

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Брагин Александр Викторович

**Методы навигации пешехода с использованием
микромеханических инерциальных датчиков**

1.1.7 Теоретическая механика, динамика машин

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Юрий Владимирович Болотин

Москва — 2026

Оглавление

Введение	4
Список сокращений и условных обозначений	16
Аббревиатуры	16
Операции	17
Символы	17
1 Обзор литературы	18
1.1 Известные подходы к инерциальной навигации пешехода	21
1.2 Система инерциальной навигации пешехода	23
1.3 Базовый алгоритм инерциальной навигации пешехода	25
1.3.1 Уравнения движения ИИБ	26
1.3.2 Коррекция по нулевой скорости	27
1.4 Дополнительные алгоритмы коррекции в инерциальной навигации пешехода	34
1.4.1 Коррекция по информации о прямолинейности движения	35
1.4.2 Коррекция по расстоянию между стопами	38
1.5 Выводы к главе 1	42
2 Исследование задачи навигации пешехода.	43
2.1 Обобщенный фильтр Калмана	44
2.1.1 Задача оценивания и уравнения ошибок	44
2.1.2 Алгоритм ОФК	48
2.1.3 Реализация ОФК	50

2.2	Некоторые условия состоятельности ОФК	51
2.2.1	Состоятельность и структурная состоятельность	55
2.2.2	Условия несостоятельности при наличии группы симметрий	58
2.3	Параметры ориентации и преобразования систем координат	62
2.3.1	Матрицы ориентации	63
2.3.2	Системы координат	65
2.4	Система навигации пешехода с одним инерциальным блоком	67
2.4.1	Уравнения движения	68
2.4.2	Модели показаний инерциальных датчиков	71
2.4.3	Модельные уравнения и уравнения ошибок	73
2.4.4	Коррекция по нулевой скорости стопы	78
2.5	Система навигации пешехода с двумя инерциальными блоками	81
2.5.1	Коррекция по расстоянию между стопами	82
2.6	Состоятельность алгоритмов коррекции в навигации пешехода	83
2.6.1	Структурная состоятельность при ZUPТ-коррекции	84
2.6.2	Ковариационный анализ ZUPТ-коррекции	94
2.6.3	Проверка состоятельности на имитационных данных	99
2.6.4	Структурная состоятельность при DUPТ-коррекции	101
2.7	Особенности реализации алгоритмов	112
2.7.1	Калибровка ИИБ	112
2.7.2	Начальная выставка	113
2.7.3	Оценивание дрейфов ДУС	114
2.7.4	Теоретический анализ наблюдаемости дрейфов ДУС	115
2.7.5	Оцениваемость дрейфов ДУС на имитационных данных	118
2.7.6	Оцениваемость дрейфов ДУС для реальных данных	121
2.8	Выводы к главе 2	122

3	Методы коррекции путевого угла в навигации пешехода	126
3.1	Алгоритмы коррекции по прямолинейному движению	127
3.1.1	Алгоритм HDE	128
3.1.2	Алгоритм iHDE	131
3.2	Алгоритм адаптивной коррекции по расстоянию между стопами (ADUPT)	132
3.2.1	Идея ADUPT	133
3.2.2	Мера ошибок БИНС	135
3.2.3	Учет мер ошибок БИНС при DUPT-коррекции	137
3.2.4	Реализация ADUPT	138
3.2.5	Тестирование ADUPT	141
3.3	Выводы к главе 3	148
	Заключение	149
	Список литературы	151

Введение

Диссертационная работа посвящена задаче автономной навигации пешехода с помощью инерциальных датчиков, закрепленных на стопах. Навигация – это определение координат, скоростей и ориентации объекта в пространстве. В задаче навигации пешехода наибольший интерес представляют его координаты относительно какой-либо заданной системы координат. Автономность означает, что никакие сигналы от внешних устройств, таких как спутники или радиомаяки, недоступны. Инерциальные датчики – это акселерометры и гироскопы, измеряющие удельную силу, действующую на чувствительную массу датчика, и его угловую скорость соответственно. Имея указанные измерения, можно, интегрируя дифференциальные уравнения движения корпуса датчика, получить его положение, скорость и параметры ориентации. Это и означает решить задачу инерциальной навигации. Важнейшим преимуществом инерциальной навигации является независимость от внешних сигналов, то есть автономность. Однако есть также недостаток – непрерывное накопление ошибок навигационного решения. Инерциальные датчики имеют погрешности, поэтому точность навигационного решения снижается с течением времени. Отсюда следует необходимость как-либо корректировать инерциальные навигационные системы.

Одни из первых инерциальных навигационных систем применялись в системах управления баллистическими ракетами. Позднее инерциальные системы появились в авиации, на флоте, в наземной технике. Это были дорогостоящие системы с высокоточными датчиками. Первые публикации по инерциальной навигации появились достаточно давно [111],[63]. В нашей стране авторами современного метода инерциальной навигации были В.Д. Андреев, Н.А. Парусников, Е.А. Девянин и другие. Метод изложен в фундаментальной монографии [95], [96] и в других книгах и статьях [109], [103]. В настоящее время количество книг, статей и диссертаций по теме инерциальных навигационных систем и алгорит-

мов их работы огромно. Однако в большинстве работ теоретического характера рассматриваются высокоточные системы.

В настоящее время активно развивается направление в навигации, где рассматриваются низкоточные инерциальные датчики и варианты их применения. Это направление достаточно молодо по сравнению с классической инерциальной навигацией и возникло одновременно с появлением технологий массового и дешевого изготовления миниатюрных инерциальных датчиков – так называемых микроэлектромеханических сенсоров (МЭМС). Эти датчики представляют из себя микроструктуры, изготовленные на кристалле [70]. Их размер позволяет разместить их в любом носимом устройстве, включить в состав экипировки, даже одежды. В наших смартфонах устанавливаются такие датчики. Их главным минусом является невысокая точность, которая едва ли будет увеличена в ближайшее время при сохранении доступности.

Низкая точность исключает использование МЭМС-датчиков в автономном режиме в тех же системах, в которых применяются датчики высокоточные (например, в навигационных комплексах самолетов или космических ракет). Важно, что в таких случаях инерциальная навигационная система должна давать оговоренную точность в автономном режиме (без коррекции) в течение заданного промежутка времени, например, 1 часа. Этого невозможно достичь при помощи МЭМС-датчиков. Однако существует множество систем, где корректирующая информация доступна всегда, или почти всегда. Один из самых распространенных примеров – это квадрокоптеры, в которых низкоточную инерциальную систему корректируют по показаниям спутниковых навигационных систем (СНС). Другой пример – высокоточные снаряды, баражирующие боеприпасы, которые также корректируются на большом участке траектории и потому допускают использование низкоточных инерциальных датчиков, которые нужны лишь для непрерывности решения навигационной задачи (когда внешний сигнал, например, сигнал СНС, потерян на короткое время или его качество заметно ухудшилось). МЭМС-датчики включают в системы управления сельскохозяйственной техникой, этим активно занимаются и за рубежом [51], и у нас в стране [75]. Существует множество других задач, для которых в настоящее время начинают применять низкоточные навигационные системы, основанные на МЭМС-датчиках. Одна из таких задач – навигация пешехода.

Под задачей навигации пешехода мы будем понимать разработку методов для автономной навигации человека при ходьбе или беге. Акцент на автономной навигации делается, чтобы исключить из рассмотрения, например, навигацию при помощи СНС. Для человека и любого другого объекта, будь то автомобиль, самолет или корабль, навигация по СНС с точки зрения методов не отличается, разным может быть лишь состав систем и точность навигации. Специфичными для навигации пешехода в первую очередь являются методы, основанные на инерциальных датчиках, и использующие информацию о характере движения. Идея использования носимых устройств с МЭМС-датчиками для определения местоположения пешехода возникла в 90-х годах XX века [44],[32]. Сразу возникло два подхода к решению этой задачи.

Первый подход заключается в подсчете шагов и вычислении курса, которым движется человек, с «пошаговым» построением траектории [44],[49],[74]. Датчик при этом может крепиться почти в любой точке тела человека, поскольку колебания, возникающие при шаге, можно обнаружить даже при креплении датчика на голове. Сложность в подобных алгоритмах представляет вычисление курса, поскольку поворот датчика, в зависимости от места крепления, не всегда означает поворот траектории. Например, если датчик закреплен на голове, повороты головы вовсе не обязательно соответствуют поворотам человека при ходьбе. Тем не менее, в развитии таких систем был достигнут определенный прогресс [52].

Второй подход заключается в решении уравнений движения датчика (метод инерциальной навигации) для получения координат, скоростей и ориентации с периодической коррекцией по нулевой скорости. Коррекция по нулевой скорости необходима, потому что без нее интегрирование уравнений движения приведет к километровым ошибкам координат в течение первых минут. Возможна такая коррекция при установке датчиков на стопы пешехода [32],[33]. Когда при ходьбе или беге нога человека ставится на опору, ее скорость на некоторое время становится близкой к нулю. Эта информация применяется как псевдоизмерение (термин псевдоизмерение используется здесь потому, что отдельного датчика, измеряющего скорость, нет). Оказалось, что, имея относительно низкоточные МЭМС-датчики, можно решать задачу определения местоположения с точностями порядка десятков метров (для 30 минут навигации) [50]. При этом

особенно важно обнаружить фазу опоры. В работах применяются различные комбинации датчиков: инерциальные датчики, датчики давления, встроенные в обувь, ультразвуковые датчики и т.д. Алгоритмам детектирования фазы опоры посвящено множество статей [83].

Дополнительная информация комплексируется с результатами прогноза траектории различными способами. Наиболее распространенным аппаратом комплексирования данных в области навигации является обобщенный фильтр Калмана (ОФК) [121],[90]. От свойств ОФК зависит качество коррекции навигационного решения, а значит и точность навигации. В теории оценивания существует понятие состоятельности фильтра [10]. Свойство состоятельности важно при практической реализации алгоритмов комплексирования – отсутствие состоятельности может приводить к некорректной работе фильтра. В ОФК причина несостоятельности – линеаризация уравнений в окрестности вычисленной оценки состояния системы, которая может значительно отличаться от истинного состояния системы. Проблема несостоятельности ОФК возникает во многих задачах, например, в задаче одновременной навигации и картографирования. В этой области выработаны [38] некоторые не вполне формализованные методы борьбы с несостоятельностью фильтра. В диссертации показано, что в задаче навигации пешехода проблема несостоятельности ОФК в случае коррекции по нулевой скорости стопы также возникает [18]. Для формализации и упрощения исследования состоятельности в диссертации вводится понятие структурной несостоятельности, с помощью которого проводится исследование алгоритмов коррекции в навигации пешехода.

Другой проблемой второго подхода к задаче навигации пешехода является нарастание ошибки курса, поскольку ее нельзя скорректировать по информации о нулевой скорости стопы [18]. Один из способов борьбы с нарастанием ошибки курса – использование информации от магнитометров, которые, как правило, присутствуют в микромеханическом инерциальном измерительном блоке (ИИБ) вместе с акселерометрами и гироскопами. По измерениям магнитного поля Земли можно вычислить магнитный курс (направление на магнитный север), а зная магнитное склонение (отличие магнитного севера от географического), можно получить и истинный курс. Недостаток этого способа – невозможность применять его при наличии магнитных помех разной природы [3]. К примеру,

в здании отделить магнитное поле Земли от наводок от металлоконструкций затруднительно.

Наряду с привлечением дополнительных устройств, существует другой способ борьбы с ошибкой курса – использование априорных гипотез о характере движения. В работе [22] был предложен метод коррекции, в основе которого лежит идея о том, что если ИИБ установлены на обеих стопах пешехода, можно использовать информацию об ограниченности расстояния между стопами. Если расстояние между стопами превышает заданный порог, считается, что накопились ошибки навигации и обобщенным фильтром Калмана обрабатывается измерение, содержащее разность вычисленного и максимального (выбранного априорно) расстояний между стопами. Такой метод позволяет несколько уменьшить ошибку курса каждой навигационной системы. В этом случае информация от обеих навигационных систем обрабатывается совместно и необходима их синхронизация. Решить проблему автономной дооценки курса этот алгоритм принципиально не позволяет, поскольку в измерениях не содержится информации о курсе. Однако в ряде работ показано, что такой подход дает улучшение точности навигации [71],[104].

Другой вариант использования априорной информации был предложен в работах [19], [1]. Его идея в том, что внутри зданий человек в основном ходит вдоль стен (по крайней мере может пересекать их только в выделенных местах). Принимаются следующие гипотезы: стены представляют из себя вертикальные плоскости и расположены под прямыми углами. Исходя из этих гипотез, делается предположение, что если человек идет прямо, то он двигается вдоль стены. Выделенное направление или, по терминологии авторов [19], «доминантное направление» (dominant direction) используется для коррекции курса. Сами выделенные направления (чаще всего их четыре) фиксируются и в процессе работы алгоритма выбираются те из них, которые ближе всего к текущему направлению движения пешехода. Результат применения такого метода сильно зависит от реальных траекторий пешехода. Если гипотезы, заложенные в алгоритм, выполняются, удастся существенно повысить точность навигации [20]. Однако качество коррекции ухудшается, если гипотезы не выполняются: например, если человек идет по кругу, либо долгое время идет вдоль направления, отличающегося от выделенного [42]. Для повышения надежности алгоритмов коррекции в

подобных ситуациях производят отключение коррекции [43],[30]. Под надежностью далее будет пониматься вероятность не внести систематические ошибки алгоритмом коррекции в навигационное решение. Чем выше такая вероятность – тем выше надежность.

Подробный обзор литературы, посвященной задаче навигации пешехода, внесен в отдельную главу.

Актуальность темы.

Системы автономной навигации пешехода востребованы, если недоступны внешние источники информации. При чрезвычайных ситуациях в больших зданиях экстренным службам необходимо координировать свои действия, при этом ни предустановленная инфраструктура, решающая задачу навигации, ни спутниковые навигационные системы использоваться не могут. Другая ситуация, когда автономное позиционирование востребовано – выполнение задач в зоне боевых действий, где сигналы спутниковых навигационных систем могут полностью глушиться или искажаться. Классический подход к автономной навигации – использование инерциальных измерительных блоков (ИИБ) и бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) на их основе.

Актуальность исследований подтверждается тем, что в мире уже существует несколько систем автономной навигации пешехода. Одна из них разработана компанией Forterra и называется WarLoc. Известно, что она построена по принципу инерциальной навигации с коррекцией по нулевой скорости и допускает коррекцию по сигналам спутниковых навигационных систем. Эта система разрабатывалась в интересах армии США. Израильская компания Rafael предлагает систему Footprint, которая использует тот же принцип. Немецкая компания iMAR недавно представила свою систему навигации пешехода iTHESEUS, также построенную по принципу инерциальной навигации. Декларируется точность порядка 1% от пройденного пути, однако подтверждается это относительно коротким (15 минут) демонстрационным экспериментом. Кроме того, множество исследовательских коллективов занимается задачей автономной навигации пешехода [104], [73], [87].

В нашей стране задачей навигации пешехода по инерциальным датчикам занимались и занимаются коллективы МГТУ им. Н.Э. Баумана [117],[118], МГУ имени М.В. Ломоносова [101], КГТУ им. А.Н. Туполева [116], ОАО «Радиоави-

оника» [112],[113].

Большинство этих работ носит прикладной характер. При этом некоторые теоретические вопросы, важные для практики, остаются за кадром. Поэтому теоретическое исследование задачи навигации пешехода является актуальной задачей.

Целями данной работы являются: во-первых, теоретическое исследование методов коррекции навигационного решения в навигации пешехода, основанных на обобщенном фильтре Калмана (ОФК), во-вторых, разработка нового метода коррекции, учитывающего предшествующий теоретический анализ.

Для достижения указанных целей необходимо решить следующие **задачи**:

- Выяснить свойства состоятельности ОФК для алгоритмов коррекции навигационного решения по информации о нулевой скорости и по информации об ограниченности расстояния между стопами пешехода при использовании различных способов линеаризации задачи.
- Разработать метод коррекции навигационного решения для системы из двух БИНС, закрепленных на разных стопах, по информации о прямолинейности движения, обладающий надежностью метода коррекции по информации об ограниченности расстояния между стопами пешехода.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

- Введено понятие структурной несостоятельности ОФК и на его основе предложен подход к проверке несостоятельности ОФК.
- С использованием введенного понятия исследована состоятельность ОФК в задаче навигации пешехода для задачи коррекции по информации о нулевой скорости и для задачи коррекции по информации об ограниченности расстояния между стопами.
- Предложен адаптивный алгоритм коррекции навигационного решения для системы из двух БИНС в задаче навигации пешехода, использующий информацию об ограниченности расстояния между стопами и информацию о прямолинейности движения пешехода.

Теоретическая ценность работы состоит во введении понятия структурной несостоятельности и исследовании с его помощью состоятельности ОФК для различной корректирующей информации в задаче навигации пешехода.

Практическая значимость работы заключается во-первых, во введении формы ОФК в задаче навигации пешехода, в которой расчетные ковариации ошибок оценок близки к истинным, что позволяет корректно комплексировать навигационное решение с дополнительными измерениями; во-вторых, в разработке и апробации нового алгоритма коррекции по информации об ограниченности расстояния между стопами и о прямолинейности движения пешехода. Результаты обработки большого количества экспериментальных данных показали, что предложенный алгоритм более надежен, чем существующие алгоритмы коррекции по той же информации.

Методология и методы исследования Задача сформулирована как задача оценивания траектории механической системы и решается с применением методов теории оптимального оценивания, теоретической механики, теории вероятностей.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Введенное условие структурной несостоятельности ОФК является достаточным условием несостоятельности ОФК: если оно выполнено, то расчетные ковариации ошибок оценок ОФК существенно отличаются от реальных средних квадратов ошибок оценок навигационного решения.
2. ОФК в задаче навигации пешехода при коррекции по нулевой скорости и при коррекции по информации об ограниченности расстояния между стопами структурно состоятелен при записи уравнений в отклонениях в динамических ошибках и структурно несостоятелен при записи уравнений в отклонениях в полных ошибках. Таким образом, ОФК в полных ошибках несостоятелен.
3. Статистическое моделирование показывает, что ОФК в динамических ошибках для задачи коррекции по нулевой скорости состоятелен.
4. Предложенный алгоритм коррекции навигационного решения для системы из двух БИНС, использующий информацию об ограниченности рас-

стояния между стопами и информацию о прямолинейности движения пешехода, позволяет достичь более высокой надежности решения задачи по сравнению с существующими методами.

Достоверность и обоснованность полученных теоретических результатов обеспечивается применением математических методов теории оценивания, теоретической механики, теории вероятностей. Достоверность практических результатов обеспечивается обработкой большого количества экспериментальных данных, собранных в процессе написания работы.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- Bolotin Y., Bragin A., Gartseev I. Covariance Error Analysis for Pedestrian Dead Reckoning with Foot Mounted IMU. International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), Pisa, Italy, 2019.
- Болотин Ю.В., Брагин А.В., Гулевский Д.В. Анализ алгоритмов коррекции в задаче навигации пешехода с БИНС, закрепленными на стопах. XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, 2020.
- Брагин А.В., Болотин Ю.В. Сравнение точности алгоритмов навигации пешехода, основанных на разных способах коррекции. XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, 2021.
- Брагин А.В. Алгоритмы коррекции в задаче автономной навигации пешехода с применением микромеханических инерциальных датчиков. Конкурс молодых ученых Института механики МГУ, 2021.
- Брагин А.В., Болотин Ю.В. Автономная навигация пешехода: задачи и методы. VIII международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022.
- Брагин А.В., Болотин Ю.В. Новый алгоритм коррекции в автономной навигации пешехода. Юбилейная XXX Санкт-Петербургская международ-

ная конференция по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, 2023.

- Брагин А.В., Болотин Ю.В. Инерциальная навигация пешехода. Современное состояние вопроса. XIV Всероссийское совещание по проблемам управления, Москва, 2024.
- Брагин А.В., Болотин Ю.В. О необходимых условиях состоятельности обобщенного фильтра Калмана. Международная научная конференция «Математика в созвездии наук» к юбилею академика В.А. Садовниченко, Москва, 2024.
- Bragin A.V., Gyroscope biases estimation using zero-velocity updates in pedestrian navigation. CHINESE-RUSSIAN «NAVIGATION AND MOTION CONTROL» YOUTH FORUM, Nanjing 2024.
- Брагин А.В., О некоторых особенностях комплексирования инерциальной навигационной системы с информацией о магнитном поле Земли в задаче навигации пешехода. Молодежная школа-семинар «Навигация и управление движением», Сколково, 2025.

Публикации по теме диссертации. По материалам диссертации подготовлены **9** публикаций в печатных изданиях, **3** из которых изданы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

Личный вклад автора. Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором под руководством научного руководителя Болотина Ю.В.

В работе [18] вклад автора составляет 1/2 и заключается в разработке программ для обработки экспериментальных данных, расчетах и интерпретации полученных результатов, а также в подготовке части текста статьи. В статье [100] вклад диссертанта составляет 1/2 и заключается в развитии одного из теоретических разделов и подготовке текста.

Краткое содержание работы. В первой главе проводится обзор литературы по задаче навигации пешехода при помощи инерциальных датчиков. Рассматриваются два основных подхода: эвристический подход, учитывающий особенности ходьбы человека и инерциальная навигация с коррекцией по нулевой

скорости. Затем подробно описывается второй подход: методы прогноза траектории, методы коррекции траектории. Особое внимание уделяется алгоритму коррекции навигационного решения по нулевой скорости. Также описывается коррекция по информации об ограниченности расстояния между стопами и по информации о прямолинейном движении. Приводятся результаты и основные идеи современных работ по этим темам.

Во второй главе исследуется система инерциальной навигации пешехода (СИНП), состоящая из одной и двух бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС), закрепленных на стопах. Вначале описывается обобщенный фильтр Калмана (ОФК), являющийся основой алгоритмов инерциальной навигации пешехода. Затем вводятся необходимые для изложения понятия: параметры ориентации, системы координат. Далее рассматривается СИНП на основе одной БИНС. Описываются уравнения движения, необходимые для прогноза траектории; уравнения ошибок, нужные для применения ОФК; алгоритм коррекции по нулевой скорости; процедура инициализации алгоритма. Затем рассматривается СИНП на основе двух БИНС и описывается коррекция по информации о расстоянии между стопами. Вводится центральное понятие всей работы – понятие структурной состоятельности ОФК, связь этого понятия со статистическим понятием состоятельности ОФК, способ проверки структурной состоятельности ОФК в общем случае. Далее алгоритмы коррекции по нулевой скорости и по информации о расстоянии между стопами анализируются с точки зрения структурной состоятельности. Для подтверждения полученных результатов также аналитически проводится ковариационный анализ коррекции по нулевой скорости. Его выводы совпадают с выводами анализа структурной состоятельности. Кроме того, приводятся результаты имитационного моделирования также подтверждающие полученные аналитически результаты.

В третьей главе описывается новый алгоритм коррекции навигационного решения, использующий одновременно информацию об ограниченности расстояния между стопами и информацию о прямолинейности движения. Приводятся необходимые сведения об алгоритмах коррекции по информации о прямолинейности движения. Затем описывается новый алгоритм, главная идея которого в адаптивной коррекции по расстоянию между стопами. Адаптивность заключается в неодинаковой коррекции левой и правой БИНС в зависимости

от оцениваемой в процессе навигации «меры ошибки» БИНС. Описываются эксперименты, проводившиеся для апробации разработанного алгоритма. Демонстрируются результаты сравнения с другими алгоритмами коррекции.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность Юрию Владимировичу Болотину за научное руководство и всестороннюю помощь при подготовке диссертации, Андрею Андреевичу Головану, Владимиру Викторовичу Тихомирову и Александру Владимировичу Фомичеву за ценные замечания и конструктивную критику.

Список сокращений и условных обозначений

Аббревиатуры

ДУС – Датчик угловой скорости

ФК – фильтр Калмана

ОФК – Обобщенный фильтр Калмана

ZUPT – Zero velocity UPdaTe

DUPT – Distance UPdaTe

ADUPT – Adaptive Distance UPdaTe

HDE – Heuristic Drift Elimination

iHDE – improved Heuristic Drift Elimination

ИИБ – инерциальный измерительный блок

ИНС – инерциальная навигационная система

БИНС – бесплатформенная инерциальная навигационная система

МЭМС – микроэлектромеханический сенсор

СКО – среднеквадратическое отклонение

СНС – спутниковая навигационная система

Операции

$\langle . \rangle$ — осреднение по времени

$\|.\|$ — Евклидова норма вектора

$\hat{\cdot}$ — кососимметрическая матрица, соответствующая векторному произведению

$\cdot_{k+1|k}$ — априорная оценка ОФК

$\cdot_{k+1|k+1}$ — апостериорная оценка ОФК

Символы

X — вектор состояния динамической системы

x — вектор ошибок динамической системы

Z — вектор измерений

z — вектор измерений ОФК

p — вектор координат

v — вектор скорости

C_{mn} — матрица перехода от с.к. $On_1n_2n_3$ к с.к. $Om_1m_2m_3$

$\Delta p, \Delta v$ — полные ошибки координат и скоростей

$\delta p, \delta v$ — динамические ошибки координат и скоростей

O — матрица наблюдаемости

V — граммian наблюдаемости

$\mathcal{N}$ — ненаблюдаемое подпространство

U — матрица управляемости

W — граммian управляемости

Глава 1

Обзор литературы

Человеку всегда было важно ориентироваться на местности. Прогресс в методах навигации, то есть определении своего местоположения, был неразрывно связан с прогрессом человеческой цивилизации в целом. Первыми приспособлениями, облегчавшими ориентирование, скорее всего, были карты. Их находят в пещерах первобытных людей и датируют десятками тысяч лет до нашей эры [78]. С древнейших времен и до недавнего времени для определения своего местоположения использовалось приблизительное время, а также информация об углах возвышения Солнца или звезд над горизонтом. Недостатком методов, основанных на наблюдениях небесных светил, является их зависимость от погоды. Важным шагом было изобретение магнитного компаса, который позволил определять направление на север независимо от погодных условий, а также относительно надежных часов, которые вместе с секстантом позволяли достаточно точно вычислить координаты. Изобретение компаса и надежного хронографа стало немаловажным фактором великих географических открытий. В дальнейшем компас, устройства измерения времени и карты совершенствовались, возникали другие устройства, помогающие решать навигационную задачу.

