитическое решение. Расчеты проводились на равномерной сетке из 800 расчетных ячеек при числе Куранта $CFL = 0.2$, процедуры монотонизации в силу гладкости рассматриваемого решения были отключены. Момент времени $t = 12.5$ подобран таким образом, чтобы компоненты решения, отвечающие инвариантам Римана, передвигающимся со скоростями $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 1$, успели «разойтись». На отрезке $x \in [0,25]$ располагается часть решения, отвечающая медленно распространяющемуся инварианту Римана с собственным значением λ_2 , к которому в схеме [55] применяется не согласованная с λ_2 антидисперсионная поправка.

Результаты на рис. 3.3 и 3.4 позволяют заключить, что предложенная схема с улучшенными дисперсионными свойствами дает достаточно точное решение задачи, практически совпадающее с аналитическим решением. При этом схема из [55] хоть и дает более точный результат, чем стандартная схема КАБАРЕ, но проигрывает в точности предложенному методу.



1 — аналитическое решение; 2 — решение по стандартной схеме КАБАРЕ; 3 — решение по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами; 4 — решение по схеме [55].

Рисунок 3.3 — Результаты расчетов (компонента $v(x,t)$) по задаче (3.16),(3.17) на момент времени $t = 12.5$ на отрезке $x \in [0,25]$ на равномерной сетке из 800 ячеек при $CFL = 0.2$



1 — аналитическое решение; 2 — решение по стандартной схеме КАБАРЕ; 3 — решение по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами; 4 — решение по схеме [55].

Рисунок 3.4 — Результаты расчетов (компонента $w(x,t)$) по задаче (3.16),(3.17) на момент времени $t = 12.5$ на отрезке $x \in [0,25]$ на равномерной сетке из 800 ячеек при $CFL = 0.2$

В табл. 1–3 указаны ошибки и порядки сходимости (ООС - order of convergence) для расчетов на различных равномерных сетках и числах Куранта CFL для стандартной схемы КАБАРЕ, схемы из [55] и схемы КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами, соответственно. Ошибка вычислялась для решения на момент времени $t = 12.5$ по стандартной C -норме, в таблицу вставлялась максимальная из ошибок для переменных v и w . Порядок сходимости вычислялся по правилу Рунге [114].

Результаты в табл. 1–3, позволяют сделать вывод о сходимости всех трех методов на сгущающихся сетках. При этом стандартный метод КАБАРЕ имеет второй порядок сходимости, метод КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами — четвертый порядок сходимости. Метод [55] хоть и позволяет получить более точное решение, чем стандартная схема КАБАРЕ, тем не менее также имеет всего лишь второй порядок сходимости, что объясняется неполной антидисперсионной поправкой для всех инвариантов Римана, кроме наиболее быстро переносимого.

Таблица 1 — Ошибки по C -норме и порядки сходимости (ООС)
для расчетов задачи (3.16),(3.17) по стандартной схеме КАБАРЕ

Ячейки	С-ошибка $CFL = 0.2$	ООС	С-ошибка $CFL = 0.4$	ООС
3200	2.98×10^{-2}	2.00	7.45×10^{-3}	2.00
1600	1.18×10^{-1}	1.99	2.98×10^{-2}	2.00
800	4.46×10^{-1}	1.90	1.15×10^{-1}	1.95
400	1.03	1.23	4.45×10^{-1}	1.90
Ячейки	С-ошибка $CFL = 0.6$	ООС	С-ошибка $CFL = 0.8$	ООС
3200	4.96×10^{-3}	2.00	7.46×10^{-3}	2.00
1600	1.99×10^{-2}	2.00	2.98×10^{-2}	1.99
800	7.90×10^{-2}	2.00	1.20×10^{-1}	2.00
400	2.61×10^{-1}	1.70	4.49×10^{-1}	1.96

Таблица 2 — Ошибки по C -норме и порядки сходимости (ООС)
для расчетов задачи (3.16),(3.17) по схеме [55]

Ячейки	С-ошибка $CFL = 0.2$	ООС	С-ошибка $CFL = 0.4$	ООС
3200	2.28×10^{-3}	2.00	3.56×10^{-3}	2.00
1600	9.28×10^{-3}	2.00	1.43×10^{-2}	2.00
800	3.91×10^{-2}	2.08	5.69×10^{-2}	1.99
400	2.66×10^{-1}	2.76	2.14×10^{-1}	1.88
Ячейки	С-ошибка $CFL = 0.6$	ООС	С-ошибка $CFL = 0.8$	ООС
3200	3.87×10^{-3}	2.00	3.19×10^{-3}	2.00
1600	1.55×10^{-2}	2.00	1.27×10^{-2}	1.99
800	6.06×10^{-2}	1.97	4.98×10^{-2}	1.96
400	2.17×10^{-1}	1.80	1.86×10^{-1}	1.83

Таблица 3 — Ошибки по C -норме и порядки сходимости (ООС) для расчетов задачи (3.16),(3.17) по схеме по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами

Ячейки	C -ошибка $CFL = 0.2$	ООС	C -ошибка $CFL = 0.4$	ООС
3200	7.87×10^{-5}	4.00	2.04×10^{-5}	4.00
1600	1.26×10^{-3}	3.97	3.25×10^{-4}	3.99
800	2.00×10^{-2}	3.96	5.00×10^{-3}	3.97
400	2.66×10^{-1}	3.74	7.07×10^{-2}	3.79
Ячейки	C -ошибка $CFL = 0.6$	ООС	C -ошибка $CFL = 0.8$	ООС
3200	1.36×10^{-5}	4.00	1.99×10^{-5}	4.00
1600	2.16×10^{-4}	3.99	3.18×10^{-4}	3.99
800	3.40×10^{-3}	3.97	5.07×10^{-3}	3.99
400	4.46×10^{-2}	3.69	6.40×10^{-2}	3.69

3.3.2 Тесты для уравнений мелкой воды

Акустические колебания, генерируемые на границе

Рассмотрим задачу о распространении малых колебаний, генерируемых на границе области, для системы уравнений мелкой воды (2.1) на отрезке $x \in [0,100]$. В начальный момент времени положим

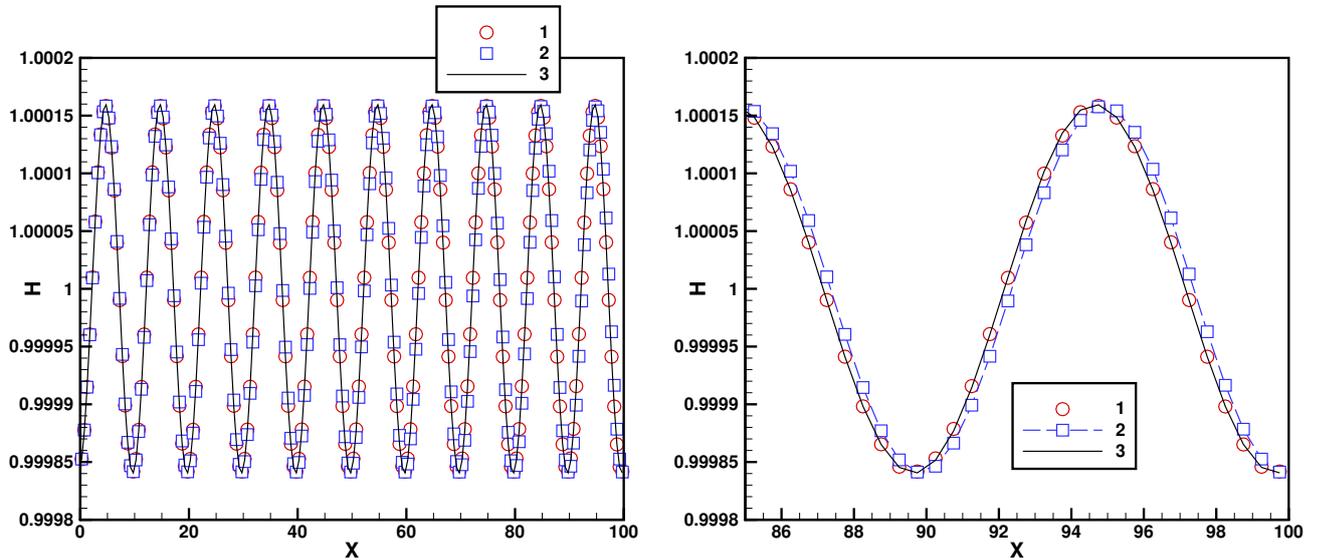
$$H(x,0) = 1, \quad u(x,0) = 0, \quad x \in [0,100]. \quad (3.18)$$

На левой и правой границе зададим граничные условия для приходящих извне области инвариантов R и Q :

$$\begin{aligned} R(0,t) &= R_0 + \varepsilon \cdot \sin(\omega t), \\ Q(100,t) &= Q_0 = \text{const}, \end{aligned} \quad t > 0, \quad (3.19)$$

где $R_0 = \sqrt{g}$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\omega = \pi/5 \cdot \sqrt{g}$, $Q_0 = -\sqrt{g}$, $g = 9.8$.

Расчёт проводился на равномерной пространственной сетке из $N = 200$ ячеек с числом Куранта $CFL = 0.3$. Результаты приведены на рис. 3.5 на момент времени $t = 47$, когда возмущение достигло правой границы.



а) Отрезок $x \in [0,100]$

б) Отрезок $x \in [85,100]$

1 — решение по стандартной схеме КАБАРЕ; 2 — решение по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами; 3 — аналитическое решение. Рисунок 3.5 — Результаты расчетов ($H(x,t)$) по задаче (2.1),(3.18),(3.19) на момент времени $t = 47$ на равномерной сетке из 200 ячеек при $CFL = 0.3$

Результаты на всем отрезке, изображенные на рис. 3.5а, показывают, что решение по стандартной схеме с каждым периодом возмущения все больше смещаются относительно аналитического решения, в то время как решение по улучшенной схеме ложится почти на одни и те же точки на каждом периоде. Результаты для последнего периода на рис. 3.5б позволяют оценить, насколько решение по стандартной схеме сместилось вперед.

Отметим также, что при рассмотрении симметричной задачи, где колебания генерируются на правой границе, результаты получаются аналогичными.

3.3.3 Модулированная акустическая волна

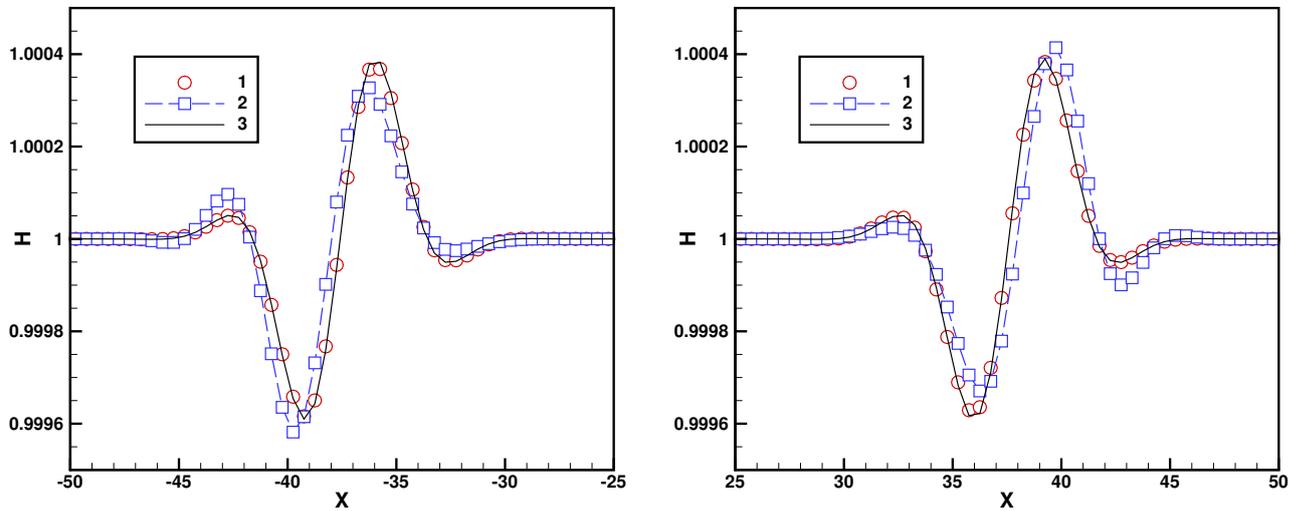
Рассмотрим задачу, аналогичную задаче (3.17) для систем линейных уравнений. Рассмотрим отрезок $x \in [-200,200]$ и зададим на нем периодические

граничные условия и следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= 1 + \varepsilon \cdot \sin(\pi x/4) \exp(-\ln(2) (x/3)^2), \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad x \in [-200, 200], \quad (3.20)$$

где $\varepsilon = 10^{-3}$.

Расчёт проводился на равномерной пространственной сетке из $N = 800$ ячеек с числом Куранта $CFL = 0.2$. Результаты приведены на рис. 3.6 на момент времени $t = 12$ секунд, когда части решения, соответствующие разным инвариантам, успели «разойтись».



а) Отрезок $x \in [-50, -25]$

б) Отрезок $x \in [25, 50]$

1 — решение по стандартной схеме КАБАРЕ; 2 — решение по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами; 3 — аналитическое решение.

Рисунок 3.6 — Результаты расчетов $(H(x, t))$ по задаче (2.1), (3.20) на момент времени $t = 12$ на равномерной сетке из 800 ячеек при $CFL = 0.2$

Аналогично случаю систем линейных уравнений, улучшенная схема на задаче о распространении модулированной акустической волны дает более качественное решение, чем стандартная схема.

В табл. 4 и 5 указаны ошибки и порядки сходимости (ООС - order of convergence) для расчетов задачи (??) на различных равномерных сетках и числах Куранта CFL для стандартной схемы КАБАРЕ и схемы КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами, соответственно. Ошибка вычислялась для решения на момент времени $t = 12.5$ по стандартной L_2 -норме, в

таблицу вставлялась максимальная из ошибок для переменных v и w . Порядок сходимости вычислялся по правилу Рунге [114]. Как видно, обе схемы обладают вторым порядком сходимости, причем улучшенная схема иногда дает порядок, чуть больший второго.

Таблица 4 — Ошибки по L_2 -норме и порядки сходимости (ООС) для расчетов задачи (2.1),(3.20) по стандартной схеме КАБАРЕ

Ячейки	L_2 -ошибка $CFL = 0.2$	ООС	L_2 -ошибка $CFL = 0.4$	ООС
3200	2.32×10^{-5}	2.00	6.03×10^{-6}	2.00
1600	9.25×10^{-5}	1.99	2.40×10^{-5}	1.99
800	3.57×10^{-4}	1.95	9.42×10^{-5}	1.97
400	1.02×10^{-3}	1.51	3.42×10^{-5}	1.86
Ячейки	L_2 -ошибка $CFL = 0.6$	ООС	L_2 -ошибка $CFL = 0.8$	ООС
3200	4.22×10^{-6}	1.99	6.05×10^{-6}	2.00
1600	1.68×10^{-5}	1.99	2.41×10^{-5}	2.00
800	6.62×10^{-5}	1.98	9.54×10^{-5}	1.98
400	2.45×10^{-4}	1.89	3.60×10^{-4}	1.92

Таблица 5 — Ошибки по L_2 -норме и порядки сходимости (ООС) для расчетов задачи (2.1),(3.20) по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами

Ячейки	L_2 -ошибка $CFL = 0.2$	ООС	L_2 -ошибка $CFL = 0.4$	ООС
3200	1.72×10^{-6}	1.96	1.72×10^{-6}	1.96
1600	6.91×10^{-6}	2.01	6.84×10^{-6}	1.99
800	3.12×10^{-5}	2.17	2.72×10^{-5}	2.00
400	2.32×10^{-4}	2.90	1.16×10^{-4}	2.09
Ячейки	L_2 -ошибка $CFL = 0.6$	ООС	L_2 -ошибка $CFL = 0.8$	ООС
3200	1.72×10^{-6}	1.96	1.72×10^{-6}	1.96
1600	6.84×10^{-6}	1.99	6.85×10^{-6}	2.00
800	2.72×10^{-5}	1.99	2.74×10^{-5}	2.00
400	1.09×10^{-4}	2.01	1.19×10^{-4}	2.11

Распад разрыва

Для демонстрации работоспособности предложенной улучшенной схемы приведем результаты расчетов на существенно нелинейных задачах, а именно задачах о распаде разрыва. В случае возникновения разрывов в искомым функциях или их производных добавление антидисперсионной поправки может принести в результаты расчета нежелательные артефакты, так как третьей производной у решения уже не будет существовать. Для этого в областях сильного изменения функции антидисперсионные поправки надо отключать (например, с помощью условия $|\varphi_{i+1} - \varphi_i|/|\varphi_i - \varphi_{i-1}| > \varepsilon$).

Для начала рассмотрим задачу Римана (2.29) об образовании ударной волны и волны разрежения на отрезке $x \in [0,1]$:

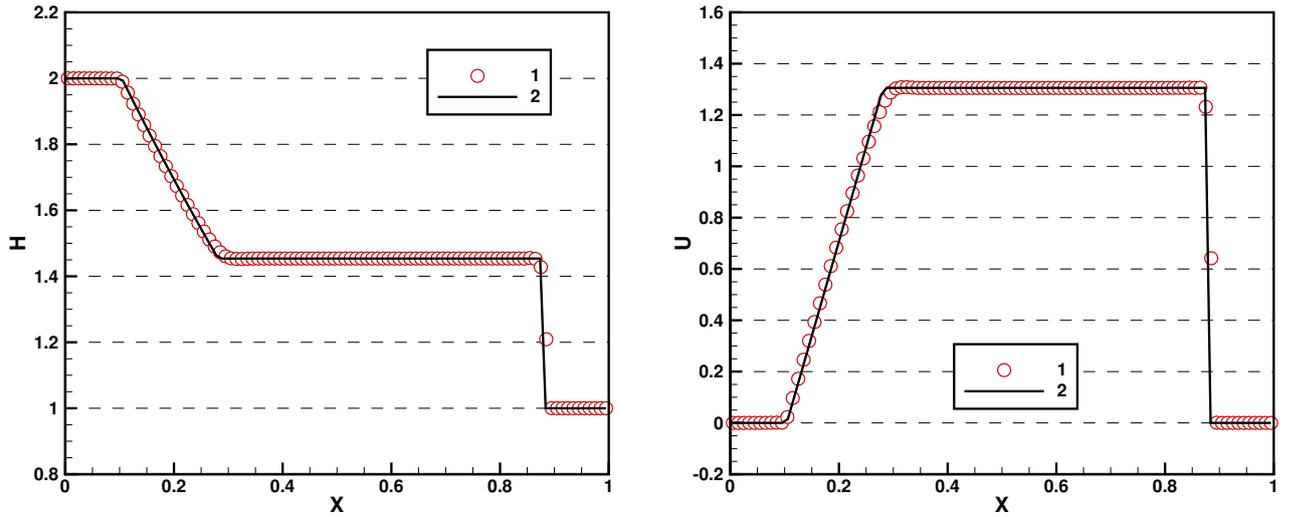
$$H_L = 2, H_R = 1, u_L = 0, u_R = 0, x^* = 0.5. \quad (3.21)$$

Расчёт задачи Римана (3.21) проводился на равномерной пространственной сетке из $N = 100$ ячеек с числом Куранта $CFL = 0.3$. Результаты приведены на рис. 3.7 на момент времени $t = 0.09$, до того, как ударная волна и волна разрежения достигнут границ области. Приведено только решение по улучшенной схеме, так как оно не отличается существенным образом от решения по стандартной схеме. Как видно, сохраняются все свойства решения по стандартной схеме: ударная волна размывается на 2-3 расчетные ячейки, в некоторых местах сохраняются области негладкости аналитического решения.

В качестве второй задачи рассмотрим распад разрыва (2.29), приводящий к образованию двух волн разрежения, со следующими начальными условиями:

$$H_L = 1, H_R = 1, u_L = -2, u_R = 2, x^* = 0.5. \quad (3.22)$$

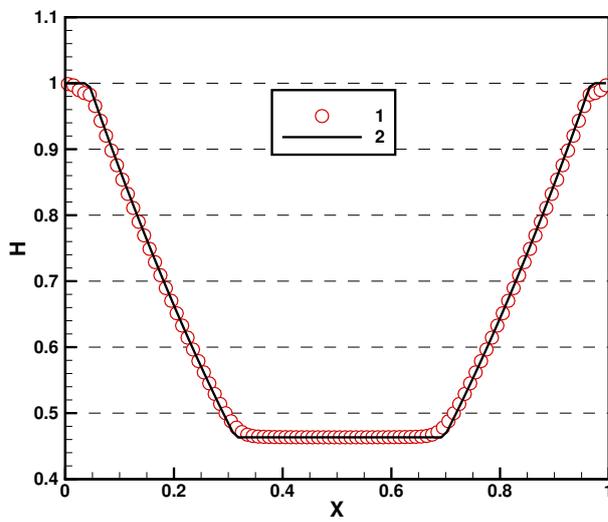
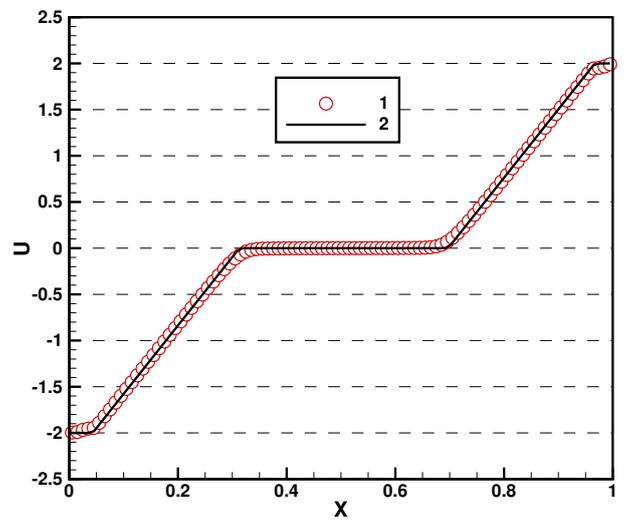
Расчёт задачи Римана (3.22) проводился на равномерной пространственной сетке из $N = 100$ ячеек с числом Куранта $CFL = 0.3$. Результаты приведены на рис. 3.8 на момент времени $t = 0.09$, пока волны разрежения не достигли границ. В данном случае неполное отключение антидисперсионных поправок приводит к незначительному искажению одного конца волн разрежения. Это связано с сильной чувствительностью алгоритма к заданию начальных усло-

а) Высота $H(x,t)$ б) Скорость $u(x,t)$

1 — решение по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами;
 2 — аналитическое решение.

Рисунок 3.7 — Результаты расчетов по задаче Римана (3.21) на момент времени $t = 0.09$ на равномерной сетке из 100 ячеек при $CFL = 0.3$

вий. Таким образом, предложенная улучшенная схема может быть применена как к акустическим, так и к существенно нелинейным задачам.

а) Высота $H(x,t)$ б) Скорость $u(x,t)$

1 — решение по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами;
 2 — аналитическое решение.

Рисунок 3.8 — Результаты расчетов по задаче Римана (3.22) на момент времени $t = 0.09$ на равномерной сетке из 100 ячеек при $CFL = 0.3$

Глава 4. Моделирование термоакустической неустойчивости

4.1 Математическая модель акустического тракта

Рассмотрим течение нагревающегося газа в некотором канале. Чтобы данное течение можно было описать относительно простой системой дифференциальных уравнений в частных производных, введем ряд предположений и допущений [71]:

- рассматривается осесимметричный канал переменного сечения;
- рассматриваются только продольные колебания газа (скорость имеет только продольную составляющую);
- течение в канале предполагается одномерным, т.е., все величины (скорость, плотность, температура) распределены однородно по каждому сечению канала;
- влияние гидродинамического сопротивления на стенках канала не учитывается, затуханием колебаний за счет молекулярных вязкости и теплопроводности также пренебрегаем;
- подогрев газа происходит в узком слое (нулевой толщины) однородно по сечению канала;
- газ по обе стороны фронта нагрева считается идеальным, удовлетворяющим уравнению $P = \rho R' T$, где P — давление, ρ — плотность, $R' = R/\mu$, R — универсальная газовая постоянная, μ — мольная масса газа.

Тогда течение газа в канале может быть описано системой квазиодномерных уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 S + P S)}{\partial x} - P \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho E S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E u S + P u S)}{\partial x} = S(x, t) q, \quad (4.3)$$

$$x \in [a, b], \quad t \in [0, T_{end}].$$

Здесь $\rho(x,t)$ — плотность газа, $u(x,t)$ — продольная составляющая скорости, $E(x,t)$ — полная удельная энергия, $E = 0.5u^2 + e$, $e(x,t)$ — удельная внутренняя энергия, $S(x,t)$ — площадь поперечного сечения канала, $q = q(p,u,x,t)$ — мощность теплового источника, $P = (\gamma - 1)\rho e$ — давление, γ — показатель адиабаты.

Ось x направлена вдоль канала через центры поперечных сечений канала, a , b — координаты начала и конца канала соответственно (см. рис. 4.1). Зависимость мощности тепловыделения от давления и скорости потока задается т.н. «моделями горения», формирующими обратную связь тепловыделения с газодинамическими параметрами. Система уравнений (4.1) - (4.3) дополняется некоторыми граничными и начальными условиями.

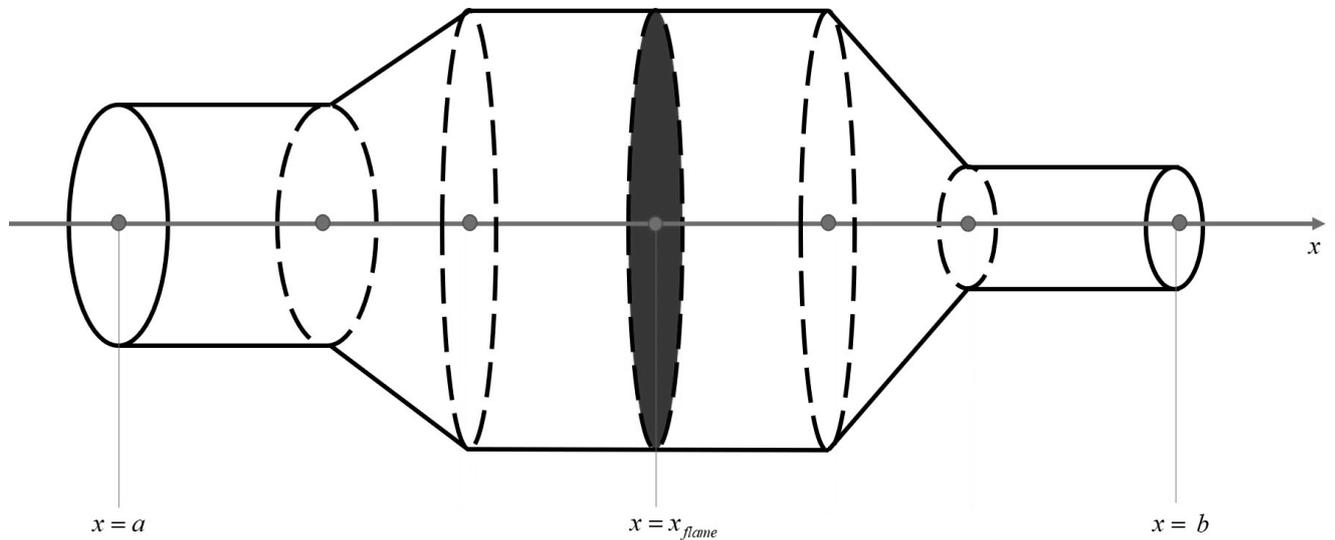


Рисунок 4.1 — Осесимметричный канал с плоской областью горения

Термоакустическая неустойчивость (вибрационное горение) возникает в случае наступления резонанса газодинамических колебаний с колебаниями тепловыделения в пламени. В инженерных методах поиска условий резонанса параметры установившегося течения считаются известными и рассматриваются только акустические колебания на его фоне с заданной частотой. Канал в этом случае представляет собой волновод и называется акустическим трактом. Возмущения скорости в акустической волне можно, при этом, уподобить силе тока, а возмущения давления — напряжению в электрической сети. При таком подходе акустический тракт приближается электрической (акустической) сетью — разбивается на элементы с однородными свойствами, каждый из которых представляется четырехполюсником (иногда, при учете энтропии, шестиполюсником) с заданными параметрами. Параметры пассивных четырехполюсников

(при отсутствии источников тепла), вычисляются, как правило, теоретически. Параметры активных четырехполюсников (с источниками тепла) задаются как идеализированные модели или находятся из дорогостоящих экспериментов. Эти параметры могут быть также определены из прямого численного моделирования камеры сгорания, что находится на пределе вычислительных возможностей современных компьютеров.

Поиск режимов вибрационного горения с использованием инженерных моделей низкого порядка сводится к нахождению собственных частот акустической сети с активными элементами и величин их инкрементов. Достоинством такого подхода является отсутствие паразитной диссипации и дисперсии, свойственных разностным схемам. К недостаткам можно отнести большую погрешность вычисления передаточных функций для элементов сети со сложной геометрией и моделирование источников тепла бесконечно тонкими поверхностями, что существенно снижает достоверность получаемых результатов.

Альтернативой акустическим сетям является использование разностных схем с улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами.

4.2 Балансно-характеристическая схема КАБАРЕ для задач виброгорения

Как и прежде, разобьем отрезок $x \in [a, b]$ на ячейки и введем на полученной сетке консервативные и потоковые переменные. Для системы уравнений (4.1) - (4.3) схему КАБАРЕ запишем в виде:

Фаза 1 (уравнения баланса):

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\rho}S)_c - (\rho S)_c}{\tau_n/2} + \frac{(\rho u S)_R - (\rho u S)_L}{h_c} &= 0, \\ \frac{(\tilde{\rho} \tilde{u} S)_c - (\rho u S)_c}{\tau_n/2} + \frac{(\rho u^2 S)_R - (\rho u^2 S)_L}{h_c} + \frac{S_R + S_L}{2} \cdot \frac{P_R - P_L}{h_c} &= 0, \\ \frac{(\tilde{\rho} \tilde{E} S)_c - (\rho E S)_c}{\tau_n/2} + \frac{(\rho u E S)_R - (\rho u E S)_L}{h_c} + \frac{(P u S)_R - (P u S)_L}{h_c} &= (q S)_c. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Фаза 2 (вычисление потоковых переменных):

$$\hat{P}_i = \left[\frac{\hat{R}_i - \hat{Q}_i}{\tilde{G}_{i-1/2} + \tilde{G}_{i+1/2}} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad \hat{u}_i = \hat{Q}_i + \tilde{G}_{i+1/2} \left[\hat{P}_i \right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad \hat{\rho}_i = \left[\frac{\hat{P}_i}{\hat{I}_i} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{R}_R &= 2\tilde{R}_c - R_L, \quad \hat{Q}_L = 2\tilde{Q}_c - Q_R, \quad \hat{I}_R = 2\tilde{I}_c - I_L, \\ R_*^\bullet &= u_*^\bullet + \tilde{G}_c (P_*^\bullet)^{(\gamma-1)/2\gamma}, \quad Q_*^\bullet = u_*^\bullet - \tilde{G}_c (P_*^\bullet)^{(\gamma-1)/2\gamma}, \\ I_*^\bullet &= \frac{p_*^\bullet}{(\rho_*^\bullet)^\gamma}, \quad \tilde{G}_c = \frac{2\sqrt{\gamma}(\tilde{I}_c)^{1/2\gamma}}{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Фаза 3 (уравнения баланса):

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{\rho}S)_c - t(\tilde{\rho}S)_c}{\tau_n/2} + \frac{(\hat{\rho}\hat{u}S)_R - (\hat{\rho}\hat{u}S)_L}{h_c} &= 0, \\ \frac{(\hat{\rho}\hat{u}S)_c - (\tilde{\rho}\tilde{u}S)_c}{\tau_n/2} + \frac{(\hat{\rho}\hat{u}^2S)_R - (\hat{\rho}\hat{u}^2S)_L}{h_c} + \frac{S_R + S_L}{2} \cdot \frac{\hat{P}_R - \hat{P}_L}{h_c} &= 0, \\ \frac{(\hat{\rho}\hat{E}S)_c - (\tilde{\rho}\tilde{E}S)_c}{\tau_n/2} + \frac{(\hat{\rho}\hat{u}\hat{E}S)_R - (\hat{\rho}\hat{u}\hat{E}S)_L}{h_c} + \frac{(\hat{P}\hat{u}S)_R - (\hat{P}\hat{u}S)_L}{h_c} &= (\hat{q}S)_c. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь использована смешанная буквенно-индексная форма записи, в которой приняты следующие часто используемые обозначения:

$$\begin{aligned} f^{n+1} &\Leftrightarrow \hat{f}, \quad f^{n+1/2} \Leftrightarrow \tilde{f}, \quad f_R \Leftrightarrow f_{i+1}, \quad f_L \Leftrightarrow f_i, \quad f_c \Leftrightarrow f_{i+1/2}, \\ f_*^\bullet &\Leftrightarrow f_R^\bullet, \quad f_c^\bullet, \quad f_L^\bullet, \quad f_*^n, \quad f_*^{n+1/2}, \quad f_*^{n+1}. \end{aligned}$$

Консервативные фазы (4.4), (4.7) также дополняются антидисперсионными поправками согласно методу, изложенному в глав. 3.

Обратим внимание на несколько важных моментов. Во-первых, недивергентное слагаемое $P \cdot \partial S / \partial x$ в законе сохранения импульса (4.2) аппроксимируется таким образом, чтобы выполнялся разностный аналог соотношения:

$$\frac{\partial PS}{\partial x} = P \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Действительно,

$$\frac{(PS)_R - (PS)_L}{h_c} = \frac{P_R + P_L}{2} \frac{S_R - S_L}{h_c} + \frac{S_R + S_L}{2} \frac{P_R - P_L}{h_c}.$$

Такой подход позволяет сделать более компактную и при этом консервативную аппроксимацию закона сохранения импульса (4.2).

Во-вторых, уравнения характеристической фазы (4.6) опираются на линейную экстраполяцию инвариантов Римана в изоэнтропическом приближении (1.35), так как в задачах термоакустики течения очень близки к изоэнтропическим. Антидисперсионная поправка при этом вычисляется с помощью линейных инвариантов (1.34). Это допустимо, так как инварианты в характеристической фазе и инварианты в вычислении поправок фактически никак не связаны. Кроме того, уравнения для второй фазы алгоритма приведены для дозвуковых течений в положительном направлении оси x ($|u + \sqrt{\gamma P/\rho}| = |c| > u > 0$), когда в каждый узел (x_i, t_n) пространственно-временной сетки приходит один инвариант R и один инвариант I из левой ячейки, и один инвариант Q из правой ячейки. Как правило, сверхзвука в задачах термоакустики не возникает, но при необходимости алгоритм можно дополнить обработкой звуковых точек из глав. 2. Значения инвариантов, полученные во время второй фазы (4.6), также монотонизируются по принципу максимума (1.31).

Шаг по времени τ_n определяется стандартным образом с помощью заданного числа Куранта CFL (1.37).

Схема (4.4) - (4.7) обладает вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству, является явной и имеет минимальный вычислительный шаблон в одну ячейку. Кроме того, при отключенной процедуре монотонизации схема обладает свойством бездиссипативности (временной обратимости), то есть эта схема не привносит в модель дополнительную схемную вязкость. При расчете акустических задач процедура монотонизации, как правило, не задействуется, что позволяет получать близкие к точным частоты и инкременты роста собственных колебаний тракта.

4.3 Модели горения

Эффект термоакустической неустойчивости возможен лишь при наличии в модели обратной связи, а именно зависимости мощности нагрева q от газодинамических параметров потока. Данная зависимость, вообще говоря, является

нелинейной, причем для сложных случаев горения топливных смесей аналитический вид зависимости неизвестен и доступны лишь экспериментальные данные. В подходе сетевых моделей учет нелинейности достаточно проблематичен, и чаще всего используются простые линейные и полиномиальные модели [71], коэффициенты которых подбираются по экспериментальным данным. Преимуществом использования схемы КАБАРЕ (4.4) – (4.7) в данном случае является естественный учет нелинейности мощности нагрева q в первой (4.4) и третьей (4.7) фазах алгоритма.

Остановимся на двух «моделях горения», которые часто используются в модельных задачах о течении газа в канале, нагреваемом металлической сеткой в $x = x_{flame}$, по которой пропущен электрический ток. Предполагается, что мощность нагрева зависит лишь от скорости потока: $q = q(u)$.

В случае нагрева газа металлической сеткой источник тепла можно считать бесконечно тонким, т.е.:

$$q = q_{loc}(t, u)\delta(x - x_{flame}). \quad (4.8)$$

В разностном случае этот источник будем считать равномерно «размазанным» по расчетной ячейке, в которой он находится:

$$q_{i+1/2}^n = \begin{cases} (q_{loc})_{i+1/2}^n / h_c, & \text{если } x_i \leq x_{flame} < x_{i+1}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Будем считать, что область горения попала в ячейку с индексом $i_f + 1/2$.

Простейшая линейная модель теплового источника с запаздыванием, т.н. $n - \tau$ модель [115], имеет вид:

$$\frac{q_{loc}(t, u)}{\bar{q}_{loc}} = \xi \frac{u(t - \tau_{del})}{\bar{u}}, \quad (4.10)$$

где \bar{q}_{loc} - среднее значение удельной мощности выделяемого тепла, \bar{u} - среднее значение скорости потока, набегающего на плоскость горения/выделения тепла, ξ - коэффициент изменения амплитуды колебаний, τ_{del} - время задержки.

В схеме КАБАРЕ модель (4.10) включается в уравнение энергии на первой и третьей фазах (4.4), (4.7) следующим образом:

$$\frac{(q_{loc})^n}{\bar{q}_{loc}} = \xi \frac{u_{i_f+1/2}^{(t_n-\tau_{del})}}{\bar{u}}, \quad (4.11)$$

где $u_{i_f+1/2}^{(t_n-\tau_{del})}$ - интерполированное по предыдущим шагам по времени отстающее на τ_{del} значение скорости:

$$u_{i_f+1/2}^{(t_n-\tau_{del})} = \frac{t_n - \tau_{del} - t_j}{\tau_j} u_{i_f+1/2}^{j+1} + \frac{t_{j+1} - t_n + \tau_{del}}{\tau_j} u_{i_f+1/2}^j, \quad (4.12)$$

$$t_j \leq t_n - \tau_{del} < t_{j+1}.$$

Таким образом, для реализации модели горения с запаздыванием во всех ячейках, соответствующих плоскостям горения, надо хранить несколько предыдущих консервативных значений скорости.

При построении нелинейной модели источника тепла с запаздыванием исходят из следующих соображений. Известно, что при нагреве потока газа проволочной сеткой мощность выделяемого тепла должна быть пропорциональна квадратному корню из числа Рейнольдса, которое в свою очередь пропорционально скорости потока [62]. Исходя из этого, нелинейную модель определяют следующим образом:

$$\frac{q_{loc}(t,u)}{\bar{q}_{loc}} = \sqrt{\frac{u(t - \tau_{del})}{\bar{u}}}. \quad (4.13)$$

В схему КАБАРЕ модель (4.13) вставляется аналогичным (4.14) образом:

$$\frac{(q_{loc})^n}{\bar{q}_{loc}} = \sqrt{\frac{u_{i_f+1/2}^{(t_n-\tau_{del})}}{\bar{u}}}. \quad (4.14)$$

Отметим, что за счет запаздывания схема КАБАРЕ остается явной несмотря на то, что на третьей фазе (4.7) используется значение q_c^{n+1} .

4.4 Задание начальных условий

Пусть требуется изучить процесс в некоторой осесимметричной трубе с известной функцией распределения площадей сечений $S(x)$, $x \in [a, b]$ и координатой x_{flame} плоскости выделения тепла. Разобьем отрезок на K частей: $\Omega_i = [a_i, a_{i+1}]$, $i = \overline{0, K-1}$, $a_0 = a$, $a_K = b$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что область горения при этом попадет в один из указанных отрезков. Каждому из отрезков Ω_i будет соответствовать так называемый CFD-элемент, в котором динамика газа будет моделироваться при помощи модели (4.1) - (4.3) и модификации схемы КАБАРЕ (4.4) - (4.7), причем для каждого элемента можно задать количество расчетных ячеек N_i для моделирования по расчетной схеме. Каждый такой CFD-элемент будет аналогичен элементу акустической цепи (которые используются в сетевом подходе к решению задач термоакустики) и обладать такими параметрами, как: распределение площадей сечений по блоку $S_i(x)$, $x \in [a_i, a_{i+1}]$; распределение газодинамических средних параметров течения $\overline{P}_i(x)$, $\overline{u}_i(x)$, $\overline{T}_i(x)$, $x \in [a_i, a_{i+1}]$, которые рассчитываются при задании начальных условий. Таким образом, трубу можно собрать из последовательных блоков постоянного радиуса, линейно изменяющегося радиуса и других типов. В случае более сложных профилей канала, его можно задать в виде единственного блока с заданным пользователем профилем площадей сечений $S(x)$, $x \in [a, b]$.

При моделировании процесса системой из нескольких элементов, перед каждым выполнением третьей фазы (4.7) соседние элементы обмениваются локальными инвариантами. Например, при дозвуковом течении со средней скоростью $\bar{u} > 0$ каждый элемент передает с правого конца значения локальных инвариантов I и R элементу справа и значение локального инварианта Q с левого конца элементу слева.

Как правило, в задачах термоакустики известны лишь средние параметры течения на входе в исследуемый акустический тракт. Пусть рассматривается цепочка из M CFD-элементов. Для начала расчетов по схеме (4.4) - (4.7) требуется задать значения газодинамических параметров ρ , u , p для всех потоковых и консервативных переменных на нулевом слое по времени. Для этого каждый CFD-элемент обрабатывается отдельно последовательно слева направо.

Рассмотрим процедуру задания начальных значений для блока j . Если $j = 0$, то известны средние газодинамические параметры течения на входе $\bar{\rho}_0$, \bar{u}_0 , \bar{P}_0 (вместо $\bar{\rho}_0$ может быть задано \bar{T}_0 , тогда плотность можно найти исходя из уравнения состояния газа). Эти значения выбираются для крайних левых потоковых переменных нулевого блока: $\rho_0^0 = \bar{\rho}_0$, $u_0^0 = \bar{u}_0$, $P_0^0 = \bar{P}_0$.

Теперь предположим, что в рассматриваемом блоке нет области выделения тепла. Тогда стационарное течение в этом блоке может быть описано с помощью задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} S}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2 S}{\partial x} + S \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} &= 0, \quad x \in [a_j, a_{j+1}], \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{E} \bar{u} S + \bar{P} \bar{u} S)}{\partial x} &= 0, \\ \bar{\rho}(a_j) &= \rho_0^0, \bar{u}(a_j) = u_0^0, \bar{P}(a_j) = P_0^0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Задача Коши (4.15) может быть решена на сетке соответствующего CFD-элемента, например, с помощью метода Рунге-Кутты 4го порядка [116], в результате чего будут получены начальные значения для потоковых переменных в блоке: ρ_i^0 , u_i^0 , p_i^0 , $i = \overline{0, N_j}$. Начальные значения для консервативных переменных после этого могут быть найдены следующим образом:

$$\rho_{i+1/2}^0 = \frac{\rho_i^0 + \rho_{i+1}^0}{2}, u_{i+1/2}^0 = \frac{u_i^0 + u_{i+1}^0}{2}, P_{i+1/2}^0 = \frac{P_i^0 + P_{i+1}^0}{2}, i = \overline{0, N_j - 1}$$

После этого значения крайних правых потоковых переменных $\rho_{N_j}^0$, $u_{N_j}^0$, $p_{N_j}^0$ передаются в следующий блок, им приравниваются крайние левые потоковые значения в это блоке и для нахождения начальных значений для остальных переменных решается задача, аналогичная (4.15), но уже со своими начальными данными.

Теперь предположим, что в рассматриваемом блоке есть область выделения тепла в ячейке с индексом $i_f + 1/2$, находящейся между узлами x_{flame} и $x_{flame+1}$, для которой известна средняя мощность выделения тепла \bar{Q} . Тогда с помощью системы (4.15) для отрезка $x \in [a_j, x_{flame}]$ находятся начальные значения для потоковых переменных ρ_i^0 , u_i^0 , p_i^0 , $i = \overline{0, i_f}$. Затем с помощью балансных

соотношений находятся потоковые значения с индексом $i_f + 1$:

$$\begin{aligned} \rho_R u_R S_R &= \rho_L u_L S_L, \\ \begin{cases} P_R S_R + \rho_R u_R^2 S_R = P_L S_R + \rho_L u_L^2 S_L, & \text{если } S_R \geq S_L, \\ \frac{P_R}{\rho_R^\gamma} = \frac{P_L}{\rho_L^\gamma}, & \text{иначе,} \end{cases} & \quad (4.16) \\ P_R u_R S_R + \rho_R u_R E_R S_R &= P_L u_L S_L + \rho_L u_L E_L S_L + \bar{Q}, \end{aligned}$$

где $\rho_L = \rho_{i_f}^0$, $u_L = u_{i_f}^0$, $P_L = P_{i_f}^0$, $S_L = S_{i_f}$, $S_R = S_{i_f+1}$ — известные величины, а $\rho_R = \rho_{i_f+1}^0$, $u_R = u_{i_f+1}^0$, $P_R = p_{i_f+1}^0$ — неизвестные величины. Затем для оставшихся потоковых значений решается задача (4.15) для отрезка $x \in [x_{flame+1}, a_{j+1}]$. Все начальные консервативные переменные в блоке по-прежнему восстанавливаются как полусуммы потоковых.

Заметим, что именно такое задание начальных данных удобно использовать при решении задачи о поиске собственных частот и коэффициентов роста. В силу того, что начальное условие для консервативных переменных не согласовано балансными уравнениями с потоковым неизвестными, то при первых шагах по времени по схеме (4.4) - (4.7) в модель вносятся малые возмущения всех частот, поддерживаемых расчетной сеткой. Это позволяет определять за один расчет коэффициенты роста сразу для всех допустимых сеткой собственных частот системы, а не запускать для каждой частоты отдельный расчет.

4.5 Задание граничных условий

На входе и выходе из акустического тракта задаются коэффициенты отражения акустических волн \hat{R}_{up} и \hat{R}_{down} , соответственно:

$$\hat{R}_{up} = \frac{Z_{up} + \bar{\rho}_{up} \bar{c}_{up}}{Z_{up} - \bar{\rho}_{up} \bar{c}_{up}}, \quad \hat{R}_{down} = \frac{Z_{down} - \bar{\rho}_{down} \bar{c}_{down}}{Z_{down} + \bar{\rho}_{down} \bar{c}_{down}}, \quad Z = \frac{p - \bar{p}}{u - \bar{u}}, \quad (4.17)$$

где Z — акустический импеданс, c — скорость звука. В сеточном случае первое уравнение (4.17) ставится для самого левого CFD-элемента и соответствует

выражению:

$$\bar{\rho}_{1/2}\bar{c}_{1/2}(\widehat{R}_{up} + 1)(u_0^n - \bar{u}_{1/2}) - (\widehat{R}_{up} - 1)(p_0^n - \bar{p}_{1/2}) = 0, \quad (4.18)$$

где $\bar{\rho}_{1/2}$, $\bar{u}_{1/2}$, $\bar{c}_{1/2}$ — средние значения плотности, скорости и скорости звука в ячейке, граничащей с входом в трубу. Второе уравнение (4.17) ставится для самого правого блока цепи и соответствует выражению:

$$\bar{\rho}_{N-1/2}\bar{c}_{N-1/2}(\widehat{R}_{down} + 1)(u_N^n - \bar{u}_{N-1/2}) + (\widehat{R}_{down} - 1)(p_N^n - \bar{p}_{N-1/2}) = 0, \quad (4.19)$$

где $\bar{\rho}_{N-1/2}$, $\bar{u}_{N-1/2}$, $\bar{c}_{N-1/2}$ — средние значения плотности, скорости и скорости звука в ячейке, граничащей с выходом из трубы.

С помощью условия (4.18) и значения локального инварианта Q , приходящего из внутренней части трубы на ее начало, находятся потоковые значения скорости и давления для потоковых переменных во входной точке трубы. С помощью условия (4.19) и значения локального инварианта R , приходящего из внутренней части трубы на ее конец, находятся потоковые значения скорости и давления для потоковых переменных в выходной точке трубы.

Частные случаи:

1. Открытый вход/выход.

Открытому входу или выходу из трубы соответствуют граничные условия $\widehat{R}_{up} = -1$ и $\widehat{R}_{down} = -1$, соответственно. Действительно, такие граничные условия эквивалентны условиям $p_0^n = \bar{p}_{1/2}$ и $p_N^n = \bar{p}_{N-1/2}$.

2. Жесткая стенка на входе/выходе.

Условиям наличия жесткой стенки на входе или выходе из трубы соответствуют граничные условия $\widehat{R}_{up} = 1$ и $\widehat{R}_{down} = 1$, соответственно. Действительно, такие граничные условия эквивалентны условиям $u_0^n = 0$ и $u_N^n = 0$.

3. Резко расширяющийся вход.

Резко расширяющемуся входу соответствует граничное условие [117]:

$$\widehat{R}_{up} = \frac{1 - \gamma \overline{M}_{up} / (1 + (\gamma - 1) \overline{M}_{up}^2)}{1 + \gamma \overline{M}_{up} / (1 + (\gamma - 1) \overline{M}_{up}^2)},$$

где \overline{M}_{up} - значение среднего числа Маха на входе в трубу.

4. Резко сужающийся выход.

Резко сужающемуся выходу соответствует граничное условие [118]:

$$\hat{R}_{down} = \frac{1 - (\gamma - 1)\overline{M}_{down}/2}{(1 + (\gamma - 1)\overline{M}_{down}^2)},$$

где \overline{M}_{down} - значение среднего числа Маха на выходе из трубы.