Однако для человека (охотника, геолога, военного), которому нужно ориентироваться на местности, долгое время были доступны только компас и карта. Спутниковая навигация произвела революцию в навигации пешехода. Устройства, обеспечивающие точность определения координат пешехода в пределах десятка метров (и не требующие специальных знаний от оператора) появились вначале у военных, а со временем в каждом смартфоне, фитнес-браслете и прочих электронных устройствах. Однако у спутниковых навигационных систем

есть определенные недостатки. Первый и очевидный – недоступность спутниковых сигналов в помещениях и плохой прием сигнала в высотной застройке, при определенном рельефе местности, например, в горных каньонах. Вторым недостатком – возможность искажения спутникового сигнала (spoofing в иностранной литературе) или его полное глушение (jamming в иностранной литературе).

Известным методом автономного определения координат, скоростей и ориентации объекта является инерциальная навигация, которая возникла в 40-50 годах XX века. В состав инерциальной навигационной системы входят акселерометры (ньютонометры), измеряющие удельную силу, которая действует на чувствительную массу прибора, и датчики угловой скорости (ДУС), или гироскопы, измеряющие абсолютную угловую скорости корпуса инерциальной навигационной системы. Интегрируя уравнения Пуассона, в правые части которых входят показания гироскопов, можно получить информацию об ориентации корпуса инерциальной навигационной системы или, что то же самое, об ориентации системы координат, связанной с ней (приборной системе координат). Используя эту информацию, можно перепроектировать вектор удельных сил, измеряемый акселерометрами, из приборной системы координат в систему координат, в которой нужно решить задачу навигации (опорную систему координат). Далее, решая уравнения Ньютона для обобщенной чувствительной массы акселерометров, в правые части которых входит удельная сила, можно получить координаты и скорости чувствительной массы, которые отождествляются с координатами и скоростями как инерциальной навигационной системы, так и объекта, на котором она установлена. Таким образом, для решения задачи инерциальной навигации нужно знать начальные условия (начальные координаты, начальную скорость, начальную ориентацию) и показания акселерометров и гироскопов. Эти приборы дороги и достаточно габаритны, потому применялись для навигации космических ракет, кораблей, самолетов и других объектов, на которых можно было физически разместить инерциальную навигационную систему, куда помимо инерциальных датчиков (акселерометров и гироскопов) входит также блок обработки информации. Со временем инерциальные датчики становились меньше, но не настолько, чтобы быть легко носимыми человеком. К тому же стоимость их была высока, что также служило препятствием к применению их в какой бы то ни было экипировке человека. Со-

временная бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС), построенная на лазерных или волоконно-оптических гироскопах имеет вес порядка нескольких килограмм и значительное энергопотребление (десятки Вт).

Ситуация изменилась лишь в 2000-х годах с началом массового производства микроэлектромеханических сенсоров (МЭМС), а именно МЭМС акселерометров и гироскопов. Это датчики, выполненные на кристалле (кремниевой подложке) по технологиям, похожим на производство микропроцессоров [70] (см. рис.1.1). Отсюда их малый размер (микрометры) и возможность выпуска большого количества датчиков при сравнительно низкой цене. Важное свойство микромеханических инерциальных датчиков – их принципиально низкая точность по сравнению с «классическими» датчиками, такими как лазерные гироскопы или маятниковые акселерометры. МЭМС быстро нашли применение в автомобильной промышленности, в медицинской технике и во многих других областях, где высокая точность была не нужна, но требовалась компактность и дешевизна. Для целей автономной инерциальной навигации (когда никакой информации, кроме инерциальной, нет) они непригодны. Однако, во многих случаях МЭМС-датчики стали дополнением к комбинированной навигационной системе, в которой, как правило, есть основной источник информации, например, спутниковый приемник, а инерциальные датчики лишь обеспечивают непрерывность решения навигационной задачи в ситуациях, когда основной сигнал на короткое время пропадает.

Размер и дешевизна микромеханических инерциальных датчиков позволяли с легкостью встроить их в одежду/специальные носимые устройства, низкое энергопотребление – обеспечить питанием от стандартных аккумуляторов/батарей. Для навигации пешехода необходимо было лишь найти источник дополнительной информации, который позволит решить проблему низкой точности самих датчиков.

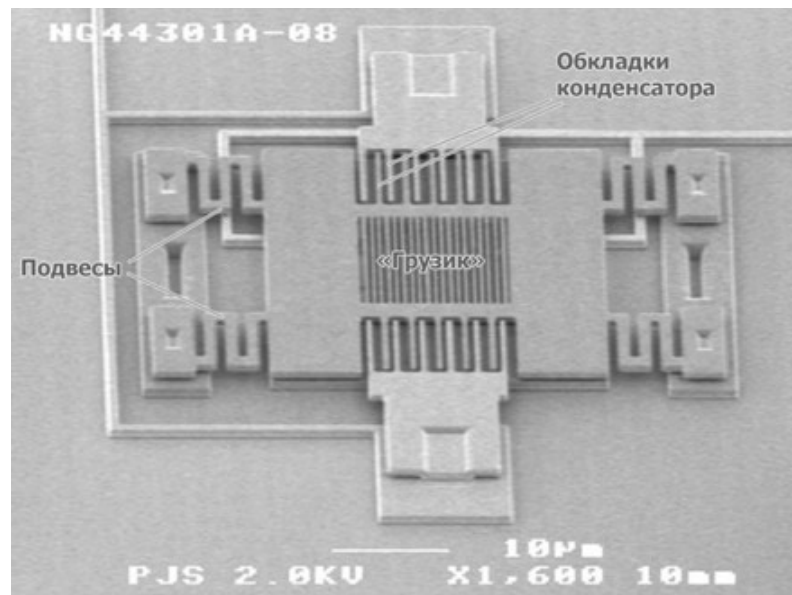


Рис. 1.1: Изображение MEMS акселерометра с обозначениями основных компонентов

1.1 Известные подходы к инерциальной навигации пешехода

По-видимому, первыми обеспечением навигации солдата в отсутствие сигналов спутниковых систем озаботились американские военные. В статье [33] есть ссылка на работу L. Sher, “Personal Inertial Navigation System (PINS),” DARPA, 1996, выполненную по заказу агентства перспективных оборонных разработок США (Defence Advance Research Program Agency – DARPA). Саму публикацию на сайте ведомства найти не удалось, но утверждалось [33], что идея была в креплении инерциального измерительного блока (ИИБ) на стопе и решении уравнений инерциальной навигации. Крепление на стопе необходимо для того, чтобы корректировать навигационное решение по нулевой скорости в моменты, когда стопа стоит на земле. Первая статья, описывающая такой подход, была опубликована в 1999 году и недвусмысленно называлась «Инерциальная навигация для воина в городе» [32]. Следующая статья, где обсуждалась инерциальная навигация пешехода с коррекцией по нулевой скорости, вышла в 2005 году [33] и ясно описывала как технические, так и алгоритмические решения, которые используются до сих пор. Среди них: крепление ИИБ на стопе, решение упрощенных уравнений инерциальной навигации (без учета вращения Земли и

кривизны земной поверхности), использование для коррекции по нулевой скорости обобщенного фильтра Калмана (ОФК).

В [33] был описан подход, который далее мы будем называть *инерциальной навигацией пешехода с коррекцией по нулевой скорости*. В дальнейшем также будем для краткости использовать термин *инерциальная навигация пешехода с ZUPT-коррекцией* (ZUPT - Zero Velocity Update). Почти одновременно с ним был предложен подход [44], который можно назвать *счислением пути*. Идея заключается в использовании акселерометров и гироскопов для подсчета длины шага и магнитометров, гироскопов, или их комбинации для вычисления направления, в котором шаг сделан. При этом траектория конструируется из шагов, курс каждого из которых вычисляется отдельно. Это и позволяет говорить об аналогии со счислением пути, например, в морской навигации. Через некоторое время появились работы, которые развивали предложенные ранее идеи, например, в [74] для вычисления длины шага использовался инерциальный блок, закрепленный на стопе. В статье [67] для вычисления длины шага использовались ультразвуковые датчики, а для определения курса использовался блок из магнитометров, акселерометров и гироскопов, выдававший магнитный курс, и высокоточный волоконно-оптический гироскоп, который должен был измерять, по терминологии авторов, «угловую скорость поворота пешехода». В [27] для вычисления длины шага использовалась нейронная сеть, получавшая на вход сглаженные показания акселерометров, а для вычисления курса – магнитометр.

Подход счисления пути в настоящее время применяется для навигации смартфонов. Однако сложное движение смартфона, связанное с тем, что пользователь в любой момент может совершить произвольные движения рукой, в которой смартфон находится, привела к ограниченному использованию наработок, полученных в развитии данного подхода. По этой причине для навигации смартфонов стали применять глубокие нейронные сети [25], [36], [26]. В указанных статьях измерения инерциальных датчиков являются входом в нейронную сеть, а эталонной информацией, на которой происходит обучение, является траектория смартфона, полученная дополнительными устройствами, например, системами видеоанализа.

Обсуждая разные подходы к построению систем навигации пешехода, нужно упомянуть соответствующие алгоритмы обработки данных. В навигации тра-

диционно применяется фильтр Калмана (ФК) [46]. Однако стандартный ФК строится для линейной системы и, чтобы применять его для нелинейных систем, был предложен обобщенный фильтр Калмана [54], идея которого заключается в линеаризации уравнений в окрестности вычисленной или модельной траектории. В настоящее время ОФК применяется в большинстве работ по навигации пешехода из-за его вычислительной простоты [34]. Также в навигации пешехода нашли применение и другие варианты ФК, например, так называемый сигма-точечный ФК (СТФК) [101]. Этот вариант вычислительно сложнее, но позволяет отказаться от линеаризации уравнений движения, что дает определенные преимущества при больших отклонениях расчетной траектории от истинной. В навигации пешехода применяются и другие методы, например, фильтр частиц [35]. Использование фильтров частиц вычислительно затратно и потому в навигации пешехода их применяют редко [34]. В основном с их помощью комплексируют информацию от ИИБ с картой помещений. Однако эта задача не относится к автономной навигации пешехода и в данной работе не рассматривается.

В данной работе будет рассматриваться задача *инерциальной навигации пешехода с коррекцией по нулевой скорости и по расстоянию между стопами*. Для коррекции будет использоваться ОФК. Интерес именно к ОФК, как было сказано во введении, обусловлен возможностью аналитического изучения состоятельности фильтра. Для других типов фильтров, также широко используемых на практике, таких как итерационный ОФК и сигма-точечный ФК, аналитическое исследование задачи представляется затруднительным.

1.2 Система инерциальной навигации пешехода

Определим систему инерциальной навигации пешехода (СИНП), которая будет рассматриваться в этой работе.

Система инерциальной навигации пешехода состоит из одного или нескольких инерциальных измерительных блоков, закрепленных на стопах человека, и устройства обработки информации, которое решает задачу инерциальной навигации по показаниям датчиков. Измерительный блок может дополнительно содержать магнитометры, датчики давления, температуры и т.п.

Рассмотрим более подробно составные части СИМП и различные варианты ее построения. Начнем с размещения ИИБ. Инерциальный блок крепится на стопу. Разными авторами рассматривались различные способы крепления. Самый распространенный способ – гибкое крепление с помощью эластичных тканевых полос [8]. Некоторые исследователи применяли жесткие кронштейны, крепившиеся на обувь [50]. Предлагалось также разместить ИИБ в каблуке [58] (возможно для армейского ботинка с толстой подошвой). Иногда датчики крепят с помощью шнурков обуви.



Рис. 1.2: Примеры крепления ИИБ. Слева крепление на жесткий кронштейн к пятке, справа – на эластичную ленту на подъем стопы

Есть несколько вариантов размещения ИИБ – на носке, на подъеме ноги, на пятке. Исследования [85] показали, что размещение блока на носке предпочтительнее, поскольку в этом случае на датчики меньше влияет удар при постановке ноги на опору, а также чуть больше длительность фазы опоры. Большинство исследователей крепит ИИБ на носке или на подъеме стопы.

Вопрос, возникающий после установки датчика – как получать от него данные? Существуют два способа передачи информации от ИИБ к устройству обработки. Первый – передача по проводам. Второй – передача беспроводным способом, например, по Bluetooth. Второй способ более удобен, однако следует учитывать, что беспроводная передача данных приводит к появлению дополнительного радиосигнала, наличие которого может быть нежелательно.

Для решения задачи достаточно одного блока, однако предложено много вариантов использования нескольких инерциальных блоков. Один вариант – крепление ИИБ к левой и правой стопе для создания избыточного набора датчиков и последующего комплексирования информации, поступающей от них

[22], [71]. Подробнее вопрос комплексирования данных от двух ИИБ, расположенных на разных стопах, будет рассмотрен далее. Другим вариантом избыточного набора ИИБ является крепление нескольких датчиков на каждую ногу с тем, чтобы учитывать биомеханические ограничения на движения конечностей. Например, в [4] один ИИБ крепится на стопу, а другой – на бедро. Колено ограничивает область возможных положений стопы, (нога не может разгибаться больше, чем на развернутый угол). Имея информацию о положении колена (которая поступает от ИИБ, закрепленного на бедре) можно получить ограничения на положение ИИБ на стопе. Тем самым исключаются неестественные конфигурации взаимного расположения ИИБ и повышается точность навигационного решения. Еще один вариант использования нескольких ИИБ на ноге – крепление одного датчика на стопе, а другого на голени [84]. В этом случае накладываются следующие ограничения: на голеностоп – считается, что стопа и голень лежат в одной плоскости; на угол между стопой и голенью – считается, что он лежит в диапазоне от 65 до 115 градусов. Кроме того, длина шага корректируется на основе информации о длине голени и угле между голенью и стопой. В работе [29] один ИИБ крепится на голени, а второй на бедре. Датчики используются для определения длин конечностей человека, которые также необходимы для эффективного применения биомеханических моделей.

В работе набор используемых датчиков намеренно ограничен инерциальными датчиками: акселерометрами и гироскопами, и не включает дополнительные устройства, такие как приемники спутникового сигнала или магнитометры.

1.3 Базовый алгоритм инерциальной навигации пешехода

В системе инерциальной навигации пешехода есть два основных этапа обработки информации:

- Решение уравнений движения ИИБ (прогноз навигационного решения)
- Коррекция навигационного решения по нулевой скорости

Рассмотрим каждый из них отдельно.

1.3.1 Уравнения движения ИИБ

Задача инерциальной навигации подразумевает решение уравнений движения ИИБ. Для определения координат и скоростей ИИБ в некоторой системе координат, которую мы дальше будем называть опорной, решаются уравнения Ньютона, в правых частях которых присутствуют удельные силы, измеряемые акселерометрами. Однако измерения акселерометров относятся к системе координат, связанной с датчиком, далее мы будем называть ее приборной. Для решения уравнений нужны показания акселерометров в опорной системе координат. Для этого решаются уравнения Пуассона, описывающие вращение корпуса ИИБ и содержащие в правых частях угловые скорости, измеряемые гироскопами. В результате решения уравнений Пуассона вычисляются параметры ориентации, описывающие переход от опорной системы координат к приборной. Эти параметры и используются для перепроектировки показаний акселерометров из приборной системы координат в опорную. Это общая схема решения задачи инерциальной навигации при использовании бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) [105].

В теории инерциальной навигации используются различные опорные системы координат: инерциальная, связанная с неподвижным инерциальным пространством; гринвичская, связанная с Землей и вращающаяся вместе с ней; географическая, центр которой связан с объектом, а оси ориентированы по сторонам света. Выбор опорной системы координат зависит от задачи. Например, инерциальная система координат применяется в задачах управления космическими ракетами, а географическая – в навигации объектов, движущихся около земной поверхности. Во всех случаях в уравнениях движения учитывается форма Земли, а также ее вращение. Свойства и способы интегрирования соответствующих уравнений известны и хорошо разработаны в литературе [68],[69],[105].

В низкоточной инерциальной навигации уравнения движения обычно упрощаются. В большинстве доступных публикаций уравнения движения ИИБ пишутся для плоской невращающейся Земли. Это допущение обосновывается малыми, по сравнению с высокоточной навигацией, скоростями и расстояниями [66], а также низкой точностью применяемых датчиков. Примеры использования упрощенных уравнений движения можно найти как в ранних [33], так и

в современных работах [58],[84] по навигации пешехода. Отметим, что некоторые авторы использовали в задаче навигации пешехода уравнения инерциальной навигации без упрощений, например [56], [9]. Мы используем упрощенные уравнения движения, поскольку они дают примерно ту же точность навигации, но при этом позволяют аналитически исследовать некоторые эффекты, важные для корректного функционирования СИНП.

Уравнения движения решаются в устройстве обработки информации численно. В высокоточной навигации применяются различные методы численного интегрирования, призванные минимизировать ошибки, связанные, например, с высокой маневренностью объекта [68],[69]. Эти методы носят название многошаговых. В навигации пешехода, как правило, используются простые численные методы интегрирования уравнений инерциальной навигации. В работе [79] проводится исследование, касающееся в том числе методов интегрирования уравнений Пуассона, применяемых в навигации пешехода. Делается вывод, что целесообразно использовать по крайней мере метод Рунге-Кутты 4 порядка. Однако в большинстве экспериментов, описанных в [79], на основании которых был сделан вывод, разница в точности, вызванная именно численным методом интегрирования уравнений Пуассона, оказалась небольшой. Преимущества многошаговых методов интегрирования очевидны, однако выигрыш в точности в случае навигации пешехода и использования низкоточных датчиков не гарантирован, как показано в [79].

1.3.2 Коррекция по нулевой скорости

При использовании МЭМС датчиков интегрирование уравнений движения приводит к значительным ошибкам в определении координат, скоростей и ориентации. Эти параметры необходимо корректировать с привлечением внешней информации.

В навигации пешехода всегда доступна информация о том, что в фазе опоры скорость стопы приблизительно равна нулю. Фаза опоры – это момент времени, когда нога человека при ходьбе неподвижна относительно Земли [120]. Идея алгоритма состоит в том, чтобы обнаружить фазу опоры по измерениям инерциальных датчиков (возможно, с привлечением других устройств) и сфор-

мировать корректирующее измерение, которое будет обработано алгоритмом комплексирования и позволит уменьшить ошибку скорости.

Очевидно, что своевременное и надежное обнаружение фазы опоры – критически важная часть алгоритма навигации пешехода. Часто алгоритмы, обнаруживающие фазу опоры, называют детекторами нулевой скорости или ZUPТ-детекторами (название коррекции по нулевой скорости – Zero Velocity Update или ZUPТ), подчеркивая, что эти алгоритмы служат именно для применения коррекции по нулевой скорости. От надежности детектора нулевой скорости зависит насколько корректно будет использована эта информация. Пропуск фазы опоры приведет к большему нарастанию ошибки скорости. Ложное срабатывание детектора приведет к методической ошибке. Запаздывание в обнаружении фазы опоры снижает точность коррекции.

В первых работах по навигации пешехода использовали достаточно простые алгоритмы обнаружения фазы опоры. Например, в [33] средние значения норм показаний акселерометров и гироскопов, вычислявшиеся в скользящем окне, сравнивались с постоянными порогами. В [60] для обнаружения фазы опоры использовались лишь показания гироскопов, средняя норма которых, вычисленная в скользящем окне длительностью 0.5 с, сравнивалась с фиксированными порогами. Подобные подходы использовались многими последующими авторами без особой формализации.

Формализованный подход к детектированию фазы опоры был предложен в работе [72]. Авторы рассматривали задачу обнаружения фазы опоры как задачу проверки гипотез методом максимального правдоподобия. Гипотеза $\mathcal{H}_0$ заключалась в том, что измерения акселерометров содержат только силу тяжести, а измерения гироскопов нулевые. Гипотеза $\mathcal{H}_1$ заключалась в том, что оба этих условия не верны, таким образом $\mathcal{H}_0$ соответствовала фазе опоры. Решение задачи сводилось к вычислению некоторого функционала в скользящем окне с последующим сравнением этого функционала с заданным порогом. Авторы называли этот детектор stance hypothesis optimal detector (SHOE). Этот детектор широко применяется [79],[104],[84] и в настоящее время, поскольку математически обоснован, вычислительно прост, а также достаточно надежен при обыкновенной ходьбе.

Дальнейшие исследования показали, что с ростом скорости движения на-

дежность детектора нулевой скорости с фиксированными порогами уменьшается. В работе [83] продемонстрировано, что фиксированный порог не может быть подобран для всех типов движения. Для ходьбы и бега значения порога, использование которых приводит к минимальным ошибкам координат, значительно отличаются. Это привело к появлению большого количества так называемых робастных детекторов нулевой скорости, которые должны решать задачу детектирования фазы опоры без заметного ухудшения точности при изменении типа движения и других внешних условий.

Простейшим подходом при создании робастных детекторов нулевой скорости является учет изменчивости определенных параметров навигационного решения при изменении режима движения. Например, в [7] порог ZUPТ-детектора изменяется при изменении скорости, оцениваемой самим алгоритмом навигации. Для адаптивного изменения порога использовались и более сложные решения, например, в работе [53] для обнаружения фазы опоры совместно с инерциальными датчиками используется датчик давления, расположенный в стельке ботинка. Общий теоретический подход к адаптивному выбору порогов был представлен в [82] и основывается на байесовском подходе.

Еще одним способом увеличения надежности детекторов является использование сложных моделей шага, включающих в себя от 4 до 6 стадий цикла шага. Для разделения движения ноги на стадии используются различные методы. Например, в работе [23] применялись скрытые марковские модели для вероятностей перехода от одной стадии шага к другой. В статье [61] скрытые марковские модели применялись к системе, в которой стадии шага описывались конечным автоматом с четырьмя состояниями. Для разбиения на стадии использовались показания гироскопа с осью чувствительности, перпендикулярной к направлению движения. Проблемой такого подхода является сложность создания общей модели шага. В случае, если пешеход движется специфическим образом (например, ползет по-пластунски), подобные модели, не учитывающие такой возможности, могут ухудшить точность навигации.

Следующим шагом в усовершенствовании детекторов нулевой скорости стало применение методов машинного обучения [83]. Основная идея – используя достаточное количество так называемых тренировочных данных, для которых интервалы неподвижности известны, сформировать решающее правило, отно-

сящее последовательность измерений акселерометров и гироскопов к одному из двух классов – движению или неподвижности. Для задач бинарной классификации существует множество методов как на основе классического машинного обучения, так и нейронных сетей. Например, в статье [62] движение человека описывается 24 классами (ходьба, бег, прыжки, и т.д.) и методом опорных векторов проводится классификация. При этом инерциальные данные используются как для классификации движения, так и для формирования модели неподвижности, то есть детектор нулевой скорости является как бы комбинацией двух моделей – движения и неподвижности. В работе [80] для обнаружения фазы опоры применяется нейронная сеть долгой краткосрочной памяти (в англоязычной литературе Long Short Term Memory – LSTM).

Детекторы неподвижности, основанные на методах машинного обучения, имеют более высокую надежность по сравнению с методами, где пороги фиксированные или адаптивные [83]. Однако сложность в реализации таких детекторов возникает на этапе создания тренировочных наборов данных, для которых существует эталонная разметка, то есть достоверная информация о подвижности/неподвижности стопы. Для разметки инерциальных данных на участки движения/неподвижности исследователи использовали различные методы. Чаще всего используются оптические системы слежения, такие как VICON [80],[89],[81]. Другой вариант предлагается в работе [93], где фаза опоры обнаруживается по показаниям ультразвукового дальномера, луч которого направлен вниз. Сам ультразвуковой датчик крепится на пятке. Также для получения эталонной информации о неподвижности стопы используются датчики давления, встроенные в обувь [47].

В первую очередь затратен сам этап сбора базы данных, на которых будут обучаться алгоритмы. Для широкой применимости набора данных в него должны входить эксперименты с разными людьми, разными типами движения, в разных условиях (сильнее всего из внешних условий на качество обнаружения фазы опоры влияет тип поверхности, по которой движется пешеход). Оптические же методы, например, существенно ограничивают пространство, в котором могут проходить эксперименты.

Во вторую очередь сложности возникают на этапе интерпретации информации от систем, дающих эталонную информацию. Как отмечено в [83], простой

выбор точек, в которых скорость ИИБ равна нулю, приведет к тому, что некоторые фазы опоры не будут отмечены вовсе, поскольку в них стопа человека испытывала микродвижения, связанные с жесткостью обуви, проскальзыванием по полу и т.п. Таким образом, для адекватного выбора точек опоры все равно придется вводить некоторые пороги, начиная с которых движения стопы считается существенным. Это значит, что использование неинерциальных систем определения фазы опоры не всегда обеспечивает точную разметку тренировочной выборки, необходимую для обучения алгоритмов обнаружения нулевой скорости.

Тем не менее возможности для создания новых детекторов движения на основе нейронных сетей имеются, поскольку в некоторых работах предоставляется возможность использовать собранные исследователями наборы данных. Открытый (требуется лишь процедура регистрации) набор данных, где для получения эталона используется датчик давления в обуви представлен в [47]. Открытые наборы данных, где для получения эталона использовалась оптическая система слежения представлены в [81] и [6].

После того, как фаза опоры обнаружена, необходимо скорректировать навигационное решение по информации о нулевой скорости. Мы будем рассматривать подходы, использующие для этой цели ОФК. Здесь следует отметить, что сама по себе коррекция по нулевой скорости хорошо известна в высокоточной навигации [96], поскольку является частным случаем коррекции по измерениям скорости, и может применяться для объектов, которые имеют возможность делать остановки, например, мобильных комплексов топопривязки [106]. Измерение скорости – это вектор в трехмерном пространстве. Соответственно, записать его можно в различных системах координат. В литературе по высокоточной навигации стандартным является запись измерений скорости в системе координат, связанной с объектом [107],[108]. Однако в навигации пешехода чаще используется другой подход, когда измерение нулевой скорости записывается в системе координат, в которой происходит навигация (так называемая навигационная система координат).