4.6 Поиск неустойчивых мод

Как уже упоминалось ранее, несогласованность начальных консервативных и потоковых переменных привносит в начальные данные необходимый для развития неустойчивости «белый шум» по всем возможным частотам. Известно, что термоакустической неустойчивости более всего подвержены низкочастотные гармоники, с длиной волны порядка размеров акустического тракта [62]. Длина рассматриваемого акустического тракта L при этом позволяет примерно определить нижнюю частоту возможных колебаний $\omega_0 = \pi/L$ (она в общем случае не совпадает с реальной хотя бы из-за наличия источников тепла). Поэтому расчет целесообразно проводить в течение нескольких периодов (обычно 50-100) на этой «прикидочной» частоте. За это время в решении должна выделиться самая неустойчивая гармоника. Для ее определения запоминаются значения скоростей в некоторой точке трубы $u_i^n = u(x_i, t_n)$ на протяжении всего расчета, и затем полученная функция от времени представляется в виде:

$$u_i(t) \approx B e^{i\tilde{\omega}t}, \quad \tilde{\omega} \in \mathbb{C},$$

где комплексная частота $\tilde{\omega}$ определяется по методу наименьших квадратов. Искомые частота \tilde{f}_1 и инкремент роста $\tilde{\lambda}_1$ неустойчивой моды вычисляются следующим образом:

$$\tilde{f}_1 = \frac{\text{Re}(\tilde{\omega})}{2\pi}, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{\text{Im}(\tilde{\omega})}{2\pi}.$$

Для ускорения выделения неустойчивой моды в качестве начальных условий можно задать волновой пакет только из низких гармоник.

4.7 Результаты расчетов

Для верификации метода рассмотрим задачу о генерации звука в открытой с обоих концов трубе постоянного сечения с различным расположением источника тепловыделения (труба Рийке [96]), имеющую аналитическое решение.

Длина трубы $L = 1$, величина радиуса не имеет значения, лишь бы он был много меньше длины трубы. Пусть на вход в трубу подается поток воздуха со следующими параметрами:

$$\bar{P}_0 = 101324 \text{ Па}, \quad \bar{u}_0 = 3.408635 \text{ м/с}, \quad \bar{\rho}_0 = 1.2 \text{ кг/м}^3 \quad (\bar{T}_0 = 294.50649 \text{ К}).$$

На концах трубы будем считать заданными граничные условия открытых концов. Схематически рассматриваемая труба изображена на рис. 4.2.

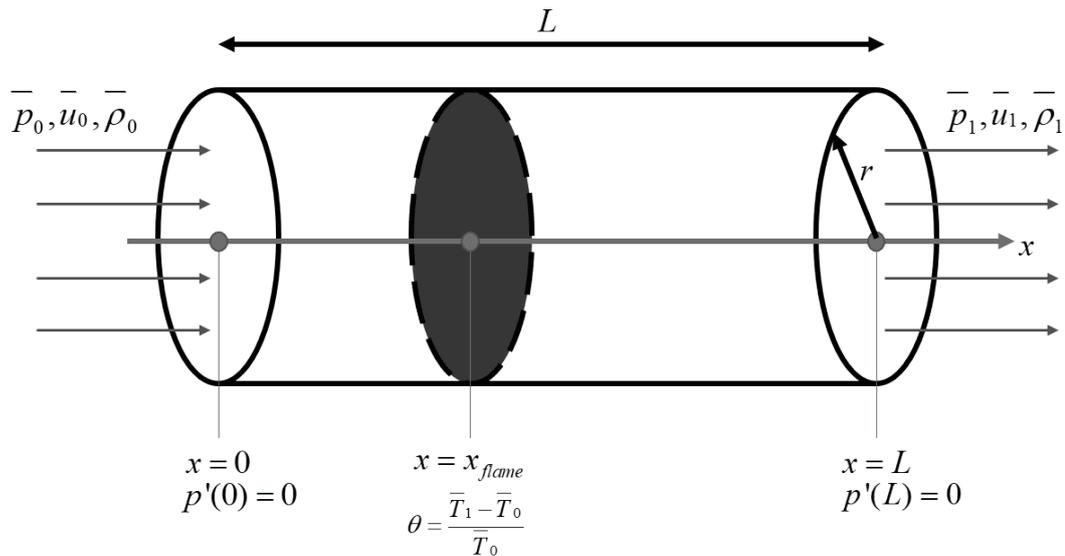


Рисунок 4.2 — Прямая труба с открытыми концами и потоком газа, движущимся слева направо, и плоской областью подогрева

Введем в трубе ось координат, проходящую вдоль трубы через центры сечений трубы: $x \in [0,1]$, $[x] = \text{м}$. Плоскую область нагрева газа (горячую сетку) расположим в плоскости с координатой $x = x_{flame}$. Нагрев в этой области характеризуется параметром относительного перепада температуры газа, проходящего через плоскость выделения тепла $\theta = (\bar{T}_1 - \bar{T}_0) / \bar{T}_0$. Здесь \bar{T}_0 — среднее значение температуры газа слева от области нагрева, \bar{T}_1 — справа.

Источник тепла будем предполагать зависящим только от скорости набегающего потока газа: $q = q(u)$. Чтобы провести сравнение с результатами по пакету *OSCILOS* [71], в качестве модели горения выберем линейную модель $n - \tau$ (4.10) со следующими коэффициентом изменения амплитуды колебаний ξ и задержкой по времени τ_{del} :

$$\xi = 0.5, \quad \tau_{del} = 0.0014506 \text{ с.}$$

Время запаздывания подобрано таким образом, чтобы для случая $x_{flame} = 0.25$ выполнялось $2\pi\tau_{del}f_1 \approx \pi/2$ (f_1 - нижняя частота рассматриваемой трубы Рийке), что соответствует максимально возможному росту нижней гармоники.

Рассмотрим 4 серии расчетов для трубы Рийке:

- без источников тепла;
- с источником тепла без запаздывания;
- с источником тепла с запаздыванием, с фиксированным перепадом температуры θ и разными положениями области нагрева x_{flame} ;
- с источником тепла с запаздыванием, с фиксированным положением области нагрева x_{flame} и разными перепадами температуры θ .

Все расчеты по разностной схеме КАБАРЕ выполнялись с постоянным шагом по времени, соответствующем $CFL = 0.5$ на 90 расчетных ячейках. Сравнение с аналитическими решениями и результатами сетевой модели *OSCILOS* проводилось по значениям нижних собственных частот задач и соответствующим им инкрементам роста.

4.7.1 Прямая труба без области нагрева газа

В данной задаче акустические колебания не затухают и не развиваются, причем известны точные значения собственных частот колебаний:

$$f_n = \frac{\pi n}{L(1 + \overline{M}_0^2)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.20)$$

где \overline{M}_0 - среднее число Маха входного потока.

В табл. 6 приведены результаты вычисленных по схеме КАБАРЕ и с помощью пакета *OSCILOS* нижних комплексных частот и их сравнение с аналитическим решением (4.20). Дополнительно на рис. 4.3 приведен график зависимости значений скорости от времени на входе в трубу $u(0,t)$.

Таблица 6 — Нижние комплексные частоты трубы Рийке без источников тепла

	Собственная частота	Инкремент роста
Решение по коду <i>OSCILOS</i>	171.9963 Гц	$-5.2329 \times 10^{-14} c^{-1}$
Решение по схеме КАБАРЕ	171.8909 Гц	$-4.5 \times 10^{-10} c^{-1}$
Аналитическое решение	171.8924769 Гц	$0 c^{-1}$
Относительная ошибка <i>OSCILOS</i>	0.06 %	—
Относительная ошибка КАБАРЕ	$9.2 \times 10^{-4} \%$	—

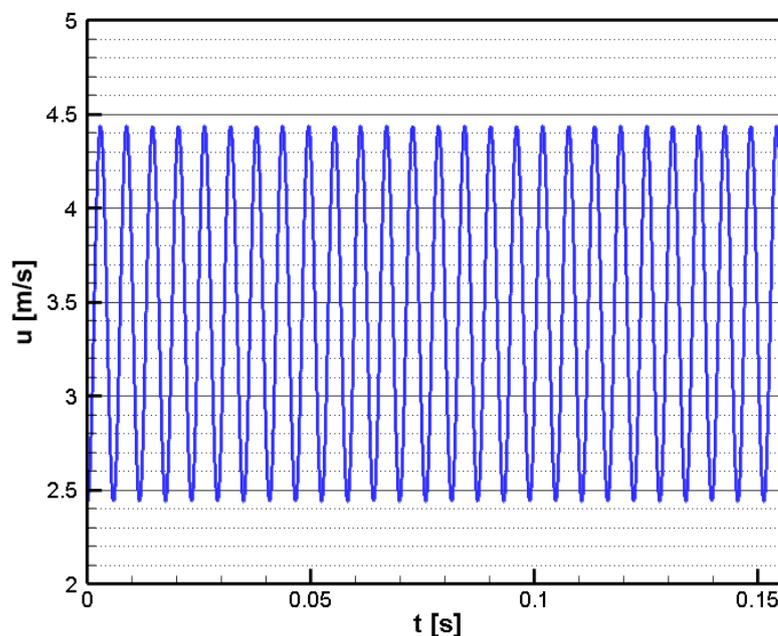


Рисунок 4.3 — Скорость газа $u(0,t)$ на входе в трубу Рийке без области нагрева

Из результатов, приведенных в табл. 6, видно, что ошибка в определении схемой КАБАРЕ собственной частоты на несколько порядков меньше ошибки по коду *OSCILOS*. Ошибка в инкременте роста также пренебрежимо мала. Отметим, что схема КАБАРЕ бездиссипативна, и в отсутствие источника тепла

акустические колебания не затухают и могут существовать сколь угодно долго. Ошибка в представленном инкременте роста обусловлена лишь приближенностью метода его выделения.

Отметим, что большинство широко используемых разностных схем для уравнений газовой динамики обладают схемной вязкостью, и их использование для анализа термоакустической неустойчивости проблематично, поскольку неустойчивая мода сможет саморазвиться лишь на очень подробных сетках.

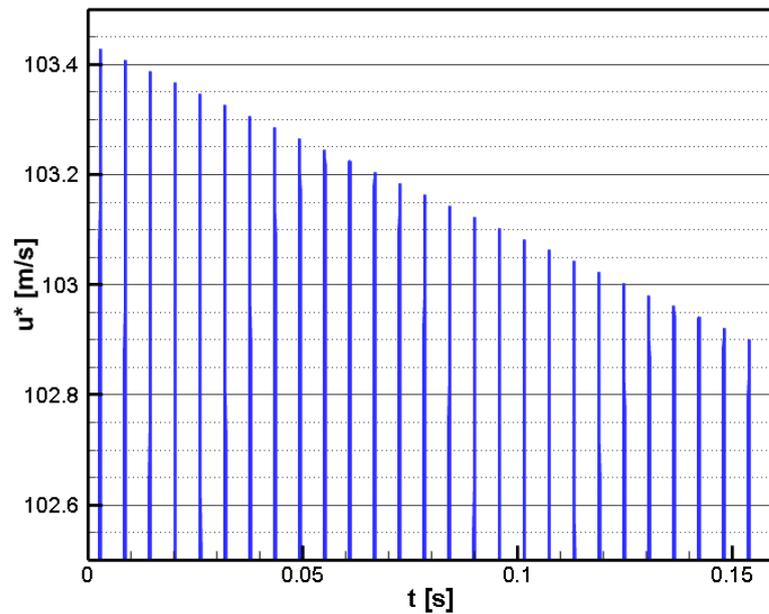
4.7.2 Прямая труба с областью нагрева без запаздывания

Расположим плоскую область нагрева газа в координате $x_{flame} = 0.25$ м. Нагрев в этой области зададим таким образом, чтобы относительный перепад температуры составлял $\theta = 0.01$. Источник тепла будем предполагать постоянным: $q = \bar{q} = \text{const}$. В таком случае акустические колебания должны затухать.

В табл. 7 приведены результаты вычисленных по схеме КАБАРЕ и с помощью пакета *OSCILOS* нижних комплексных частот и их сравнение с аналитическим решением [62]. Дополнительно на рис. 4.4 приведен график зависимости значений скорости от времени на входе в трубу $u(0,t)$. Отметим, что так как коэффициент затухания в этой задаче очень мал, то ось скорости была растянута в 30 раз ($u \rightarrow u^*$), чтобы показать наличие затухания.

Таблица 7 — Нижние комплексные частоты трубы Рийке с постоянным источником тепла

	Собственная частота	Инкремент роста
Решение по коду <i>OSCILOS</i>	172.4307 Гц	$-0.0006025 c^{-1}$
Решение по схеме КАБАРЕ	172.3422017 Гц	$-0.005576 c^{-1}$
Аналитическое решение	172.344 Гц	$-0.0055741 c^{-1}$
Относительная ошибка <i>OSCILOS</i>	0.05 %	0.5 %
Относительная ошибка КАБАРЕ	0.001 %	0.034 %



Ось скорости растянута в 30 раз.

Рисунок 4.4 — Скорость газа $u(0,t)$ на входе в трубу Рийке с постоянным источником тепла

Результаты в табл. 7 показывают, что схема КАБАРЕ позволяет решать задачи с постоянным источником тепла с точностью на порядок большей, чем пакет *OSCILOS*. Такая высокая точность связана с бездиссипативностью используемой разностной схемы: в модель не добавляется дополнительное сопротивление в виде схемной вязкости, и амплитуды собственных колебаний системы убывают с близкой к точной скоростью.

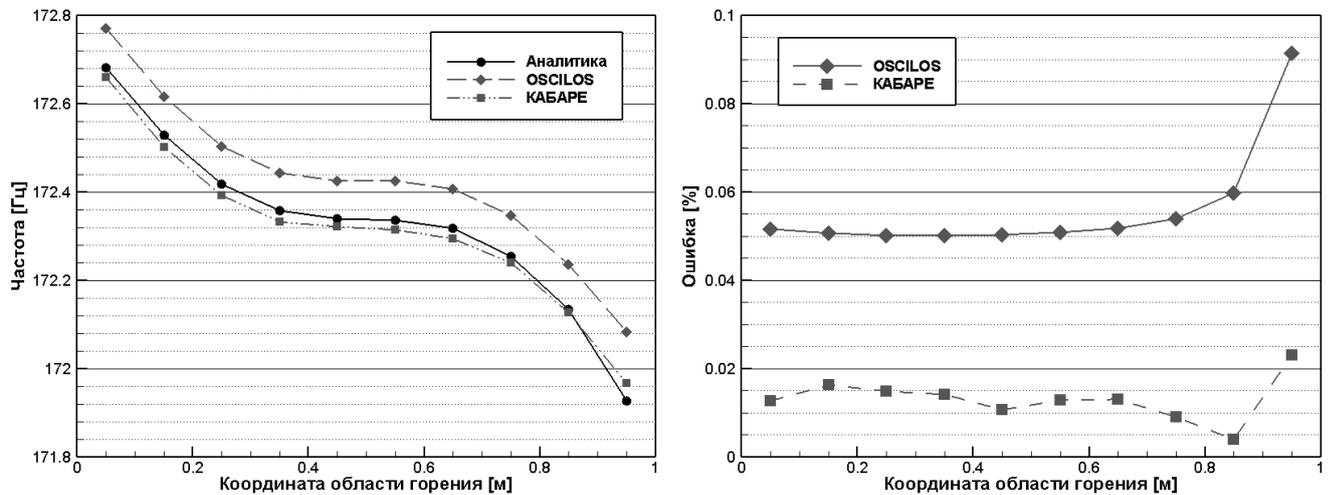
4.7.3 Прямая труба при разных положениях плоской области горения с запаздыванием

Проанализируем влияние на развитие неустойчивости расположения теплового источника (с моделью горения с запаздыванием). Рассмотрим десять вариантов:

$$x_{flame} = \{0.05; 0.15; 0.25; 0.35; 0.45; 0.55; 0.65; 0.75; 0.85; 0.95\}. \quad (4.21)$$

Нагрев будем задавать таким образом, чтобы относительный перепад температуры был постоянным для всех тестов: $\theta = 0.01$.

На рис. 4.5 и 4.6 приведены результаты вычисленных по схеме КАБАРЕ и с помощью пакета *OSCILOS* нижних частот и соответствующих им инкрементов роста для задач (4.21) и их сравнение с аналитическим решением [62]. Дополнительно на рис. 4.7 приведен график зависимости значений скорости от времени на входе в трубу $u(0,t)$ для случая $x_{flame} = 0.25$. Отметим, что аналитическое решение выведено лишь для простейшей линейной модели горения (где вместо задержки по времени задается сдвиг фаз, одинаковый для всех гармоник).

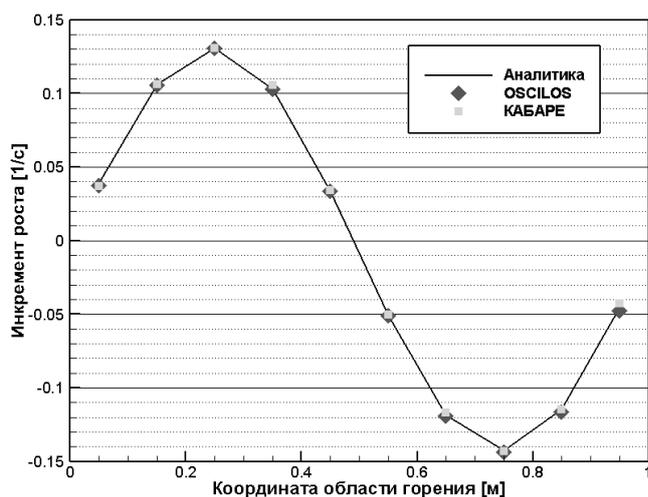


а) Нижние частоты колебаний

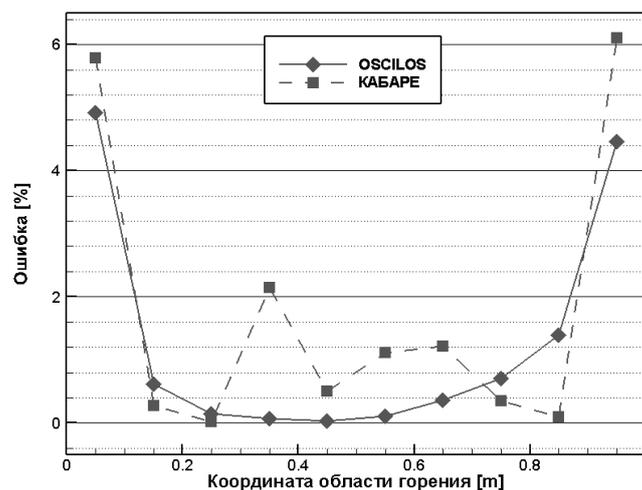
б) Относительные ошибки для нижних частот

Рисунок 4.5 — Нижние частоты трубы Рийке для различных положений источника тепла

Графики на рис. 4.5 и 4.6 позволяют заключить, что результаты, полученные по схеме КАБАРЕ, качественно совпадают с аналитическими решениями: максимум нарастания нижней гармоники находится в точке $x_{flame} = 0.25$; максимум затухания находится в точке $x_{flame} = 0.75$; при $x_{flame} \in [0.05; 0.45]$ колебания возрастают; при $x_{flame} \in [0.55; 0.95]$ колебания затухают; при передвижении области горения слева направо нижние частоты убывают, как это и предписывается теорией [62]. Результаты для значений нижних частот на порядок точнее результатов по коду *OSCILOS* даже на грубой сетке. Тем не менее разница относительных ошибок для инкрементов роста по двум моделям может достигать 2-3% в силу схемной дисперсии и ошибки метода выделения неустойчивой гармоники.



а) Инкременты роста



б) Относительные ошибки для инкрементов роста

Рисунок 4.6 — Инкременты роста трубы Рийке для различных положений источника тепла

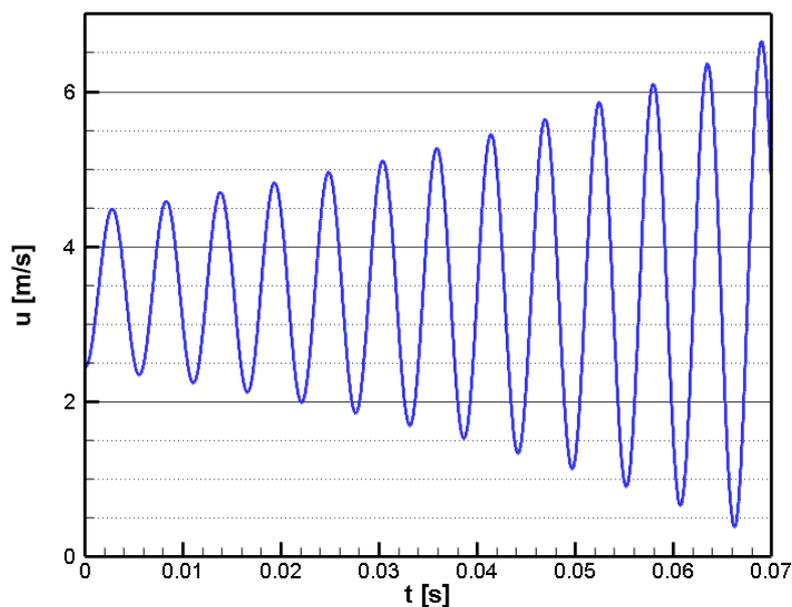


Рисунок 4.7 — Скорость газа $u(0,t)$ на входе в трубу Рийке с постоянным источником тепла с запаздыванием в точке $x_{flame} = 0.25$

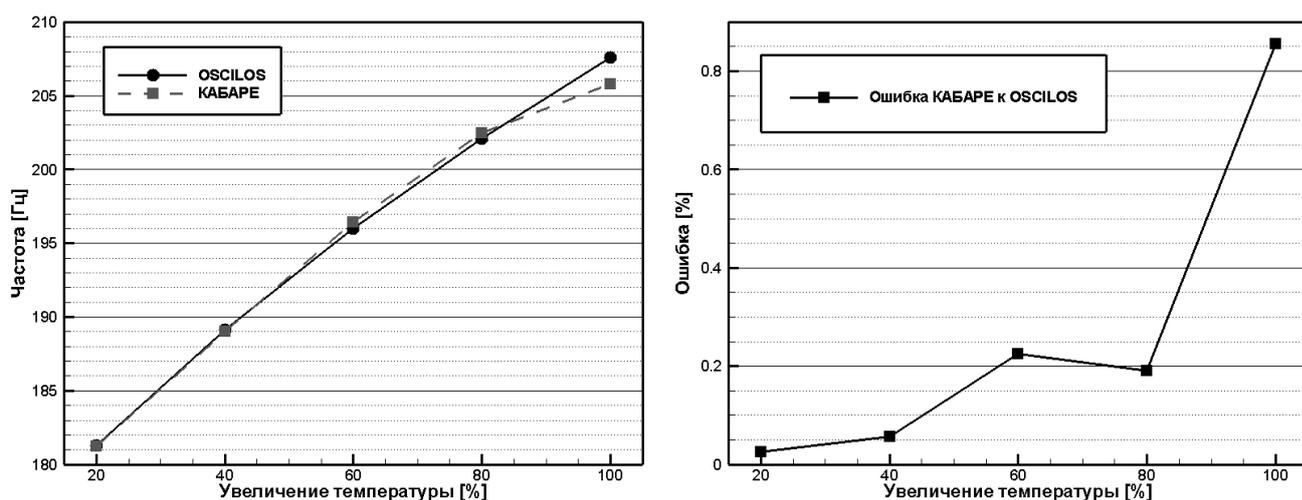
Ближе к границам трубы погрешность обоих методов возрастает до 6.1%. Это, возможно, объясняется тем, что само аналитическое решение [62] получено с большим числом допущений и имеет приближенный характер, а «истинное» решение для областей горения возле границ трубы неизвестно.

4.7.4 Прямая труба при разных перепадах температуры в плоской области горения с запаздыванием

Зафиксируем расположение плоской области нагрева газа $x_{flame} = 0.25$ и проварьируем относительный перепад температуры газа в области нагрева:

$$\theta = \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0\} \quad (4.22)$$

На рис. 4.8 и 4.9 приведены результаты вычисленных по схеме КАБАРЕ нижних частот и соответствующих им инкрементов роста для задач (4.22) и их сравнение с результатами по коду *OSCILOS* (аналитических решений при больших перепадах температур нет).