В применении ОФК в навигации пешехода есть некоторые особенности. Как известно, основой этого алгоритма является линеаризация уравнений динамической системы и уравнений измерений. Линеаризация происходит в окрест-

ности модельной, то есть вычисленной траектории, поскольку доступна только она. В высокоточной навигации ошибки линеаризации малы. В навигации пешехода это условие может нарушаться из-за низкой точности датчиков и ошибок моделирования при коррекции по нулевой скорости стопы. Это может приводить к так называемой несостоятельности ОФК, то есть несоответствию вычисленных ковариаций истинным [10], [73]. Одним из проявлений несостоятельности ОФК в навигации пешехода является ложная наблюдаемость ошибки угла курса, обнаруженная в [17]. Указанное явление зависит от того, в какой системе координат записываются измерения нулевой скорости.

В работе [17] методами ковариационного анализа аналитически показано, что запись условия нулевой скорости в навигационной системе координат ведет к ложной наблюдаемости ошибки угла курса, то есть к несостоятельности ОФК в смысле теории оценивания. Решением проблемы является запись условия нулевой скорости в системе координат, связанной с инерциальным блоком, и переход в уравнениях ошибок к так называемым динамическим ошибкам скорости [105]. Преимущества перехода к динамическим ошибкам хорошо известны в высокоточной инерциальной навигации [105]. Однако в задаче навигации пешехода переход к динамическим ошибкам имеет особенности, которые, насколько известно автору, исследуется в диссертации впервые. Также автору неизвестны работы, где состоятельность ОФК обсуждалась бы в контексте навигации пешехода.

Проблеме несостоятельности ОФК посвящено множество работ в области, близкой к навигации пешехода, а именно – в задаче одновременной навигации и картографирования (в англоязычной литературе Simultaneous Localization and Mapping – SLAM), например [38],[37],[39]. Сходство заключается в том, что уравнения движения ИИБ в задаче SLAM идентичны таковым в задаче навигации пешехода и в обоих случаях используются грубые датчики. Отличие – в другой структуре измерений. Авторы [38] и [37] достигали состоятельности посредством не вполне формализованных неравносильных преобразований в уравнениях динамики и измерений.

Еще один подход к построению ОФК развивается в работах [11], [12], [13] и во множестве вторичных публикаций [73], [76], [48]. Подход носит название IEKF – Invariant Extended Kalman filter. Авторы применяют формализм теории

групп Ли. Их цель – получить свойства, аналогичные линейности, для построения оценщиков с не зависящими от вектора состояния уравнениями ошибок на более широком, нежели линейные, классе систем. Вводятся в рассмотрение так называемые лево- и правоинвариантные системы на группах Ли, для которых уравнения ошибок записываются на соответствующей алгебре Ли и не зависят от вектора состояния. Благодаря этому доказывается локальная сходимость ОФК в окрестности любой траектории при условии наблюдаемости в линеаризованной системе. Стоит отметить, что авторы занимаются общей задачей инвариантной Калмановской фильтрации и лишь иллюстрируют свой подход на различных примерах, один из которых – инерциальная навигация на «плоской Земле» [14]. При переходе к точным уравнениям инерциальной навигации [15] групповые свойства системы, обеспечивающие независимость уравнений ошибок от состояния, теряются. Примечательно, что при приведении уравнений ошибок, описывающихся в [11], к векторному виду, уравнения на ошибки координат и скоростей фактически повторяют уравнения в динамических ошибках, предложенных Н.А. Парусниковым в 1973 году в неопубликованном отчете 1419 НИИ механики МГУ и опубликованных в [103]. Динамические ошибки использовались на практике в СССР и продолжают использоваться в России (например, [106], [75]). Авторы [11], по-видимому, не знают об этой связи. Таким образом, IEKF обоснован при решении задач навигации в рамках модели плоской Земли, но не для стандартных уравнений инерциальной навигации, учитывающих геометрию Земли, ее вращение, а также ошибки датчиков. В серии недавних работ [14], [15] делаются попытки применить IEKF и к более полным моделям навигации.

В настоящее время продолжают исследования в области более надежного определения моментов фазы опоры и оптимального использования этой информации. Все более распространяющийся подход – использование нейросетевых методов для определения фазы опоры, открывает большой простор для развития. Причина в том, что точность таких детекторов зависит в основном от разнообразия тренировочных наборов данных. На данный момент существует не так много открытых наборов данных, а существующие не отличаются большой вариативностью. Поэтому дальнейшее увеличение их разнообразия и, возможно, использование новых архитектур нейронных сетей представляется

неисчерпаемым источником усовершенствований детекторов нулевой скорости.

1.4 Дополнительные алгоритмы коррекции в инерциальной навигации пешехода

Базовый алгоритм навигации пешехода позволяет достичь высоких точностей (в пределах первых метров) на небольших временах (порядка 10-15 минут). Однако нарастание ошибок, вызванное несовершенством моделей навигации и значительными ошибками МЭМС датчиков привело к появлению большого количества алгоритмов коррекции навигационного решения.

Существуют два подхода к коррекции инерциальных навигационных систем. Первый основан на использовании измерений внешних по отношению к навигационной системе устройств. Примеры – коррекция по информации от спутниковых навигационных систем (СНС), видеокамер, одометров и др. Второй основан на использовании внутренних свойств объектов навигации. Примеры – использование моделей транспортных средств, исключаящих отдельные типы движения [75]. Вырожденным примером является счисление только горизонтальных координат в морской навигации. В навигации пешехода активно используются оба подхода. Как было сказано выше, данная работа посвящена автономной навигации, поэтому далее будут рассмотрены методы, не требующие дополнительных устройств.

Основной проблемой в навигации пешехода является невозможность дооценки угла курса в процессе коррекции по нулевой скорости при использовании модели плоской невращающейся Земли. Большинство алгоритмов коррекции, не использующих дополнительных устройств, были нацелены на уменьшение скорости роста ошибки оценки курса. Ясно, что без внешней информации об ориентации ИИБ (доступной, например, по измерениям магнитометров) или непрерывно поступающей информации о его координатах (например, от СНС), устранить ошибку определения курса невозможно. Однако существуют эвристические методы, которые позволяют уменьшить ошибку курса, а в некоторых случаях и вовсе ее устранить. Такие методы можно разделить на два класса. Рассмотрим их более детально.

1.4.1 Коррекция по информации о прямолинейности движения

Под коррекцией по информации о прямолинейном движении понимается коррекция навигационного решения, которая происходит тогда, когда каким-то образом установлено, что пешеход идет прямо. Впервые такой способ коррекции был предложен в работе [19]. Идея авторов [19] заключалась в том, что устройства, помогающие определить курс – магнитометры и спутниковые навигационные системы, как правило, не работают в созданных человеком местах, в основном, в помещениях. Однако в помещениях достаточно часто стены, коридоры и т.п. прямые и расположены под прямыми углами, то есть, двигаясь по ним, человек будет идти прямо. Именно этот факт и предлагали использовать авторы, сравнивая свой подход с коррекцией по ориентирам, с той разницей, что в их случае ориентиры могут быть неизвестны заранее. Они назвали свой алгоритм *Heuristic Drift Reduction (HDR)*. В процессе движения по результатам анализа траектории определялась вероятность прямолинейного движения. Если она достигала нужного порога, траектория корректировалась так, чтобы сохранить прямолинейность. Авторы исходили из того, что искривление траектории происходит вследствие совокупных дрейфов ДУС (независимо от их происхождения). Корректирующими измерениями в данном случае были так называемые «выделенные направления». Под выделенными направлениями авторы [19] понимали фиксированные в навигационной системы координат направления, отличающиеся друг от друга на 90 или 45 градусов и соответствующие стенам, вдоль которых может двигаться пешеход. Выделенные направления выбирались произвольно. Авторы работали с системой навигации пешехода, построенной по принципу *счисления пути*, поэтому для коррекции траектории они работали с «виртуальной угловой скоростью пешехода», вычисляемой как скорость изменения путевого угла, и корректировали траекторию за счет изменения этой «виртуальной угловой скорости».

В работе [20] авторы развивают свою идею и предлагают вместо коррекции «виртуальной угловой скорости пешехода» корректировать непосредственно путевой угол пешехода. Новый алгоритм авторы [20] назвали *Heuristic Drift Elimination (HDE)*. Это название в дальнейшем стало стандартом для подобных

алгоритмов. Интересно, что авторы не использовали в своем алгоритме фильтр Калмана. Коррекция путевого угла производилась с помощью специального бинарного интегрального контроллера, то есть контроллера, который реагирует не на величину, а на знак входного сигнала и изменяет целевую переменную на фиксированные значения. Этот метод не получил дальнейшего распространения в работах других авторов, однако идея коррекции по информации о прямолинейном движении была впоследствии развита многими исследователями [1], [42], [43], [93] с применением другого математического аппарата.

Почти одновременно с [20], и, возможно, независимо, идейно похожий подход был предложен в [1]. Авторы [1] предлагали использовать информацию о прямолинейности движения, полученную из спутниковой карты здания, в котором происходит навигация. Первым существенным отличием от подхода [20] было то, что выделенные направления, соответствующие стенам здания, не выбирались произвольно, а вычислялись по спутниковому снимку. Это выводит алгоритм из класса автономных. Но это отличие не очень важно, поскольку предложенный в [1] метод можно использовать и выбирая выделенные направления произвольно. Вторым и более важным отличием было использование обобщенного фильтра Калмана (ОФК). Измерением служила разность выделенного направления и текущего путевого угла пешехода. Это измерение в рамках ОФК считалось измерением ошибки курса ИИБ. Неявно принималось упрощающее предположение, что курс ИИБ и путевой угол пешехода близки. Несмотря на кажущуюся грубость данного предположения авторами было показано [1], что метод работоспособен и позволяет существенно увеличить точность навигации в условиях, когда пешеход действительно большую часть времени ходит в здании вдоль стен.

В дальнейшем подход, который по аналогии с [20] стали называть HDE, развивался следующим образом. Из работы [20] была взята идея произвольного выбора четырех выделенных направлений, отличающихся друг от друга на 90 градусов. Из работы [1] был взят механизм коррекции, основанный на применении ОФК.

Поскольку главным недостатком HDE является зависимость качества коррекции от выполнения гипотез, заложенных в алгоритм (движение вдоль прямых стен, расположенных под прямыми углами), исследователи пытались уве-

личить надежность «детектора прямолинейного движения», то есть алгоритма, который, анализируя траекторию пешехода, выдает бинарный признак прямолинейного движения (в англоязычной литературе Straight Line Path – SLP). Если $SLP = 1$, пешеход идет прямо. Надежность детектора тем выше, чем меньше вероятность ложного срабатывания на непрямолинейном участке.

В работе [42] были обозначены основные проблемы детектора движения, использовавшегося в [1]: использование координат только двух соседних шагов при анализе траектории и отсутствие анализа изменения курса от шага к шагу. Проверялось лишь то, что шаг пешехода сделан при «нормальной ходьбе». Критерием «нормальности» ходьбы служила длина шага. Коррекция курса производилась каждый раз, когда шаг признавался «нормальным». В [42] был предложен детектор прямолинейного движения, который анализировал координаты 5 последовательных шагов. В предложенном детекторе $SLP = 1$, если максимальное отклонение курса текущего шага от среднего курса шага за 5 шагов не превышало заданного порога. Кроме того, вводилась эмпирическая функция, определявшая шум измерения курса. Свой подход авторы называли iHDE (improved HDE).

Главной целью авторов [42] было избежать коррекции курса в моменты, которые могли быть ошибочно приняты за прямолинейное движение, либо в моменты, когда истинное направление прямолинейного движения было бы далеко от выделенного направления. Обе этих ситуации могут возникать в зданиях сложной формы, либо в зданиях с большими открытыми пространствами (например, атриум торгового центра), где движения пешехода не ограничены прямолинейными стенами. Обе задачи были решены, однако ахиллесовой пятой алгоритма все равно остался выбор порогов, с которыми сравнивается отличие текущего путевого угла от среднего значения за серию шагов.

В дальнейшем другие авторы пытались улучшить качество HDE за счет усложнения логики, по которой происходила коррекция курса. Стоит отметить работу [43]. В ней, в отличие от [42], в зависимости от степени достоверности информации о прямолинейном движении корректировался либо курс, либо дрейфы гироскопов. Здесь стоит сказать, что и в [1], и в [42] смещения нулей гироскопов входили в вектор состояния ОФК, однако лишь в [43] было предложено корректировать их в случае, если движение прямолинейное, но происходит

не вдоль выделенного направления. Предложенный подход был назван aHDE (advanced HDE).

Последующие работы по HDE в основном вносили незначительные изменения в алгоритмы, предложенные в [42] и [43]. Например, в [30] предлагался детектор прямолинейного движения, где кроме максимального отклонения путевого угла от среднего на скользящем интервале также считалось СКО для путевых углов и $SLP = 1$ при одновременном непревышении порогов максимальным отклонением и СКО. В [92] вводились в рассмотрение временные выделенные направления, то есть логика коррекции курса еще усложнялась.

1.4.2 Коррекция по расстоянию между стопами

Идея использования двух ИИБ на разных стопах была предложена в работе [22]. В такой системе возникает дополнительная информация – инерциальные блоки не могут быть друг от друга дальше, чем на определенном расстоянии. Это расстояние можно измерять напрямую. Например, в [50] расстояние между стопами измерялось с помощью ультразвуковых датчиков, а в [40] – при помощи камер, установленных на обуви и фиксирующих изображения «впереди идущего» ботинка. И то и другое решение не выводит СИНП из класса автономных. Вместо измерения расстояния между стопами непосредственно можно добавлять в алгоритм навигации ограничение на расстояние между стопами. Такой подход был предложен в работе [65]. Когда расстояние между двумя инерциальными блоками превышает заданную константу, происходит коррекция обоих навигационных решений таким образом, чтобы ограничение на расстояние между ними выполнялось.

Информация об ограничении на расстояние между стопами может использоваться в алгоритмах по-разному. В [65] в ФК, обрабатывающий данные от двух ИИБ вводилась информация о том, что они находятся в одной точке. Фактически, ФК обрабатывалось псевдоизмерение расстояния между стопами. Термин псевдоизмерение употребляется потому, что устройства, измеряющего расстояние, в реальности не было, было лишь априорное предположение, что стопы не могут неограниченно отдаляться друг от друга. Шум этого измерения отвечал за «жесткость», с которой координаты обоих ИИБ «притягивались» друг к дру-

гу. Такой подход к использованию информации о расстоянии между стопами прост в реализации и позволяет исследовать наблюдаемость системы методами теории оценивания. Это и обусловило его широкое распространение [88]. Другой способ использования информации о расстоянии между стопами был предложен в [71]. Авторы решали задачу взвешенных наименьших квадратов с квадратичным ограничением типа неравенства. При нарушении условия на расстояние между стопами навигационное решение проектировалось на подпространство, где это условие было выполнено. При этом происходит локальное вырождение ковариационной матрицы. Однако на практике это обстоятельство не влияло на численную устойчивость ФК и подобный подход показывал сопоставимые с другими подходами результаты по точности. В статье [88] информация об ограниченности расстояния между стопами использовалась в рамках байесовского подхода.

Будем называть описанную процедуру Distance Update, сокращенно DUPT, по аналогии с Zero Velocity Update – ZUPT. Предложенная аббревиатура не является общепринятой, но кажется полезной для краткости изложения. Подобные обозначения использовались в работе [8], там авторы применяли Relative Distance Update (RDUPT) и Relative Vector Update (RVUPT).

В большинстве работ, где применялась DUPT-коррекция, формализованно (в смысле теории оценивания) не изучался эффект, который эта коррекция должна произвести. Иначе говоря, не ставился вопрос о наблюдаемых комбинациях, возникающих при DUPT-коррекции. При этом во всех работах отмечалось, что применение этой коррекции позволяет уменьшить ошибку путевого угла и, как следствие, ошибку координат. Одной из первых работ, где была обозначена причина, по которой коррекция по расстоянию между стопами приводит к уменьшению ошибки путевого угла, стала статья [64]. В ней утверждалось, что ошибки путевого угла, представляющие собой «систематический дрейф», симметричны для БИНС на левой и правой стопах. Именно поэтому комплексирование данных двух БИНС позволяет скомпенсировать ошибки путевого угла каждой из них. Та же идея была высказана и в [28]. При этом авторы ссылались на статью [59], где было сделано наблюдение, что в отсутствие заметных дрейфов гироскопов в ИИБ на левой и правой стопах ошибки путевого угла соответствующих БИНС были симметричны. Авторы [59] считали,

что такое поведение ошибок путевого угла – результат ошибок моделирования в СИНП, допущенных на разных уровнях решения задачи: при детектировании фазы опоры, при формировании измерения, при интегрировании уравнений движения и т.д. Именно этим они мотивировали коррекцию по расстоянию между стопами, которая, по терминологии авторов, «позволяет исключить симметричные ошибки моделирования».

В диссертации проведен анализ наблюдаемости, который показал, что при DUPТ-коррекции наблюдаемыми являются разность координат и разность ошибок угла курса левой и правой БИНС [18]. Здесь следует отметить, что ошибка определения курса приводит к ошибке путевого угла. Таким образом, DUPТ-коррекция позволяет до некоторой степени скорректировать ошибки определения угла курса БИНС, а не только траекторию пешехода (в большинстве работ по этой тематике авторы отмечали только эффект уменьшения ошибки путевого угла). Исследования наблюдаемости задачи DUPТ-коррекции также проводились в [91].

Существует множество вариантов реализации DUPТ-коррекции. Например, в качестве области, в которой может находиться одна нога относительно другой, берется не круг, а эллипс [87]. Однако во всех известных автору реализациях DUPТ-коррекции предположение о симметричности ошибок курса левой и правой БИНС сохраняются и как будто не подвергаются сомнению. Одна из идей данной работы – учесть возможную несимметричность ошибок курса двух БИНС и тем самым уменьшить систематическую ошибку, которую DUPТ-коррекция может приносить при нарушении описанного выше предположения о симметричности ошибок курса БИНС.

В работе [102] был предложен метод адаптивной коррекции по расстоянию между стопами (ADUPT – Adaptive Distance Update). Адаптивность заключалась в том, что коррекция навигационных решений левой и правой БИНС производилась неодинаково. Сильнее корректировалось решение БИНС, которая по результатам анализа траектории признавалась менее точной. Мера точности БИНС вычислялась методами алгоритма HDE. Для каждой БИНС при обнаружении прямолинейного движения вычислялись отклонения курса от выделенного направления. БИНС, для которой эти отклонения были больше, считалась менее точной. Связь описанной характеристики с точностью БИНС можно объяснить

следующим образом. Если пешеход идет прямо, курс обоих БИНС должен быть постоянным. Изменение курса при прямолинейном движении в рамках подхода HDE считается следствием накопления ошибок инерциального блока, ошибок моделирования и других факторов. Поэтому большее изменение угла курса в моменты прямолинейного движения может говорить о меньшей точности навигационного решения. В [102] было показано, что предложенный подход позволяет повысить точность навигации в ситуациях, когда пешеход движется по «сложным» траекториям, то есть траекториям, в которых прямолинейное движение вдоль выделенных направлений происходит относительно недолго.

В [21] предложенный подход был развит. Адаптивная коррекция была реализована посредством увеличения ковариаций менее точной БИНС. Цель ADUPT – по возможности улучшить качество DUPT при наличии прямолинейных участков, была достигнута.

Среди методов, не использующих внешнюю информацию, но требующих дополнительных устройств (кроме ИИБ) наиболее перспективным представляется подход, основанный на измерении относительного положения инерциальных блоков на левой и правой стопах, предложенный в [40]. Относительное положение одной стопы относительно другой оценивалось с помощью алгоритмов обработки изображений с камер, закрепленных на каждой из стоп. Каждая камера фиксировала изображение «впереди идущей» ноги и по этим изображениям вычислялось относительное положение. Авторы [40] показали, что использование такого типа коррекции позволяет на 30% улучшить точность навигации по сравнению с коррекцией по расстоянию между стопами. Однако стоит отметить, что описанный авторами способ не очень удобен для практической реализации из-за громоздкости необходимого оборудования и его уязвимости и скорее являлся демонстрацией технологии. Поиск методов надежного относительного позиционирования стоп представляет в этой связи большую ценность, равно как и теоретический анализ наблюдаемости задачи с таким измерением.

Завершая обзор литературы, подчеркнем, что приведенный обзор имел цель лишь ознакомить читателя с историей зарождения автономной навигации пешехода с применением инерциальных датчиков и осветить те ее направления, которые близки к задачам, решаемым в рамках диссертационной работы. Обстоятельный обзор методов и алгоритмов автономной навигации пешехода

может сам служить темой серьезной работы.

1.5 Выводы к главе 1

Сделан обзор литературы по двум основным подходам к задаче автономной навигации пешехода: подход на основе счисления пути, когда по показаниям инерциальных датчиков подсчитывается количество шагов и вычисляется направление движения, и подход на основе инерциальной навигации, когда для инерциального блока, закрепленного на стопе, решаются уравнения движения, а для коррекции навигационного решения используется информация о нулевой скорости стопы в фазе опоры.

Подробно рассмотрен подход на основе инерциальной навигации. Описаны различные варианты построения базового алгоритма, включающего в себя прогноз траектории и коррекцию навигационного решения по нулевой скорости. Сделан обзор методов детектирования нулевой скорости. Рассмотрены также дополнительные алгоритмы коррекции навигационного решения, которые ниже исследуются и используются в диссертационной работе. Показана история возникновения и современное состояние алгоритмов коррекции по прямолинейному движению. Эти алгоритмы обобщенно называются методами типа HDE (Heuristic Drift Elimination) и используют информацию о том, что в зданиях пешеход ходит по прямой вдоль фиксированных направлений (стен) для коррекции путевого угла.

Затем обсуждается история и текущее состояние другой группы алгоритмов, обобщенно называемых в работе алгоритмами DUPТ-коррекции, в которых при использовании двух БИНС, закрепленных на разных стопах, навигационное решение можно корректировать по информации о том, что расстояние между стопами не может превышать определенной константы.

Глава 2

Исследование задачи навигации пешехода.

В данной главе исследуются свойства обобщенного фильтра Калмана (ОФК) в задаче инерциальной навигации пешехода с использованием коррекции по нулевой скорости и по расстоянию между стопами. Вводятся системы координат, выводятся уравнения движения и уравнения ошибок. На модельных и реальных данных показано, что выбор системы координат влияет на свойства ОФК. Далее проводится теоретический анализ данной особенности задачи. Анализ базируется на понятии состоятельности по Бар-Шалому [10]. Согласно определению [10], фильтр называется состоятельным, когда оценки несмещенные и прогнозируемые ОФК ковариации ошибки оценки согласуются с истинными ошибками. К сожалению, указанное свойство состоятельности или несостоятельности трудно доказать аналитически, так что в [10] делается акцент на проверку состоятельности по набору реализаций. В данной главе вводится новое понятие структурной несостоятельности, утверждающее, что ОФК структурно несостоятелен, если свойства оцениваемости переменных системы, получаемые из ковариационных матриц ОФК, не согласуются со свойствами наблюдаемости системы. Рассматривается связь понятий состоятельности и структурной состоятельности. Показано, что в задаче навигации пешехода избавиться от структурной несостоятельности можно адекватным выбором системы коорди-

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [17], [18], [16], [100], [99].

нат, в которой записываются уравнения ошибок, а также адекватной записью уравнений измерений. Что касается состоятельности по Бар-Шалому, то ее отсутствие следует из структурной несостоятельности, а наличие проверяется методом статистического моделирования Монте-Карло.

Последовательность изложения следующая. Вначале описывается теория обобщенного фильтра Калмана. Потом вводятся понятия состоятельности и структурной состоятельности ОФК. Затем приводятся необходимые сведения о параметрах ориентации, использующихся в работе, и вводятся системы координат. После ставится задача навигации пешехода с одним ИИБ. Далее ставится задача навигации пешехода с двумя ИИБ на разных стопах и коррекция по информации о расстоянию между стопами. После этого приводятся результаты исследования состоятельности ОФК с коррекцией по нулевой скорости, а также результаты исследования состоятельности ОФК с коррекцией по расстоянию между стопами. В конце главы рассматриваются особенности реализации описанных алгоритмов.

2.1 Обобщенный фильтр Калмана

Основой предложенного алгоритма навигации пешехода является обобщенный фильтр Калмана. Он применяется для комплексирования динамической системы и измерений (измерение нулевой скорости, измерение расстояния между стопами, измерение угла курса).

2.1.1 Задача оценивания и уравнения ошибок

Рассмотрим задачу оценивания в общей нелинейной системе со случайными возмущениями, в которую в дискретные моменты времени t_k поступают измерения Z_k :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f_k(X_k, q_k), \\ Z_k &= h_k(X_k) + r_k. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь состояние системы X_k – элемент гладкого n -мерного многообразия M , вложенного в евклидово пространство размерности N , q_k – возмущения, r_k – ошибки измерений. Предполагается, что возмущения и ошибки измерений

некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и заданными матрицами ковариаций Q, R .

Наряду с уравнениями (2.1), описывающими истинное поведение системы (для краткости будем называть эти уравнения истинными), выпишем модельные (расчетные) уравнения:

$$\begin{aligned} X'_{k+1} &= f_k(X'_k, 0), \\ Z'_k &= h_k(X'_k). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь X' – так называемое модельное значение вектора состояния – результат работы алгоритма оценивания.

Заметим, что в работах по теории обобщенного фильтра Калмана предполагается, что X_k – это элемент пространства $\mathbb{R}^n$. Однако, в уравнениях инерциальной навигации системы координат, определенной во всем фазовом пространстве, не существует, а известные локальные системы координат часто неудобны в использовании (например, евклидовы координаты, скорости чувствительной массы и ориентация корпуса БИНС, заданная углами курса, крена и тангажа). Поэтому рассмотрение состояния X_k как элемента многообразия обоснованно.