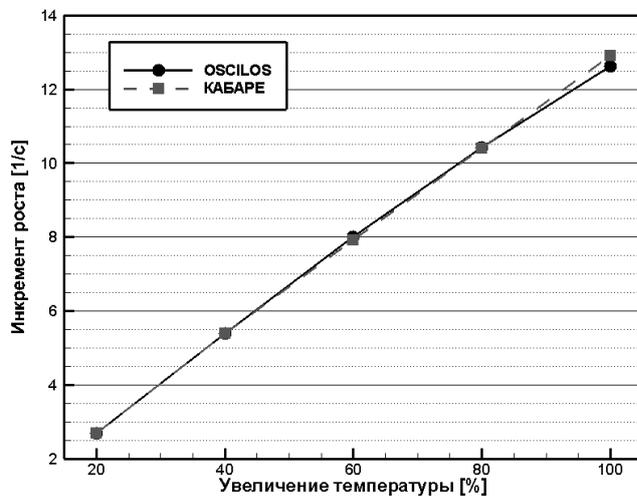


а) Нижние частоты колебаний

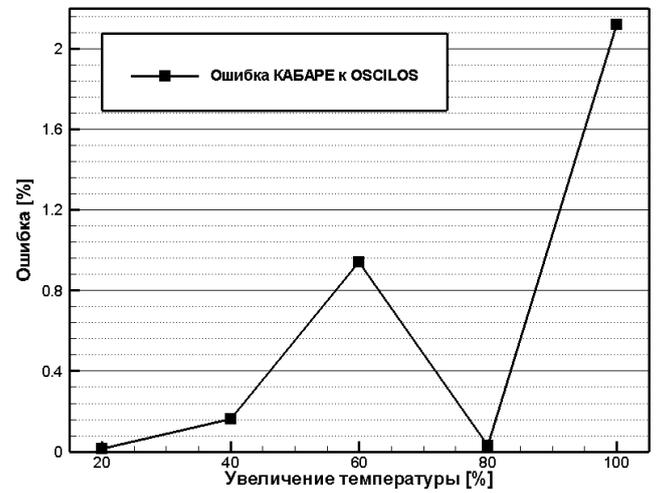
б) Относительные ошибки для нижних частот

Рисунок 4.8 — Нижние частоты трубы Рийке для различных перепадов температуры

Графики рис. 4.8 и 4.9 позволяют заключить, что результаты по схеме КАБАРЕ качественно совпадают с результатами по коду *OSCILOS*: при повышении перепада температуры нижние частоты и соответствующие им инкременты роста возрастают почти линейно. Увеличение расхождения результатов с увеличением перепада температуры обусловлено различиями в подходах обоих методов и с возможной некорректностью использования сетевых моделей в случае больших перепадов температур.



а) Икременты роста



б) Относительные ошибки для инкрементов роста

Рисунок 4.9 — Икременты роста трубы Рийке для различных перепадов температуры

Глава 5. Схема КАБАРЕ для задач сопряженной гидроупругости

5.1 Уравнения газовой динамики и динамической упругости в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных

5.1.1 Уравнения газовой динамики

Рассмотрим двумерные уравнения динамики идеального газа в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных:

$$\frac{1}{J} \frac{d\rho J}{dt} + \frac{\partial \rho(u - \dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial \rho(v - \dot{y})}{\partial y} = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{J} \frac{d\rho J u}{dt} + \frac{\partial \rho u(u - \dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial \rho u(v - \dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = \rho F_x, \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{J} \frac{d\rho J v}{dt} + \frac{\partial \rho v(u - \dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial \rho v(v - \dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = \rho F_y, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{J} \frac{d\rho J E}{dt} + \frac{\partial \rho E(u - \dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial \rho E(v - \dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial P u}{\partial x} + \frac{\partial P v}{\partial y} = F_x \rho u + F_y \rho v, \quad (5.4)$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad (5.5)$$

$$E = \frac{u^2 + v^2}{2} + e, \quad P = \rho e(\gamma - 1), \quad (5.6)$$

где $x = x(x_0, y_0, t)$, $y = y(x_0, y_0, t)$ — подвижная система координат, $J = D(x, y)/D(x_0, y_0)$ — якобиан перехода, ρ — плотность газа, (u, v) — компоненты скорости газа в декартовой системе координат, (\dot{x}, \dot{y}) — компоненты скорости подвижных координат, P — давление газа, E — удельная полная энергия газа, e — удельная внутренняя энергия газа, γ — показатель адиабаты идеального газа, F_x, F_y — некоторые удельные правые части. При $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ уравнения (5.1) - (5.5) переходят в уравнения в эйлеровых переменных, а при $\dot{x} = u, \dot{y} = v$ — в уравнения в лагранжевых переменных.

Пусть уравнения (5.1) - (5.6) некоторым образом аппроксимируются на подвижной структурированной четырехугольной кривой сетке. Аналогично рас-

смотренному ранее алгоритму построения схемы КАБАРЕ на фиксированной косоугольной сетке в глав. 1, предположим, что существует некоторое гладкое преобразование координат $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$, переводящее эту сетку в стационарную и ортогональную. Координаты (α, β) также будем называть опорными. Тогда в опорной системе координат уравнения (5.1) - (5.4) будут иметь следующий вид (похожий на (1.40)):

$$\begin{aligned} \frac{dM\mathbf{u}}{dt} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\mathbf{a} \frac{\partial y}{\partial\beta} - \mathbf{b} \frac{\partial x}{\partial\beta} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta} \left(-\mathbf{c} \frac{\partial y}{\partial\alpha} + \mathbf{d} \frac{\partial x}{\partial\alpha} \right) &= M\mathbf{f}, \\ \mathbf{u} &= (1, u, v, E)^T, \quad \mathbf{f} = (0, F_x, F_y, F_x u + F_y v)^T, \\ \mathbf{a} &= (\rho(u - \dot{x}), \rho u(u - \dot{x}) + P, \rho v(u - \dot{x}), \rho E(u - \dot{x}) + Pu)^T, \\ \mathbf{b} &= (\rho(v - \dot{y}), \rho u(v - \dot{y}), \rho v(v - \dot{y}) + P, \rho E(v - \dot{y}) + Pv)^T, \\ \mathbf{c} &= \mathbf{a}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где M — масса газа.

Помимо дивергентной формы уравнений (5.7) для построения схемы нам понадобится характеристическая форма уравнений газовой динамики. Уравнения (5.7) можно представить в простом раздифференцированном виде:

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} + A_\alpha \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \alpha} + A_\beta \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \beta} = \bar{\mathbf{f}}, \tag{5.8}$$

где $\bar{\mathbf{u}} = (\rho, u, v, P)^T$. Матрицы A_α и A_β обладают следующими собственными значениями:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\alpha &= \Lambda_2^\alpha = \frac{1}{J} \left((u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \beta} - (v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \beta} \right), \\ \Lambda_1^\beta &= \Lambda_2^\beta = \frac{1}{J} \left(-(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + (v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right), \\ \Lambda_3^\alpha &= \Lambda_1^\alpha + \frac{c}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \beta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \beta} \right]^2}, \quad \Lambda_3^\beta = \Lambda_1^\beta + \frac{c}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]^2}, \\ \Lambda_4^\alpha &= \Lambda_1^\alpha - \frac{c}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \beta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \beta} \right]^2}, \quad \Lambda_4^\beta = \Lambda_1^\beta - \frac{c}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]^2}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $c = \sqrt{\gamma P / \rho}$ — скорость звука. Найдя собственные векторы матриц A_α и A_β , можно найти характеристический вид уравнений газовой динамики по направ-

лениям α и β :

$$\begin{aligned} \frac{dR_k^\bullet}{dt} + \Lambda_k^\bullet \frac{\partial R_k^\bullet}{\partial \bullet} &= G_k^\bullet, \quad k = \overline{1,4}, \quad \bullet = \{\alpha, \beta\}, \\ R_1^\bullet &= \rho c_{loc}^2 - P, \quad R_2^\bullet = u_s^\bullet, \\ R_3^\bullet &= u_n^\bullet + G_{loc} P, \quad R_4^\bullet = u_n^\bullet - G_{loc} P, \quad G = \frac{1}{\rho c}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Инварианты Римана в (5.10) выбраны линейными (1.34), при этом (u_n^α, u_s^α) — компоненты вектора скорости в локальной системе координат $(\mathbf{n}^\alpha, \mathbf{s}^\alpha)$

$$\mathbf{n}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \beta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \beta})^2}} \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}, -\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^T, \quad \mathbf{s}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \beta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \beta})^2}} \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^T,$$

а (u_n^β, u_s^β) — компоненты вектора скорости в локальной системе координат $(\mathbf{n}^\beta, \mathbf{s}^\beta)$

$$\mathbf{n}^\beta = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \alpha})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \alpha})^2}} \left(-\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^T, \quad \mathbf{s}^\beta = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \alpha})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \alpha})^2}} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^T.$$

Отметим, что левые части характеристических форм (5.10) сохраняют свой вид вне зависимости от того, в каких СЭЛ переменных рассматриваются уравнения (меняются только системы координат, в которых берутся компоненты вектора скорости). Точный вид правых частей G_k^\bullet при этом нам не важен.

Выражения (5.10) задают так называемые локальные линейные инварианты Римана I_k^\bullet (1.34), которые потребуются в дальнейшем для построения характеристической фазы алгоритма. Отметим, что вместо линейных инвариантов можно использовать, например, изохорные или изоэнтропические локальные инварианты [111]. Использование именно линейных инвариантов продиктовано тем, что в таком случае относительно легко «стыковать» уравнения газовой динамики и динамической упругости при расчете задач FSI.

5.1.2 Уравнения динамической упругости

Рассмотрим двумерные уравнения динамики упругого тела в лагранжевых переменных в предположении линейной теории упругости:

$$\frac{dM}{dt} = 0, \quad (5.11)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho F_x, \quad (5.12)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho F_y, \quad (5.13)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \quad (5.14)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \frac{\partial \delta x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \quad (5.15)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right), \quad (5.16)$$

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad (5.17)$$

где $x = x(x_0, y_0, t)$, $y = y(x_0, y_0, t)$ — лагранжевы координаты, ρ — плотность тела, M — масса тела (постоянная по времени в случае лагранжевых переменных), (u, v) — компоненты скорости точек тела в декартовой системе координат, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} — компоненты тензора напряжений, λ и μ — первый и второй параметры Ламе, соответственно, δx , δy — приращения координат относительно недеформированного состояния тела.

Для получения полной системы дифференциальных уравнений первого порядка гиперболического типа продифференцируем закон Гука (5.14) - (5.16) по времени:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dt} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (5.18)$$

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dt} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (5.19)$$

$$\frac{d\sigma_{xy}}{dt} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (5.20)$$

Для построения балансно-характеристического метода будем использовать дифференциальные уравнения (5.11) - (5.13), (5.18) - (5.20). Так как закон Гука (5.18) - (5.20) не является законом сохранения с физической точки зрения, то систему уравнений уже не получается выписать в компактном векторном виде, как в случае уравнений газовой динамики (5.7). Чтобы приблизиться к этому виду, домножим уравнения закона Гука на плотность ρ , тогда можно получить следующую почти векторную форму в опорной системе координат (α, β) :

$$\begin{aligned} \frac{dM\mathbf{u}}{dt} + \bar{\rho}_1 \circ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mathbf{a} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \mathbf{b} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \bar{\rho}_2 \circ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\mathbf{c} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \mathbf{d} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) &= M\mathbf{f}, \\ \mathbf{u} &= (1, u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T, \quad \mathbf{f} = (0, F_x, F_y, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{a} &= -(0, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, u, u, v)^T, \quad \mathbf{b} = -(0, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, u, u, u)^T, \\ \mathbf{c} &= -(0, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, v, v, v)^T, \quad \mathbf{d} = -(0, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, v, v, u)^T, \\ \bar{\rho}_1 &= (0, 1, 1, \rho(\lambda + 2\mu), \rho\lambda, \rho\mu)^T, \quad \bar{\rho}_2 = (0, 1, 1, \rho\lambda, \rho(\lambda + 2\mu), \rho\mu)^T. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Для нахождения характеристической формы уравнений представим систему (5.21) в простом виде:

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} + B_\alpha \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \alpha} + B_\beta \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \beta} = \bar{\mathbf{f}}, \quad (5.22)$$

где $\bar{\mathbf{u}} = (\rho, u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T$. Матрицы B_α и B_β обладают следующими собственными значениями:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\alpha &= \Lambda_2^\alpha = 0, \\ \Lambda_3^\alpha &= \frac{c_s}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \beta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \beta} \right]^2}, \quad \Lambda_3^\beta = \frac{c_s}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]^2}, \\ \Lambda_4^\alpha &= -\frac{c_s}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \beta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \beta} \right]^2}, \quad \Lambda_4^\beta = -\frac{c_s}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]^2}, \\ \Lambda_5^\alpha &= \frac{c_p}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \beta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \beta} \right]^2}, \quad \Lambda_5^\beta = \frac{c_p}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]^2}, \\ \Lambda_6^\alpha &= -\frac{c_p}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \beta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \beta} \right]^2}, \quad \Lambda_6^\beta = -\frac{c_p}{J} \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]^2}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где $c_s = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — скорость звука продольных упругих волн, $c_p = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость звука поперечных упругих волн. Характеристический вид уравнений динамической упругости и локальные линейные инварианты Римана по направлениям α и β тогда имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dR_k^\bullet}{dt} + \Lambda_k^\bullet \frac{\partial R_k^\bullet}{\partial \bullet} &= G_k^\bullet, \quad k = \overline{1,6}, \quad \bullet = \{\alpha, \beta\}, \\ R_1^\bullet &= \rho(c_s^2)_{loc} + \frac{\sigma_{nn}^\bullet + \sigma_{ss}^\bullet}{2}, \quad R_2^\bullet = \rho(c_p^2)_{loc} + \sigma_{ss}^\bullet, \\ R_3^\bullet &= u_n^\bullet - (G_s)_{loc} \sigma_{nn}^\bullet, \quad R_4^\bullet = u_n^\bullet + (G_s)_{loc} \sigma_{nn}^\bullet, \quad G_s = \frac{1}{\rho c_s} \\ R_5^\bullet &= u_s^\bullet - (G_p)_{loc} \sigma_{ns}^\bullet, \quad R_6^\bullet = u_s^\bullet + (G_p)_{loc} \sigma_{ns}^\bullet, \quad G_p = \frac{1}{\rho c_p}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где u_n^\bullet и u_s^\bullet — координаты вектора скорости в локальных координатах, используемых в (5.10), а σ_{nn}^\bullet , σ_{ss}^\bullet и σ_{ns}^\bullet — компоненты тензора напряжений в тех же системах координат.

5.2 Схема КАБАРЕ на подвижных сетках

5.2.1 Общий алгоритм

Возьмем за основу алгоритм схемы КАБАРЕ на фиксированной косоугольной сетке, описанный в глав. 1. Пусть, как и прежде, потоковые переменные заданы на всех ребрах сетки, а консервативные — в центрах ячеек.

Общий алгоритм схемы КАБАРЕ на подвижных сетках при переходе со слоя по времени n на слой $n + 1$ состоит из следующих действий:

1. Вычисление шага по времени τ_n по заданному числу Куранта CFL .
2. Вычисление скоростей узлов сетки \dot{x}_{ij}^n , \dot{y}_{ij}^n на слое n и передвижение узлов сетки на полуцелый слой с помощью уравнений движения (5.5) или (5.17):

$$x_{ij}^{n+1/2} = x_{ij}^n + \frac{\tau_n}{2} \dot{x}_{ij}^n, \quad y_{ij}^{n+1/2} = y_{ij}^n + \frac{\tau_n}{2} \dot{y}_{ij}^n.$$

По координатам сетки на полуцелом слое вычисляются новые площади ячеек $S_c^{n+1/2}$.

3. Первая (консервативная) фаза КАБАРЕ: аппроксимация дивергентных форм уравнений на ячейках сетки на слое n и нахождение консервативных переменных $\varphi_c^{n+1/2}$ на полуцелом слое.
4. Вторая (характеристическая) фаза КАБАРЕ: вычисление локальных инвариантов Римана по направлениям α и β , их экстраполяция и нахождение потоковых переменных $\varphi_{i+1/2,j}^{n+1}$ и $\varphi_{i,j+1/2}^{n+1}$ на следующем целом слое по времени.
5. Вычисление скоростей узлов сетки \dot{x}_{ij}^{n+1} , \dot{y}_{ij}^{n+1} на слое $n + 1$ и передвижение узлов сетки с помощью уравнений движения (5.5) или (5.17):

$$x_{ij}^{n+1} = x_{ij}^{n+1/2} + \frac{\tau_n}{2} \dot{x}_{ij}^{n+1} \quad y_{ij}^{n+1} = y_{ij}^{n+1/2} + \frac{\tau_n}{2} \dot{y}_{ij}^{n+1}$$

По координатам сетки на следующем слое вычисляются новые площади ячеек $S_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$.

6. Третья (консервативная) фаза КАБАРЕ: аппроксимация дивергентных форм уравнений на ячейках сетки на слое $n + 1$ и нахождение консервативных переменных φ_c^{n+1} на следующем слое.

5.2.2 Консервативные фазы алгоритма

Опишем первую и третью фазы алгоритма на подвижных сетках. Рассмотрим дивергентные формы уравнений газовой динамики (5.7) и динамической упругости (5.21). Аппроксимируем эти законы сохранения подобно тому, как проходила аппроксимация на фиксированных косых сетках (1.42),(1.43). При этом надо учесть, что в первой фазе производные по пространству аппроксимировались по слою n , а в третьей — по слою $n + 1$. Тогда и координаты узлов сетки в первой и третьей фазах надо брать со слоев n и $n + 1$, соответственно.

Для уравнений газовой динамики (5.7) получим (см. шаблон на рис. 1.6a)

$$\begin{aligned}
& \frac{(M\mathbf{u})_c^{n+1/2} - (M\mathbf{u})_c^n}{\tau_n/2} + \\
& + [\mathbf{a}_R^n(y_2^n - y_1^n) - \mathbf{b}_R^n(x_2^n - x_1^n) - \mathbf{a}_L^n(y_3^n - y_4^n) + \mathbf{b}_L^n(x_3^n - x_4^n)] + \\
& + [-\mathbf{c}_T^n(y_2^n - y_3^n) + \mathbf{d}_T^n(x_2^n - x_3^n) + \mathbf{c}_B^n(y_1^n - y_4^n) - \mathbf{d}_B^n(x_1^n - x_4^n)] = \\
& = (M\mathbf{f})_c^n,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\widehat{M}\mathbf{u})_c - (M\mathbf{u})_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \\
& + \left[\widehat{\mathbf{a}}_R(\widehat{y}_2 - \widehat{y}_1) - \widehat{\mathbf{b}}_R(\widehat{x}_2 - \widehat{x}_1) - \widehat{\mathbf{a}}_L(\widehat{y}_3 - \widehat{y}_4) + \widehat{\mathbf{b}}_L(\widehat{x}_3 - \widehat{x}_4) \right] + \\
& + \left[-\widehat{\mathbf{c}}_T(\widehat{y}_2 - \widehat{y}_3) + \widehat{\mathbf{d}}_T(\widehat{x}_2 - \widehat{x}_3) + \widehat{\mathbf{c}}_B(\widehat{y}_1 - \widehat{y}_4) - \widehat{\mathbf{d}}_B(\widehat{x}_1 - \widehat{x}_4) \right] = \\
& = (\widehat{M}\mathbf{f})_c
\end{aligned} \tag{5.26}$$

для первой и третьей фазы, соответственно. Отметим, что $M = S\rho$, и, так как перед первой и третьей фазой уже известны $S_c^{n+1/2}$ и S_c^{n+1} , мы можем с помощью них вычислить $\rho_c^{n+1/2}$ и ρ_c^{n+1} .

Уравнения динамической упругости (5.21) уже не дивергентны из-за наличия в них множителей $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$, но, тем не менее, для них можно выписать следующие аппроксимации

$$\begin{aligned}
& \frac{(M\mathbf{u})_c^{n+1/2} - (M\mathbf{u})_c^n}{\tau_n/2} + \\
& + \bar{\rho}_{1c}^n \circ [\mathbf{a}_R^n(y_2^n - y_1^n) - \mathbf{b}_R^n(x_2^n - x_1^n) - \mathbf{a}_L^n(y_3^n - y_4^n) + \mathbf{b}_L^n(x_3^n - x_4^n)] + \\
& + \bar{\rho}_{2c}^n \circ [-\mathbf{c}_T^n(y_2^n - y_3^n) + \mathbf{d}_T^n(x_2^n - x_3^n) + \mathbf{c}_B^n(y_1^n - y_4^n) - \mathbf{d}_B^n(x_1^n - x_4^n)] = \\
& = (M\mathbf{f})_c^n,
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\widehat{M}\mathbf{u})_c - (M\mathbf{u})_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \\
& + \widehat{\rho}_{1c} \circ \left[\widehat{\mathbf{a}}_R(\widehat{y}_2 - \widehat{y}_1) - \widehat{\mathbf{b}}_R(\widehat{x}_2 - \widehat{x}_1) - \widehat{\mathbf{a}}_L(\widehat{y}_3 - \widehat{y}_4) + \widehat{\mathbf{b}}_L(\widehat{x}_3 - \widehat{x}_4) \right] + \\
& + \widehat{\rho}_{2c} \circ \left[-\widehat{\mathbf{c}}_T(\widehat{y}_2 - \widehat{y}_3) + \widehat{\mathbf{d}}_T(\widehat{x}_2 - \widehat{x}_3) + \widehat{\mathbf{c}}_B(\widehat{y}_1 - \widehat{y}_4) - \widehat{\mathbf{d}}_B(\widehat{x}_1 - \widehat{x}_4) \right] = \\
& = (\widehat{M}\mathbf{f})_c
\end{aligned} \tag{5.28}$$

для первой и третьей фазы, соответственно. В случае третьей фазы (5.28) такая аппроксимация не приводит к неясности, т.к. $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$ зависят лишь от непостоянной плотности ρ_c^{n+1} , которая может быть вычислена с помощью первого уравнения (5.28) $M_c^{n+1} = M_c^{n+1/2}$.

Отдельно отметим, что при использовании СЭЛ переменных требуется знать скорости передвижения ребер \dot{x}, \dot{y} на слоях n и $n + 1$. Но так как на момент выполнения консервативных фазы нам известны скорости узлов сетки $\dot{x}_{ij}^n, \dot{y}_{ij}^n$, то по ним можно найти и скорости ребер. Так, например, для правого ребра в (5.25):

$$\dot{x}_R^n = \frac{\dot{x}_1^n + \dot{x}_2^n}{2}, \quad \dot{y}_R^n = \frac{\dot{y}_1^n + \dot{y}_2^n}{2}.$$

В случае уравнений газовой динамики на первой фазе с помощью аппроксимации законов сохранения массы, импульса и энергии через (5.25) вычисляются консервативные значения на полуцелом слое $M_c^{n+1/2}$, $u_c^{n+1/2}$, $v_c^{n+1/2}$ и $E_c^{n+1/2}$, а затем дополнительно вычисляются $\rho_c^{n+1/2} = M_c^{n+1/2}/S_c^{n+1/2}$ и $e_c^{n+1/2}$, $P_c^{n+1/2}$ с помощью уравнения состояния (5.6). В случае уравнений динамической упругости с помощью аппроксимации законов сохранения массы и импульса и динамических законов Гука через (5.27) вычисляются консервативные значения на полуцелом слое $M_c^{n+1/2}$, $u_c^{n+1/2}$, $v_c^{n+1/2}$ и компоненты тензоров напряжений, а плотность затем вычисляется по той же формуле, что и для газовой динамики.

В предположении, что координаты и скорости передвижения узлов вычисляются точно, сумма первой и третьей фаз в обоих случаях обладает вторым порядком аппроксимации по времени и пространству, как и для схемы на фиксированной сетке.

В конце первой фазы надо дополнительно вычислить консервативные собственные значения на полуцелом слое $(\Lambda_k^\alpha)_c^{n+1/2}$ и $(\Lambda_k^\beta)_c^{n+1/2}$. Рассмотрим способ такого вычисления на примере $(\Lambda_3^\alpha)_c^{n+1/2}$ для уравнений динамической упругости (5.23). Заменим якобиан и производные их разностными аналогами в пределах ячейки:

$$(\Lambda_3^\alpha)_c^{n+1/2} = (c_s)_c^{n+1/2} \frac{h_\alpha h_\beta}{dx_\alpha dy_\beta - dy_\alpha dx_\beta} \frac{\sqrt{dx_\beta^2 + dy_\beta^2}}{h_\beta},$$

$$\begin{aligned}
dx_\alpha &= \frac{1}{2} \left(x_2^{n+1/2} - x_3^{n+1/2} + x_1^{n+1/2} - x_4^{n+1/2} \right), \\
dx_\beta &= \frac{1}{2} \left(x_2^{n+1/2} - x_1^{n+1/2} + x_3^{n+1/2} - x_4^{n+1/2} \right), \\
dy_\alpha &= \frac{1}{2} \left(y_2^{n+1/2} - y_3^{n+1/2} + y_1^{n+1/2} - y_4^{n+1/2} \right), \\
dy_\beta &= \frac{1}{2} \left(y_2^{n+1/2} - y_1^{n+1/2} + y_3^{n+1/2} - y_4^{n+1/2} \right),
\end{aligned}$$

где индексация узлов ячейки соответствует шаблону на рис. 1.6а. Заметим, что в итоговой формуле сократится неизвестный шаг h_β , но h_α останется. И хотя формально можно взять $h_\alpha = 1$, вместо этого будем вычислять

$$(\bar{\Lambda}_3^\alpha)_c^{n+1/2} = \frac{(\Lambda_3^\alpha)_c^{n+1/2}}{h_\alpha} = (c_s)_c^{n+1/2} \frac{\sqrt{dx_\beta^2 + dy_\beta^2}}{dx_\alpha dy_\beta - dy_\alpha dx_\beta}. \quad (5.29)$$

Фактически значения $(\Lambda_k^\alpha)_c^{n+1/2}$ используются только в определении направления переноса инвариантов, так что использование вместо них $(\bar{\Lambda}_k^\alpha)_c^{n+1/2}$, имеющих тот же знак, допустимо. Во всех остальных местах алгоритма необходимо знать именно $(\bar{\Lambda}_k^\alpha)_c^{n+1/2}$ (например, в процедуре коррекции инвариантов и формуле для вычисления шага по времени). Аналогично вместо $(\Lambda_k^\beta)_c^{n+1/2}$ будем вычислять $(\bar{\Lambda}_k^\beta)_c^{n+1/2} = (\Lambda_k^\beta)_c^{n+1/2}/h_\beta$.