Известно, что любое гладкое многообразие можно считать гладкой поверхностью в евклидовом пространстве большей размерности и, по крайней мере локально, задавать системой уравнений:

$$M = \{X \in \mathbb{R}^N : \Theta(X) = 0\}, \quad \Theta(X) \in \mathbb{R}^{N-n}$$

Заметим, что в инерциальной навигации, если не вводить в рассмотрение инструментальные погрешности датчиков, в качестве $\mathbb{R}^N$ можно взять $\mathbb{R}^{15}$, координатами в котором являются три координаты и три скорости чувствительной массы, а также девять элементов матрицы ориентации корпуса БИНС.

В дальнейшем изложении будем использовать для X термин «вектор состояния», хотя этот объект в общем случае не является вектором.

Локально многообразие диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Можно выбрать такие локальные координаты ξ на M , что в некоторой области в M можно записать:

$$M = \{X = \Phi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.3}$$

Касательное пространство к M в точке X обозначается TM_X , оно изоморфно $\mathbb{R}^n$. Считая, что $M \subset \mathbb{R}^N$ задается уравнением (2.3), касательное простран-

ство $TM_X \subset \mathbb{R}^N$ можно определить как

$$TM_X = \{v \in \mathbb{R}^N : \frac{\partial \Theta}{\partial X} v = 0\}$$

Если же фиксированы локальные координаты $\xi \in \mathbb{R}^n$ на M , то

$$TM_X = \{v = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

Перейдем к введению уравнений ошибок. Ошибка $x \in \mathbb{R}^n$ характеризует отклонение модельного состояния X' от истинного состояния X . В теории ОФК часто предполагается, что $M = \mathbb{R}^n$. Тогда ошибка x определяется формулой $x = X' - X$. В рассматриваемых в диссертации задачах, как уже было сказано, M – многообразие, так что указанный способ введения ошибок не подходит.

Сначала допустим, что на M введена локальная система координат ξ , так что $X = \Phi(\xi)$, $X' = \Phi(\xi')$. Тогда вектор ошибок можно ввести как $x = \xi' - \xi$. При этом

$$X' - X = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} x + o(x) \quad (2.4)$$

Заметим, что отображение

$$\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow v = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} x \in TM_{X'}$$

обратимо, то есть уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} x = v$$

имеет единственное решение при $v \in TM_{X'}$.

Теперь предложим способ введения вектора ошибок x , не использующий локальные координаты, в предположении $M \subset \mathbb{R}^N$ [99].

Определение 1. Ввести вектор ошибок $x \in \mathbb{R}^n$ – значит задать матрицу $C(X')$ размера $N \times n$, такую, что уравнение $C(X')x = v$ имеет единственное решение x для произвольного вектора $v \in TM_{X'}$. Для заданных X' и X вектор ошибок x – такой вектор, что

$$X' - X = C(X')x + o(x) \quad (2.5)$$

Формула (2.5) при заданных X и X' определяет вектор x однозначно с точностью до второго порядка малости. Конкретный способ построения x не важен,

поскольку в ОФК на практике используется обратная формула – определение оценки $\tilde{X}$ истинного состояния X по модельному состоянию X' и оценке $\tilde{x}$ вектора ошибок x :

$$\tilde{X} = X' + C(X')\tilde{x} + o(\tilde{x}) \quad (2.6)$$

Слагаемое с $o(\tilde{x})$ в (2.6) может иметь разный вид в зависимости от задачи. Часто используют линейное приближение: полагают $o(\tilde{x}) = 0$, так что $X' - \tilde{X} = C(X')\tilde{x}$. С учетом сказанного и для сокращения записи вместо (2.5) будем использовать формулу

$$X' - X = C(X')x \quad (2.7)$$

Замечание 1. В формулах (2.5)-(2.7) используется линеаризация в модельном состоянии X' , поскольку только оно доступно на практике. Для нижеследующего теоретического анализа, однако, нам понадобятся аналогичные формулы, в которых линеаризация проводится в истинном состоянии X (в обоих случаях ошибки в диссертации обозначаются буквой x):

$$X' - X = C(X)x \quad (2.8)$$

Ошибку, определенную согласно (2.8), будем называть «идеальной ошибкой».

Введем ошибку x_k в момент t_k :

$$X'_k - X_k = C(X'_k)x_k. \quad (2.9)$$

Введем также отклонения модельного измерения от истинного:

$$z_k = Z'_k - Z_k$$

Вычитая из модельных уравнений (2.2) истинные (2.1) и подставляя в полученное уравнения выражения для ошибок (2.9), получим в линейном приближении следующие уравнения ошибок:

$$x_{k+1} = C^{-1}(X'_{k+1}) \frac{\partial f(X'_k, 0)}{\partial X'_k} C(X'_k)x_k + C^{-1}(X'_{k+1}) \frac{\partial f(X'_k, 0)}{\partial q_k} q_k \quad (2.10)$$

$$z_k = \frac{\partial h(X'_k)}{\partial X'_k} C(X'_k)x_k + r_k \quad (2.11)$$

Замечание 2. Матрица $C(X')$ обратима на касательном пространстве к M , так что формулы обращения в (2.10), (2.11) определены корректно.

Аналогично (2.9) введем «идеальную» ошибку x_{k+1} в момент t_{k+1} :

$$X'_{k+1} - X_{k+1} = C(X_{k+1})x_{k+1} \quad (2.12)$$

Рассмотрим также «идеальные» уравнения ошибок, получающихся при подстановке в уравнения ошибок соотношения (2.12).

$$x_{k+1} = C^{-1}(X_{k+1}) \frac{\partial f(X_k, q_k)}{\partial X_k} C(X_k) x_k + C^{-1}(X_{k+1}) \frac{\partial f(X_k, q_k)}{\partial q_k} q_k \quad (2.13)$$

$$z_k = \frac{\partial h(X_k)}{\partial X_k} C(X_k) x_k + r_k \quad (2.14)$$

Будем обозначать объекты, относящиеся к идеальным уравнениям ошибок, чертой сверху, например, $\bar{F}$. Введем краткие обозначения для матриц из формул (2.10), (2.11) и (2.13), (2.14):

$$\begin{aligned} F_{k+1,k} &= C^{-1}(X'_{k+1}) \frac{\partial f(X'_k, 0)}{\partial X'_k} C(X'_k), \quad G_k = C^{-1}(X'_{k+1}) \frac{\partial f(X'_k, 0)}{\partial q_k}, \\ H_k &= \frac{\partial h(X'_k)}{\partial X'_k} C(X'_k) \\ \bar{F}_{k+1,k} &= C^{-1}(X_{k+1}) \frac{\partial f(X_k, q_k)}{\partial X_k} C(X_k), \quad \bar{G}_k = C^{-1}(X_{k+1}) \frac{\partial f(X_k, q_k)}{\partial q_k}, \\ \bar{H}_k &= \frac{\partial h(X_k)}{\partial X_k} C(X_k) \end{aligned}$$

Уравнения ошибок примут вид:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_{k+1,k} x_k + G_k q_k \\ z_k &= H_k x_k + r_k \end{aligned} \quad (2.15)$$

Идеальные уравнения ошибок примут вид:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \bar{F}_{k+1,k} x_k + \bar{G}_k q_k \\ z_k &= \bar{H}_k x_k + r_k \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.1.2 Алгоритм ОФК

Алгоритм ОФК состоит из двух этапов

1. Прогноз вектора состояния, то есть получение априорной оценки вектора состояния по апостериорной оценке на предыдущем шаге:

$$X_{k+1|k} = f_k(X_{k|k}, 0)$$

Здесь $X_{k|k}$ – апостериорное значение вектора состояния на момент t_k , то есть с учетом всех измерений на момент t_k . $X_{k+1|k}$ – априорное значение вектора состояния на момент t_{k+1} , то есть результат прогноза без учета измерения на момент t_{k+1} .

2. Коррекция вектора состояния, то есть оценка вектора ошибок $\tilde{x}_{k+1|k+1}$ и получение апостериорной оценки вектора состояния:

$$X_{k+1|k+1} = X_{k+1|k} - C(X_{k+1|k})\tilde{x}_{k+1|k+1}$$

Формулы для $\tilde{x}_{k+1|k+1}$ будут приведены ниже. После коррекции значения вектора ошибок обнуляются: $\tilde{x}_{k+1|k+1} = 0$. Заметим, что часто для уточнения X , особенно при уточнении ориентации, используется нелинейная по x формула. Пример приведен ниже в (2.53).

Опишем процедуру получения оценки вектора ошибок $\tilde{x}_{k+1|k+1}$. Она также состоит из двух этапов – прогноза и коррекции.

1. Этап прогноза

$$\tilde{x}_{k+1|k} = F_{k+1,k}\tilde{x}_{k|k}, \quad P_{k+1|k} = F_{k+1,k}P_{k|k}F_{k+1,k}^T + G_kQG_k^T$$

Здесь $P = E[xx^T]$ с различными нижними индексами обозначает матрицу ковариаций вектора ошибок, $P_{k+1|k}$ обозначает априорную оценку ковариаций, а $P_{k+1|k+1}$ – апостериорную.

Заметим, что прогноз $\tilde{x}$ при расчетах не производится – после уточнения $X_{k|k}$ полагают $\tilde{x}_{k|k} = 0$.

2. Этап коррекции

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= P_{k+1|k}H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R)^{-1} \\ \tilde{x}_{k+1|k+1} &= \tilde{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(z_{k+1} - H_{k+1}\tilde{x}_{k+1|k}), \\ P_{k+1|k+1} &= (I - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1|k} \end{aligned}$$

Здесь I – единичная матрица подходящего размера.

Алгоритм инициализируется начальным значением матрицы ковариаций P_0 и начальными значениями вектора состояния X_0 . Также задаются интенсивности шумов измерений R и шумов динамики Q . Более подробно этап инициализации в задаче навигации пешехода, в частности, определение начальных параметров ориентации, будет описан в соответствующем разделе.

Введем понятие идеального ОФК или ИОФК.

Определение 2. *Идеальный ОФК (ИОФК) строит оценки ковариаций по тем же формулам, что и ОФК, но вместо расчетных значений $X'_k, F_{k+1,k}, G_k, H_k$ используются истинные значения $X_k, \bar{F}_{k+1,k}, \bar{G}_k, \bar{H}_k$. Ковариационные матрицы ИОФК обозначим $\bar{P}_k$.*

Естественно, ИОФК технически нереализуем. Он понадобится для теоретического исследования алгоритмов.

2.1.3 Реализация ОФК

Существуют несколько способов реализации алгоритма обобщенного фильтра Калмана. В работе применяется метод корня, идея которого заключается в прогнозе и коррекции матрицы S : $P = SS^T$, где P – матрица ковариаций, а S – «корень» из ковариационной матрицы [45].

Рассмотрим формулы прогноза:

$$P_{k+1|k} = F_{k+1,k}P_{k|k}F_{k+1,k}^T + G_kQG_k^T$$

Факторизуем правую часть:

$$P_{k+1|k} = \begin{bmatrix} F_{k+1,k}S_{k|k} & G_kQ^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1,k}S_{k|k} & G_kQ^{1/2} \end{bmatrix}^T$$

Приведем матрицу $A = \begin{bmatrix} F_{k+1,k}S_{k|k} & G_kQ^{1/2} \end{bmatrix}$ к нижнетреугольной форме с помощью ортогональной матрицы U :

$$AU = \begin{bmatrix} S_{k+1|k} & 0_{n \times m} \end{bmatrix}$$

Как говорилось выше, прогноза вектора ошибок x не происходит из-за того, что после обновления вектора состояния X вектор ошибок обнуляется.

Рассмотрим формулы коррекции:

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_k H_k) P_{k+1|k} = P_{k+1|k} - P_{k+1|k} H_k^T \underbrace{(H_k P_{k+1|k} H_k^T + R)^{-1}}_{R_e^{-1}} H_k P_{k+1|k}$$

Сформируем следующую матрицу:

$$B = \begin{bmatrix} R^{1/2} & H_k S_{k+1|k} \\ 0 & S_{k+1|k} \end{bmatrix}$$

Приведем матрицу B к нижнетреугольному виду с помощью ортогональной матрицы U :

$$\begin{bmatrix} R^{1/2} & H_k S_{k+1|k} \\ 0 & S_{k+1|k} \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} B_1 B_1^T &= R^{1/2} R^{1/2T} + H_k S_{k+1|k} S_{k+1|k}^T H_k^T = R + H_k P_{k+1|k} H_k^T = R_e \\ B_2 B_1^T &= S_{k+1|k} S_{k+1|k}^T H_k^T = P_{k+1|k} H_k^T \\ B_3 B_3^T &= S_{k+1|k} S_{k+1|k}^T - B_2 B_2^T = P_{k+1|k} - P_{k+1|k} H_k^T (B_1^{-1T} B_1^{-1}) H_k P_{k+1|k} = \\ &= P_{k+1|k} - P_{k+1|k} H_k^T R_e^{-1} H_k P_{k+1|k} = P_{k+1|k+1} \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{bmatrix} R^{1/2} & H_k S_{k+1|k} \\ 0 & S_{k+1|k} \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} R_e^{1/2} & 0 \\ P_{k+1|k} H_k^T R_e^{-1/2T} & S_{k+1|k+1} \end{bmatrix}$$

Вычисление вектора ошибок происходит так же, как в обыкновенном ОФК.

2.2 Некоторые условия состоятельности ОФК

В данном разделе, как и выше, рассматривается задача ОФК общего вида. В данной работе взято за основу определение из [10], согласно которому ОФК состоятелен, если его оценки несмещенные и вычисленные им ковариации ошибок оценок равны или близки к истинным значениям средних квадратов ошибок на траектории.

Очевидно, что состоятельность в указанном выше смысле в большинстве задач невозможно установить на реальных данных, для которых истинные значения ошибок недоступны. В задаче навигации пешехода одним из способов

установить истинную траекторию является применение систем видеоанализа (например, VICON), но оно затруднено на длинных траекториях. В [10] предлагается несколько неформальных критериев состоятельности.

1. Ошибки оценки должны иметь нулевое среднее и их величины должны соответствовать значениям матрицы ковариаций, вырабатываемой фильтром
2. Ошибки оценки измерений должны иметь нулевое среднее и их величины должны соответствовать значениям матрицы ковариаций, вырабатываемой фильтром
3. Ошибки оценки измерений должны быть белым шумом с дисперсией, соответствующей ковариациям ОФК.

Первый из них позволяет определить состоятельность фильтра лишь при помощи методов статистического моделирования Монте-Карло, в то время как второй и третий допускают проверку на реальных данных.

Критерии 2 и 3 основаны на осреднении по времени последовательности ошибок оценок измерений. Белошумность (критерий 3) проверяется сравнением специальной выборочной оценки автокорреляционной функции с нормальным распределением. Критерий 2 основан на сравнении распределения нормализованной осредненной по времени последовательности ошибок оценок измерений с распределением хи-квадрат.

Определение из [10] и все описанные выше критерии носят статистический характер. В данной работе делается попытка предложить теоретический критерий состоятельности. Определение Бар-Шалом не подходит для теоретической проверки состоятельности, кроме случаев линейных систем. В работе рассматривается ОФК. При работе с ОФК условия состоятельности Бар-Шалом никогда не выполнены. В частности, применение ОФК в нелинейной динамической системе почти всегда приводит к смещенности оценок ошибок.

Таким образом, описанное определение фактически неприменимо для анализа свойств ОФК. Тем не менее, теоретический анализ свойств состоятельности ОФК возможен, если использовать более слабое определение состоятельности.

Заметим, что в работах [12], [73], [76] используется понятие состоятельности, но оно там скорее означает устойчивость ОФК.

Конкретизировать определение состоятельности можно разными способами. Ниже будет рассмотрен один из них – он предполагает неполную наблюдаемость системы, что, однако, типично для задач автономной навигации, таких как задача навигации пешехода. Перед этим уточним применительно к рассматриваемой задаче использующиеся в дальнейшем понятия управляемости и наблюдаемости, играющие важную роль в теоретическом исследовании ОФК.

Рассмотрим фиксированную траекторию ОФК $X'_{0:k}$ и фиксированную траекторию ИОФК $X_{0:k}$. Следуя [45], введем определение оператора наблюдаемости и ненаблюдаемого подпространства в задаче оценивания вида (2.1). Пусть оператор наблюдаемости $\mathcal{O}_k$, действующий в касательном пространстве к многообразию M , ставит в соответствие вектору ошибок в момент времени t_k набор измерений в моменты времени от t_1 до t_k :

$$\mathcal{O}_k : x_k \rightarrow z_1, \dots, z_k$$

Подчеркнем, что операторы наблюдаемости и управляемости рассматриваются на конкретных траекториях ОФК и ИОФК. Оператор наблюдаемости, как оператор в конечномерных пространствах, можно задать матрицей наблюдаемости. Приведем выражения для матриц наблюдаемости для ОФК и ИОФК, которые будут использоваться в работе.

$$O_k = \begin{bmatrix} H_1 F_{2,1}^{-1} \cdots F_{k,k-1}^{-1} \\ \cdots \\ H_{k-1} F_{k,k-1}^{-1} \\ H_k \end{bmatrix}, \quad \bar{O}_k = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \bar{F}_{2,1}^{-1} \cdots \bar{F}_{k,k-1}^{-1} \\ \cdots \\ \bar{H}_{k-1} \bar{F}_{k,k-1}^{-1} \\ \bar{H}_k \end{bmatrix}$$

Определение 3. *Ненаблюдаемые подпространства ОФК и ИОФК – это ядра соответствующих операторов наблюдаемости.*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k &= \text{Ker } \mathcal{O}_k, & \bar{\mathcal{N}}_k &= \text{Ker } \bar{\mathcal{O}}_k, \\ v_k \in \mathcal{N}_k &\Leftrightarrow O_k v_k = 0 & \bar{v}_k \in \bar{\mathcal{N}}_k &\Leftrightarrow \bar{O}_k \bar{v}_k = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

В ненаблюдаемых подпространствах находятся векторы состояния систем (2.15), (2.16) которые не могут быть оценены по измерениям.

Аналогично оператору наблюдаемости введем оператор управляемости. Он ставит в соответствие набору возмущений $q_1, \dots, q_k$ и нулевому начальному значению вектора ошибок $x_0 = 0$ значение вектора ошибок x_k в момент t_k :

$$\mathcal{U}_k : q_1 \dots, q_k \rightarrow x_k$$

Оператор управляемости, как оператор в конечномерных пространствах, можно задать матрицей управляемости. Приведем выражения для матриц управляемости ОФК и ИОФК.

$$\begin{aligned} U_k &= \begin{bmatrix} G_k & F_{k,k-1}G_{k-1} & \cdots & F_{k,k-1}F_{k-1,k-2} \cdots F_{2,1}G_1 \end{bmatrix}, \\ \bar{U}_k &= \begin{bmatrix} \bar{G}_k & \bar{F}_{k,k-1}\bar{G}_{k-1} & \cdots & \bar{F}_{k,k-1}\bar{F}_{k-1,k-2} \cdots \bar{F}_{2,1}\bar{G}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Определение 4. *Грамммианы наблюдаемости ОФК и ИОФК определены формулами*

$$V_k = O_k^T \mathcal{R}^{-1} O_k, \quad \bar{V}_k = \bar{O}_k^T \mathcal{R}^{-1} \bar{O}_k, \quad \mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & & & \\ & R^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R^{-1} \end{bmatrix}$$

Грамммианы управляемости ОФК и ИОФК определены формулами

$$W_k = U_k \mathcal{Q} U_k^T, \quad \bar{W}_k = \bar{U}_k \mathcal{Q} \bar{U}_k^T, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & & & \\ & Q & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q \end{bmatrix}$$

Некоторые утверждения удобнее формулировать в терминах грамммиана наблюдаемости, поэтому будем использовать следующий хорошо известный факт.

Утверждение 1. *Ненаблюдаемые подпространства $\mathcal{N}_k, \bar{\mathcal{N}}_k$ совпадают с ядрами соответствующих грамммианов наблюдаемости $V_k, \bar{V}_k$.*

Доказательство. Пусть $v_k \in \text{Ker } V_k$. Тогда $V_k v_k = 0 \Leftrightarrow v_k^T V_k v_k = 0$. Рассмотрим выражение $v_k^T V_k v_k = 0$. Рассмотрим разложение матрицы $\mathcal{R}^{-1}$ в произведение симметричных матриц: $\mathcal{R}^{-1} = S^T S$. Тогда

$$0 = v_k^T V_k v_k = (v_k^T O_k^T S^T)(S O_k v_k) = \|S O_k v_k\|^2$$

Следовательно, $SO_k v_k = 0$. Матрица S невырождена, поэтому $O_k v_k = 0$.

Обратно, пусть $v_k \in \mathcal{N}_k \Leftrightarrow O_k v_k = 0$. Тогда верно $O_k^T \mathcal{R}^{-1} O_k v_k = V_k v_k = 0$. $\square$

2.2.1 Состоятельность и структурная состоятельность

Для дальнейшего изложения важны следующие свойства ненаблюдаемых подпространств, введенных в (2.17).

Очевидно, выполнено $F_{k+1,k}^{-1} \mathcal{N}_{k+1} \subset \mathcal{N}_k$. Поэтому размерность ненаблюдаемых подпространств может только уменьшаться со временем. Пусть начиная с некоторого шага k_0 размерности $\mathcal{N}_k, \bar{\mathcal{N}}_k$ не зависят от k и равны $l, \bar{l}$ соответственно. Тогда, очевидно, для таких k выполнено

$$F_{k+1,k} \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k+1}, \quad H_k \mathcal{N}_k = 0, \quad \bar{F}_{k+1,k} \bar{\mathcal{N}}_k = \bar{\mathcal{N}}_{k+1}, \quad \bar{H}_k \bar{\mathcal{N}}_k = 0$$

Теперь введем новое определение структурной несостоятельности.

Определение 5. *ОФК структурно несостоятелен на паре траекторий $X_{0:k}, X'_{0:k}$, если на них $\mathcal{N}_k \subset \bar{\mathcal{N}}_k$ при $k > k_0$, так что $l < \bar{l}$.*

Ниже для краткости и без существенного уменьшения общности считаем $\bar{l} - l = 1$. Пусть $\bar{\mathcal{N}}_k$ задается условием $\bar{S}_k x_k = 0$, где $\bar{S}_k$ — матрица размера $(n - \bar{l}) \times n$ и ранга $n - \bar{l}$. Введем координату $\xi_k = \bar{S}_k x_k \in \mathbb{R}^{n-\bar{l}}$, и дополним ее до базиса координатой $\eta_k = T_k x_k \in \mathbb{R}^{\bar{l}}$. Система уравнений в отклонениях примет декомпозированный вид

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \bar{F}_{k+1,k}^\xi \xi_k + \bar{G}_k^\xi q_k, \\ \eta_{k+1} &= \bar{F}_{k+1,k}^{\xi\eta} \xi_k + \bar{F}_{k+1,k}^\eta \eta_k + \bar{G}_k^\eta q_k, \\ z_k &= \bar{H}_k^\xi \xi_k + r_k \end{aligned} \tag{2.18}$$

Аналогичную процедуру проделаем и для ОФК. Пусть $\mathcal{N}_k$ задается условием $\bar{S}_k x_k = 0$, тем же как и для ИОФК, и дополнительным условием $s_k x_k = 0$, где s_k — некоторая вектор-строка. Введем координату

$$\xi_k = S_k x_k = \begin{bmatrix} \bar{S}_k \\ s_k \end{bmatrix} x_k \in \mathbb{R}^{n-l}$$

и дополним ее до базиса координатой $\eta_k \in \mathbb{R}^l$. Система уравнений в отклонениях примет декомпозированный вид

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= F_{k+1,k}^\xi \xi_k + G_k^\xi q_k, \\ \eta_{k+1} &= F_{k+1,k}^{\xi\eta} \xi_k + F_{k+1,k}^\eta \eta_k + G_k^\eta q_k, \\ z_k &= H_k^\xi \xi_k + r_k\end{aligned}\tag{2.19}$$

Выделим в декомпозированных системах наблюдаемые подсистемы.

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= \bar{F}_{k+1,k}^\xi \xi_k + \bar{G}_k^\xi q_k, \\ z_k &= \bar{H}_k^\xi \xi_k + r_k\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= F_{k+1,k}^\xi \xi_k + G_k^\xi q_k, \\ z_k &= H_k^\xi \xi_k + r_k\end{aligned}\tag{2.21}$$

Очевидно, граммианы наблюдаемости декомпозированных систем имеют вид

$$V_k = \begin{bmatrix} V_k^\xi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_k = \begin{bmatrix} \bar{V}_k^\xi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $V_k^\xi, \bar{V}_k^\xi$ — граммианы наблюдаемых подсистем.

Излагаемые ниже результаты представляют собой асимптотику при больших k . Переформулируем условия определения управляемости и наблюдаемости для этого случая.

Определение 6. Система уравнений в отклонениях равномерно управляема, если граммиан управляемости по крайней мере линейно растет со временем: $v_k^T W_k v_k \geq c_3 k \|v_k\|^2$, где $c_3 > 0$ — константа, а v_k — произвольный вектор. Система уравнений в отклонениях равномерно наблюдаема, если граммиан наблюдаемости по крайней мере линейно растет со временем: $v_k^T V_k v_k \geq c_4 k \|v_k\|^2$, где $c_4 > 0$ — константа.

Зафиксируем траекторию ИОФК $X_{0:k}$, и ее оценку — траекторию ОФК $X'_{0:k}$.

Утверждение 2. Пусть система уравнений в отклонениях ИОФК равномерно управляема на траектории $X_{0:k}$, а ОФК структурно несостоятелен на паре траекторий $X_{0:k}, X'_{0:k}$, причем наблюдаемая подсистема декомпозированных уравнений в отклонениях ОФК равномерно наблюдаема. Тогда неравенство $c_1 \bar{P}_k < P_k < c_2 \bar{P}_k$ для фиксированных $0 < c_1 < 1 < c_2$ нарушается при неограниченном росте k .

Доказательство. Для ИОФК $\bar{l}$ переменных $\bar{\eta}_k$ ненаблюдаемы, и в силу равномерной управляемости их дисперсия неограниченно растет со временем. Для ОФК $n - l$ переменных наблюдаемой подсистемы равномерно наблюдаемы, поэтому их дисперсия ограничена при росте k , так что только для $l = \bar{l} - 1$ переменных их дисперсия неограниченно растет со временем. Из разного числа неограниченно возрастающих дисперсий следует, что выполнение неравенства $c_1 \bar{P}_k < P_k < c_2 \bar{P}_k$ для всех k невозможно. $\square$

Здесь и далее матричные неравенства вида $A > B$ понимаются в смысле положительной определенности матрицы $A - B$.