Шаг по времени определяется перед первой фазой с помощью заданного числа Куранта $CFL \in (0, 0.5]$

$$\tau_n = CFL \cdot \min_{c,k} \left[|(Lambda_k^\alpha)_c^n|, |(\bar{\Lambda}_k^\beta)_c^n| \right], \quad (5.30)$$

где собственные значения на слое n вычисляются по формулам, аналогичным (5.29), в которых геометрия сетки определяется по слою n .

5.2.3 Характеристическая фаза алгоритма

Вторая характеристическая фаза осуществляется стандартно как в случае фиксированных сеток (1.44). Главной особенностью алгоритма на подвижных сетках является то, что выражения для инвариантов Римана (5.10) и (5.24)

уже зависят от нормалей \mathbf{n}^\bullet и касательных векторов \mathbf{s}^\bullet в локальной подвижной системе координат. Так как в алгоритме используются локальные линейные инварианты Римана, то в пределах каждой трехмерной пространственно-временной ячейки эти инварианты должны считаться по единым формулам. Для обеспечения обратимости по времени выберем в качестве нормалей и касательных векторы $(\mathbf{n}^\bullet)_c^{n+1/2}$ и $(\mathbf{s}^\bullet)_c^{n+1/2}$, определяемые по геометрии ячейки сетки на полуцелом слое. Так, например, для переносов по направлению α в пределах ячейки c :

$$(\mathbf{n}^\alpha)_c^{n+1/2} = \frac{1}{\sqrt{dx_\beta^2 + dy_\beta^2}} (dy_\beta, -dx_\beta)^T, \quad (\mathbf{s}^\alpha)_c^{n+1/2} = \frac{1}{\sqrt{dx_\beta^2 + dy_\beta^2}} (dx_\beta, dy_\beta)^T.$$

Тогда на каждое ребро сетки на слое $n + 1$ будут переноситься инварианты, содержащие компоненты скоростей и тензоров напряжения в двух локальных системах координат, определяемых $(\mathbf{n}^\bullet)_c^{n+1/2}$ и $(\mathbf{s}^\bullet)_c^{n+1/2}$ в левой и правой относительно ребра пространственно-временной ячейке. По этим компонентам можно восстановить значения вектора скорости и тензора напряжения в исходной декартовой системе координат (x, y) .

Отдельно остановимся на ребрах, попадающих на границу раздела газ-тело. Для простоты рассмотрим одномерный случай, так как характеристическая фаза для двумерных уравнений фактически разбивается на две одномерные характеристические фазы по направлениям α и β . Для таких ребер во второй фазе нужно, вообще говоря, найти все потоковые переменные, соответствующие и газу, и упругому телу: ρ_c^{n+1} , u_c^{n+1} , P_c^{n+1} , σ_c^{n+1} . Пусть газ находится слева от рассматриваемого узла, а упругое тело — справа (см. рис. 5.1).

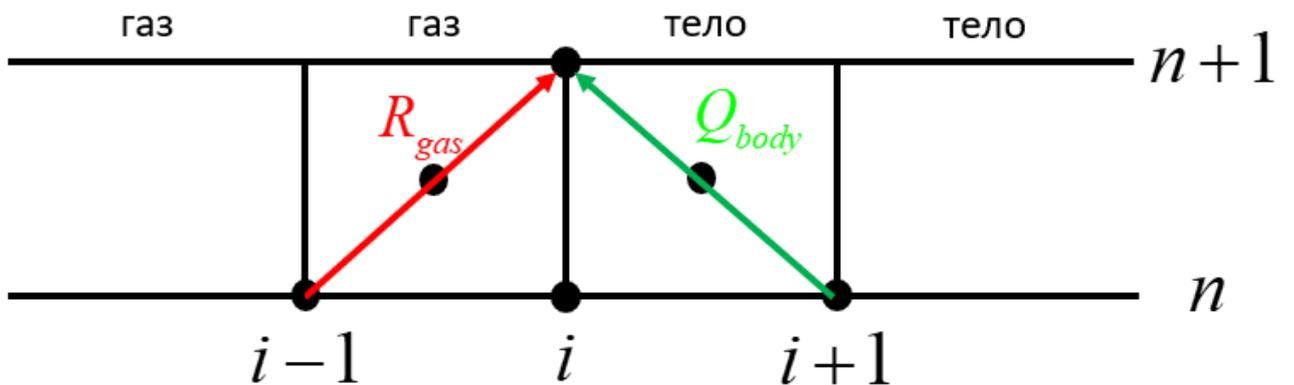


Рисунок 5.1 — Узел на границе раздела газ-тело

Тогда в узел со стороны газа будет приходиться инвариант $R_{gas} = u_i^{n+1} + G_{i-1/2}^{n+1/2} P_i^{n+1}$, а со стороны тела — инвариант $Q_{body} = u_i^{n+1} + G_{i+1/2}^{n+1/2} \sigma_i^{n+1}$. Граница между газом и телом «сшивается» с помощью условия $P = -\sigma$ ($P = -\sigma_{nn} = -\sigma_{ss}$, $\sigma_{ns} = 0$ в двумерном случае). Тогда потоковые значения скорости, давления и тензора напряжений находятся по следующим формулам:

$$P_i^{n+1} = \frac{R_{gas} - Q_{body}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}, \quad u_i^{n+1} = \frac{G_{i+1/2}^{n+1/2} R_{gas} + G_{i-1/2}^{n+1/2} Q_{body}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}, \quad \sigma_i^{n+1} = -P_i^{n+1}.$$

При этом плотности тела и газа в узле уже должны быть, вообще говоря, разными. Они находятся индивидуально с помощью переносов соответствующих им инвариантов со стороны газа и тела. Двумерный случай аналогичен одномерному, но формулы в нем достаточно громоздки в силу необходимости учитывать разные локальные системы координат слева и справа от рассматриваемого ребра.

Обработка ребер на свободной границе тела осуществляется с помощью условий $\sigma_{nn} = \sigma_{ns} = 0$, на свободной границе газа — с помощью $P = 0$. Граничные условия типа неподвижной стенки или свободного выхода обрабатываются стандартным для схемы КАБАРЕ образом (см., например, [111]).

5.2.4 Обратимый по времени алгоритм передвижения сетки

Так как уравнения динамической упругости (5.21) мы рассматриваем в лагранжевых переменных, а уравнения газовой динамики (5.7) — в СЭЛ переменных, то и алгоритмы передвижения узлов для них нужны разные. Мы будем рассматривать задачи 3 разных типов:

1. задачи о колебаниях упругого тела со свободной границей,
2. задачи о колебаниях свободной границы газа,
3. задачи о колебаниях упругого тела, погруженного в газ.

Для каждой из этих задач опишем свой алгоритм передвижения узлов сетки. Для каждой из задач построим алгоритмы на основе принципа обратимости, как и для базовой части схемы КАБАРЕ.

Упругое тело со свободной границей

Узлы лагранжевой сетки для уравнений динамической упругости перемещаются по закону (5.17). Таким образом, перед выполнением первой (5.27) и третьей (5.28) фазы алгоритма требуется найти скорости узлов $\dot{x}_{ij}^n = u_{ij}^n$, $\dot{y}_{ij}^n = v_{ij}^n$ и $\dot{x}_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n+1}$, $\dot{y}_{ij}^{n+1} = v_{ij}^{n+1}$, соответственно.

Для обоих передвижений используем один алгоритм нахождения скоростей на целом слое по времени, а именно интерполяцию скорости в узел по известным потоковым значениям скорости (см. шаблон на рис. 5.2):

$$\mathbf{u}_{ij}^n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \mathbf{u}_{f_k,ij}^n, \quad \mathbf{u} = (u, v). \quad (5.31)$$

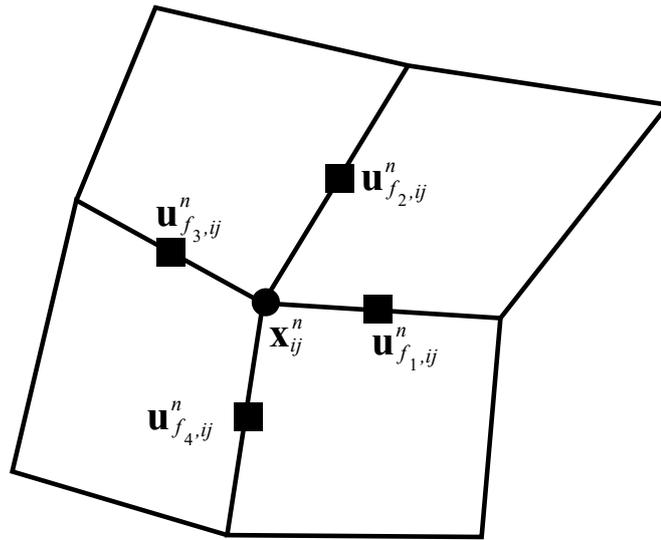


Рисунок 5.2 — Шаблон интерполяции скоростей из ребер в узлы сетки

Отметим, что так как перед выполнением третьей фазы (5.28) координаты узлов сетки на слое $n+1$ еще неизвестны, то мы можем пользоваться только интерполяцией с постоянными весами (5.31). В силу того, что потоковые значения скоростей $\mathbf{u}_{f_k,ij}^n$ вычисляются по обратимой (при отключенной монотонизации) процедуре экстраполяции, а интерполяция перед первой и третьей фазой проводится симметрично, то такой алгоритм не нарушает обратимость схемы. Возле свободной границы интерполяция скорости (5.31) «обрезается» до интерполяции по значениям скоростей в имеющихся вокруг узла ребрах с одинаковыми весами (т.е. фактически превращается в экстраполяцию).

Приведенный алгоритм нахождения скоростей узлов позволяет получить устойчивую схему в лагранжевых переменных для уравнений динамической упругости. Для уравнений газовой динамики в чисто лагранжевых переменных алгоритм (5.31) может приводить к неустойчивости типа «песочных часов», когда площадь каждой ячейки сетки сохраняется, а узлы сетки передвигаются так, что форма ячеек меняется.

Газ со свободной границей

Рассмотрим следующую задачу для уравнений газовой динамики в СЭЛ переменных. Пусть дана некоторая прямоугольная область с газом, по вертикали в которой действуют некоторые внешние силы (например, гравитация), на левой, правой и нижней границах задано граничное условие непротекания $u_n = 0$, а верхняя граница свободная (например, там задано условие $P = 0$). Зададим в этой области прямоугольную сетку, в которой узлы на верхней границе лагранжевы по координате y и эйлеровы по координате x . Все остальные узлы эйлеровы по x и СЭЛ по y . Зададим на верхней границе следующее уравнение перемещения y -координат:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} = v. \quad (5.32)$$

Уравнение (5.32) гарантирует равенство нулю конвективных потоков через верхнюю границу области.

Аппроксимируем уравнение (5.32) по схеме КАБАРЕ следующим образом:

$$\frac{y_{i+1/2,0}^{n+1/2} - y_{i+1/2,0}^n}{\tau_n/2} + u_{i+1/2,0}^n \frac{y_{i+1,0}^n - y_{i0}^n}{x_{i+1,0} - x_{i0}} = v_{i+1/2,0}^n, \quad (5.33)$$

$$y_{i0}^{n+1} = \begin{cases} 2y_{i-1/2,0}^{n+1/2} - y_{i-1,0}^n, & \text{если } u_{i-1/2,0}^n > 0 \text{ и } u_{i+1/2,0}^n > 0, \\ 2y_{i+1/2,0}^{n+1/2} - y_{i+1,0}^n, & \text{если } u_{i-1/2,0}^n < 0 \text{ и } u_{i+1/2,0}^n < 0, \\ 0.5[y_{i-1/2,0}^{n+1/2} + y_{i+1/2,0}^{n+1/2}], & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\frac{y_{i+1/2,0}^{n+1} - y_{i+1/2,0}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + u_{i+1/2,0}^{n+1} \frac{y_{i+1,0}^{n+1} - y_{i0}^{n+1}}{x_{i+1,j} - x_{i0}} = v_{i+1/2,0}^{n+1}, \quad (5.35)$$

где $y_{i+1/2,0}^n, y_{i+1/2,0}^{n+1/2}$ - дополнительно введенные «консервативные» y -координаты середин ребер на верхней границе. Характеристическая фаза (5.34) дополняется процедурой монотонизации (1.31).

Алгоритм (5.33) - (5.35) встраивается в общую схему следующим образом: перед первой фазой алгоритма (5.25) вычисляются y -координаты узлов на верхней границе y_{i0}^{n+1} по формулам (5.33), (5.34). Затем вычисляются скорости перемещения узлов на верхней границе

$$\dot{y}_{i0}^{n+1/2} = \frac{y_{i0}^{n+1} - y_{i0}^n}{\tau_n},$$

а скорости передвижения внутренних узлов выбираются так, чтобы высота ячеек в каждом слое по оси y была равномерной:

$$\dot{y}_{ij}^{n+1/2} = \frac{N_y - j}{N_y} \dot{y}_{i0}^n, \quad j = \overline{1, N_y}. \quad (5.36)$$

С этими скоростями y -координаты сетки передвигаются как перед первой фазой (5.25), так и перед третьей фазой (5.26). Все x -координаты сетки при этом остаются неизменными. Дополнительно перед третьей фазой вычисляются консервативные значения y -координат ребер на следующем слое по времени (5.35). Отметим, что алгоритм 5.33 - (5.35) обратим по времени, разве что за исключением выбора направления экстраполяции в (5.34).

Упругое тело, погруженное в газ

Пусть имеется область, заполненная идеальным газом, в который погружено упругое тело прямоугольной формы, и пусть в недеформированном состоянии тело расположено так, что его границы параллельны осям исходной декартовой системы координат (x, y) . Лагранжевые узлы сетки, относящиеся к упругому телу (включая узлы на границе газ-тело), будем передвигать по интерполяционному алгоритму (5.31). СЭЛ узлы, относящиеся к газу, будем передвигать по алгоритму, подобному передвижению внутренних узлов в задаче со свободной границей газа, где передвижение границы газ-тело продиктовано

передвижением самого тела, а внутренние узлы газа подобно (5.36) передвигаются так, чтобы сетка оставалась более-менее равномерной. Отметим, что с помощью такого алгоритма можно моделировать только относительно малые колебания тела, погруженного в газ.

5.2.5 Искусственные силы поверхностного натяжения

Алгоритм перемещения сетки для свободной границы газа 5.33 - (5.35) подходит лишь для задач, в которых поведение свободной границы устойчиво. При моделировании неустойчивого перемещения свободной границы в поле гравитационных сил в первую очередь развиваются высокочастотные возмущения свободной границы, чей рост очень быстро приводит к аварийному останову программы. Для того чтобы изучить динамику неустойчивости самой низкой гармоники, надо ввести в модель искусственные силы поверхностного натяжения, которые бы не давали развиваться высокочастотным возмущениям.

Введем силы поверхностного натяжения сначала в дифференциальную модель перемещения свободной границы (5.32). Энергия поверхностного натяжения пропорциональна площади свободной поверхности:

$$E^{tens} = \chi \int dl = \chi \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2} dq, \quad (5.37)$$

где $q \in [a, b]$ — параметр в уравнениях свободной поверхности $x = x(q)$, $y = y(q)$, χ — коэффициент поверхностного натяжения.

Компоненты вектора сил поверхностного натяжения можно получить из вариации энергии (5.37):

$$\begin{aligned} \delta E^{tens} &= \chi \int_a^b \delta \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2} dq = \\ &= \chi \int_a^b \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 \right]^{-1/2} \cdot 2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) \left(\frac{\partial \delta x}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial q}\right) \right] dq = \end{aligned}$$

$$= -\chi \int_a^b \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial x}{\partial q} \right\} \delta x dq -$$

$$-\chi \int_a^b \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial y}{\partial q} \right\} \delta y dq,$$

откуда следуют выражения для компонент удельных сил:

$$F^x = -\chi \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial x}{\partial q} \right\},$$

$$F^y = -\chi \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial y}{\partial q} \right\}.$$
(5.38)

Определим теперь силы поверхностного натяжения для разностного случая. Рассмотрим следующий разностный аналог энергии поверхностного натяжения (5.37), в котором интеграл по свободной поверхности аппроксимируется с помощью координат центров ребер сетки:

$$E_h^{tens} = \chi \sum_{i=1}^{N_x-1} \sqrt{(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})^2 + (y_{i+1/2,0} - y_{i-1/2,0})^2} +$$

$$+ \chi \sqrt{(x_{0+1/2} - x_0)^2 + (y_{0+1/2,0} - y_{0,0})^2} +$$

$$+ \chi \sqrt{(x_{N_x} - x_{N_x-1/2})^2 + (y_{N_x,0} - y_{N_x-1/2,0})^2}.$$
(5.39)

Тогда удельные силы поверхностного натяжения, действующие перпендикулярно ребру с центром в точке $(x_{i+1/2}, y_{i+1/2,0})$, определяются так:

$$F_{i+1/2}^x = \frac{\partial E_h^{tens}}{\partial x_{i+1/2}} = -\chi \left(\frac{x_{i+3/2} - x_{i+1/2}}{l_{i+1}} - \frac{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}{l_i} \right),$$

$$F_{i+1/2}^y = \frac{\partial E_h^{tens}}{\partial y_{i+1/2,0}} = -\chi \left(\frac{y_{i+3/2,0} - y_{i+1/2,0}}{l_{i+1}} - \frac{y_{i+1/2,0} - y_{i-1/2,0}}{l_i} \right),$$

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})^2 + (y_{i+1/2,0} - y_{i-1/2,0})^2}.$$
(5.40)

Отметим, что формулы (5.40) справедливы для ребер на свободной поверхности, не граничащих с левой и правой стенкой. Формулы для ребер у этих границ можно получить, продифференцировав (5.39) по соответствующим пере-

менным. Очевидно, разностные выражения (5.40) аппроксимируют дифференциальные операторы (5.38) со вторым порядком.

Введенные силы (5.40) добавляются как поверхностные в правые части закона сохранения импульса балансных фаз алгоритма (5.25)) и (5.26)) для слоя ячеек, граничащих со свободной поверхностью.

Отметим, что учет сил поверхностного натяжения в уравнениях (5.25)) и (5.26)) накладывает дополнительные, вообще говоря, более жесткие условия на шаг по времени, чем (5.30). Чтобы их учесть, моделирование неустойчивого поведения свободной границы проводится с относительно малым числом Куранта CFL .

5.3 Результаты расчетов

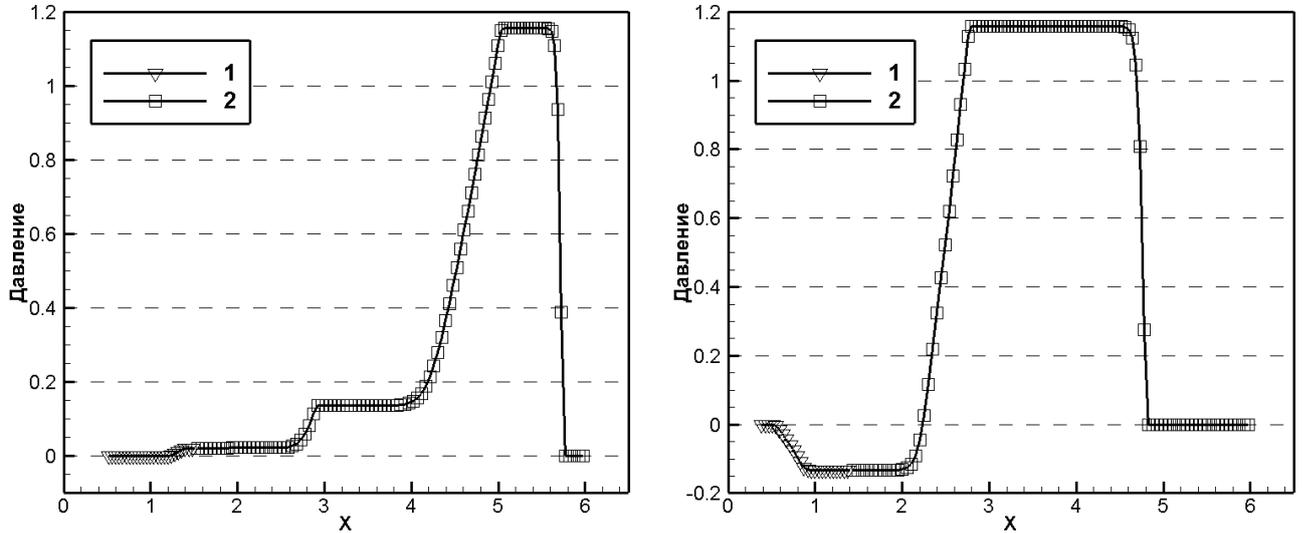
Приведем результаты расчетов по нескольким задачам, для которых необходимо использование схем для уравнений газовой динамики и динамической упругости на подвижных сетках:

1. задачи о соударении упругих тел,
2. задача о распространении акустических колебаний из идеального газа в упругое тело,
3. задача о воздушном ударе об упругое тело,
4. задачи о колебании двумерной упругой балки,
5. задачи об устойчивом и неустойчивом перемещении свободной границы газа.

5.3.1 Соударение упругих тел

Рассмотрим одномерную задачу об ударе движущегося упругого тела о покоящееся упругое тело. Движущееся упругое тело, занимающее в начальный момент времени отрезок $x \in [0,1]$ и имеющее параметры $\rho_L = 1.0$, $\sigma_L = 0.0$, $u_L = 1.0$, λ_L , μ_L сталкивается с упругим телом, занимающим в начальный

момент времени отрезок $x \in [1,6]$ и имеющее параметры $\rho_R = 1.0$, $\sigma_R = 0.0$, $u_R = 0.0$, λ_R, μ_R . На левой границе ставится граничное условие $\sigma = 0$, на правой — свободное граничное условие (задан инвариант, приходящий извне).



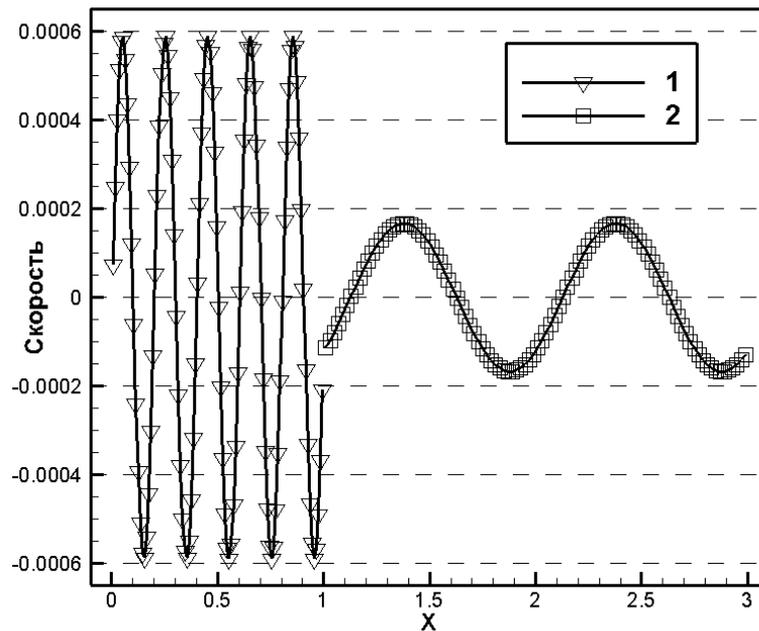
а) Удар менее жесткого тела о более жесткое б) Удар более жесткого тела о менее жесткое
1 — левое (движущееся) тело; 2 — правое (покоящееся) тело. 100 ячеек на
каждое тело, $CFL = 0.3$.

Рисунок 5.3 — Удар движущегося упругого тела о покоящееся упругое тело

Картина столкновения зависит от соотношения импедансов $z = \rho\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ сталкивающихся тел. При ударе менее жесткого тела о более жесткое (рис. 5.3а: $\lambda_L = 1.0$, $\mu_L = 1.0$, $\lambda_R = 2.0$, $\mu_R = 2.0$, момент времени $t = 2.3$) давление ($P = -\sigma$) остается положительным, при этом в тело справа распространяется сначала ударная волна, образованная первоначальным ударом, а потом волны разрежения, отразившиеся от левой границы и снова попавшие на границу между двумя телами. При ударе более жесткого тела о менее жесткое (рис. 5.3б: $\lambda_L = 2.0$, $\mu_L = 2.0$, $\lambda_R = 1.0$, $\mu_R = 1.0$, момент времени $t = 1.387$) образуется отрицательное давление, что говорит об отскоке левого тела от правого.

5.3.2 Распространение акустических колебаний из идеального газа в упругое тело

Рассмотрим одномерную задачу. Пусть в начальный момент времени отрезок $x \in [0,1]$ м занимает идеальный газ (воздух) с параметрами $\rho_{gas} = 1.225 \text{ кг/м}^3$, $P_{gas} = 101330.0 \text{ Па}$, $u_{gas} = 0.0 \text{ м/с}$, $\gamma = 1.4$. Отрезок $x \in [1,3]$ м занимает упругое тело с параметрами $\rho_{body} = 1.225 \text{ кг/м}^3$, $\sigma_{body} = -101330.0 \text{ Па}$, $u_{body} = 0.0 \text{ м/с}$, $\lambda = \mu = 1150000.0 \text{ Па}$. Параметры подобраны таким образом, что скорость звука в теле превышает скорость звука в газе примерно в 5 раз. На левой границе с некоторым периодом возмущается инвариант, приходящий на эту границу извне рассматриваемой области. На правой границе задается постоянный инвариант, приходящий на эту границу извне, что соответствует граничному условию свободного типа.



1 — газ; 2 — упругое тело. На газ и тело выделено по 100 ячеек, $CFL = 0.3$.

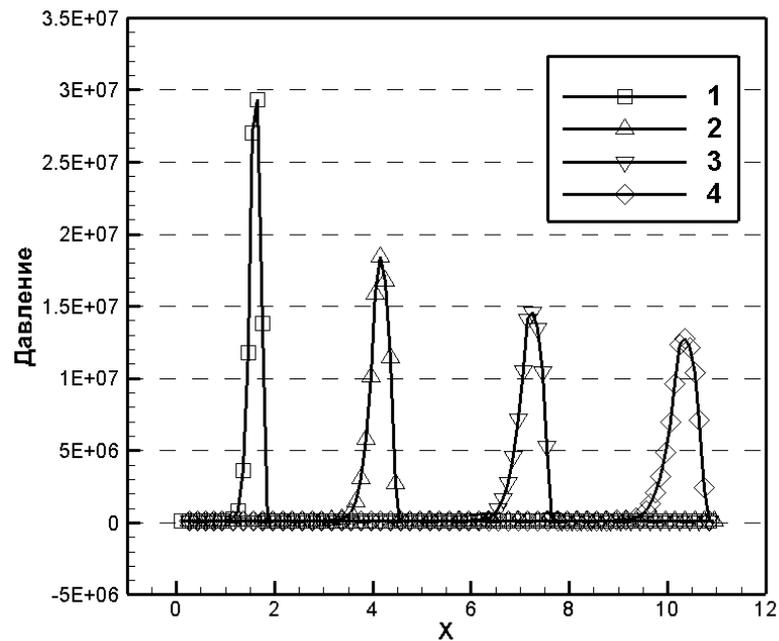
Рисунок 5.4 — Распространение акустических колебаний из идеального газа в упругое тело

На рис. 5.4 приведен график для скорости на тот момент, когда акустическое возмущение уже дошло до правой границы. Отметим, что при прохождении акустической волны через границу между газом и телом ее период и амплитуда меняются соответствующим теорией образом, а часть волны отража-

ется обратно в газ. Также стоит отметить, что акустические колебания в данных расчетах не затухают, что говорит о бездиссипативности предложенной схемы.

5.3.3 Воздушный удар об упругое тело

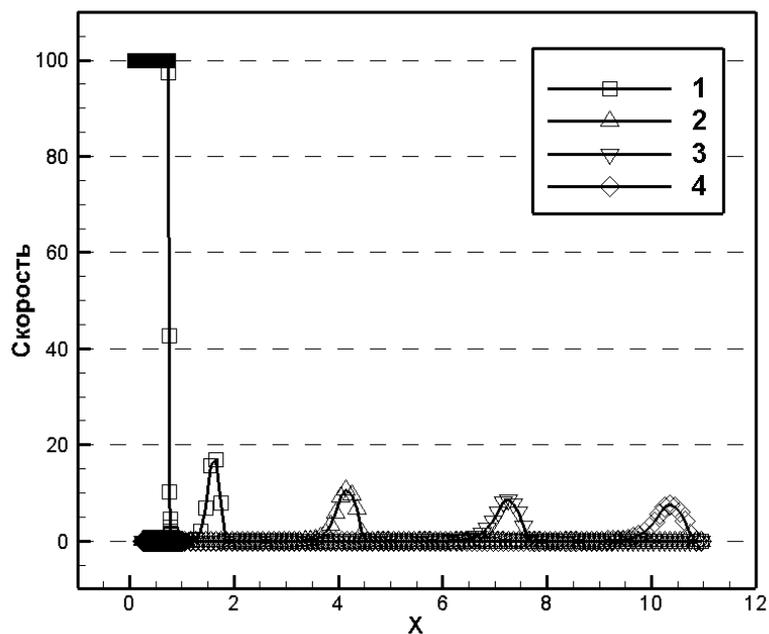
Рассмотрим одномерную задачу. Пусть в начальный момент времени отрезок $x \in [0,1]$ м занимает движущийся идеальный газ (воздух) с параметрами $\rho_{gas} = 1.225 \text{ кг/м}^3$, $P_{gas} = 101330.0 \text{ Па}$, $u_{gas} = 100.0 \text{ м/с}$, $\gamma = 1.4$. Отрезок $x \in [1,3]$ м занимает покоящееся упругое тело (алюминиевая пластинка) с параметрами $\rho_{body} = 2700.0 \text{ кг/м}^3$, $\sigma_{body} = -101330.0 \text{ Па}$, $u_{body} = 0.0 \text{ м/с}$, $\lambda = 55.5 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu = 26 \cdot 10^9 \text{ Па}$. На левой и правой границах граничные условия свободного типа (заданы инварианты).



1 — $t = 0.0009 \text{ с}$; 2 — $t = 0.0049 \text{ с}$; 3 — $t = 0.0098 \text{ с}$; 4 — $t = 0.0147 \text{ с}$.

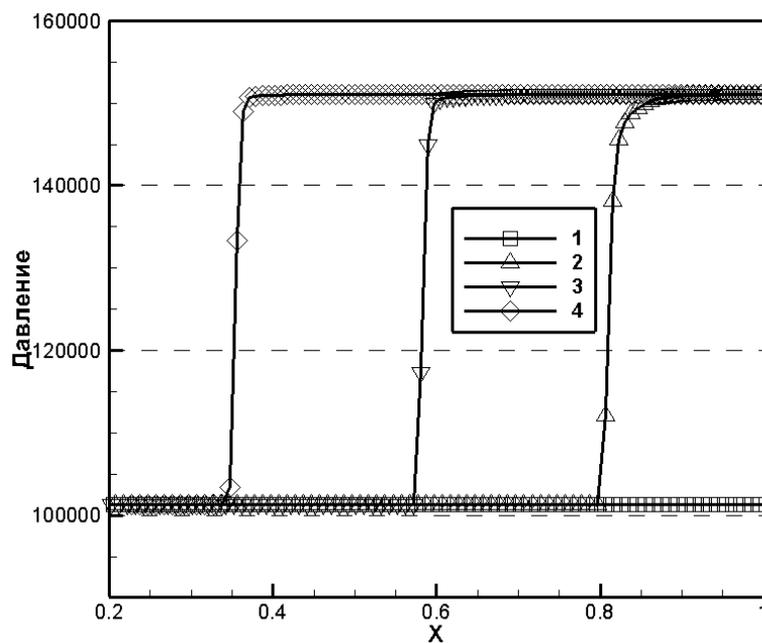
Рисунок 5.5 — Профиль давления в упругом теле для задачи о воздушном ударе

Расчеты проводились при $CFL = 0.3$, на газ и тело отводилось по 100 ячеек. На рис. 5.5 представлены профили давления в газе и теле на несколько моментов времени. Воздушный удар образует в упругом теле ударную волну, сразу за которой идет волна разрежения (разгрузки), образующие импульс,



1 — $t = 0.0009$ с; 2 — $t = 0.0049$ с; 3 — $t = 0.0098$ с; 4 — $t = 0.0147$ с.

Рисунок 5.6 — Профиль скорости в упругом теле и газе для задачи о воздушном ударе



1 — $t = 0.0$ с; 2 — $t = 0.00072$ с; 3 — $t = 0.00147$ с; 4 — $t = 0.00222$ с.

Рисунок 5.7 — Профиль давления в газе для задачи о воздушном ударе

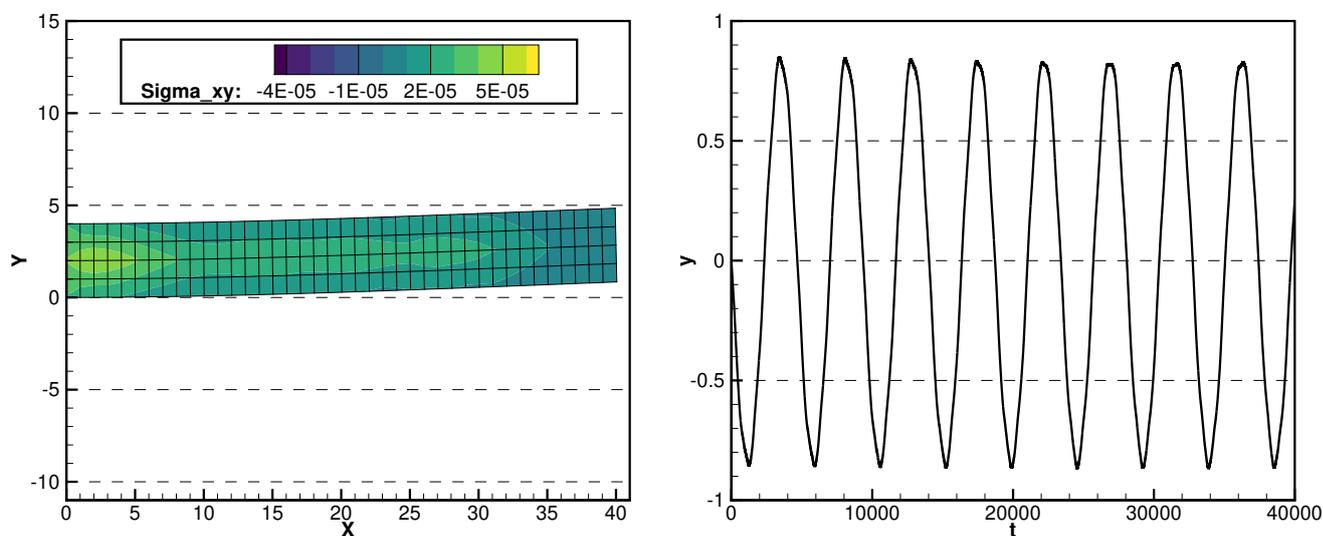
распространяющийся вправо и теряющий амплитуду. Аналогичная ситуация наблюдается и для профиля скорости (см. рис. 5.6). На рис. 5.7 изображен

профиль давления исключительно для ячеек газа, где ударная волна распространяется налево после удара воздушного потока о тело.

5.3.4 Колебания двумерной упругой балки

Балка в безвоздушном пространстве

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях двумерной прямоугольной балки. Пусть задана недеформированная балка $\{(x,y)\} = [0,40] \text{ м} \times [0,4] \text{ м}$, в которой плотность и параметры Ламе соответствуют алюминию. На левой границе балка закреплена ($u = v = 0 \text{ м/с}$), остальные границы — свободные ($\sigma_{nn} = \sigma_{ns} = 0 \text{ Па}$). В начальный момент зададим балке линейную по x вертикальную скорость.



а) Крайнее верхнее положение балки

б) Зависимость y -координаты правого нижнего угла балки от времени t .

Рисунок 5.8 — Поперечные колебания двумерной алюминиевой балки в безвоздушном пространстве

Результаты расчетов на сетке 40×4 ячеек при $CFL = 0.3$ представлены на рис. 5.8. На рис. 5.8а показано крайнее верхнее положение балки, цветом отмечены значения компонента тензора напряжений σ_{xy} . На рис. 5.8б показан

график зависимости y -координаты правого нижнего угла балки от времени t . Результаты расчетов показывают, что диссипация (которая есть только из-за включенной процедуры монотонизации) в схеме минимальна. Отметим, что использование при расчетах более грубой сетки не позволяет получить качественно хорошие результаты: количество ячеек по координате y должно быть не менее 4. Это связано с тем, что решение задачи о поперечных колебаниях балки обладает достаточно высокой гладкостью, и сетка из менее, чем 4 ячеек, не позволяет передать эту гладкость в разностном случае.

Погруженная в газ балка

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях двумерной прямоугольной балки, окруженной газовой средой. Пусть имеется прямоугольная область $\{(x,y)\} = [0,300] \text{ м} \times [0,300] \text{ м}$, в которой в начальный момент времени зададим равномерную ортогональную сетку из 300×300 ячеек. Посередине нижней границы области расположим жестко закрепленную снизу вертикальную алюминиевую балку размером 4×40 ячеек с параметрами $\rho_{body} = 2700 \text{ кг/м}^3$, $\sigma_{xx,body} = -101330.0 \text{ Па}$, $\sigma_{yy,body} = -101330.0 \text{ Па}$, $\sigma_{xy,body} = 0.0 \text{ Па}$, $\lambda = 55.5 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu = 26 \cdot 10^9 \text{ Па}$. Вокруг нее расположен покоящийся газ с параметрами воздуха при нормальных условиях. На нижней границе задано условие непротекания (нормальная компонента скорости равна нулю), на остальных границах — условия свободного типа (заданы инварианты). В начальный момент балке задается линейная по y горизонтальная скорость.

На рис. 5.9 изображены результаты расчетов на два разных момента времени. Расчеты проводились при $CFL = 0.3$. На момент времени $t = 0.285 \text{ с}$ (рис. 5.9а) видно, как сферическая волна, генерируемая колеблющейся балкой, отражается от нижней границы с условием непротекания. Также за сферической волной заметен некоторый шум, возникающий в силу несогласованности начальных данных. На момент времени $t = 0.285 \text{ с}$ (рис. 5.9б) этот шум уже уходит за границы рассматриваемой области.

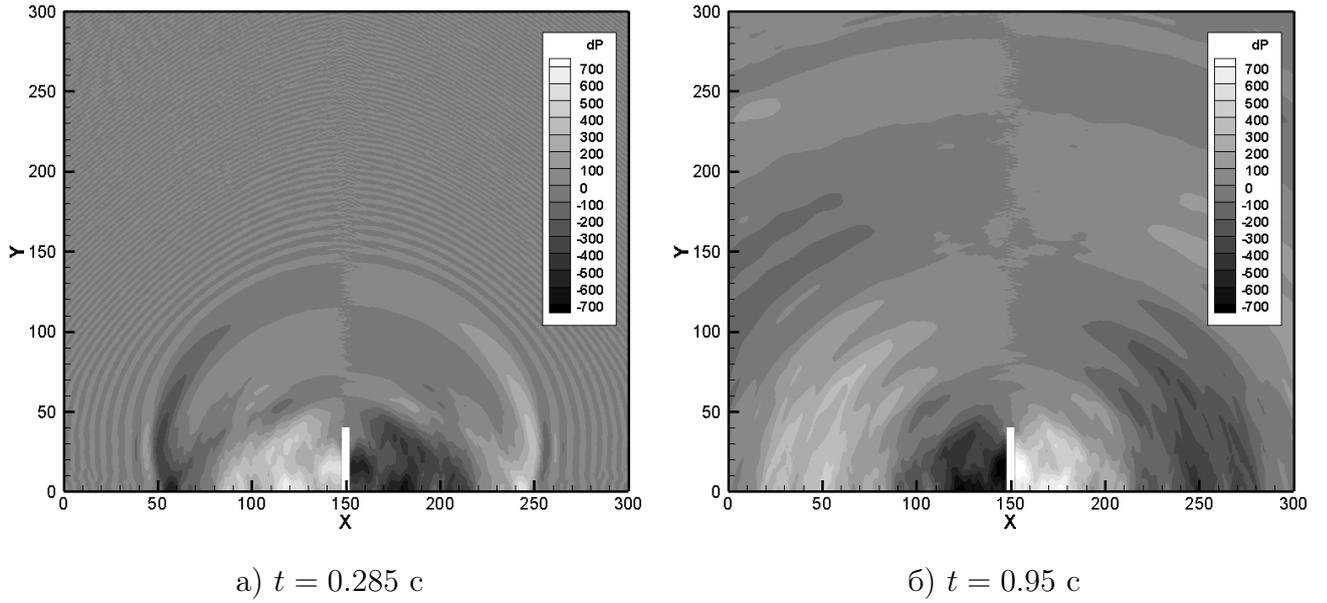


Рисунок 5.9 — Профиль приращения давления в газе вокруг колеблющейся балки

5.3.5 Свободная граница газа

Для моделирования развития неустойчивости на свободной границе газа под воздействием силы гравитации (неустойчивости Рэля-Тейлора) рассмотрим несколько другую модель газовой среды, отличающуюся от классических уравнений динамики идеального газа (5.7).

Рассмотрим систему двумерных уравнений газовой динамики в приближении Буссинеска с учетом слабосжимаемости газа в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных [119]:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \frac{\partial J \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u}{\partial x} + \frac{\partial \theta (w - \dot{z})}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{1}{J} \frac{\partial J \theta u}{\partial t} + \frac{\partial \theta u^2}{\partial x} + \frac{\partial \theta (w - \dot{z}) u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{1}{J} \frac{\partial J \theta w}{\partial t} + \frac{\partial \theta u w}{\partial x} + \frac{\partial \theta w (w - \dot{z})}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial z} &= - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) g, \\
 \frac{1}{J} \frac{\partial J \rho \theta}{\partial t} + \frac{\partial \rho \theta u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \theta (w - \dot{z})}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial z}{\partial t} = \dot{z}, \quad \delta P = c^2 (\theta - 1), &
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

где (x, z) — эйлерова система координат, которая связана с лагранжевой системой координат (x', z') якобианом перехода $J = D(x, z)/D(x', z') = dz/dz'$, ρ — плотность газа, ρ_0 — средняя начальная плотность газа, θ — безразмерный параметр, показывающий отклонение объема лагранжевой частицы от первоначального, δP — приращение давления относительно гидростатического: $P(x, z, t) = \rho_0 g(H_0 - z) + \delta P(x, z, t)$, H_0 — средняя начальная высота газа, (u, w) — компоненты вектора скорости по направлениям x и z , c — искусственная скорость звука, g — ускорение свободного падения. c подбирается таким образом, чтобы $|\delta\theta| = |\theta - 1| < 0.01$.

Будем предполагать, что система уравнений (5.41) описывает динамику газа в области, ограниченной слева и справа по оси x и снизу по оси z жесткими стенками, параллельными данным осям, а сверху по оси z располагается свободная поверхность, что накладывает на систему следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u(x_{min}, z, t) = 0, \quad u(x_{max}, z, t) = 0, \quad w(x, z_{min}, t) = 0, \\ \delta P(x, z_{max}, t) = -\rho_0 g(H_0 - z_{max}), \\ \left(\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} - w \right) \Big|_{z_{max}} = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Будем также предполагать, что плотность в начальный момент времени всюду одинакова: $\rho(x, z, 0) = \rho_0$. Так как плотность в системе уравнений (5.41) по сути играет роль некоторой пассивно переносимой величины, то и во все моменты времени будет выполняться $\rho(x, z, t) = \rho_0$, что позволяет не рассматривать закон сохранения массы (четвертое уравнение в (5.41)), а правую часть в законе сохранения импульса по оси z (третье уравнение в (5.41)) считать равной нулю.

Система уравнений (5.41) является гиперболической, и для нее по полной аналогии с уравнениями динамики идеального газа можно построить схему КА-БАРЕ в СЭЛ переменных.

Рассмотрим следующую модельную задачу для уравнений (5.41), (5.42). Пусть слабосжимаемый газ находится в начальный момент времени в области $(x, z) \in [0, L_x] \times [0, H_0]$, длина области $L_x = 40$, средняя высота газа $H_0 = 20$. Компоненты скорости $u(x, z, t = 0) = w(x, z, t = 0) = 0$, объемы не возмущены: $\theta(x, z, t = 0) = 1$.

Возмутим верхнюю (свободную) границу следующим образом:

$$z_{max}(x, t = 0) = H_0 + \varepsilon \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right). \quad (5.43)$$

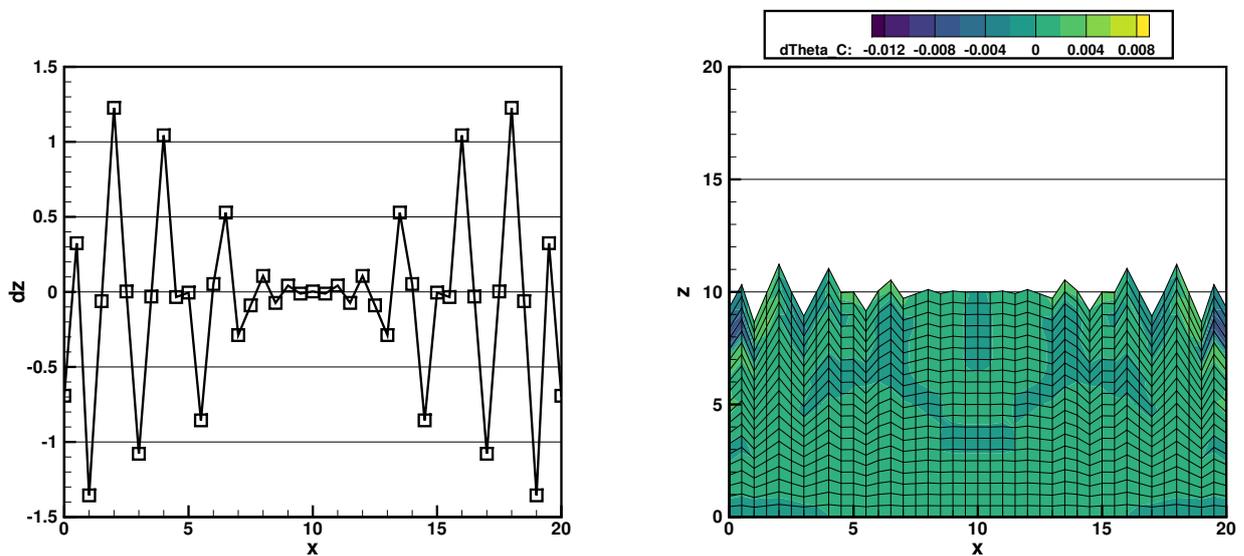
Тогда при силе гравитации, направленной вниз ($g > 0$), свободная граница начнет устойчиво колебаться. А при силе натяжения, направленной вверх ($g < 0$), начнет развиваться неустойчивость по типу Рэлея-Тейлора [120]. Последнюю задачу можно трактовать по-разному. С одной стороны, она описывает процесс стекания закрепленной с одного конца плоской капли по наклонной крыше без учета сил трения. С другой стороны, она описывает движение жидкости вверх под воздействием некоторого магнитного поля [121; 122]. В любом случае, именно такая постановка задачи о развитии неустойчивости позволяет оценить робастность предложенного алгоритма в случае расчетов с сильно деформируемыми расчетными ячейками. Отметим, что мы рассматриваем только линейные стадии развития неустойчивости Рэлея-Тейлора, когда ускорение свободной поверхности экспоненциально стремится к $|g|$ [123].

Приведем результаты работы алгоритма на серии задач с возмущенной границей (5.43) для $\varepsilon = 10^{-5}$ и различными значениями коэффициента поверхностного натяжения χ и знаками ускорения свободного падения g . Все расчеты проводились на сетке 40×20 расчетных ячеек с равномерным шагом по x и равномерным в каждом вертикальном столбце ячеек шагом по z . Число Куранта во всех расчетах полагалось достаточно малым и равным $CFL = 0.05$ для того, чтобы соблюсти условия устойчивости, связанные с введением в модель сил поверхностного натяжения 5.40. Как было показано в [119], алгоритм дает хорошие качественные и количественные результаты при искусственной скорости звука $c > \sqrt{|g|H_0}$. Приведенные ниже расчеты проводились при $c = 5\sqrt{|g|H_0}$.

Развитие неустойчивости без сил поверхностного натяжения

Рассмотрим задачу (5.43) с параметрами $g = -1$ и $\chi = 0$. Результаты расчетов по данной задаче на момент времени $t = 6.864$ (последний момент времени перед аварийным остановом программы) представлены на рис. 5.10. При

отсутствии сил поверхностного натяжения на свободной поверхности начинают расти высокочастотные возмущения, что очень быстро приводит к аварийному останову и не позволяет оценить ускорение узлов свободной поверхности. Данный расчет демонстрирует важность учета в модели сил поверхностного натяжения. Дополнительно отметим, что величины $\delta\theta$ на последний момент времени достигают значений, немного больших допустимого для приближения слабой сжимаемости порога в 0.01. Тем не менее авост наступает не из-за превышения данного порога, а из-за слишком сильной деформации расчетных ячеек. Это замечание справедливо и для всех последующих тестов, заканчивающихся аварийным остановом.