Утверждение 3. *Теоретическая дисперсия ИОФК $\bar{P}_k$ совпадает с теоретической нижней границей дисперсии Крамера-Рао D_k .*

Доказательство. Нижняя граница дисперсии ошибки в общей задаче оценки параметра θ по измерениям y с известной плотностью вероятности $p(y|\theta)$ дается формулой Крамера-Рао

$$D_\theta = E[\Delta\theta\Delta\theta^T] \geq \left(E \left[\left(\frac{\partial \log p}{\partial \theta} \right)^T \frac{\partial \log p}{\partial \theta} \right] \right)^{-1}$$

В рассматриваемом случае $\theta = X_{0:k}$, $y = Z'_{0:k}$, а случайность задается набором $X'_0, q_{0:k}, r_{0:k}$, причем последние предполагаются независимыми нормально распределенными величинами с дисперсиями P_0, Q, R соответственно. В работе [77] показано (в другой терминологии), что для ИОФК $\bar{P}_k$ совпадает с соответствующим блоком матрицы $\bar{D}_\theta$. $\square$

Выше рассматривались фиксированные траектории ИОФК и ОФК. Теперь зафиксируем траекторию ИОФК $X_{0:k}$ и рассмотрим ансамбль траекторий ОФК $X'_{0:k}$, зависящих от реализаций шумов $q_{0:k}, r_{0:k}$. Поскольку траектория ОФК является случайным процессом, дисперсии P_k , вычисляемые ОФК меняются от реализации к реализации. Поэтому ниже дается определение состоятельности с некоторой вероятностью. Введенное выше понятие структурной несостоятельности также будет использоваться с некоторой вероятностью.

Определение 7. *ОФК состоятелен на траектории $X_{0:k}$ с вероятностью $\mathcal{P}$, если существуют такие $0 < c_1 < 1 < c_2$, что с этой вероятностью для всех*

реализаций ОФК и для всех $k > k_0$ выполнено $c_1 D_k < P_k < c_2 D_k$, где D_k – теоретически достижимая дисперсия ошибки оценки. ОФК не состоятелен на траектории $X_{0:k}$ с вероятностью $\mathcal{Q}$, если с этой вероятностью указанные условия не выполнены.

Теорема 1. Пусть система уравнений в отклонениях ИОФК равномерно управляема на траектории $X_{0:k}$, а ОФК структурно несостоятелен, причем наблюдаемая подсистема декомпозированных уравнений в отклонениях ОФК равномерно наблюдаема с вероятностью $\mathcal{Q}$. Тогда ОФК не состоятелен с вероятностью $\mathcal{Q}$.

Доказательство. Из утверждения 3 следует $\bar{P}_k = D_k$. Тогда условия утверждения 2 выполнены с вероятностью $\mathcal{Q}$, так что ОФК несостоятелен с вероятностью $\mathcal{Q}$. □

Заметим, что как состоятельный, так и несостоятельный варианты ОФК реализуются в задаче навигации пешехода в зависимости от способа введения уравнений в отклонениях.

2.2.2 Условия несостоятельности при наличии группы симметрий

В предыдущем разделе было введено понятие структурной несостоятельности, которое сформулировано в терминах размерностей ненаблюдаемых подпространств ОФК и ИОФК. В данном разделе приведен пример класса систем, для которых сформулированные условия на размерности легко проверяются.

Рассмотрим способ определения размерности ненаблюдаемого подпространства ИОФК в частном случае – в случае наличия однопараметрических групп симметрий, относительно которых уравнения задачи оценивания (2.1) инвариантны.

Наличие группы симметрий позволяет не только определить размерность ненаблюдаемого подпространства ИОФК, но и доказать несостоятельность ОФК в смысле Бар-Шаломы для случая конечного времени.

Рассмотрим однопараметрическую группу [97] преобразований $\Omega \cong \mathbb{R}$ пространства состояний M . Ее действие определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega : X &\rightarrow s \circ X, \\ (\tau + s) \circ X &= \tau \circ (s \circ X), \end{aligned} \quad s, \tau \in \Omega$$

здесь $\circ$ обозначает действие группы, а s, τ — параметры группы.

Определение 8. *Задача оценивания (2.1) инвариантна относительно Ω для всех k , если*

$$\begin{aligned} f_k(s \circ X, q) &= s \circ f_k(X, q), \\ h_k(s \circ X) &= h_k(X). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для доказательства некоторых утверждений, касающихся систем вида (2.1) со свойством (2.22), будет удобно использовать специальную систему координат на X .

Для введения этой системы рассмотрим подмногообразие $L^{n-1} \subset M$, трансверсально пересекающее орбиты группы Ω , и координаты $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$ на нем. Орбитой γ называется множество точек $\{s \circ X, s \in \mathbb{R}\}$ при фиксированном X . Если точка X лежит на какой-то орбите γ , то пусть $\zeta(X)$ — координата точки X_0 пересечения орбиты с L^{n-1} , а $s(X)$ — значение s такое, что $s(X) \circ X_0 = X$.

Замена координат $X \rightarrow (s, \zeta)$ удовлетворяет условию — под действием группы изменяется только координата s :

$$\tau \circ X = \begin{bmatrix} \tau + s \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

В новых координатах запишем уравнения (2.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= f_k^s(s_k, \zeta_k, q_k), \\ \zeta_{k+1} &= f_k^\zeta(s_k, \zeta_k, q_k), \\ Z_k &= h_k(s_k, \zeta_k) + r_k. \end{aligned} \quad (2.24)$$

С учетом (2.24) и (2.23) условия (2.22) примут вид:

$$\begin{aligned} f_k^s(\tau + s, \zeta, q) &= \tau + f_k^s(s, \zeta, q), \\ f_k^\zeta(\tau + s, \zeta, q) &= f_k^\zeta(s, \zeta, q), \\ h_k(\tau + s, \zeta) &= h_k(s, \zeta). \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует утверждение:

Утверждение 4. *Если система вида (2.1) инвариантна относительно Ω , то существует система координат (s, ζ) на многообразии M такая, что уравнения (2.1) в ней примут вид*

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + f_k^s(\zeta_k, q_k), \\ \zeta_{k+1} &= f_k^\zeta(\zeta_k, q_k), \\ Z_k &= h_k(\zeta_k) + r_k. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Введем также неформальное понятие ненаблюдаемой переменной как переменной, от которой измерение не зависит.

Утверждение 5. *В задаче оценивания вида (2.25) переменная s ненаблюдаема.*

Следующее утверждение связывает размерность ненаблюдаемого подпространства в задаче оценивания (2.15) и структурные свойства задачи (2.1), а именно – количество групп симметрий, относительно которых задача оценивания инвариантна.

Утверждение 6. *Если в задаче оценивания (2.1) есть J однопараметрических групп симметрий, таких, что касательные векторы к их орбитам линейно независимы, то размерность ненаблюдаемого подпространства ИОФК не меньше J .*

Доказательство. Рассмотрим одну из однопараметрических групп Ω . В соответствии с утверждением 4 уравнения системы имеют вид:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + f_k^s(\zeta_k, q_k) = F_k^s(s_k, \zeta_k, q_k), \\ \zeta_{k+1} &= f_k^\zeta(\zeta_k, q_k), \\ Z_k &= h_k(\zeta_k) + r_k, \end{aligned}$$

Необходимо выяснить свойства наблюдаемости данной системы. Для этого вычислим матрицы $F_{k+1,k}$, H_k и выясним структуру O_k . Имеем

$$F_{k+1,k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_k^s}{\partial s} & \frac{\partial F_k^s}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_k^\zeta}{\partial s} & \frac{\partial f_k^\zeta}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial f_k^s}{\partial \zeta} \\ 0 & \frac{\partial f_k^\zeta}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad H_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial s} & \frac{\partial h_k}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h_k}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Здесь и далее 0 обозначают блоки из нулей необходимого размера.

Поэтому:

$$O_k = \begin{bmatrix} \dots \\ H_{k-1} F_{k,k-1}^{-1} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ 0 \quad \frac{\partial h_{k-1}}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial f_k^\zeta}{\partial \zeta} \right)^{-1} \\ 0 \quad \frac{\partial h_k}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Видно, что в матрице наблюдаемости ровно один нулевой столбец, соответствующий касательной к орбите γ . Это и означает, что размерность ненаблюдаемого подпространства равна по крайней мере 1.

Повторяя это рассуждение для других групп симметрий, и учитывая, что касательные векторы, соответствующие их орбитам, линейно независимы, получим, что количество нулевых столбцов матрицы наблюдаемости окажется равным по крайней мере J . $\square$

Дальше для простоты рассмотрим случай, когда группа симметрий одна.

Пусть $\bar{\sigma}_k$ – СКО ошибки оценки переменной s в момент t_k , и пусть σ_k – дисперсия s_k , вычисленная ОФК (вычисленная по ковариационной матрице P_k). Как и в предыдущем разделе, предполагается, что начальная ковариация P_0 известна точно, так что в начальный момент $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0$. Предположим, что начальная оценка s_0 имеет низкую точность, то есть $\sigma_0 \rightarrow \infty$. Типичный пример – начальный угол курса.

Определение 9. *ОФК не состоятелен по переменной s в момент времени t_k , если $\sigma_k/\bar{\sigma}_k \rightarrow 0$ при $\sigma_0 \rightarrow \infty$.*

Следующее утверждение говорит о том, что в случае наличия группы симметрий средний квадрат ошибки оценки ненаблюдаемой переменной ОФК растет.

Утверждение 7. *Рассмотрим задачу оценивания вида (2.25). Пусть*

- s_0, ζ_0 – независимые случайные величины
- q_k, r_k – независимые случайные величины не зависящие от s_0, ζ_0 .

Тогда дисперсия оценки $\bar{\sigma}_k^2$ переменной s_k будет больше σ_0 вне зависимости от алгоритма оценивания.

Доказательство. В силу структуры системы (2.25) можем записать:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_0 + f_0^s(\zeta_0, q_0) + f_1^s(\zeta_1, q_1) + \dots + f_k^s(\zeta_k, q_k), \\ \zeta_{k+1} &= f_k^\zeta(f_{k-1}^\zeta(\dots(f_0^\zeta(\zeta_0, q_0), \dots), q_{k-1}), q_k), \\ Z_k &= h_k(\zeta_k) + r_k = h_k(F_{k-1}^\zeta(\zeta_0, q_0, q_1, \dots, q_{k-1})) + r_k. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Преобразовывая выражения выше, получим:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_0 + F_k^s(\zeta_0, q_0, q_1, \dots, q_k), \\ \zeta_{k+1} &= F_k^\zeta(\zeta_0, q_0, q_1, \dots, q_k), \\ Z_k &= H_k(\zeta_0, q_0, q_1, \dots, q_{k-1}) + r_k. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Заметим, что s_0 не зависит от $Z_1, \dots, Z_k$, поскольку не зависит от $\zeta_0, q_i, r_i, \forall i$. Следовательно, оптимальная в смысле минимума дисперсии оценка имеет вид:

$$\tilde{s}_{k+1} = E[s_{k+1}|Z_1, \dots, Z_{k+1}] = E[s_0|Z_1, \dots, Z_{k+1}] + E[F_k^s|Z_1, \dots, Z_{k+1}] = E[s_0] + \tilde{F}_k^s$$

Здесь $\tilde{F}_k^s$ – оценка F_k^s , оптимальная в смысле минимума дисперсии.

Введем ошибки оценки $\Delta s_{k+1} = \tilde{s}_{k+1} - s_{k+1}$, $\Delta s_0 = E[s_0] - s_0$, $\Delta F_k^s = \tilde{F}_k^s - F_k^s$. Слагаемые s_0 и F_k^s являются независимыми случайными величинами, поэтому:

$$E[\Delta s_{k+1}^2] = E[\Delta s_0^2] + E[\Delta F_k^{s2}] \geq E[\Delta s_0^2]$$

Отсюда следует, что дисперсия ошибки ненаблюдаемой переменной будет увеличиваться независимо от алгоритма оценивания. $\square$

Следствие 1. Пусть дисперсия σ_k^2 , вычисленная ОФК ограничена при неограниченном росте дисперсии σ_0 . Тогда ОФК несостоятелен по переменной s в момент времени t_k .

Условия, при которых дисперсия ОФК ограничена, обсуждались в предыдущем разделе – ОФК должен быть равномерно наблюдаемым по переменной s_k .

2.3 Параметры ориентации и преобразования систем координат

Существуют разные способы задания ориентации одной системы координат относительно другой: матрицы направляющих косинусов, кватернионы, векторы

конечных поворотов, углы Эйлера, углы Крылова и т.п. В тексте работы будут использоваться матрицы направляющих косинусов, поскольку так, по мнению автора, формулы более наглядны. Далее матрицы направляющих косинусов будут называться «матрицы ориентации». При этом в алгоритмах и программах, с помощью которых проводились расчеты в диссертации, используются кватернионы.

2.3.1 Матрицы ориентации

Будем обозначать матрицу ориентации, описывающую переход от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к $Oy_1y_2y_3$, через C_{yx} . Индексы указывают от какой системы координат к какой происходит переход. Для преобразования векторов это означает следующее. Пусть a – вектор в трехмерном пространстве. Тогда верно:

$$a_y = C_{yx}a_x \quad (2.28)$$

Здесь a_y – координаты вектора a в системе координат Oy , a_x – координаты вектора a в системе координат Ox .

Матрица C_{yx} – ортогональная матрица, то есть:

$$C_{yx}^T = C_{yx}^{-1} \quad (2.29)$$

Мы также будем пользоваться следующим свойством матрицы ориентации:

$$C_{yx}^T = C_{xy}$$

которое следует из (2.28) и (2.29).

Обозначение перехода между системами координат, задаваемого матрицей ориентации, используемое в диаграммах, будет иметь вид:

$$Ox \xrightarrow{C_{yx}} Oy$$

Пусть $\hat{v}$ обозначает кососимметрическую матрицу, построенную по вектору $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T$ следующим образом:

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

В введенных обозначениях векторное произведение можно записать в виде:

$$a \times b = \hat{b}a$$

Любое вращение в трехмерном пространстве можно задать как комбинацию трех поворотов относительно трех ортогональных осей. Будем обозначать такие повороты следующим образом:

$$Ox \xrightarrow[i]{\delta} Oy$$

Здесь показан поворот на угол δ вокруг i -ой оси системы координат Ox . Поворот происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора e_i , задающего i -ую ось системы Ox .

Ниже показана цепочка поворотов, задающих переход от с.к. Ox к с.к. Oy :

$$Ox \xrightarrow[1]{\beta_1} Ox' \xrightarrow[2]{\beta_2} Ox'' \xrightarrow[3]{\beta_3} Oy \quad (2.30)$$

Здесь $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – компоненты вектора β .

Каждому вращению из (2.30) соответствует матрица поворота:

$$C_{x'x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & \sin \beta_1 \\ 0 & -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{bmatrix}, \quad C_{x''x'} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix},$$

$$C_{yx''} = \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & 0 \\ -\sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица перехода от Ox к Oy имеет вид: $C_{yx} = C_{yx''}C_{x''x'}C_{x'x}$. Умножение матриц некоммутативно, то есть, например, $C_{yx''}C_{x''x'} \neq C_{x''x'}C_{yx''}$. Однако в случае малости поворотов, то есть выполнения следующего условия:

$$\cos \beta_1 \approx \cos \beta_2 \approx \cos \beta_3 \approx 1, \quad \sin \beta_1 \approx \beta_1, \sin \beta_2 \approx \beta_2, \sin \beta_3 \approx \beta_3, \quad (2.31)$$

вид матрицы C_{yx} перестает зависеть от порядка перемножения матриц и принимает следующий вид:

$$C_{yx} = I_3 + \hat{\beta}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вектор β будем называть вектором малого поворота. Он будет использоваться для описания «близких» в смысле (2.31) систем координат. Обозначение перехода между системами координат, задаваемого вектором малого поворота, используемое в диаграммах, будет иметь вид:

$$Ox \xrightarrow{\beta} Oy$$

2.3.2 Системы координат

Пусть точка M обозначает приведенную чувствительную масса акселерометров, точка O – геометрический центр Земли, а точка O' – фиксированная точка на поверхности Земли. Для определенности будем считать, что O' – стартовая точка траектории пешехода. Будет использовать следующее сокращение: вместо «система координат» будем писать с.к.

$O\xi_1\xi_2\xi_3$ – инерциальная с.к. Задана в инерциальном пространстве, в котором справедливы законы Ньютона. Ось $O\xi_3$ направлена по оси вращения Земли, плоскость $O\xi_1\xi_2$ совпадает с плоскостью Земного экватора, ось $O\xi_1$ и $O\xi_2$ направлены на «неподвижные звезды».

$O\eta_1\eta_2\eta_3$ – гринвичская с.к. Жестко связана с Землей. Ось $O\eta_3$ направлена по оси вращения Земли, плоскость $O\eta_1\eta_2$ совпадает с плоскостью Земного экватора, плоскость $O\eta_1\eta_3$ совпадает с плоскостью гринвичского (нулевого) меридиана.

$MN_1N_2N_3$ – географическая с. к. Ось MN_1 направлена на восток, ось MN_2 – на север, ось MN_3 – параллельно вектору силы тяжести.

$O'n_1n_2n_3$ – навигационная с. к. Жестко связана с Землей. Ось $O'n_3$ направлена вверх, оси $O'n_1$ и $O'n_2$ лежат в плоскости горизонта, ортогональны друг другу и их ориентация зависит от задачи.

$Ms_1s_2s_3$ – приборная с.к. Ее оси связаны с чувствительными осями инерциального блока. Ориентация приборной с.к. относительно навигационной задается матрицей C_{ns} .

$M's'_1s'_2s'_3$ – модельная (расчетная) с.к. Эта система координат – представление об ориентации приборной с.к., используемое в вычислителе. Ориентация модельной с.к. относительно навигационной задается матрицей C'_{ns} . Ориентация модельной с.к. относительно приборной задается вектором малого поворота

β_s .

$Op_1p_2p_3$ – виртуальная с.к. (или так называемая виртуальная гиروطформа [105]). Задается преобразованием приборной с.к. с помощью матрицы C'_{ns} .

Связь введенных систем координат удобно представлять на диаграммах. Нам важна взаимная ориентация систем координат, поэтому на диаграмме изобразим с.к., приведенные к точке O .

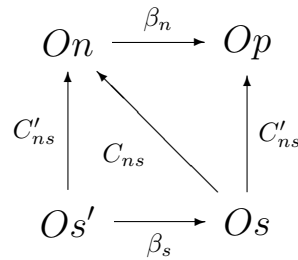
$$O\xi \xrightarrow{C_{\eta\xi}} O\eta \xrightarrow{C_{N\eta}} O_N \xrightarrow{C_{nN}} On$$

Здесь

$$C_{\eta\xi} = \begin{bmatrix} \cos ut & \sin ut & 0 \\ -\sin ut & \cos ut & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{N\eta} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda \sin \varphi & -\sin \lambda \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \lambda \cos \varphi & \sin \lambda \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix},$$

$$C_{nN} = \begin{bmatrix} \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

λ, φ – географические координаты, u – модуль угловой скорости вращения Земли, t – время. Угол χ определяет поворот навигационной с.к. относительно географической вокруг вертикальной оси. Смысл его введения будет ясен из дальнейшего изложения.



Для дальнейшего изложения также необходимо ввести понятие углов курса, крена и тангажа. Они описывают ориентацию приборной с.к. относительно географической с.к.:

- Угол курса ψ – угол между осью MN_2 (направлением на север) и проекцией продольной оси приборной с.к. Ms_2 на плоскость горизонта MN_1N_2 , отсчитываемый по часовой стрелке от оси MN_2 (если смотреть с конца направляющего вектора, задающего вертикальную ось MN_3).

- Угол тангажа ϑ – угол между продольной осью приборной с.к. Ms_2 и плоскостью горизонта MN_1N_2 .
- Угол крена γ – угол поворота плоскости Ms_1s_3 вокруг продольной оси Ms_2 .

2.4 Система навигации пешехода с одним инерциальным блоком

Рассмотрим систему инерциальной навигации пешехода с одним инерциальным блоком. Вектор состояния системы X имеет следующий вид:

$$X = \begin{bmatrix} p_n \\ v_n \\ C_{ns} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} p'_n \\ v'_n \\ C'_{ns} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Здесь p_n – вектор координат ИИБ в навигационной с.к., v_n – вектор скоростей ИИБ в навигационной с.к., C_{ns} – матрица перехода от приборной с.к. к навигационной. Многоточием обозначены дополнительные параметры, которые могут быть включены в вектор состояния, например, смещения нулевых сигналов датчиков.

Штрихами обозначены модельные значения переменных. Эти значения – результат работы навигационного алгоритма. Матрица ориентации C'_{ns} соответствует переходу от модельной с.к. к навигационной.

Отличия модельных переменных от идеальных описываются вектором ошибок x

$$x = \begin{bmatrix} \Delta p_n \\ \Delta v_n \\ \beta_n \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \Delta p_n &= p'_n - p_n \\ \Delta v_n &= v'_n - v_n \\ C_{ns}C'_{sn} &= \exp(\hat{\beta}_n) \end{aligned} \quad \exp(\hat{\beta}_n) = I + \frac{\sin \|\beta_n\|}{\|\beta_n\|} \hat{\beta}_n + \frac{1 - \cos \|\beta_n\|}{\|\beta_n\|^2} \hat{\beta}_n^2$$

Здесь Δp_n – ошибка определения координат в навигационной с.к., Δv_n – ошибка определения скоростей в навигационной с.к., β_n – вектор малого поворота в навигационной с.к., описывающий ошибку ориентации. Многоточием

обозначены ошибки дополнительных параметров, включенных в вектор состояния.

2.4.1 Уравнения движения

Уравнения движения – это уравнения Ньютона, описывающие движение приведенной чувствительной массы акселерометров, и уравнения Пуассона, описывающие угловые движения корпуса ИИБ. В навигации пешехода используются разные подходы к записи уравнений движения, поэтому опишем возможные варианты и идеи, стоящие за ними.

Уравнения Ньютона справедливы в инерциальной системе координат и имеют в ней вид:

$$\begin{aligned}\dot{p}_\xi &= v_\xi \\ \dot{v}_\xi &= C_{s\xi}^T f_s + g_\xi^0\end{aligned}\tag{2.32}$$

Здесь p_ξ, v_ξ – координаты и скорости точки M в инерциальной системе координат, f_s – сила, действующая на приведенную чувствительную массу акселерометра со стороны корпуса прибора, а g_ξ^0 – сила тяготения, действующая на приведенную чувствительную массу акселерометра, $C_{s\xi}$ – матрица перехода от инерциальной с.к. к приборной.

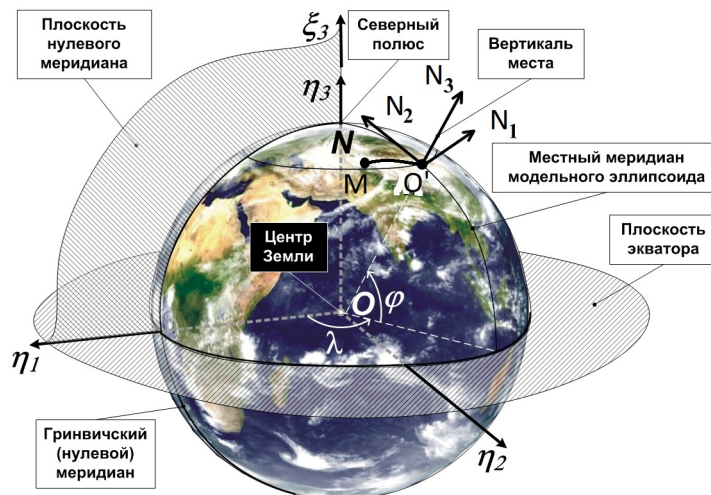


Рис. 2.1: Схематичное изображение систем координат

Уравнение Пуассона описывает изменение ориентации приборной системы координат относительно навигационной. В случае, если навигационной с.к. яв-

ляется инерциальная, уравнение имеет следующий вид:

$$\dot{C}_{s\xi} = \hat{\omega}_s C_{s\xi} \quad (2.33)$$

Здесь ω_s – абсолютная угловая скорость приборной с.к. относительно инерциальной, записанная в осях приборной.

В околосредней навигации обычно используют географическую систему координат MN в качестве навигационной, однако в работе будет использоваться навигационная с.к. с центром в стартовой точке пешехода O' (см. рис.2.1). Для удобства сравнения уравнений приведем уравнения движения в ней. Воспользуемся следующими соображениями:

- Система координат $O'N$ неподвижна относительно Земли
- Оси с.к. $O'N$ ориентированы по сторонам света (аналогично географической с.к.)

Первое соображение говорит о том, что уравнения в с.к. $O'N$ по структуре повторяют уравнения в гринвичской с.к., а второе о том, что для перехода от гринвичской к $O'N$ достаточно сделать поворот на матрицу перехода от гринвичской к географической:

$$l_N = C_{N\eta} l_\eta, \quad C_{N\eta} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda^0 & \cos \lambda^0 & 0 \\ -\cos \lambda^0 \sin \varphi^0 & -\sin \lambda^0 \sin \varphi^0 & \cos \varphi^0 \\ \cos \lambda^0 \cos \varphi^0 & \sin \lambda^0 \cos \varphi^0 & \sin \varphi^0 \end{bmatrix}$$

здесь φ^0, λ^0 – географические координаты точки O' ,

С учетом этих замечаний уравнения движения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_N &= V_N \\ \dot{V}_N &= 2\hat{u}_N V_N + C_{Ns} f_s + g_N \end{aligned} \quad (2.34)$$

Здесь V_N – скорость точки M относительно с.к. $O'N$, u_N – угловая скорость вращения Земли, g_N – сила тяжести в точке M . Выражения для угловой скорости Земли и силы тяжести следующие:

$$u_N = \begin{bmatrix} 0 \\ u \cos \varphi^0 \\ u \sin \varphi^0 \end{bmatrix}, \quad g_N = g_N^0 - \hat{u}_N^2 p_N$$

здесь $u = 7.2921157 \cdot 10^{-5}$ радиан в секунду – модуль угловой скорости вращения Земли, g_N^0 – сила тяготения в с.к. $O'N$, $\hat{u}_N^2 p_N$ – центробежное ускорение, возникающее вследствие вращения Земли.