а) Профиль возмущения z -координаты свободной поверхности $\delta z = z - H_0$

б) Расчетная сетка на указанный момент времени и профиль $\delta\theta$ на ней

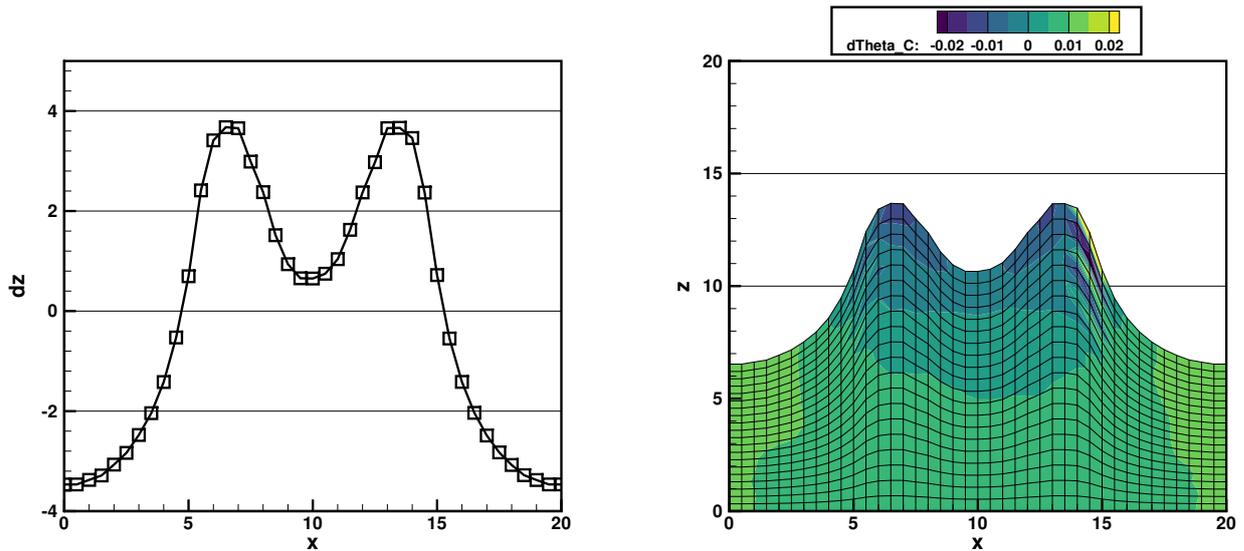
Параметры $g = -1$ и $\chi = 0$, момент времени $t = 6.864$.

Рисунок 5.10 — Развитие неустойчивости без сил поверхностного натяжения

Развитие неустойчивости с недостаточными силами поверхностного натяжения

Рассмотрим задачу (5.43) с параметрами $g = -1$ и $\chi = 2.5$. Результаты расчетов по данной задаче на момент времени $t = 26.4882$ (последний момент времени перед аварийным остановом программы) представлены на рис. 5.11.

Приведенные результаты демонстрируют динамику свободной поверхности в случае, когда силы поверхностного натяжения компенсируют неустойчивое развитие не всех высокочастотных гармоник. При этом расчет может быть осуществлен до более далекого времени, чем в случае с $\chi = 0$, но нескомпенсированные высокие гармоники возмущений на достаточно далеком времени слишком сильно деформируют расчетные ячейки и «обрушивают» расчет.



а) Профиль возмущения z -координаты свободной поверхности $\delta z = z - H_0$

б) Расчетная сетка на указанный момент времени и профиль $\delta\theta$ на ней

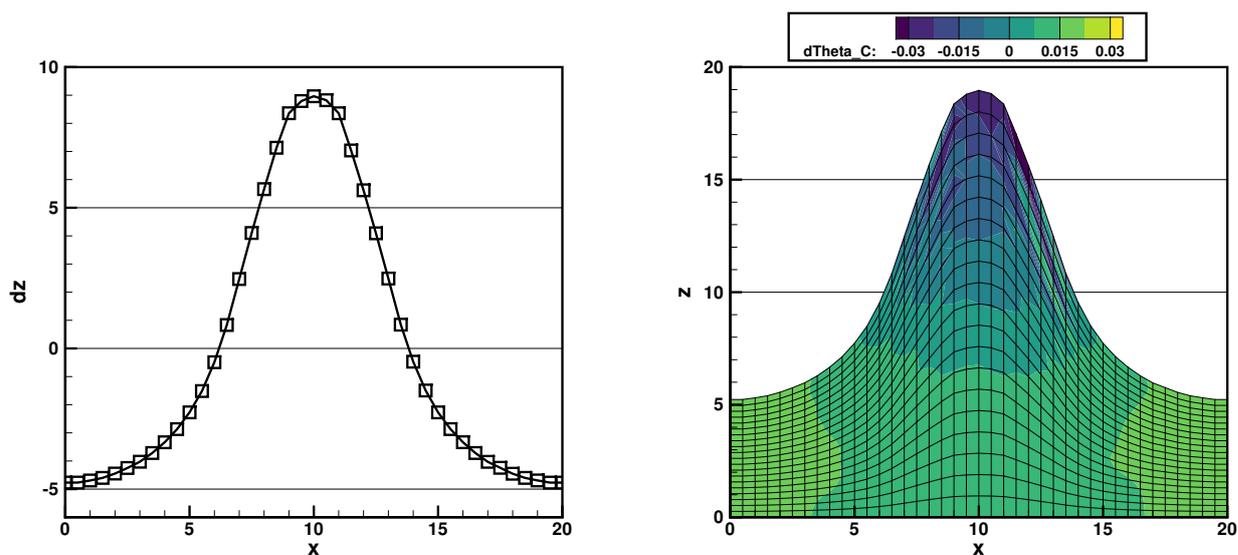
Параметры $g = -1$ и $\chi = 2.5$, момент времени $t = 26.4882$.

Рисунок 5.11 — Развитие неустойчивости с недостаточными силами поверхностного натяжения

Отметим, что при расчетах задач о развитии неустойчивости в какой-то момент могут получаться несимметричные результаты (что и происходит в приведенном расчете), несмотря на то, что исходная задача и сам алгоритм являются симметричными. Это объясняется возрастающей при неустойчивых расчетах ролью ошибок в операциях над числами с плавающей точкой. Все расчеты устойчивых задач обладают свойством симметрии, что было показано в работе [119] и будет продемонстрировано в некоторых последующих тестах.

Развитие неустойчивости с достаточными силами поверхностного натяжения

Рассмотрим задачу (5.43) с параметрами $g = -1$ и $\chi = 3.2$. Указанное значение χ подобрано экспериментальным образом и является минимальным значением коэффициента поверхностного натяжения, при котором компенсируется неустойчивый рост всех высокочастотных возмущений свободной поверхности. Результаты расчетов по данной задаче на момент времени $t = 29.3428$ (последний момент времени перед аварийным остановом программы) представлены на рис. 5.12. Отметим, что некоторые вертикальные слои расчетных ячеек растянулись или сжались почти в 2 раза, прежде чем расчет был «обрушен» формированием слишком косых ячеек. Это говорит о высокой устойчивости представленного алгоритма к сильному растяжению и сужению ячеек.



а) Профиль возмущения z -координаты свободной поверхности $\delta z = z - H_0$

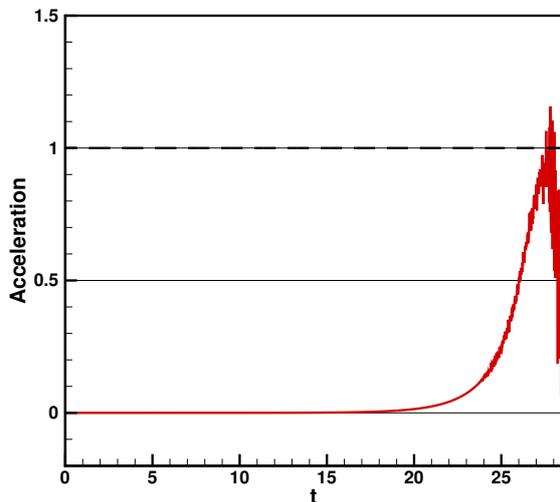
б) Расчетная сетка на указанный момент времени и профиль $\delta\theta$ на ней

Параметры $g = -1$ и $\chi = 3.2$, момент времени $t = 29.3428$.

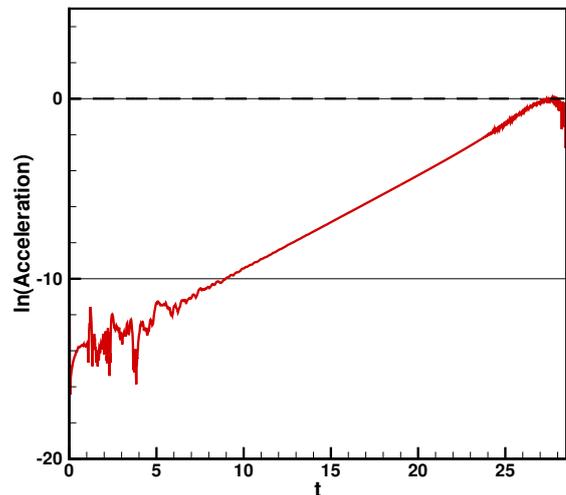
Рисунок 5.12 — Развитие неустойчивости с достаточными силами поверхностного натяжения

Неустойчивое развитие только самого низкочастотного возмущения позволяет исследовать ускорение свободной границы. Согласно теории, ускорение границы по оси z должно стремиться к $|g|$, при этом на начальном этапе расти экспоненциально. Графики для ускорения среднего узла свободной поверхности

$\ddot{z}_{N_x/2,0}$ и $\ln(\ddot{z}_{N_x/2,0})$ представлены на рис. 5.13. График на рис. 5.13а позволяет заключить, что примерно на момент времени $t = 2.8$ усредненное значение ускорения максимально приближается к предельному значению, после чего, когда силы поверхностного натяжения становятся слишком велики, начинает уменьшаться. При этом значения ускорения испытывают колебания, увеличивающиеся в амплитуде с течением времени (из-за этого иногда наблюдаются значения ускорения, большие предельного $|g|$). Эти колебания связаны с конечностью скорости звука в математической модели (5.41) и минимальной численной вязкостью используемого алгоритма: любые ошибки по сравнению с дифференциальной моделью практически не затухают, а в силу неустойчивости только растут и со временем сказываются на движении узлов на свободной границе.



а) Зависимость ускорения среднего узла свободной поверхности $\ddot{z}_{N_x/2,0}$ от времени



б) Зависимость $\ln(\ddot{z}_{N_x/2,0})$ от времени

Параметры $g = -1$ и $\chi = 3.2$.

Рисунок 5.13 — Ускорения узлов свободной поверхности при развитии неустойчивости с достаточными силами поверхностного натяжения

График на рис. 5.13б показывает, что в течение всего расчета, кроме начала и конца, ускорение увеличивалось экспоненциально. Нелинейность $\ln(\ddot{z})$ в конечные моменты времени связана с образованием слишком больших сил поверхностного натяжения, а в начальные моменты времени - с периодом «подстраивания» начального условия (5.43) под рассматриваемую область. В самом деле, возмущение в виде синуса не является элементарным решением уравнения динамики свободной границы рассматриваемой области, и алгоритму нуж-

но некоторое количество шагов по времени, чтобы поверхностное натяжение подавило в синусе высокочастотные возмущения.

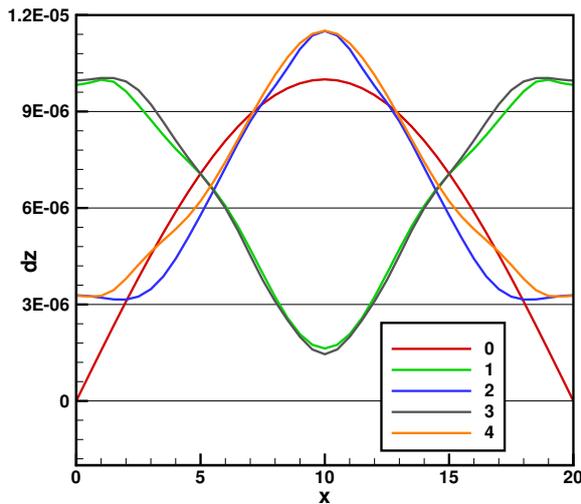
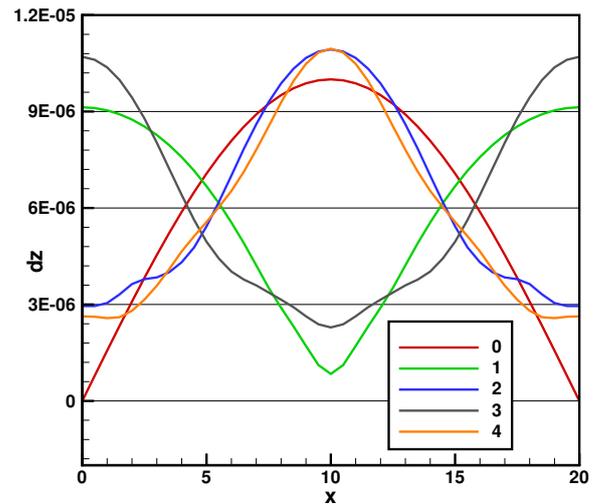
Подавление неустойчивости силами поверхностного натяжения

При достаточно больших значениях коэффициента поверхностного натяжения ($\chi > \chi_{crit}$) свободная поверхность вместо экспоненциального роста начнет устойчиво колебаться. Пограничное значение χ_{crit} можно оценить из условия равенства энергии поверхностного натяжения и приращения потенциальной энергии в начальный момент времени.

Результаты расчетов по задаче (5.43) с параметрами $g = -1$ и $\chi = 50$ представлены на рис. 5.14а. На графике представлены профили приращений z -координат узлов свободной поверхности на разные моменты времени, когда средний узел границы принимает самое высокое и самое низкое положение за период колебаний. Приведенные результаты позволяют заключить, что учет в алгоритме сил поверхностного натяжения практически не привносит в алгоритм дополнительной численной вязкости: поверхность продолжает колебаться с примерно одинаковой амплитудой (на графиках представлены только профили свободной поверхности на первые 2 периода колебаний, но заметного затухания не возникает и при дальнейших расчетах). Кроме того, наличие существенного поверхностного натяжения способствует более быстрой трансформации начального возмущения (синуса) в элементарное решение уравнения динамики свободной поверхности.

Поверхностное натяжение в поле гравитационных сил, направленных вниз

Продemonстрируем, что силы поверхностного натяжения (5.40) можно использовать и в задачах, когда силы тяжести направлены в сторону нижней гра-

а) $g = -1, \chi = 50$ б) $g = 1, \chi = 3.2$

0 — начальный профиль; 1 — половина периода первого колебания; 2 — полный период колебаний; 3 — половина периода второго колебания; 4 — 2 полных периода колебаний.

Рисунок 5.14 — Колебания свободной поверхности в поле сил тяжести

ности области. На таких задачах с $\chi = 0$ алгоритм был протестирован в [119] при достаточно больших отклонениях свободной границы.

Рассмотрим задачу (5.43) об устойчивых колебаниях свободной поверхности с параметрами $g = 1$ и $\chi = 3.2$. Выбранный коэффициент поверхностного натяжения равен минимальному значению, при котором в аналогичной неустойчивой задаче не образуется высокочастотных неустойчивостей. Результаты расчетов по данной задаче на разные моменты времени, когда средний узел границы принимает самое высокое и самое низкое положение за период колебаний, представлены на рис. 5.14б. Приведенные результаты хорошо согласуются с полученными ранее графиками для системы уравнений газовой динамики [124]. При этом минимумы и максимумы свободной границы на разных периодах колебаний могут отличаться более существенно, чем в предыдущем тесте. Это объясняется тем, что χ в этой задаче относительно мало, из-за чего окрестности локальных экстремумов колеблются с отличной от всего остального профиля частотой. При увеличении χ результаты будут все больше походить на рис. 5.14а.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Построен локально-неявный обратимый по времени алгоритм обработки звуковых точек второго порядка для балансно-характеристических методов для расчета трансзвуковых течений. Численные исследования для уравнений мелкой воды показали, что предложенный алгоритм позволяет получить качественные результаты для различных трансзвуковых задач, включая задачи с образованием сухого дна.
2. Построено дисперсионное улучшение схемы КАБАРЕ для линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа. Численные исследования показали, что в линейном случае улучшенная схема обладает четвертым порядком сходимости, а в нелинейном — вторым, и позволяет улучшить дисперсионные характеристики переноса сразу всех инвариантов Римана системы.
3. Построена балансно-характеристическая схема КАБАРЕ с учетом моделей горения с запаздыванием для задач вибрационного горения. Математическое моделирование показало, что предложенный метод позволяет находить частоту и инкременты роста неустойчивых гармоник акустических трактов с плоскими областями горения более точно, чем классические сетевые модели, и при этом обладает сравнимой вычислительной сложностью.
4. Построена схема КАБАРЕ для уравнений идеальной газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных и для уравнений динамической упругости в лагранжевых переменных с обратимым по времени алгоритмом передвижения узлов сетки и бесшовным способом обработки границы между газом и телом для задач сопряженной гидроупругости. Численные исследования показали, что предложенный метод дает качественно хорошие результаты, согласующиеся с теорией как для устойчивого, так и неустойчивого передвижения свободных границ и интерфейсов.

Список сокращений и условных обозначений

FCT - Flux Corrected Transport

TVD - Total Variation Diminishing

WENO - Weighted Essentially Non-Oscillatory

FSI - Fluid-Structure Interaction

СЭЛ - смешанные эйлерово-лагранжевые (переменные)

SP - Sonic Point

DRP - Dispersion-Relation-Preserving

DLE - Dry Low Emission

LES - Large Eddy Simulation

DNS - Direct Numerical Simulation

CFD - Computational Fluid Dynamics

МКЭ - метод конечных элементов

CFL - число Куранта-Фридрихса-Леви

ООС - Order of Convergence

Список литературы

1. *Roache P.* Computational Fluid Dynamics. — Albuquerque : Hermosa Publishers, 1976. — P. 446.
2. *Hirsch C.* Numerical Computation of Internal and External Flows. The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, second ed. — Oxford : John Wiley & Sons, Ltd., 2007. — P. 696.
3. *Boris J. P., Book D. L., Hain K.* Flux-corrected transport: generalization of the method // J. Comput. Phys. — 1975. — Vol. 31. — P. 335–350.
4. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III / A. Harten [et al.] // J. Comput. Phys. — 1987. — Vol. 71. — P. 231–303.
5. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. — 1959. — т. 47(89), № 3. — с. 271–306.
6. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. — 1972. — т. 3, № 6. — с. 68–77.
7. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. — 1979. — Vol. 32. — P. 101–136.
8. High-resolution non-oscillatory central schemes with non-staggered grids for hyperbolic conservation laws / G.-S. Jiang [et al.] // SIAM J. Numer. Anal. — 1998. — Vol. 35. — P. 2147–2168.
9. *Liu X.-D., Osher S., Chan T.* Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. — 1994. — Vol. 115. — P. 200–212.
10. *Shu C.-W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. — 1988. — Vol. 77. — P. 439–471.

11. *Cockburn B., Shu C.-W.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // SIAM J. Sci. Comput. — 2001. — Vol. 16. — P. 173–261.
12. *Osher S., Chakravarthy S.* High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. — 1984. — Vol. 21. — P. 984–995.
13. *Qiu J., Shu C.-W.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters // SIAM J. Sci. Comput. — 2003. — Vol. 26. — P. 907–929.
14. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — Москва : Энергоатомиздат, 1984. — с. 124.
15. *Moukalled F., Mangani L., Darwish M.* The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. — Switzerland : Springer International Publishing, 2007. — P. 817.
16. *Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. — Москва : Наука, 1988. — с. 289.
17. *Тормасов А. Г., Петров И. Б., Холодов А. С.* Об использовании гибридинизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трёхмерных задач динамики деформируемого твёрдого тела // Журнал вычислительной математики и матем. физ. — 1990. — т. 30, № 8. — с. 1237–1244.
18. Method of characteristics – A review with applications to science and nuclear engineering computation / M. Eklund [и др.] // Progress in Nuclear Energy. — 2015. — т. 85. — с. 548–567.
19. *Головизнин В. М., Карабасов С. А., Кобринский И. М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Матем. моделирование. — 2003. — т. 15, № 9. — с. 29–48.
20. *Головизнин В. М., Самарский А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. — 1998. — т. 10, № 2. — с. 86–100.
21. *Головизнин В. М., Четверушкин Б. Н.* Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // Журнал вычислительной математики и матем. физ. — 2018. — т. 58, № 8. — с. 20–29.

22. Зюзина Н. А., Остапенко В. В., Полунина Е. И. Метод расщепления при аппроксимации схемой САВАРЕТ неоднородного скалярного закона сохранения // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2018. — т. 21, № 2. — с. 185—200.
23. Головизнин В. М., Соловьев А. В., Исаков В. А. Аппроксимационный алгоритм обработки звуковых точек в схеме “кабаре” // Выч. мет. программирование. — 2016. — т. 17, № 2. — с. 166—176.
24. Головизнин В. М., Исаков В. А. Применение балансно-характеристической схемы для решения уравнений мелкой воды над неровным дном // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2017. — т. 57, № 7. — с. 1142—1160.
25. Новая схема двухслойный крест для моделирования стохастических уравнений Ландау-Лифшица / В. Ю. Глотов [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — т. 54, № 2. — с. 298—317.
26. Головизнин В. М., Короткин И. А., Финогенов С. А. Беспараметрический численный метод для расчета термоконтракции в прямоугольных кавернах в широком диапазоне чисел Релея // Вычислительная механика сплошных сред. — 2015. — т. 8, № 1. — с. 60—70.
27. Karabasov S. A., Goloviznin V. M. New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // AIAA Journal. — 2007. — Vol. 45, no. 12. — P. 2886–2871.
28. Markesteijn A., Karabasov S. Cabaret solutions on graphics processing units for nasa jets: grid sensitivity and unsteady inflow condition effect // C. R., Мéc. — 2018. — Vol. 346. — P. 948–963.
29. Новый численный алгоритм для уравнений многослойной мелкой воды на основе гиперболической декомпозиции и схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин [и др.] // Морской гидрофизический журнал. — 2019. — т. 35, № 6. — с. 600—620.
30. Validation of the Low Dissipation Computational Algorithm CABARET-MFSH for Multilayer Hydrostatic Flows with a Free Surface on the lock-release experiments / V. Goloviznin [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2022. — Vol. 463. — P. 111239.

31. *Глотов В. Ю., Головизнин В. М., Четверушкин Б. Н.* Балансно-характеристические разностные схемы для уравнений параболического типа // Математическое моделирование. — 2020. — т. 32, № 4. — с. 94–106.
32. *Van Leer B.* On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist–Osher and Roe // SIAM J. Sci. Stat. — 1984. — Vol. 5. — P. 1–20.
33. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comput. Phys. — 1984. — Vol. 54. — P. 115–173.
34. *Moschetta J. M., Gressier J.* A cure for the sonic point glitch // Int. J. Comput. Fluid Dynamics. — 2000. — Vol. 13. — P. 143–159.
35. *Osher S., Chakravarthy S.* Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries // J. Comput. Phys. — 1983. — Vol. 50. — P. 447–481.
36. *Toro E. F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, second ed. — Berlin : Springer, 1999. — P. 624.
37. *Engquist B., Osher S.* One sided difference approximations for nonlinear conservation laws // Math. Comp. — 1981. — Vol. 36. — P. 321–351.
38. *Roe P. L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. — 1981. — Vol. 43. — P. 357–372.
39. *Steger J. L., Warming R. F.* Flux vector-splitting of the inviscid gas dynamic equations with applications to finite difference methods // J. Comput. Phys. — 1981. — Vol. 40. — P. 263–293.
40. *Van Leer B.* Flux-vector splitting for the Euler equations // Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. — Berlin : Springer, 1982. — P. 507–512.
41. *Liou M. S., Steffen C. J.* A new flux splitting scheme // J. Comput. Phys. — 1993. — Vol. 107. — P. 23–29.
42. *Данилин А. В., Соловьев А. В.* Модификация схемы Кабаре для разрешения звуковых точек в газовых течениях // Выч. мет. программирование. — 2019. — т. 20, № 4. — с. 481–488.