Уравнение Пуассона мы запишем в виде двух уравнений, описывающих угловое движение приборной с.к. относительно инерциальной (матрица $C_{s\xi}$), и навигационной с.к. относительно инерциальной (матрица $C_{N\xi}$):

$$\dot{C}_{N\xi} = \hat{u}_N C_{N\xi} \quad (2.35)$$

$$\dot{C}_{s\xi} = \hat{\omega}_s C_{s\xi} \quad (2.36)$$

Матрица ориентации приборной с.к. относительно навигационной будет иметь вид:

$$C_{Ns} = C_{N\xi} C_{s\xi}^T$$

Уравнения движения можно упростить. Можно пренебречь угловой скоростью вращения Земли (исключить из (2.34) член $2\hat{u}_N V_N$ и исключить уравнение Пуассона (2.35), описывающее вращение навигационной с.к. относительно инерциальной) и зависимостью силы тяжести от координат (считать g_N в (2.34) константой). В этом случае уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_n &= v_n \\ \dot{v}_n &= C_{sn}^T f_s + g_n \\ \dot{C}_{sn} &= \hat{\omega}_s C_{sn} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Будем называть уравнения (2.37) упрощенными уравнениями движения или уравнениями, соответствующими модели плоской невращающейся Земли. Все результаты данной диссертации получены для упрощенных уравнений движения (2.37). В задаче навигации пешехода применение упрощенных уравнений в диссертационной работе вызвано двумя обстоятельствами.

Первое. В задаче навигации пешехода при наличии коррекции по нулевой скорости результаты применения алгоритма оценивания, использующего точные уравнения, мало отличаются от результатов применения такого же алгоритма оценивания, использующего упрощенные уравнения.

В таблице 2.1 приведены отличия результатов обработки реальных данных двумя способами: с использованием точных и упрощенных уравнений движения. Каждая строчка соответствует группе экспериментов. Все эксперименты

объединены одной особенностью – траектории пешеходов замкнутые. Ошибка навигации ϵ в этом случае вычисляется как отличие оценок координат в конечной точке $p(t_k)$ от координат в начальной точке $p(t_n)$ (по условиям проведения эксперимента эти точки совпадают):

$$\epsilon = \|p(t_k) - p(t_n)\|$$

В первой группе содержалось 4 эксперимента длительностью 400-600 секунд, пройденное расстояние равнялось 450 метрам. Во второй группе было 9 экспериментов длительностью 600-800 секунд, пройденное расстояние равнялось 1100 метрам. В таблице для каждой группы экспериментов указано среднее отличие ошибки навигации $\Delta\epsilon$ в процентах. Вычислялось оно следующим образом:

$$\Delta\epsilon = \left\langle \frac{\epsilon_T - \epsilon_Y}{\epsilon_Y} \cdot 100 \right\rangle$$

Здесь ϵ_T обозначает ошибку навигации при использовании точных уравнений движения, ϵ_Y обозначает ошибку навигации при использовании упрощенных уравнений движения, $\langle . \rangle$ обозначает осреднение по всем экспериментам. Видно, что отличия ошибок навигации не превышают 2%.

Эксперимент	Длительность [с] (расстояние [м])	$\Delta\epsilon$ [%]
1 группа	400–500 (450 м)	0.35
2 группа	600-800 (1050 м)	1.25

Таблица 2.1: Среднее отличие ошибок навигации для точных и упрощенных уравнений движения.

Второе. Использование модели плоской невращающейся Земли существенно для теоретического анализа. Так, например, для точных уравнений, в отличие от упрощенных, угол курса при остановках наблюдаем. Но оцениваемость угла курса слабая и для грубых МЭМС датчиков его наблюдаемость фактически не проявляется.

2.4.2 Модели показаний инерциальных датчиков

В правых частях истинных уравнений инерциальной навигации содержатся истинные значения удельной силы f_s и угловой скорости ω_s . В вычислителе (в мо-

дельных уравнениях) используются измерения акселерометров f'_s и гироскопов ω'_s . Измерения отличаются от истинных значений на погрешности измерений $\Delta f_s, \nu_s$:

$$\begin{aligned} f'_s &= f_s + \Delta f_s, \\ \omega'_s &= \omega_s - \nu_s, \end{aligned}$$

Знак минус перед ν_s – традиция навигационной школы Н.А. Парусникова, к которой принадлежит автор, связанная с тем, что первоначально все инерциальные навигационные системы были платформенными и истинная угловая скорость платформы равнялась сумме измеренной угловой скорости и гироскопического дрейфа ($\omega_s = \omega'_s + \nu_s$).

Существуют различные модели погрешностей инерциальных датчиков. Приведем стандартную модель, применяемую в высокоточной навигации [105]:

$$\begin{aligned} \Delta f_s &= \Gamma f_s + \Delta^0 f_s + \Delta^w f_s + \Delta^s f_s, \\ \nu_s &= \Theta \omega_s + \nu_s^0 + \nu_s^w + \nu_s^s \end{aligned} \tag{2.38}$$

Здесь

- Γ – матрица масштабных коэффициентов (Γ_{ii}) и перекосов осей чувствительности ($\Gamma_{ij}, i \neq j$) акселерометров.
- $\Delta^0 f_s$ – постоянное смещение нулевого сигнала акселерометров
- $\Delta^w f_s$ – случайное блуждание смещения нулевого сигнала акселерометра
- $\Delta^s f_s$ – шумовая составляющая сигнала акселерометров
- Θ – матрица масштабных коэффициентов (Θ_{ii}) и перекосов осей чувствительности ($\Theta_{ij}, i \neq j$) гироскопов.
- ν_s^0 – постоянное смещение нулевого сигнала гироскопов или постоянный дрейф
- ν_s^w – случайное блуждание угловой скорости или случайный дрейф
- ν_s^s – шумовая составляющая сигнала гироскопов

В некоторых работах по навигации пешехода применяются упрощенные модели погрешностей, включающих в себя только постоянные смещения и шумовые составляющие [79]:

$$\begin{aligned}\Delta f_s &= \Delta^0 f_s + \Delta^s f_s, \\ \nu_s &= \nu_s^0 + \nu_s^s\end{aligned}\tag{2.39}$$

Среди специалистов по навигации пешехода нет единого мнения о том, какие типы погрешностей целесообразно включать в модели погрешностей. В [79] замечено, что из 186 проанализированных работ по навигации пешехода в 119 постоянные смещения входили в модель показаний датчиков и оценивались в процессе навигации, а в 60 учитывались лишь шумовые составляющие:

$$\begin{aligned}\Delta f_s &= \Delta^s f_s, \\ \nu_s &= \nu_s^s\end{aligned}\tag{2.40}$$

Сами авторы на серии простых экспериментов показали, что учет постоянных смещений позволяет уменьшить ошибку навигации лишь в случае использования датчиков, обладающих высокой частотой съема (больше 250 Гц). Примечательно, что в некоторых экспериментах, описанных в [79], добавление в модель погрешностей постоянных смещений (даже с частотой съема инерциальных датчиков на частоте 2 кГц) все равно не позволило превзойти по точности алгоритм, в котором постоянные смещения не учитывались.

В [59] подчеркивается, что в навигации пешехода учет погрешностей датчиков может не улучшать точность навигации. Авторы [59] приходили к выводу, что ZUPТ-коррекция не вполне позволяет оценить погрешности датчиков.

2.4.3 Модельные уравнения и уравнения ошибок

Модельные уравнения, которые решаются в вычислителе, повторяют (2.37), но содержат в правых частях показания датчиков:

$$\begin{aligned}\dot{p}'_n &= v'_n \\ \dot{v}'_n &= C'_{sn}{}^T f'_s + g_n \\ \dot{C}'_{sn} &= \hat{\omega}'_s C'_{sn}\end{aligned}\tag{2.41}$$

Отметим, что далее

$$X = \begin{bmatrix} p_n \\ v_n \\ C_{sn} \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} p'_n \\ v'_n \\ C'_{sn} \end{bmatrix}$$

Уравнения ошибок описывают отличия модельного вектора состояния X' , получаемого навигационным алгоритмом, от истинного X . Совокупность значений вектора состояния $X(t), t_0 < t < t_K$ за время навигации будем называть траекторией, несмотря на то, что в X кроме координат входят и скорости, и параметры ориентации, и, возможно, инструментальные погрешности инерциальных блоков. В навигации обычно рассматривают линейные уравнения ошибок, то есть линеаризацию уравнений движения в окрестности какой-либо траектории. На практике реализуем вариант линеаризации в окрестности модельной траектории $X'(t)$. Линеаризацию в окрестности истинной траектории $X(t)$ мы в дальнейшем будем рассматривать лишь при теоретическом анализе.

Уравнения ошибок в переменных $\Delta p_n, \Delta v_n, \beta_n$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{p}_n &= \Delta v_n \\ \Delta \dot{v}_n &= -\hat{f}'_n \beta_n + \Delta f_n \\ \dot{\beta}_n &= \nu_n \end{aligned} \tag{2.42}$$

Идеальные уравнения ошибок имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{p}_n &= \Delta v_n \\ \Delta \dot{v}_n &= -\hat{f}_n \beta_n + \Delta f_n \\ \dot{\beta}_n &= \nu_n \end{aligned} \tag{2.43}$$

Здесь $\Delta f_n = C_{sn} \Delta f_s$ – погрешности акселерометров в навигационной с.к., $\nu_n = C_{sn} \nu_s$ – погрешности ДУС в навигационной с.к.

Следуя [103],[105], будем называть ошибки координат Δp_n «полными» ошибками координат и ошибки скоростей Δv_n – «полными» ошибками скоростей. Уравнения ошибок (2.43), (2.42) будем называть уравнениями ошибок в форме FF . Здесь F (Full) означает полные ошибки. Первая буква отвечает за ошибки координат, вторая – за ошибки скоростей.

Такие названия вводятся для удобства, поскольку ниже будут представлены еще две формы уравнений ошибок.

В неопубликованном отчете 1419 НИИ Механики МГУ от 1972 года было предложено преобразование переменных в уравнениях ошибок, которое позволяло:

- Исключить показания акселерометров из правых частей (2.43),
- Разделить ошибки, вызванные погрешностями в моделировании уравнений Ньютона и погрешностями в моделировании уравнений Пуассона

Новые переменные назывались динамическими ошибками координат δp и динамическими ошибками скоростей δv и определялись следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta p_n &= \Delta p_n - \hat{\beta}_n p_n \\ \delta v_n &= \Delta v_n - \hat{\beta}_n v_n\end{aligned}$$

Для введения динамических ошибок использовалась система координат Mr – виртуальная гиropлатформа (вывод формул для ошибок координат и ошибок скоростей одинаков):

$$\Delta p_n = p'_n - p_n = \underbrace{p'_n - p_p}_{\delta p_n} + p_p - p_n = \delta p_n + (I + \hat{\beta}_n)p_n - p_n = \delta p_n + \hat{\beta}_n p_n$$

Переходя в (2.43) к переменным $x = (\Delta p_n, \delta v_n, \beta_n)$ или $x = (\delta p_n, \delta v_n, \beta_n)$ получаем, соответственно, форму FD или форму DD уравнений ошибок. Здесь D (Dynamic) означает динамические ошибки. Приведем для наглядности все три формы, а также соответствующие им три типа векторов ошибок:

$$FF : \begin{cases} \Delta \dot{p}_n = \Delta v_n, \\ \Delta \dot{v}_n = -\hat{f}'_n \beta_n + \Delta f_n, \\ \dot{\beta}_n = \nu_n. \end{cases}, \quad x_{FF} = \begin{bmatrix} \Delta p_n \\ \Delta v_n \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$FD : \begin{cases} \Delta \dot{p}_n = \delta v_n - \hat{v}'_n \beta_n, \\ \delta \dot{v}_n = \hat{g}_n \beta_n + \Delta f_n + \hat{v}'_n \nu_n, \\ \dot{\beta}_n = \nu_n. \end{cases}, \quad x_{FD} = \begin{bmatrix} \Delta p_n \\ \delta v_n \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$DD : \begin{cases} \delta \dot{p}_n = \delta v_n + \hat{p}'_n \nu_n, \\ \delta \dot{v}_n = \hat{g}_n \beta_n + \Delta f_n + \hat{v}'_n \nu_n, \\ \dot{\beta}_n = \nu_n. \end{cases}, \quad x_{DD} = \begin{bmatrix} \delta p_n \\ \delta v_n \\ \beta_n \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Приведем также идеальные уравнения ошибок, которые понадобятся в дальнейшем.

$$FF : \begin{cases} \Delta \dot{p}_n = \Delta v_n, \\ \Delta \dot{v}_n = -\hat{f}_n \beta_n + \Delta f_n, \\ \dot{\beta}_n = \nu_n. \end{cases} \quad (2.47)$$

$$FD : \begin{cases} \Delta \dot{p}_n = \delta v_n - \hat{v}_n \beta_n, \\ \delta \dot{v}_n = \hat{g}_n \beta_n + \Delta f_n + \hat{v}_n \nu_n, \\ \dot{\beta}_n = \nu_n. \end{cases} \quad (2.48)$$

$$DD : \begin{cases} \delta \dot{p}_n = \delta v_n + \hat{p}_n \nu_n, \\ \delta \dot{v}_n = \hat{g}_n \beta_n + \Delta f_n + \hat{v}_n \nu_n, \\ \dot{\beta}_n = \nu_n. \end{cases} \quad (2.49)$$

Отметим, что зависимость от траектории (от модельных значений p'_n, v'_n) в форме DD не исчезла совсем. Однако эти переменные входят в уравнения как множители при шуме.

Приведем здесь явный вид выражения (2.7):

$$FF : \begin{cases} p_n = p'_n + \Delta p_n \\ v_n = v'_n + \Delta v_n \\ C_{sn} = C'_{sn}(I + \hat{\beta}_n). \end{cases} \quad (2.50)$$

$$FD : \begin{cases} p_n = p'_n + \Delta p_n \\ v_n = v'_n + \delta v_n + (I + \hat{\beta}_n)v'_n \\ C_{sn} = C'_{sn}(I + \hat{\beta}_n). \end{cases} \quad (2.51)$$

$$DD : \begin{cases} p_n = p'_n + \delta p_n + (I + \hat{\beta}_n)p'_n \\ v_n = v'_n + \delta v_n + (I + \hat{\beta}_n)v'_n \\ C_{sn} = C'_{sn}(I + \hat{\beta}_n). \end{cases} \quad (2.52)$$

Заметим, что при больших β_n более точный результат дают следующие фор-

мулы (которые и используются в расчетах):

$$\begin{aligned}
FF : \quad & \begin{cases} p_n = p'_n + \Delta p_n \\ v_n = v'_n + \Delta v_n \\ C_{sn} = C'_{sn} \exp(\hat{\beta}_n). \end{cases} \\
FD : \quad & \begin{cases} p_n = p'_n + \Delta p_n \\ v_n = v'_n + \delta v_n + \exp(\hat{\beta}_n) v'_n \\ C_{sn} = C'_{sn} \exp(\hat{\beta}_n). \end{cases} \\
DD : \quad & \begin{cases} p_n = p'_n + \delta p_n + \exp(\hat{\beta}_n) p'_n \\ v_n = v'_n + \delta v_n + \exp(\hat{\beta}_n) v'_n \\ C_{sn} = C'_{sn} \exp(\hat{\beta}_n). \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Также приведем явный вид матриц $C(X)$ из формулы (2.8)

$$FF : \quad C(X) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & \hat{c}_1 \\ 0_3 & 0_3 & \hat{c}_2 \\ 0_3 & 0_3 & \hat{c}_3 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

$$FD : \quad C(X) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 & \hat{v}_n \\ 0_3 & 0_3 & \hat{c}_1 \\ 0_3 & 0_3 & \hat{c}_2 \\ 0_3 & 0_3 & \hat{c}_3 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

$$DD : \quad C(X) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & \hat{p}_n \\ 0_3 & I_3 & \hat{v}_n \\ 0_3 & 0_3 & \hat{c}_1 \\ 0_3 & 0_3 & \hat{c}_2 \\ 0_3 & 0_3 & \hat{c}_3 \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

здесь c_1, c_2, c_3 – столбцы матрицы ориентации C_{sn}

$$X = \begin{bmatrix} p_n \\ v_n \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \Delta p_n \\ \Delta v_n \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

2.4.4 Коррекция по нулевой скорости стопы

Опишем подход к коррекции навигационного решения по информации о нулевой скорости стопы в фазе опоры, основанный на обобщенном фильтре Калмана.

Вначале опишем детектор нулевой скорости стопы. В работе применялся детектор SHOE [72]. В скользящем интервале длины W на каждом такте вычислялся параметр T_n :

$$T_n = \frac{1}{W} \left(\sum_{k=n}^{n+W-1} \frac{\|f'_k - \frac{\tilde{f}'}{\|\tilde{f}'\|} g\|^2}{\sigma_f^2} + \sum_{k=n}^{n+W-1} \frac{\|\omega'_k\|^2}{\sigma_\omega^2} \right)$$

$$\tilde{f}' = \frac{1}{W} \sum_{k=n}^{n+W-1} f'_k$$

Если $T_n < \gamma$ Принимается гипотеза, что стопа неподвижна

Здесь f'_k, ω'_k – показания инерциальных датчиков в момент времени t_k , σ_f, σ_ω – шумы измерений акселерометров и гироскопов.

На рисунке 2.2 изображены нормы показаний инерциальных датчиков с выделенными на них интервалами нулевой скорости. На рисунке 2.3 приведены соответствующие значения тестовой статистики T_n .

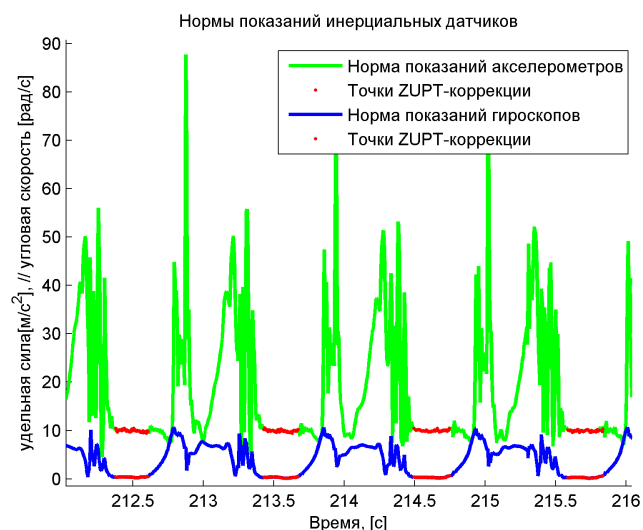


Рис. 2.2: Графики нормы показаний акселерометров (зеленая линия) и нормы показаний гироскопов (синяя линия) с отмеченными красными точками моментами неподвижности стопы

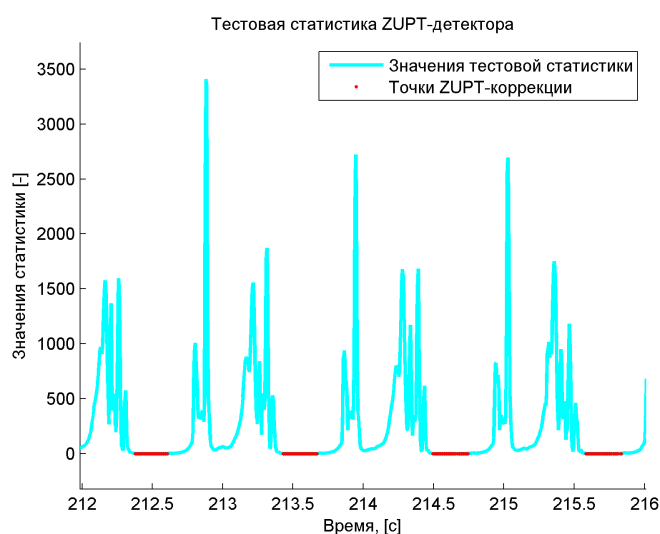


Рис. 2.3: График тестовой статистика T_n с отмеченными на ней моментами неподвижности стопы

Когда детектором обнаружена неподвижность стопы, формируется псевдоизмерение нулевой скорости. Напомним, что термин псевдоизмерение отражает тот факт, что никакого устройства, измеряющего скорость стопы непосредственно, нет. Измерение нулевой скорости можно сформировать несколькими способами. В навигационной с.к. (будем называть этот вариант формой

N (navigation frame)):

$$Z'_n = v'_n, \quad Z_n = v_n - r_n = 0 \quad (2.57)$$

и в приборной с.к. (будем называть этот вариант формой S (sensor frame)):

$$Z'_s = v'_{s'}, \quad Z_s = v_s - r_s = 0 \quad (2.58)$$

Здесь r_s, r_n – ошибки, связанные с отличием истинной скорости стопы от нуля. Они считаются случайными величинами типа белого шума.

В литературе по навигации пешехода [33],[71],[104] применяется форма N . Далее будет показано, что целесообразно использовать форму S .

Выше приведены измерения в терминах вектора состояния исходной нелинейной системы: Z соответствует X , а Z' соответствует X' . Для применения ОФК необходимо сформировать измерение в терминах вектора ошибок x . Очевидно, что вид уравнений измерений в терминах x зависит от того, какой тип ошибок скорости используется: Δv или δv . То есть для форм FD и DD уравнения будут одинаковы, а для формы FF будут отличаться.

Отметим, что для комплексирования измерений с помощью ОФК динамическая система (уравнения ошибок в нашем случае) и уравнения измерений должны быть записаны в одной и той же с.к. Это означает, что в форме S уравнения измерений будут лишь выводиться в соответствии с (2.58), а записываться в навигационной с.к. Приведем для примера вывод уравнений измерений в терминах вектора ошибок в форме FF в варианте S . Во избежание путаницы измерения в малом будем помечать верхним индексом, соответствующим форме (S или N).

$$\begin{aligned} z_s^S &= Z'_s - Z_s = v'_{s'} - v_s + r_s = \delta v_s + r_s = \Delta v_s - \hat{\beta}_s v_s + r_s = \Delta v_s + \hat{v}_s \beta_s + r_s, \\ z_n^S &= C_{ns} z_s^S = \Delta v_n + \hat{v}_n \beta_n + r_n \end{aligned}$$

Приведем уравнения измерения нулевой скорости для вектора ошибок x_{FF} :

$$\begin{aligned} S : \quad & z_n^S = \Delta v_n + \hat{v}_n \beta_n + r_n, \\ & z_n^S = H_{FF}^S x + r_n, \quad H_{FF}^S = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \hat{v}_n \end{bmatrix} \\ N : \quad & z_n^N = \Delta v_n + r_n, \\ & z_n^N = H_{FF}^N x + r_n, \quad H_{FF}^N = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Приведем уравнения измерения нулевой скорости для векторов ошибок x_{FD} и x_{DD} :

$$\begin{aligned} S : \quad & z_n^S = \delta v_n + r_n, \\ & z_n^S = H_{FD}^S x + r_n = H_{DD}^S x + r_n, \quad H_{FD}^S = H_{DD}^S = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \\ N : \quad & z_n^N = \delta v_n - \hat{v}_n \beta_n + r_n, \\ & z_n^N = H_{FD}^N x + r_n = H_{DD}^N x + r_n, \quad H_{FD}^N = H_{DD}^N = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & -\hat{v}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Заметим, что в литературе по теории комплексирования БИНС и одометра (измерителя скорости) обычно используется форма S [106], что логично, т.к. измерение одометра происходит в приборной с.к. Однако в задаче навигации пешехода для записи условий нулевой скорости форма S , насколько известно автору, ранее не применялась.

2.5 Система навигации пешехода с двумя инерциальными блоками

Рассмотрим систему инерциальной навигации пешехода с двумя инерциальными блоками, закрепленными на разных стопах. Состояние такой системы определяется вектором состояния X^{lr} , имеющим следующий вид:

$$X^{lr} = \begin{bmatrix} X^l \\ X^r \end{bmatrix}, \quad X^l = \begin{bmatrix} p_n^l \\ v_n^l \\ C_{ns}^l \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad X^r = \begin{bmatrix} p_n^r \\ v_n^r \\ C_{ns}^r \\ \vdots \end{bmatrix},$$

Здесь верхние индексы l и r обозначают, соответственно, левую и правую БИНС, то есть БИНС, закрепленную на левой и правой стопах.

В отсутствие дополнительной информации система с двумя ИИБ функционирует как две независимых системы с одним ИИБ. Прогноз траектории происходит в соответствии с уравнениями движения 2.4.1, коррекция по нулевой скорости – в соответствии с 2.4.4.

Для корректного использования информации о взаимном положении ИИБ необходимо использовать ОФК с общим для двух ИИБ вектором ошибок, и, как следствие, общей матрицей ковариаций.