43. *Van Leer B., Lee W. T., Powell K. G.* Sonic-point capturing // AIAA 9th Computational Fluid Dynamics Conference. — Buffalo, NY, 1989. — P. 176–187.
44. *Roe P. L.* Sonic flux formulae // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1992. — Vol. 13. — P. 611–630.
45. *Bailly C., Bogey C.* An overview of numerical methods for acoustic wave propagation // European Conference on Computational Fluid Dynamics. — TU Delft, The Netherlands, 2006. — P. 1–16.
46. *Tam C. K. W., Webb J. C.* Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // J. Comput. Phys. — 1993. — Vol. 107. — P. 262–281.
47. *Bogey C., Bailly C.* A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations // Journal of Computational Physics. — 2004. — Vol. 194, no. 1. — P. 194–214.
48. *Lele S. K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // J. Comput. Phys. — 1992. — Vol. 103, no. 1. — P. 16–42.
49. *Titarev V. A., Toro E. F.* ADER: Arbitrary High Order Godunov Approach // Journal of Scientific Computing. — 2002. — Vol. 17. — P. 609–618.
50. *Atkins H. L., Shu C. W.* Quadrature-Free Implementation of the Discontinuous Galerkin Method for Hyperbolic Equations // AIAA Journal. — 1998. — Vol. 36, no. 5. — P. 775–782.
51. *Qiu J., Shu C. W.* Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2005. — Vol. 26, no. 3. — P. 907–929.
52. *Wang Z. J.* High-Order Spectral Volume Method for Benchmark Aeroacoustic Problems // 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. — Reno, Nevada, 2003.
53. *Karabasov S. A., Goloviznin V. M.* New Efficient High-Resolution Method for Nonlinear Problems in Aeroacoustics // AIAA Journal. — 2007. — Vol. 45, no. 12. — P. 2861–2871.

54. *Zaitsev M., Goloviznin V., Karabasov S.* CABARET on unstructured prismatic meshes for computational aeroacoustics problems //
55. CABARET on rotating meshes / I. Solntsev [et al.] // Applied Math. and Computation. — 2023. — Vol. 446. — P. 127871.
56. *Шокин Ю. И.* Метод дифференциального приближения. — Новосибирск : Наука, 1979.
57. *Шокин Ю. И.* О методе первого дифференциального приближения в теории разностных схем для гиперболических систем уравнений // Разностные методы решения задач математической физики. Часть II. Тр. МИАН СССР. — 1973. — т. 122. — с. 66—84.
58. *Шокин Ю. И., Яненко Н. Н.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. — Новосибирск : Наука, 1985.
59. *Шокин Ю. И., Сергеева Ю. В., Хакимзянов Г. С.* Построение монотонных схем на основе метода дифференциального приближения // Вычислительные технологии. — 2009. — т. 9, № 6. — с. 97—104.
60. *Головизнин В. М., Самарский А. А.* Некоторые свойства разностной схемы “кабаре” // Матем. моделирование. — 1998. — т. 10, № 1. — с. 101—116.
61. *Chintagunta A., Naghibi S., Karabasov S.* Flux-corrected dispersion-improved CABARET schemes for linear and nonlinear wave propagation problems // Computers & Fluids. — 2018. — т. 169. — с. 111—128.
62. *Раушенбах Б. В.* Вибрационное горение. — Москва : Гос. изд-во физико-математической лит., 1961. — 500 с.
63. *Stow S. R., Dowling A. P.* Low-Order Modelling of Thermoacoustic Limit Cycles // Proceedings of the ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea, and Air. Volume 1: Turbo Expo 2004. — Vienna, Austria, 2004. — P. 775—786.
64. *Stow S. R., Dowling A. P.* A Time-Domain Network Model for Nonlinear Thermoacoustic Oscillations // ASME J. Eng. Gas Turbines Power. — 2009. — Vol. 131, no. 3. — P. 031502.

65. *Han X., Li J., Morgans A. S.* Prediction of combustion instability limit cycle oscillations by combining flame describing function simulations with a thermoacoustic network model // *Combustion and Flame*. — 2015. — Vol. 162, no. 10. — P. 3632–3647.
66. Thermoacoustic instability in a sequential combustor: Large eddy simulation and experiments / O. Schulz [et al.] // *Proceedings of the Combustion Institute*. — 2019. — Vol. 37, no. 4. — P. 5325–5332.
67. LES and acoustic analysis of thermo-acoustic instabilities in a partially premixed model combustor / I. Hernández [et al.] // *Comptes Rendus Mécanique*. — 2013. — Vol. 341, no. 1/2. — P. 121–130.
68. Massively parallel LES of azimuthal thermo-acoustic instabilities in annular gas turbines / P. Wolf [et al.] // *Comptes Rendus Mécanique*. — 2009. — Vol. 337, no. 6/7. — P. 385–394.
69. Numerical study on intrinsic thermo-acoustic instability of a laminar premixed flame / C. F. Silva [et al.] // *Combustion and Flame*. — 2015. — Vol. 162, no. 9. — P. 3370–3378.
70. *Courtine E., Selle L., Poinso T.* DNS of Intrinsic ThermoAcoustic modes in laminar premixed flames // *Combustion and Flame*. — 2015. — Vol. 162, no. 11. — P. 4331–4341.
71. Open Source Combustion Instability Low Order Simulator (OSCILOS) : tech. rep. / J. Li [et al.]. — 2017.
72. *Ducruix S., Durox D., Candel S.* Theoretical and experimental determinations of the transfer function of a laminar premixed flame // *Proceedings of the Combustion Institute*. — 2000. — Vol. 28. — P. 765–773.
73. *Han Z., Hochgreb S.* The response of stratified swirling flames to acoustic forcing: Experiments and comparison to model // *Proceedings of the Combustion Institute*. — 2015. — Vol. 35. — P. 3309–3315.
74. *Schuller T., Durox D., Candel S.* A unified model for the prediction of laminar flame transfer functions: comparisons between conical and V-flame dynamics // *Combustion and Flame*. — 2003. — Vol. 134. — P. 21–34.

75. Saturation mechanism of the heat release response of a premixed swirl flame using LES / H. Krediet [et al.] // Proceedings of the Combustion Institute. — 2013. — Vol. 34. — P. 1223–1230.
76. *Han X., Morgans A. S.* Simulation of the flame describing function of a turbulent pre-mixed flame using an open-source LES solver // Combustion and Flame. — 2015. — Vol. 162. — P. 1778–1792.
77. *Williams F. A.* The Mathematics of Combustion. — Philadelphia : SIAM, 1985. — P. 260.
78. Computational fluid–structure interaction: methods and application to a total cavopulmonary connection / Y. Bazilevs [et al.] // Comput. Mech. — 2009. — Vol. 45. — P. 77–89.
79. Methods for FSI modeling of spacecraft parachute dynamics and cover separation / K. Takizawa [et al.] // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2013. — Vol. 23. — P. 307–338.
80. Structural mechanics modeling and FSI simulation of wind turbines / A. Korobenko [et al.] // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2013. — Vol. 23. — P. 249–272.
81. *Sigrist J.-F., Broc D., Lainé C.* Dynamic analysis of a nuclear reactor with fluid–structure interaction: Part I: Seismic loading, fluid added mass and added stiffness effects // Nuclear Engineering and Design. — 2006. — Vol. 236, no. 23. — P. 2431–2443.
82. *Sigrist J.-F., Broc D., Lainé C.* Dynamic analysis of a nuclear reactor with fluid–structure interaction: Part II: Shock loading, influence of fluid compressibility // Nuclear Engineering and Design. — 2007. — Vol. 237, no. 3. — P. 289–299.
83. *Yu Y., Merzari E., Solberg J.* Coupled Calculation on Fluid Structure Interaction in Plate-Type Fuel Element // Proceedings of the 2018 26th International Conference on Nuclear Engineering. Volume 8: Computational Fluid Dynamics (CFD); Nuclear Education and Public Acceptance. — London, England, 2018.

84. *Cuamatzi-Meléndez R., Flores-Cuamatzi E.* Modelling fluid-structure interaction of water recirculating flow to predict damage and/or failure in a jet-pump assembly of a nuclear boiling water reactor // *Engineering Structures*. — 2020. — Vol. 206. — P. 110155.
85. A monolithic approach to fluid–structure interaction / C. Michler [et al.] // *Computers and Fluids*. — 2004. — Vol. 33. — P. 839–848.
86. *Dettmer W. G., Peric D.* On the coupling between fluid flow and mesh motion in the modeling of fluid–structure interaction // *Comput. Mech.* — 2008. — Vol. 43. — P. 81–90.
87. *Bendiksen O. O.* Modern developments in computational aeroelasticity // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. — 2004. — Vol. 218. — P. 157–177.
88. *Lee H. M., Kwon O. J.* Performance improvement of horizontal axis wind turbines by aerodynamic shape optimization including aeroelastic deformation // *Renewable Energy*. — 2020. — Vol. 147. — P. 2128–2140.
89. *Terekhov K. M., Vassilevski Y. V.* Finite volume method for coupled subsurface flow problems, II: Poroelasticity // *Journal of Computational Physics*. — 2022. — т. 462. — с. 111225.
90. Smoothed particle hydrodynamics and its applications in fluid-structure interactions / A. Zhang [и др.] // *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*. — 2017. — т. 29, № 2. — с. 187–216.
91. *Petrov I. B.* Application of the grid-characteristic method for mathematical modeling in dynamical problems of deformable solid mechanics // *Computer Research and Modeling*. — 2019. — Vol. 11, no. 6. — P. 1041–1048.
92. *Brummelen E. H. van, Borst R. de.* On the nonnormality of subiteration for a fluid–structure interaction problem // *SIAM J. Sci. Comput.* — 2005. — Vol. 27. — P. 599–621.
93. *Bendiksen O. O.* Nonunique solutions in transonic aeroelasticity // *Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*. — Rome, Italy, 1997. — P. 425–435.

94. *Bendiksen O. O.* Fluid–structure coupling requirements for time-accurate aeroelastic simulations // Proceedings of Symposium on Fluid–Structure Interaction Problems, ASME Winter Annual Meeting. — Atlanta, GA, 1997.
95. *Toro E. F.* Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows. — John Wiley, Sons, 2001. — P. 326.
96. *Rijke P. L.* On the vibration of the air in a tube open at both ends // Philosophical Magazine. — 1859. — Vol. 17. — P. 419–422.
97. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Москва : Физматлит, 2001. — 607 с.
98. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра: Учеб. Для вузов. — Москва : Наука. Физматлит, 1999. — 296 с.
99. *Овсянников Л. В.* Модели двухслойной мелкой воды // ПМТФ. — 1979. — № 2. — с. 3–14.
100. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики: Учеб. Пособие: Для вузов. — Москва : Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1992. — 424 с.
101. *Головизнин В. М., Карабасов С.* Нелинейная коррекция схемы Кабаре // Матем. моделирование. — 1998. — т. 10, № 12. — с. 107–123.
102. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1977. — 736 с.
103. *Iserles.* Generalized leapfrog methods // IMA J. Numer. Anal. — 1986. — Vol. 6, no. 3. — P. 381–392.
104. *Головизнин В. М., Соловьев А. В.* Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа. — Москва : МАКС Пресс, 2018. — 198 с.
105. *Crank J., Nicolson P.* A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of Heat Conduction Type // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1947. — Vol. 43. — P. 50–67.

106. *Остапенко В. В.* О сильной монотонности схемы «Кабаре» // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — т. 52, № 3. — с. 447—460.
107. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — т. 56, № 5. — с. 796—815.
108. *Афанасьев Н. А., Шагиров Н. Э., Головизнин В. М.* Интерполяционная балансно-характеристическая схема с улучшенными дисперсионными свойствами для задач вычислительной гидродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2022. — т. 62, № 11. — с. 1868—1882.
109. *Родионов А. В.* Сопоставление схемы КАБАРЕ со схемами типа MUSCL // Матем. моделирование. — 2013. — т. 25, № 9. — с. 109—136.
110. *Головизнин В. М.* Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Матем. моделирование. — 2006. — т. 18, № 11. — с. 14—30.
111. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В. М. Головизнин [и др.]. — Москва : Изд-во МГУ, 2013. — 467 с.
112. *Остапенко В. В.* О монотонности балансно-характеристической схемы // Матем. моделирование. — 2009. — т. 21, № 7. — с. 29—42.
113. *Karabasov S., Goloviznin V.* Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // Journal of Computational Physics. — 2009. — Vol. 228, no. 19. — P. 7426—7451.
114. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — Москва : Наука, 1987. — 600 с.
115. *Crocco L.* Aspects of Combustion Stability in Liquid Propellant Rocket Motors Part I: Fundamentals. Low Frequency Instability With Monopropellants // Journal of the American Rocket Society. — 1951. — Vol. 21. — P. 163—178.
116. *Butcher J. C.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. — Chichester : John Wiley & Sons, Ltd., 2008. — 484 p.

117. *Stow S., Dowling A., Hynes T. P.* Reaction of circumferential modes in a choked nozzle // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2002. — Vol. 467. — P. 215–239.
118. *Marble F. E., Candel S. M.* Acoustic disturbance from gas non-uniformities convected through a nozzle // *Journal of Sound and Vibration*. — 1977. — Vol. 55. — P. 225–243.
119. Явный численный алгоритм для уравнений негидростатической динамики жидкости на основе схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин [и др.] // *Матем. моделирование*. — 2023. — т. 35, № 5. — с. 62–86.
120. *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability. — Cambridge university press, 2004. — P. 605.
121. *Гасилов В. А., Головизнин В. М.* Численное решение одной модельной задачи о релей-тейлоровской неустойчивости. — Москва, 1977. — Препринт ИПМ АН СССР №19, с. 1–23.
122. Numerical Simulations of the Magnetic Rayleigh-Taylor Instability in the Kippenhahn-Schluter Prominence Model. I. Formation of Upflows / A. Hillier [et al.] // *The Astrophysical Journal*. — 2012. — Vol. 746. — P. 120.
123. *Duchemin L., Josserand C., Clavin P.* Asymptotic Behavior of the Rayleigh-Taylor Instability // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 94, no. 22. — P. 224501.
124. *Афанасьев Н. А., Майоров П. А.* Схема КАБАРЕ на подвижных сетках для двумерных уравнений газовой динамики и динамической упругости // *Вычислительные методы и программирование*. — 2021. — т. 22, № 4. — с. 306–321.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

- A.1 *Афанасьев Н. А., Головизнин В. М., Соловьев А. В.* Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа // Вычислительные методы и программирование. — 2021. — т. 22, № 1. — с. 67–76. [RSCI, impact factor 0.488]
- A.2 *Афанасьев Н. А., Майоров П. А.* Схема КАБАРЕ на подвижных сетках для двумерных уравнений газовой динамики и динамической упругости // Вычислительные методы и программирование. — 2021. — т. 22, № 4. — с. 306–321. [RSCI, impact factor 0.488]
- A.3 Прямое моделирование термоакустической неустойчивости в газогенераторах по схеме КАБАРЕ / Н. А. Афанасьев, В. М. Головизнин, В. Н. Семенов и др. // Математическое моделирование. — 2021. — т. 33, № 2. — с. 3–19.
Direct simulation of thermoacoustic instability in gas generators using “CABARET” scheme / Afanasiev N. A., Goloviznin V. M., Semenov V. N. et al. // Math. Models Comput. Simul. — 2021. — Vol. 13, no. 5. — P. 820–830. [Scopus, impact factor 0.365]
- A.4 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Бесшовный балансно-характеристический метод решения задач взаимодействия жидкости и газа с деформируемыми объектами // Математическое моделирование. — 2021. — т. 33, № 10. — с. 65–82.
Goloviznin V. M., Afanasiev N. A. Monolithic balance-characteristic method for solving problems of interaction of liquid and gas with deformable objects // Math. Models Comput. Simul. — 2022. — Vol. 14, no. 3. — P. 398–410. [Scopus, impact factor 0.365]
- A.5 *Afanasiev N., Goloviznin V.* A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations //

Journal of Computational Physics. — 2021. — Vol. 434. — P. 110220. [WoS, Q1, impact factor 4.1]

- A.6 Моделирование динамики жидкости со свободной поверхностью в гравитационном поле схемой КАБАРЕ / Н. А. Афанасьев, В. М. Головизнин, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Математические заметки СВФУ. — 2022. — т. 29, № 4. — с. 77–94. [Scopus, impact factor 0.17]

Иные публикации

- B.1 *Afanasiev N. A., Goloviznin V. M.* The time reversibility property in analysis of sound points in balance-characteristic difference methods // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Vol. 1392. — P. 012028. [Scopus]
- B.2 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Схема КАБАРЕ для уравнений мелкой воды в случае трансзвуковых течений // Ломоносовские Чтения 2019. Секция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2019. — с. 42–43.
- B.3 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А., Сипатов А. М.* Моделирование процессов термоакустической неустойчивости балансно-характеристическими методами // Тихоновские Чтения 2020. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2020. — с. 63–63.
- B.4 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Двудомные разностные схемы и их применение для уравнений мелкой воды // Тихоновские Чтения 2020. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2020. — с. 62–62.
- B.5 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Балансно-характеристический метод расчета трансзвуковых течений с учетом переноса локальных римановых инвариантов // Ломоносовские Чтения 2020. Секция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2020. — с. 52–53.
- B.6 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа // Ломоносовские Чтения 2021. Сек-

- ция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2021. — с. 60–61.
- В.7 *Афанасьев Н. А., Горбунова О. К.* Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для одномерных уравнений мелкой воды // Тихоновские Чтения 2021. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2021. — с. 34–34.
- В.8 *Афанасьев Н. А., Головизнин В. М.* Схема КАБАРЕ в лагранжевых переменных // Современные проблемы математического моделирования: сборник трудов XIX Всероссийской конференции-школы молодых исследователей. — Издательство Южного федерального университета, г. Таганрог, Россия, 2021. — с. 4–4.
- В.9 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Бесшовные балансно-характеристические алгоритмы для одномерных задач взаимодействия упругих тел с жидкостью и газом // Ломоносовские Чтения 2021. Секция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2021. — с. 59–60.
- В.10 *Головизнин В. М., Афанасьев Н. А.* Балансно-характеристические схемы в лагранжевых переменных для двумерных уравнений газовой динамики и динамической упругости // Тихоновские Чтения 2021. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2021. — с. 35–35.
- В.11 Балансно-характеристические разностные схемы в анализе термоакустической неустойчивости в камерах сгорания газовых турбин / Н. А. Афанасьев, В. М. Головизнин, С. С. Нестеров и др. // Труды ЦАГИ. — 2021. — т. 2807. — с. 148–149.
- В.12 *Афанасьев Н. А.* Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов V международной конференции. — Издательский дом СВФУ, г. Якутск, Россия, 2022. — с. 48–48.
- В.13 *Афанасьев Н. А., Головизнин В. М.* Бесшовный балансно-характеристический метод решения задач взаимодействия жидкости и газа с деформируемыми объектами // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов V международной конференции. — Издательский дом СВФУ, г. Якутск, Россия, 2022. — с. 18–19.

- В.14 *Афанасьев Н. А., Головизнин В. М.* Схема КАБАРЕ в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // Ломоносовские Чтения 2022. Секция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2022. — с. 124–125.

Список рисунков

1.1	Шаблон трехслойной схемы КАБАРЕ (1.19)	28
1.2	Диссипативные поверхности трехслойной схемы КАБАРЕ (1.19) .	30
1.3	Дисперсионные поверхности трехслойной схемы КАБАРЕ (1.19) .	31
1.4	Шаблон характеристической фазы схемы КАБАРЕ	34
1.5	Объединенный шаблон первой и третьей фаз схемы КАБАРЕ . .	35
1.6	Ячейка неортогональной четырехугольной сетки и заданные на ней сеточные функции	48
2.1	Одномерная модель мелкой воды	55
2.2	Направление характеристик на второй фазе схемы КАБАРЕ . . .	59
2.3	Результаты расчетов по задаче Римана (2.9) на момент времени $t = 0.04$ на равномерной сетке из 100 ячеек	60
2.4	Шаблон локально-неявного алгоритма обработки звуковых точек	61
2.5	Шаблоны различных характеристических фаз	66
2.6	Характеристические фазы как симметричные полиномиальные реконструкции	67
2.7	Правило вращения-отражения для стандартной линейной экстраполяции (2.4)	68
2.8	Правило вращения-отражения для алгоритма обработки звуковых точек (2.14),(2.15)	68
2.9	Шаблон локально-неявного алгоритма обработки звуковых точек для систем с локальными инвариантами	74
2.10	Результаты расчетов по задаче Римана (2.35) на момент времени $t = 5.0$ на равномерной сетке из 101 ячейки	79
2.11	Результаты расчетов по задаче Римана (2.36) на момент времени $t = 0.012$ на равномерной сетке из 200 ячеек	80
2.12	Результаты расчетов по задаче Римана (2.36) на момент времени $t = 0.012$ на равномерной сетке из 200 ячеек на отрезке $[0.7,0.9]$.	81
2.13	Результаты расчетов по задаче Римана (2.37) на момент времени $t = 7.0$ на равномерной сетке из 100 ячеек	83
2.14	Результаты расчетов по задаче Римана (2.38) на момент времени $t = 2.5$ на равномерной сетке из 200 ячеек	84

2.15	Результаты расчетов по задаче Римана (2.39) на момент времени $t = 4.0$	85
2.16	Результаты расчетов по задаче Римана (2.40) на момент времени $t = 4.0$	86
2.17	Результаты расчетов по задаче Римана (2.41) на момент времени $t = 5.0$ на равномерной сетке из 100 ячеек	87
3.1	Дисперсионные поверхности трехслойных схем	90
3.2	Шаблон улучшенной схемы КАБАРЕ в трехслойном виде для случая $c > 0$	90
3.3	Результаты расчетов (компонента $v(x,t)$) по задаче (3.16),(3.17) на момент времени $t = 12.5$ на отрезке $x \in [0,25]$ на равномерной сетке из 800 ячеек при $CFL = 0.2$	97
3.4	Результаты расчетов (компонента $w(x,t)$) по задаче (3.16),(3.17) на момент времени $t = 12.5$ на отрезке $x \in [0,25]$ на равномерной сетке из 800 ячеек при $CFL = 0.2$	98
3.5	Результаты расчетов ($H(x,t)$) по задаче (2.1),(3.18),(3.19) на момент времени $t = 47$ на равномерной сетке из 200 ячеек при $CFL = 0.3$	101
3.6	Результаты расчетов ($H(x,t)$) по задаче (2.1),(3.20) на момент времени $t = 12$ на равномерной сетке из 800 ячеек при $CFL = 0.2$	102
3.7	Результаты расчетов по задаче Римана (3.21) на момент времени $t = 0.09$ на равномерной сетке из 100 ячеек при $CFL = 0.3$	105
3.8	Результаты расчетов по задаче Римана (3.22) на момент времени $t = 0.09$ на равномерной сетке из 100 ячеек при $CFL = 0.3$	106
4.1	Осесимметричный канал с плоской областью горения	108
4.2	Прямая труба с открытыми концами и потоком газа, движущимся слева направо, и плоской областью подогрева	119
4.3	Скорость газа $u(0,t)$ на входе в трубу Рийке без области нагрева .	121
4.4	Скорость газа $u(0,t)$ на входе в трубу Рийке с постоянным источником тепла	123
4.5	Нижние частоты трубы Рийке для различных положений источника тепла	124

4.6	Инкременты роста трубы Рийке для различных положений источника тепла	125
4.7	Скорость газа $u(0,t)$ на входе в трубу Рийке с постоянным источником тепла с запаздыванием в точке $x_{flame} = 0.25$	125
4.8	Нижние частоты трубы Рийке для различных перепадов температуры	126
4.9	Инкременты роста трубы Рийке для различных перепадов температуры	127
5.1	Узел на границе раздела газ-тело	138
5.2	Шаблон интерполяции скоростей из ребер в узлы сетки	140
5.3	Удар движущегося упругого тела о покоящееся упругое тело	146
5.4	Распространение акустических колебаний из идеального газа в упругое тело	147
5.5	Профиль давления в упругом теле для задачи о воздушном ударе	148
5.6	Профиль скорости в упругом теле и газе для задачи о воздушном ударе	149
5.7	Профиль давления в газе для задачи о воздушном ударе	149
5.8	Поперечные колебания двумерной алюминиевой балки в безвоздушном пространстве	150
5.9	Профиль приращения давления в газе вокруг колеблющейся балки	152
5.10	Развитие неустойчивости без сил поверхностного натяжения	155
5.11	Развитие неустойчивости с недостаточными силами поверхностного натяжения	156
5.12	Развитие неустойчивости с достаточными силами поверхностного натяжения	157
5.13	Ускорения узлов свободной поверхности при развитии неустойчивости с достаточными силами поверхностного натяжения	158
5.14	Колебания свободной поверхности в поле сил тяжести	160

Список таблиц

1	Ошибки по C -норме и порядки сходимости (ООС) для расчетов задачи (3.16),(3.17) по стандартной схеме КАБАРЕ	99
2	Ошибки по C -норме и порядки сходимости (ООС) для расчетов задачи (3.16),(3.17) по схеме [55]	99
3	Ошибки по C -норме и порядки сходимости (ООС) для расчетов задачи (3.16),(3.17) по схеме по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами	100
4	Ошибки по L_2 -норме и порядки сходимости (ООС) для расчетов задачи (2.1),(3.20) по стандартной схеме КАБАРЕ	103
5	Ошибки по L_2 -норме и порядки сходимости (ООС) для расчетов задачи (2.1),(3.20) по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами	103
6	Нижние комплексные частоты трубы Рийке без источников тепла	121
7	Нижние комплексные частоты трубы Рийке с постоянным источником тепла	122