Вектор ошибок имеет вид (приводятся три возможных формы векторов ошибок):

$$\begin{aligned}
 x_{FF}^{lr} &= \begin{bmatrix} x_{FF}^l \\ x_{FF}^r \end{bmatrix}, & x_{FF}^l &= \begin{bmatrix} \Delta p_n^l \\ \Delta v_n^l \\ \beta_n^l \\ \vdots \end{bmatrix}, & x_{FF}^r &= \begin{bmatrix} \Delta p_n^r \\ \Delta v_n^r \\ \beta_n^r \\ \vdots \end{bmatrix}; \\
 x_{FD}^{lr} &= \begin{bmatrix} x_{FD}^l \\ x_{FD}^r \end{bmatrix}, & x_{FD}^l &= \begin{bmatrix} \Delta p_n^l \\ \delta v_n^l \\ \beta_n^l \\ \vdots \end{bmatrix}, & x_{FD}^r &= \begin{bmatrix} \Delta p_n^r \\ \delta v_n^r \\ \beta_n^r \\ \vdots \end{bmatrix}; \\
 x_{DD}^{lr} &= \begin{bmatrix} x_{DD}^l \\ x_{DD}^r \end{bmatrix}, & x_{DD}^l &= \begin{bmatrix} \delta p_n^l \\ \delta v_n^l \\ \beta_n^l \\ \vdots \end{bmatrix}, & x_{DD}^r &= \begin{bmatrix} \delta p_n^r \\ \delta v_n^r \\ \beta_n^r \\ \vdots \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

2.5.1 Коррекция по расстоянию между стопами

Опишем подход к коррекции навигационных решений по информации о том, что стопы могут находиться друг от друга на ограниченном расстоянии. Для этой цели будет применяться ОФК. Идея подхода показана на рисунке 2.4

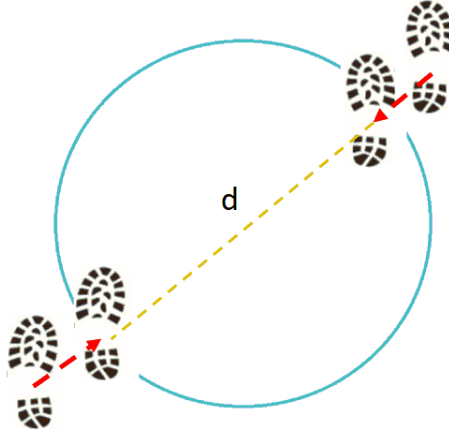


Рис. 2.4: Идея коррекции по расстоянию между стопами.

Чтобы учесть ограничение длины шага вводится псевдоизмерение расстояния между стопами. Расчетное расстояние между стопами есть:

$$D' = \|p_n^l(t_k) - p_n^r(t_k)\| \quad (2.59)$$

Истинное расстояние между стопами формируется следующим образом:

$$D = \begin{cases} d, & D' > d \\ \emptyset, & D' < d \end{cases}$$

Измерение в терминах вектора ошибок формируется в случае, если $D' > d$, где d – выбранная априорно «максимальная длина шага». Предполагается, что нарушение этого условия означает достаточное для проведения коррекции накопление ошибок навигации. Будем обозначать объекты, связанные с коррекцией по расстоянию между стопами верхним индексом DUPT . Аббревиатура DUPТ – Distance UPdaTe вводится для компактности изложения.

$$z^{DUPT} = \begin{cases} D' - D = H^{DUPT} x^{lr} + r_d, & D' > d \\ \emptyset, & D' < d \end{cases}$$

Здесь r_d обозначает ошибку измерения.

Вид матрицы измерений H^{DUPT} очевидно зависит от формы уравнений ошибок, точнее, от типа ошибок координат. Для форм FD и FF эти матрицы имеют вид:

$$H_{FF}^{DUPT} = H_{FD}^{DUPT} = \begin{bmatrix} S_{FF}^l & S_{FF}^r \end{bmatrix},$$

$$S_{FF}^l = \frac{1}{\rho_k} \begin{bmatrix} (p_n^l(t_k) - p_n^r(t_k))^T & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$S_{FF}^r = \frac{1}{\rho_k} \begin{bmatrix} -(p_n^l(t_k) - p_n^r(t_k))^T & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \rho_k = \|p_n^l(t_k) - p_n^r(t_k)\|$$

В форме DD появляется блок, соответствующий ошибке ориентации:

$$H_{DD}^{DUPT} = \begin{bmatrix} S_{DD}^l & S_{DD}^r \end{bmatrix},$$

$$S_{DD}^l = \frac{1}{\rho_k} \begin{bmatrix} (p_n^l(t_k) - p_n^r(t_k))^T & 0_{1 \times 3} & p_n^l(t_k) \times p_n^r(t_k)^T \end{bmatrix}$$

$$S_{DD}^r = \frac{1}{\rho_k} \begin{bmatrix} -(p_n^l(t_k) - p_n^r(t_k))^T & 0_{1 \times 3} & -p_n^l(t_k) \times p_n^r(t_k)^T \end{bmatrix}.$$

2.6 Состоятельность алгоритмов коррекции в навигации пешехода

Развитая выше теория будет применена для анализа состоятельности двух описанных выше типов коррекции: коррекции по нулевой скорости (ZUPТ-коррекции)

и коррекции по расстоянию между стопами (DUPТ-коррекции).

Ниже теоретические результаты получены для упрощенных уравнения движения (2.37) и для простейшей модели погрешностей инерциальных датчиков (2.40).

2.6.1 Структурная состоятельность при ZUPТ-коррекции

Рассмотрим СИНП с одним ИИБ. Необходимо выяснить, какие формы уравнений ошибок (FF – (2.44), FD – (2.45), DD – (2.46)) и уравнений измерений (N – (2.57), S – (2.58)) позволяют построить структурно состоятельный ОФК. Для анализа структурной состоятельности необходимо вычислить матрицу наблюдаемости и найти ее ядро для ОФК и ИОФК. Для вычисления матриц наблюдаемости нужны матрицы перехода $F_{k+1,k}$ для уравнений ошибок и матрицы измерений. Матрицы $F_{k+1,k}$ должны соответствовать переходу от одной фазы опоры к другой. Получим выражения для матриц $F_{k+1,k}$ для форм FF , FD , DD уравнений ошибок.

Рассмотрим линейную систему, соответствующую уравнениям ошибок (2.44)–(2.46).

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)q$$

Матрицы системы A будем обозначать верхним индексом $^{FF, FD, DD}$:

$$A^{FF} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & -\hat{f}'_n(t) \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad A^{FD} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & -\hat{v}'_n(t) \\ 0_3 & 0_3 & \hat{g}_n \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad A^{DD} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & \hat{g}_n \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим также линейную систему, соответствующую идеальным уравнениям ошибок (2.47)–(2.49).

$$\dot{x} = \bar{A}(t)x + \bar{B}(t)q$$

Матрицы системы $\bar{A}$ будем обозначать верхним индексом $^{FF, FD, DD}$:

$$\bar{A}^{FF} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & -\hat{f}_n(t) \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^{FD} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & -\hat{v}_n(t) \\ 0_3 & 0_3 & \hat{g}_n \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^{DD} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & \hat{g}_n \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Переходная матрица $F_{k+1,k}$ в (2.15), (2.16), где t_{k+1} и t_k – моменты времени соседних фаз опоры, определяется следующим образом:

$$F_{k+1,k} = \Phi(t_{k+1}, t_k)$$

Здесь $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ – матрица Коши линейной нестационарной системы $\dot{x} = A(t)x$:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi(t, s)}{dt} = A(t)\Phi(t, s) \\ \Phi(t, t) = I \end{cases}$$

Вычислим матрицу Коши для всех трех форм:

$$\begin{aligned} \Phi^{FF}(t_{k+1}, t_k) &= \begin{bmatrix} I_3 & I_3(t_{k+1} - t_k) & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_{t_k}^{\tau} \hat{f}'_n(s) ds \\ 0_3 & I_3 & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{f}'_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}, \\ \Phi^{FD}(t_{k+1}, t_k) &= \begin{bmatrix} I_3 & I_3(t_{k+1} - t_k) & \hat{g}_n \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}'_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_k) \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}, \\ \Phi^{DD}(t_{k+1}, t_k) &= \begin{bmatrix} I_3 & I_3(t_{k+1} - t_k) & \hat{g}_n \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2} \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_k) \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Для анализа ИОФК понадобятся матрицы Коши, соответствующие идеаль-

ным уравнения ошибок. Будем обозначать их верхней чертой. Они имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}^{FF}(t_{k+1}, t_k) &= \begin{bmatrix} I_3 & I_3(t_{k+1} - t_k) & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_{t_k}^{\tau} \hat{f}_n(s) ds \\ 0_3 & I_3 & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{f}_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}, \\ \bar{\Phi}^{FD}(t_{k+1}, t_k) &= \begin{bmatrix} I_3 & I_3(t_{k+1} - t_k) & \hat{g}_n \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_k) \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}, \\ \bar{\Phi}^{DD}(t_{k+1}, t_k) &= \begin{bmatrix} I_3 & I_3(t_{k+1} - t_k) & \hat{g}_n \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2} \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_k) \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Для дальнейшего анализа существенно, что фаза опоры мгновенна.

Рассмотрим форму уравнений ошибок FF в комбинации с измерениями в форме N .

Здесь и далее для краткости будем использовать следующее обозначение:

$$\tau_{k+1} = t_{k+1} - t_k.$$

Матрицы, соответствующие ОФК:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3\tau_{k+1} & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_{t_k}^{\tau} \hat{f}'_n(s) ds \\ 0_3 & I_3 & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{f}'_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix},$$

Матрицы, соответствующие ИОФК:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{k+1,k} \\ \bar{H}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_{t_k}^{\tau} \hat{f}_n(s) ds \\ 0_3 & I_3 & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{f}_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Матрицы наблюдаемости для ИОФК и ОФК имеют вид:

$$\bar{O}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_{k+1}} \hat{f}_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_k} \hat{f}_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_{k-1}} \hat{f}_n(\tau) d\tau \\ \dots & & \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad O_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_{k+1}} \hat{f}'_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_k} \hat{f}'_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_{k-1}} \hat{f}'_n(\tau) d\tau \\ \dots & & \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Введем величину $\nabla f_n = f'_n - f_n$, отвечающую за отличия вычисленного значения удельной силы, использующегося в ОФК, от истинного значения, использующегося в ИОФК.

Ядра матриц наблюдаемости ОФК и ИОФК зависят от свойств векторов малых поворотов, соответствующих кососимметрическим матрицам

$$\int_{t_0}^{t_m} \hat{f}'_n(\tau) d\tau, \quad \int_{t_0}^{t_m} \hat{f}_n(\tau) d\tau, \quad m = 1, 2, \dots, k+1$$

Их значения вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_m} \hat{f}_n(\tau) d\tau &= \underbrace{\hat{v}_n(t_m) - \hat{v}_n(t_0)}_{=0} - \hat{g}_n(t_m - t_0), \quad m = 1, 2, \dots, k+1 \\ \int_{t_0}^{t_m} \hat{f}'_n(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^{t_m} \hat{f}_n(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_m} \widehat{\nabla f_n(\tau)} d\tau = -\hat{g}_n(t_m - t_0) + \int_{t_0}^{t_m} \widehat{\nabla f_n(\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

Матрица наблюдаемости ОФК отличается от матриц наблюдаемости ИОФК слагаемыми $\int_{t_0}^{t_m} \widehat{\nabla f_n(\tau)} d\tau$. Отсутствие этих слагаемых приводит к линейной независимости соответствующих векторов.

С учетом выражений, полученных выше матрицы наблюдаемости примут вид:

$$\bar{O}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) \\ 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_k - t_0) \\ 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k-1} - t_0) \\ & \dots & \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix},$$

$$O_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) + \int_{t_0}^{t_{k+1}} \widehat{\nabla f_n(\tau)} d\tau \\ 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_k - t_0) + \int_{t_0}^{t_k} \widehat{\nabla f_n(\tau)} d\tau \\ 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k-1} - t_0) + \int_{t_0}^{t_{k-1}} \widehat{\nabla f_n(\tau)} d\tau \\ & \dots & \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что матрицы, составленные из векторов, лежащих нуль-пространства матриц наблюдаемости, будут иметь следующий вид:

$$\bar{\mathcal{N}}_k = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & g_n \end{bmatrix}, \quad g_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_3 \\ 0_3 \end{bmatrix} \neq \bar{\mathcal{N}}_k$$

Таким образом выполнено определение 5. Вектор $v_k \in \bar{\mathcal{N}}_k$, $v_k \notin \mathcal{N}_k$ – это вектор $\begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & g_n^T \end{bmatrix}^T$.

Рассмотрим форму уравнений ошибок FF в комбинации с измерениями в форме S .

Матрицы, соответствующие ОФК:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3\tau_{k+1} & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_{t_k}^{\tau} \hat{f}'_n(s)ds \\ 0_3 & I_3 & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{f}'_n(\tau)d\tau \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & \hat{v}'_n(t_k) \end{bmatrix}$$

Матрицы, соответствующие ИОФК:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{k+1,k} \\ \bar{H}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3\tau_{k+1} & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_{t_k}^{\tau} \hat{f}_n(s)ds \\ 0_3 & I_3 & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{f}_n(\tau)d\tau \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & \hat{v}_n(t_k) \end{bmatrix}$$

Матрицы наблюдаемости для ИОФК и ОФК имеют вид:

$$\bar{O}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_{k+1}} \hat{f}_n(\tau)d\tau + \hat{v}_n(t_0) \\ 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_k} \hat{f}_n(\tau)d\tau + \hat{v}_n(t_1) \\ 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_{k-1}} \hat{f}_n(\tau)d\tau + \hat{v}_n(t_2) \\ \dots & & \\ 0_3 & I_3 & \hat{v}_n(t_k) \end{bmatrix}, \quad O_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_{k+1}} \hat{f}'_n(\tau)d\tau + \hat{v}'_n(t_0) \\ 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_k} \hat{f}'_n(\tau)d\tau + \hat{v}'_n(t_1) \\ 0_3 & I_3 & \int_{t_0}^{t_{k-1}} \hat{f}'_n(\tau)d\tau + \hat{v}'_n(t_2) \\ \dots & & \\ 0_3 & I_3 & \hat{v}'_n(t_k) \end{bmatrix}$$

Проводя рассуждения, аналогичные случаю FF, N получим выражения для матриц наблюдаемости, совпадающие со случаем FF, N .

Рассмотрим форму уравнений ошибок FD в комбинации с измерениями в форме N .

Матрицы, соответствующие ОФК:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}'_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}$$

Матрицы, соответствующие ИОФК:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{k+1,k} \\ \bar{H}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}$$

Матрицы наблюдаемости для ИОФК и ОФК имеют вид:

$$\bar{O}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) - \hat{v}_n(t_0) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_1) - \hat{v}_n(t_1) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_2) - \hat{v}_n(t_2) \\ \dots & & \\ 0_3 & I_3 & -\hat{v}_n(t_k) \end{bmatrix},$$

$$O_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) - \hat{v}'_n(t_0) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_1) - \hat{v}'_n(t_1) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_2) - \hat{v}'_n(t_2) \\ \dots & & \\ 0_3 & I_3 & -\hat{v}'_n(t_k) \end{bmatrix}$$

Учитывая, что истинная скорость стопы в фазе опоры равна нулю ($v_n(t_i) = 0, i = 0, 1, \dots$), получим следующие выражения для ядер матриц

наблюдаемости:

$$\bar{O}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_1) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_2) \\ & \dots & \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad O_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) - \hat{v}'_n(t_0) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_1) - \hat{v}'_n(t_1) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_2) - \hat{v}'_n(t_2) \\ & \dots & \\ 0_3 & I_3 & -\hat{v}'_n(t_k) \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что ядра матриц наблюдаемости будут иметь следующий вид:

$$\bar{\mathcal{N}}_k = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & g_n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_3 \\ 0_3 \end{bmatrix} \neq \bar{\mathcal{N}}_k$$

Таким образом выполнено определение 5. Вектор $v_k \in \bar{\mathcal{N}}_k$, $v_k \notin \mathcal{N}_k$ – это вектор $\begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & g_n^T \end{bmatrix}^T$.

Рассмотрим форму уравнений ошибок FD в комбинации с измерениями в форме S .

Матрицы, соответствующие ОФК:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}'_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Матрицы, соответствующие ИОФК:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{k+1,k} \\ \bar{H}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости для ОФК и ИОФК имеет один и тот же вид:

$$O_{k+1} = \bar{O}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_1) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_2) \\ & \dots & \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что ядра матриц наблюдаемости будут иметь следующий вид:

$$\mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & g_n \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{N}}_k$$

Следовательно, соответствующий ОФК структурно состоятелен.

Рассмотрим форму уравнений ошибок DD в комбинации с измерениями в форме N .

Матрицы, соответствующие ОФК:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & -\hat{v}'_n(t_k) \end{bmatrix}$$

Матрицы, соответствующие ИОФК:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & -\hat{v}_n(t_k) \end{bmatrix}$$

Матрицы наблюдаемости для ИОФК и ОФК имеют вид:

$$\bar{O}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) - \hat{v}_n(t_0) \\ 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k+1} - t_1) - \hat{v}_n(t_1) \\ 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k+1} - t_2) - \hat{v}_n(t_2) \\ \dots & & \\ 0_3 & I_3 & -\hat{v}_n(t_k) \end{bmatrix},$$

$$O_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) - \hat{v}'_n(t_0) \\ 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k+1} - t_1) - \hat{v}'_n(t_1) \\ 0_3 & I_3 & -\hat{g}_n(t_{k+1} - t_2) - \hat{v}'_n(t_2) \\ \dots & & \\ 0_3 & I_3 & -\hat{v}'_n(t_k) \end{bmatrix}$$

Аналогично случаю (FD, N) имеем:

$$\bar{\mathcal{N}}_k = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & g_n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_3 \\ 0_3 \end{bmatrix} \neq \bar{\mathcal{N}}_k$$

Выводы также аналогичны таковым для случая (FD, N) .

Рассмотрим форму уравнений ошибок DD в комбинации с измерениями в форме S .

Матрицы системы и измерений для ОФК и ИОФК одинаковы:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k} \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{k+1,k} \\ \bar{H}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Матрицы наблюдаемости также совпадают:

$$O_{k+1} = \bar{O}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_0) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_1) \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n(t_{k+1} - t_2) \\ \dots & & \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Аналогично случаю (FD, S) имеем:

$$\mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & g_n \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{N}}_k$$

Следовательно, соответствующий ОФК структурно состоятелен.

Результаты проверки структурной состоятельности сведены в таблицу:

		Форма уравнений измерений	
		N	S
Форма уравнений ошибок	FF	нет	нет
	FD	нет	да
	DD	нет	да

Таблица 2.2: Структурная состоятельность ОФК с ZURT-коррекцией для разных форм уравнений ошибок и уравнений измерений

Видно, что свойство структурной состоятельности выполнено лишь тогда, когда в уравнениях ошибок используются динамические ошибки скорости (формы FD и DD) и одновременно используется форма S записи уравнений нулевой скорости. Таким образом, доказаны следующие утверждения:

Утверждение 8. *Форма N уравнений измерений нулевой скорости при любой форме уравнений ошибок приводит к несостоятельному ОФК.*

Утверждение 9. *Форма FF уравнений ошибок при любой форме уравнений измерений нулевой скорости приводит к несостоятельному ОФК.*

2.6.2 Ковариационный анализ ZURT-коррекции

Проведем аналитически ковариационный анализ коррекции по нулевой скорости в СИНП с одним ИИБ [17]. Рассмотрим форму DD уравнений ошибок, поскольку только в этой форме имеет место стационарная система.

Измерения рассматривались в формах N и S (2.59).

Упрощающие предположения следующие:

- Длительность шага постоянна и равна T
- Длительность фазы опоры пренебрежимо мала (коррекция считается мгновенной)
- Шумы измерений датчиков Δf_n , ν_n считаются белыми шумами с интенсивностями σ_ω^2 и σ_f^2 соответственно.
- Ошибка измерения нулевой скорости r_n также считается белым шумом с интенсивностью σ_n .

Рассмотрим следующую систему (форма S):

$$\begin{aligned}\delta\dot{p} &= \delta v_n + \hat{p}'_n \nu_n, \\ \delta\dot{v} &= \hat{g}_n \beta_n + \Delta f_n + \hat{v}'_n \nu_n, \\ \dot{\beta} &= \nu_n; \\ z_n^s &= \delta v_n + r_n\end{aligned}\tag{2.60}$$

Рассмотрим отдельно три группы уравнений из (2.60), описывающих движение в горизонтальной плоскости: $(\delta p_1, \delta v_1, \beta_2)$, $(\delta p_2, \delta v_2, \beta_1)$, (β_3) . Будем записывать компоненты векторов p_n , v_n , β_n без указания системы координат, поскольку все они относятся к навигационной с.к.

$$\begin{cases} \delta\dot{p}_1 &= \delta v_1 - p_2 \nu_3 + p_3 \nu_2 \\ \delta\dot{v}_1 &= -g \beta_2 + \Delta f_1 + v_3 \nu_2 - v_2 \nu_3 \\ \dot{\beta}_2 &= \nu_2 \\ z_1 &= \delta v_1 + r_1 \end{cases}\tag{2.61}$$

$$\begin{cases} \delta\dot{p}_2 &= \delta v_2 + p_1 \nu_3 - p_3 \nu_1 \\ \delta\dot{v}_2 &= g \beta_1 + \Delta f_2 - v_3 \nu_1 + v_1 \nu_3 \\ \dot{\beta}_1 &= \nu_1 \\ z_2 &= \delta v_2 + r_2 \end{cases}\tag{2.62}$$

$$\dot{\beta}_3 = \nu_3$$

Полученные уравнения нестационарны, но периодичны по времени: измерения поступают в моменты $t_k = kT$, $k = 1, 2, \dots$

Рассмотрим ситуацию, когда пешеход движется в горизонтальной плоскости, то есть $v_3 \ll v_1, v_2$. Пренебрежем членами $v_3\nu_1, v_3\nu_2$ в (2.61),(2.62). Вначале рассмотрим уравнения на скорости:

$$\begin{cases} \delta\dot{v}_1 &= -g\beta_2 + \Delta f_1 - v_2\nu_3 \\ \dot{\beta}_2 &= \nu_2 \\ z_1 &= \delta v_1 + r_1 \end{cases} \quad (2.63)$$

$$\begin{cases} \delta\dot{v}_2 &= g\beta_1 + \Delta f_2 + v_1\nu_3 \\ \dot{\beta}_1 &= \nu_1 \\ z_2 &= \delta v_2 + r_2 \end{cases} \quad (2.64)$$

$$\dot{\beta}_3 = \nu_3 \quad (2.65)$$

Легко показать, что системы (2.63),(2.64) наблюдаемы, причем переходные матрицы $F_{k+1,k}$ не зависят от номера шага. Отсюда следует, что матрицы ковариаций в этих системах можно найти как стационарное решение уравнений Риккати:

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= FP_{k|k}F^T + GQG, \\ P_{k+1|k+1} &= (I - P_{k+1|k}H^T(HP_{k+1|k}H^T + R)^{-1}H)P_{k+1|k} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Априрные значения ковариаций для систем (2.63),(2.64) примут вид (во избежание путаницы с индексами априорные ковариации обозначаются $^-$, а апостериорные $^+$):

$$\begin{aligned} P_{\delta v_1}^- &= P_{\delta v_2}^- = \sigma_{f_i}^2 T + \frac{gT^3\sigma_\omega^2}{2} \left(\sqrt{4\frac{\sigma_{f_i}^2}{g^2\sigma_\omega^2 T^2} + 1} + 1 \right) \\ P_{\delta\beta_1}^- &= P_{\delta\beta_2}^- = \frac{\sigma_\omega^2 T}{2} \left(\sqrt{4\frac{\sigma_{f_i}^2}{\sigma_\omega^2 g^2 T^2} + 1} + 3 \right) \\ P_{\delta v_2 \delta\beta_1}^- &= P_{\delta v_1 \delta\beta_2}^- = -\frac{\sigma_\omega^2 g T^2}{2} \left(\sqrt{4\frac{\sigma_{f_i}^2}{\sigma_\omega^2 g^2 T^2} + 1} + 1 \right) \end{aligned}$$

Ниже приведены апостериорные значения ковариаций. Они получены с учетом дополнительного предположения о том, что измерения нулевой скорости идеально точны. Это значит, что в формуле (2.66) $R = 0$.

$$\begin{aligned} P_{\delta v_1}^+ &= P_{\delta v_2}^+ = 0 \\ P_{\delta \beta_1}^+ &= P_{\delta \beta_2}^+ = \frac{\sigma_\omega^2 T}{2} \left(\sqrt{4 \frac{\sigma_{f_i}^2}{\sigma_\omega^2 g^2 T^2} + 1} + 1 \right) \\ P_{\delta v_2 \delta \beta_1}^- &= 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Для компактности формул были введены дополнительные обозначения:

$$\sigma_{f_i}^2 = \sigma_f^2 + \langle v_i \rangle^2 \sigma_\omega^2, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\langle v_i \rangle$ обозначает среднее значение скорости за один шаг.

Рассмотрим систему (2.65). В ней отсутствуют измерения, поэтому β_3 представляет собой броуновское движение:

$$P_{\beta_3} = \sigma_\omega^2 t$$

Следствие 2. В задаче коррекции СИНП с одним ИИБ по нулевой скорости при записи уравнений ошибок в форме DD и записи измерений в форме S ковариация ошибки оценки угла курса растет линейно в зависимости от времени.

Рассмотрим следующую систему (форма N):

$$\begin{aligned} \delta \dot{p} &= \delta v_n + \hat{p}'_n \nu_n, \\ \delta \dot{v} &= \hat{g}_n \beta_n + \Delta f_n + \hat{v}'_n \nu_n, \\ \dot{\beta} &= \nu_n; \\ z_n^n &= \delta v_n + \hat{v}_n \beta_n + r_n \end{aligned} \quad (2.68)$$

Опять рассмотрим группы уравнений из (2.68), описывающих движение в горизонтальной плоскости. Опустим уравнения на ошибки координат, пренебрежем членами $v_3 \nu_1$, $v_3 \nu_2$ по причине их малости, и получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} \delta\dot{v}_1 &= -g\beta_2 + \Delta f_1 - v_2\nu_3 \\ \dot{\beta}_2 &= \nu_2 \\ z_1 &= \delta v_1 + v_2\beta_3 + r_1 \end{cases} \quad (2.69)$$

$$\begin{cases} \delta\dot{v}_2 &= g\beta_1 + \Delta f_2 + v_1\nu_3 \\ \dot{\beta}_1 &= \nu_1 \\ z_2 &= \delta v_2 - v_1\beta_3 + r_2 \end{cases} \quad (2.70)$$

$$\dot{\beta}_3 = \nu_3 \quad (2.71)$$

Уравнения (2.69),(2.70),(2.71) связаны за счет слагаемых $v_2\beta_3$ и $v_1\beta_3$. Можно показать, что система из трех этих уравнений наблюдаема. Для этого достаточно записать матрицу наблюдаемости вида (2.18) и вычислить определитель матрицы $\mathcal{O}_k^T \mathcal{O}_k$.

Для дальнейшего анализа предположим, что в фазе опоры скорости v_1 и v_2 малы. Тогда уравнения (2.69),(2.70) близки к (2.63),(2.64), то есть являются стационарными. В этом случае ковариации соответствующих переменных задаются формулами (2.67).

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_3 &= \nu_3 \\ z_1 &= \delta v_1 + v_2\beta_3 \\ z_2 &= \delta v_2 - v_1\beta_3 \end{aligned}$$

Здесь δv_1 и δv_2 можно рассматривать как шумы известной интенсивности $P_{\delta v_i}$. Применяя формулы (2.66), получим:

$$P_{\beta_3} = \sqrt{\sigma_\omega T} \left(\frac{\langle v_2 \rangle^2}{P_{\delta v_1}} + \frac{\langle v_1 \rangle^2}{P_{\delta v_2}} \right)^{-1/2}$$

Следствие 3. В задаче коррекции СИНП с одним ИИБ по нулевой скорости при записи уравнений ошибок в форме DD и записи измерений в форме N ковариация ошибки оценки угла курса ограничена во времени.

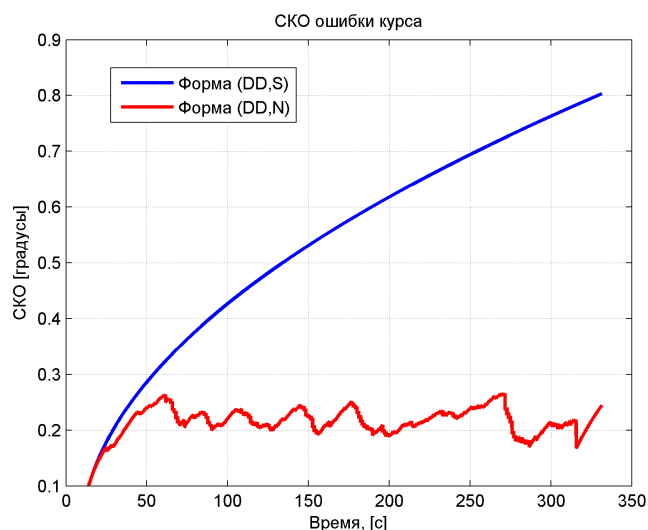


Рис. 2.5: Расчетное значение ковариаций ОФК для ZUPТ-коррекции в форме N и форме S для 5-минутного эксперимента в зависимости от времени.

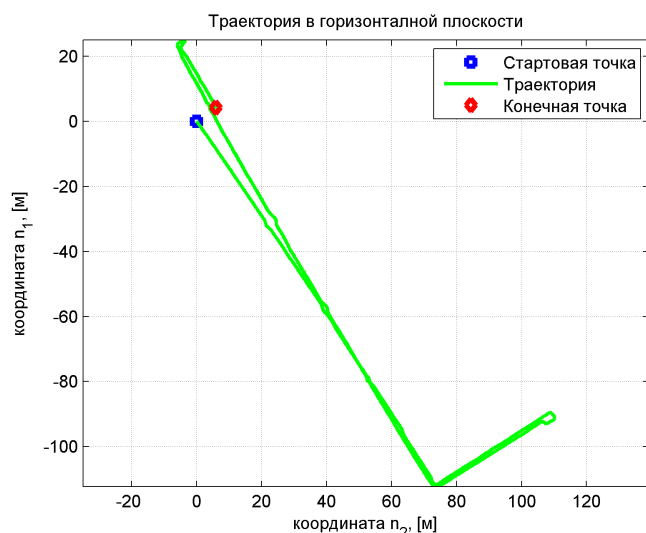


Рис. 2.6: Траектория, для которой производился расчет ковариаций, приведенный на рисунке 2.5.

Итак, ковариационный анализ в упрощающих предположениях подтвердил результат, полученный из анализа структурной состоятельности.

2.6.3 Проверка состоятельности на имитационных данных

Если не вводить упрощающие предположения, как сделано выше, аналитически доказать состоятельность ОФК не удастся. Один из способов ее выяснить – статистическое моделирование. Ковариации ОФК вычисляются на ансамбле

идеальных экспериментов и сравниваются с истинными ковариациями, которые доступны в случае наличия идеальных данных.

В [16] таким образом доказана состоятельность формы (DD, S) . Для этого была создана и использовалась база данных, состоящая из эталонных траекторий двух ИИБ, закрепленных на стопах человека и идеальных (свободных от погрешностей измерений) показаний инерциальных датчиков, сгенерированных на основе эталонной траектории. Детали построения этой базы данных описаны в статье [16]. Подобные базы данных позволяют производить статистическую проверку алгоритмов навигации, когда многократно моделируются различные инструментальные ошибки датчиков и анализируется средняя точность определения навигационных параметров в зависимости от параметров ошибок. Недостатком «статистического» подхода к проверке состоятельности является его нестрогость, связанная с ограниченной вариативностью экспериментов.

Проводилось сравнение алгоритмов навигации в форме (DD, S) и (DD, N) . Варьировалась интенсивность шума гироскопов, а анализировалась среднеквадратичная ошибка координат и угла курса. Вычислялось расчетное СКО – ковариации ОФК. Также вычислялось истинное СКО методом Монте-Карло. На рисунке 2.7 приведены графики СКО ошибок ориентации, а на рисунке 2.8 – СКО ошибок координат.

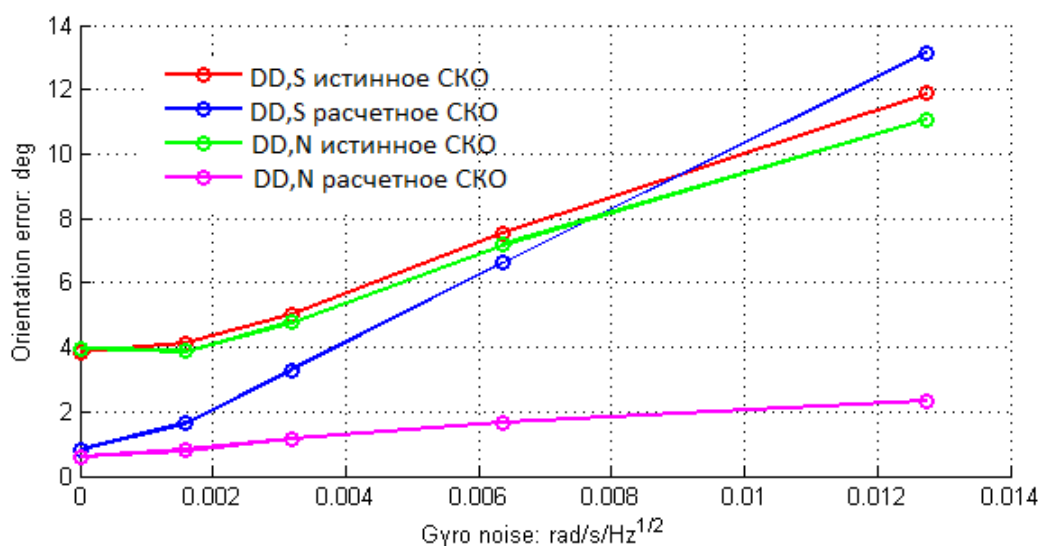


Рис. 2.7: Истинное и расчетное значения СКО ошибки курса в конце 5-минутного эксперимента в зависимости от интенсивности шума гироскопов

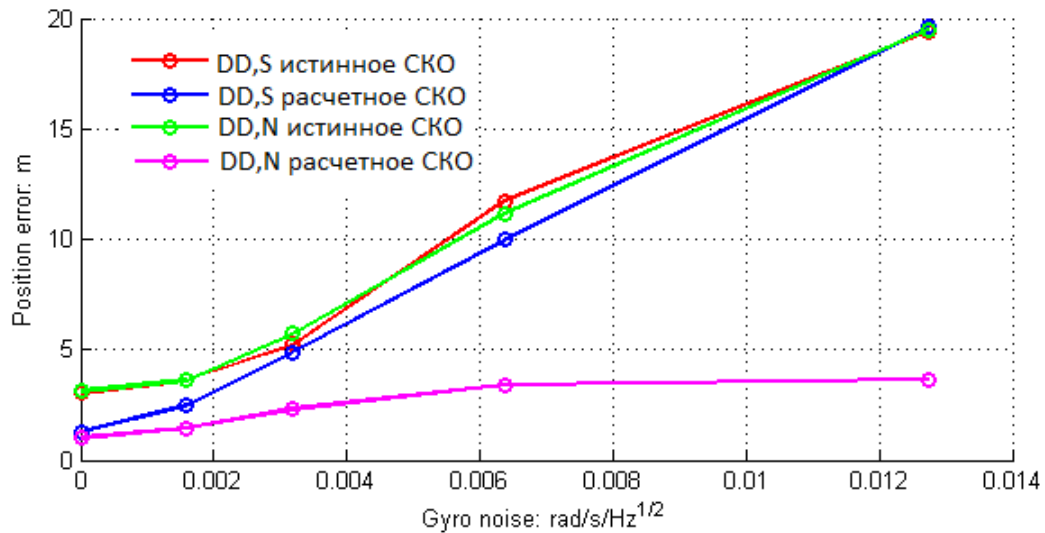


Рис. 2.8: Истинное и расчетное значения СКО ошибки координат в конце 5-минутного эксперимента в зависимости от интенсивности шума гироскопов

Видно, что для формы (DD, S) теоретическое и расчетное СКО близки, в то время как в форме (DD, N) расчетное СКО оказалось значительно меньше. Это еще раз подтверждает полученный выше двумя способами результат – несостоятельность формы (DD, N) .

2.6.4 Структурная состоятельность при ZURT-коррекции

Рассмотрим СИНП с двумя ИИБ. Выясним свойства структурной состоятельности ОФК для системы с коррекцией по нулевой скорости и по расстоянию между стопами. Рассматривается случай, когда ОФК с коррекцией по нулевой скорости состоятелен. В этом случае ненаблюдаемое подпространство ищется внутри ненаблюдаемого подпространства ZURT-коррекции.

По указанной выше причине исследоваться будут формы FD и DD , поскольку лишь они позволяют построить состоятельный ОФК с коррекцией по нулевой скорости.

Аналогично исследованию состоятельности ZURT-коррекции выясним свойства ИОФК. Для этого опишем общий подход к исследованию состоятельности СИНП с двумя ИИБ и двумя типами коррекции: по нулевой скорости и по расстоянию между стопами.

Матрица наблюдаемости для системы с двумя ИИБ и двумя типами кор-

рекции строится следующим образом:

$$O_k^{lr} = \begin{bmatrix} H_1^{lr} F_{2,1}^{lr-1} \cdots F_{k,k-1}^{lr-1} \\ \vdots \\ H_{k-1}^{lr} F_{k,k-1}^{lr-1} \\ H_k \end{bmatrix}, \quad F_{k,k-1}^{lr} = \begin{bmatrix} F_{k,k-1}^l & 0 \\ 0 & F_{k,k-1}^r \end{bmatrix}, \quad H_k^{lr} = \begin{bmatrix} H_k^l \\ H_k^r \\ H_k^{DUPT} \end{bmatrix}$$

Здесь $F_{k,k-1}^{lr}$ – матрица перехода для системы с двумя ИИБ, $F_{k,k-1}^l$ и $F_{k,k-1}^r$ – матрицы перехода для левого и правого ИИБ, H_k^{lr} – матрица измерений для системы с двумя ИИБ и двумя типами коррекции, H_k^l , H_k^r – блоки матрицы измерений, соответствующие измерению нулевой скорости для левого и правого ИИБ соответственно, H_k^{DUPT} – блок, соответствующий измерению расстояния между стопами.

Матрицу измерений следует понимать так. В момент фазы опоры левой ноги блок H^l ненулевой. В момент фазы опоры правой ноги блок H^r ненулевой. В случае одновременного нахождения обеих ног в фазе опоры блоки H^l и H^r ненулевые. Если выполняется условие $D' > d$, то блок H_k^{DUPT} ненулевой.

Ядро матрицы наблюдаемости известно для системы с одним ИИБ (см. раздел 2.6.1). Этот результат обобщается на систему из двух ИИБ, работающих независимо, то есть только с применением ZUPT-коррекции. Для такой системы ядро матрицы наблюдаемости будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{N}_k^{lr} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_k^l & 0_{9 \times 4} \\ 0_{9 \times 4} & \mathcal{N}_k^r \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k^l = \mathcal{N}_k^r = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_3 & g_n \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Необходимо найти ненаблюдаемое подпространство $\mathcal{N}_k^{DUPT}$ для системы из двух ИИБ с ZUPT-коррекцией для каждого ИИБ, а также с DUPT-коррекцией. Будем искать это ненаблюдаемое подпространство внутри $\mathcal{N}_k^{lr}$. Формально это можно записать так:

$$O_k^{DUPT} = O_k^{lr} \mathcal{N}_k^{lr}, \quad O_k^{DUPT} \mathcal{N}_k^{DUPT} = 0$$

Здесь O_k^{DUPT} – матрица наблюдаемости для системы из двух ИИБ, суженная на ненаблюдаемое подпространство ZUPT-коррекции, а O_k^{lr} – матрица наблюдаемости для системы из двух ИИБ с ZUPT и DUPT коррекцией.

Отметим, что матрица наблюдаемости O_k^{DUPT} соответствует редуцированному пространству ошибок, описываемому вектором ошибок

$y_{DD} = \begin{bmatrix} \delta p_n^l & \beta_{n3}^l & \delta p_n^r & \beta_{n3}^r \end{bmatrix}$ (в форме DD), либо вектором ошибок

$y_{FD} = \begin{bmatrix} \Delta p_n^l & \beta_{n3}^l & \Delta p_n^r & \beta_{n3}^r \end{bmatrix}$ (в форме FD). Редуцированный вектор ошибок содержит компоненты, ненаблюдаемые в результате ZUPТ-коррекции.

Сформулируем следующее утверждение:

Утверждение 10. *Задача оценивания для уравнений движения (2.37) и уравнений измерений (2.59), рассматриваемая внутри ненаблюдаемого подпространства коррекции по нулевой скорости, имеет 4 группы симметрий:*

- *Параллельные переносы в направлении координатных осей On_1, On_2, On_3 .*
- *Вращение вокруг оси On_3*

Поэтому соответствующее ненаблюдаемое подпространство четырехмерно и имеет следующий вид:

$$\bar{\mathcal{N}}_k^{DUPT} = \begin{bmatrix} I_4 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

Теперь рассмотрим формы FD и DD и выясним, какая из них структурно состоятельна, а также докажем утверждение 10.

Вначале рассмотрим форму DD . Для компактной записи формул введем следующие обозначения (для ИОФК будут использоваться те же обозначения, но без штрихов):

$$p_k^{l-r} = \frac{p_n'^l(t_k) - p_n'^r(t_k)}{\rho_k}, \quad p_k^{l \times r} = \frac{p_n'^l(t_k) \times p_n'^r(t_k)}{\rho_k}$$

Матрица перехода и матрица измерений для ИОФК имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{k+1,k}^{lr} \\ \bar{H}_k^l \\ \bar{H}_k^r \\ \bar{H}_k^{DUPT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3\tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n\tau_{k+1} & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & I_3\tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & \hat{g}_n\tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & p_k^{l \times rT} & -p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & -p_k^{l \times rT} \end{bmatrix}$$

В случае ОФК матрица перехода не изменяется, так как не зависит от траектории, изменяется лишь матрица измерений DUPT:

$$H_k^{DUPT} = \begin{bmatrix} p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & p_k^{l \times rT} & -p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & -p_k^{l \times rT} \end{bmatrix}$$

Выражение для матрицы $\bar{O}_k^{lr}$ громоздко, поэтому приведем сразу выражение для $\bar{O}_k^{DUPT}$:

$$\bar{O}_k^{DUPT} = \begin{bmatrix} p_1^{l-rT} & p_1^{l \times rT} g_n & -p_1^{l-rT} & -p_1^{l \times rT} g_n \\ p_2^{l-rT} & p_2^{l \times rT} g_n & -p_2^{l-rT} & -p_2^{l \times rT} g_n \\ p_3^{l-rT} & p_3^{l \times rT} g_n & -p_3^{l-rT} & -p_3^{l \times rT} g_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_k^{l-rT} & p_k^{l \times rT} g_n & -p_k^{l-rT} & -p_k^{l \times rT} g_n \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости ОФК имеет такой же вид:

$$O_k^{DUPT} = \begin{bmatrix} p_1^{l-rT} & p_1^{l \times rT} g_n & -p_1^{l-rT} & -p_1^{l \times rT} g_n \\ p_2^{l-rT} & p_2^{l \times rT} g_n & -p_2^{l-rT} & -p_2^{l \times rT} g_n \\ p_3^{l-rT} & p_3^{l \times rT} g_n & -p_3^{l-rT} & -p_3^{l \times rT} g_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_k^{l-rT} & p_k^{l \times rT} g_n & -p_k^{l-rT} & -p_k^{l \times rT} g_n \end{bmatrix}$$

Видно, что свойства матриц $\bar{O}_k^{DUPT}$ и O_k^{DUPT} будут одинаковыми, поэтому рассмотрим ИОФК. В общем случае векторы-строки

$$(p_1^{l-rT}, p_1^{l \times rT} g_n), \quad (p_2^{l-rT}, p_2^{l \times rT} g_n), \quad (p_3^{l-rT}, p_3^{l \times rT} g_n), \quad \dots$$

линейно независимы. Ядро матрицы наблюдаемости для ОФК и ИОФК одинаково и имеет вид:

$$\mathcal{N}_k^{DUPT} = \begin{bmatrix} I_4 \\ I_4 \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{N}}_k^{DUPT}$$

Для дальнейшего изложения также понадобятся векторы, входящие в ядро матрицы наблюдаемости:

$$\bar{v}_1^{DD} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2^{DD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_3^{DD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_4^{DD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ОФК структурно состоятелен. В ОФК не наблюдаются суммы динамических ошибок координат и суммы ошибок углов курса левой и правой БИНС.

Рассмотрим форму FD . Приведем матрицы перехода и измерений ИОФК.

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{k+1,k}^{lr} \\ H_k^l \\ H_k^r \\ \bar{H}_k^{DUPT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3\tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n^l(\tau) d\tau & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & I_3\tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n^r(\tau) d\tau \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & -p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}$$

Для компактной записи матрицы наблюдаемости введем еще одно обозначение:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n^l(\tau) d\tau = \hat{p}_{t_{k+1}-t_k}^l$$

При вычислении матриц наблюдаемости O_k^{lr} и $\bar{O}_k^{lr}$, а именно, в выражении для матриц перехода $F_{k+n,k}$, $n = 1, 2, \dots$ и $\bar{F}_{k+n,k}$, $n = 1, 2, \dots$, требуются выражения следующего вида:

$$\sum_{i=k}^{k+n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{v}_n'(\tau) d\tau, \quad \sum_{i=k}^{k+n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{v}_n(\tau) d\tau$$

Для простоты рассмотрим только два слагаемых в формулах выше:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n'(\tau) d\tau + \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \hat{v}_n'(\tau) d\tau, \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n(\tau) d\tau + \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \hat{v}_n(\tau) d\tau$$

В случае идеальных скоростей сумму интегралов можно представить как один интеграл от t_k до t_{k+2} , поскольку $v_n(t)$ непрерывна, то есть

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n(\tau) d\tau + \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \hat{v}_n(\tau) d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+2}} \hat{v}_n(\tau) d\tau$$

В случае модельных скоростей скорость претерпевает разрыв в точке, где происходит коррекция по нулевой скорости (мы считаем фазу опоры мгновенной, поэтому коррекция происходит как бы в одной точке). Обозначим величину «скачка» скорости в $k+1$ точке ZUPТ-коррекции через $\nabla v_n(t_{k+1})$ или для краткости ∇v_{k+1} . Тогда сумму интегралов можно представить в следующем виде:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}_n'(\tau) d\tau + \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \hat{v}_n'(\tau) d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+2}} \hat{v}_n'(\tau) d\tau - \nabla p_{k+1}$$

где $\nabla p_{k+1} = \nabla v_{k+1} \tau_{k+2}$. Это площадь ступеньки в интеграле, которая возникла из-за устранения разрыва в $v'(t)$. Устранение разрыва было необходимо, чтобы записать интеграл $\int_{t_k}^{t_{k+2}} \hat{v}_n'(\tau) d\tau$. Идея проиллюстрирована на рисунке 2.9

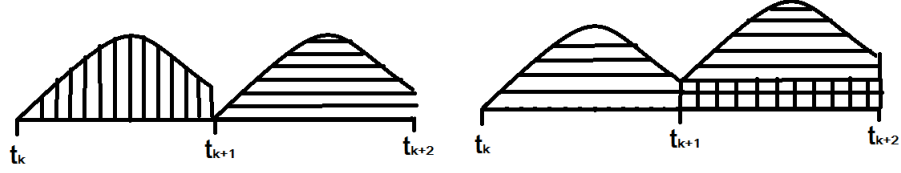


Рис. 2.9: слева вертикальной штриховкой обозначено выражение $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}'_n(\tau) d\tau$, а горизонтальной $\int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \hat{v}'_n(\tau) d\tau$. Справа горизонтальной штриховкой обозначен интеграл $\int_{t_k}^{t_{k+2}} \hat{v}'_n(\tau) d\tau$, а вертикальной ∇p_{k+1} .

Теперь рассмотрим выражение $\int_{t_k}^{t_{k+2}} \hat{v}'_n(\tau) d\tau$. Из уравнений движения $\dot{v}'_n = f'_n + g_n$ и введенного выражения $\nabla f_n = f'_n - f_n$ следует:

$$\int_{t_k}^{t_{k+2}} \hat{v}'_n(\tau) d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+2}} \hat{v}_n(\tau) d\tau + \int_{t_k}^{t_{k+2}} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n}(s) ds \quad (2.73)$$

Таким образом в общем случае имеем следующие выражения для сумм интегралов в случае ОФК и ИОФК:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{v}'_n(\tau) d\tau &= \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+n}} \hat{v}_n(\tau) d\tau}_{\hat{p}_{t_{k+n}-t_k}} + \int_{t_k}^{t_{k+n}} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n}(s) ds - \sum_{i=k+1}^{k+n-1} \widehat{\nabla p_i}, \\ \sum_{i=k}^{k+n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{v}_n(\tau) d\tau &= \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+n}} \hat{v}_n(\tau) d\tau}_{\hat{p}_{t_{k+n}-t_k}} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Рассмотрим матрицы перехода и измерений ИОФК:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{k+1,k}^{lr} \\ \bar{H}_k^l \\ \bar{H}_k^r \\ \bar{H}_k^{DUPT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & I_3\tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \hat{p}_{t_k-t_{k-1}}^l & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n\tau_{k+1} & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & I_3\tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \hat{p}_{t_k-t_{k-1}}^r \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & \hat{g}_n\tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & -p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости ИОФК, суженная на ненаблюдаемое подпространство ZUPT-коррекции $\mathcal{N}_k^{lr}$, имеет вид:

$$\bar{O}_k^{DUPT} = \begin{bmatrix} p_1^{l-rT} & -p_1^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_1}^l g_n & -p_1^{l-rT} & p_1^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_1}^r g_n \\ p_2^{l-rT} & -p_2^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_2}^l g_n & -p_2^{l-rT} & p_2^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_2}^r g_n \\ p_3^{l-rT} & -p_3^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_3}^l g_n & -p_3^{l-rT} & p_3^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_3}^r g_n \\ \dots & & & \\ p_k^{l-rT} & 0 & -p_k^{l-rT} & 0 \end{bmatrix}$$

Три вектора из ненаблюдаемого подпространства, соответствующего $\bar{O}_k^{DUPT}$, очевидно, имеют следующий вид:

$$\bar{v}_1^{FD} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2^{FD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_3^{FD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Для поиска четвертого вектора $\bar{v}_4^{FD}$ из ненаблюдаемого подпространства можно

воспользоваться известной связью матриц наблюдаемости в формах FD и DD :

$$\bar{O}_{DD,k}^{lr} = O_{FD,k}^{lr} T_k^{-1} \Rightarrow \bar{O}_{DD,k}^{lr} \bar{V}^{DD} = O_{FD,k}^{lr} \underbrace{T_k^{-1} \bar{V}^{DD}}_{\bar{V}^{FD}}$$

Здесь V^{DD} – вектор из ядра матрицы наблюдаемости в форме DD (обозначается как $\bar{O}_{DD,k}^{lr}$), V^{FD} – вектор из ядра матрицы наблюдаемости в форме FD (обозначается как $\bar{O}_{FD,k}^{lr}$), T_k – преобразование, связывающее вектора x_{FD}^{lr} и x_{DD}^{lr} :

$$x_{FD}^{lr} = T_k x_{DD}^{lr}, \quad T_k = \left[\begin{array}{ccc|ccc} I_3 & 0_3 & -\hat{p}_n^l(t_k) & & & \\ 0_3 & I_3 & 0_3 & & & 0_9 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & & & \\ \hline & & & I & 0_3 & -\hat{p}_n^r(t_k) \\ & 0_9 & & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ & & & 0_3 & 0_3 & I_3 \end{array} \right]$$

Выкладки выше приводятся для полных векторов ошибок x_{FD}^{lr} и x_{DD}^{lr} в то время как вектор $\bar{v}_4^{DD}$ вычислен нами для матрицы $\bar{O}_k^{DUPT}$, соответствующей системе с редуцированным вектором ошибок y_{DD} . Следовательно, матрицу T_k также необходимо рассматривать для такого вектора ошибок, будем обозначать ее T_k^y :

$$\bar{v}_4^{FD} = T_k^{y-1} \bar{v}_4^{DD}, \quad \bar{v}_4^{DD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_4^{FD} = \begin{bmatrix} -p_2^l(t_k) \\ p_1^l(t_k) \\ 0 \\ 1 \\ -p_2^r(t_k) \\ p_1^r(t_k) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ядро матрицы наблюдаемости ИОФК четырехмерно и имеет следующую

структуру:

$$\bar{\mathcal{N}}_k^{DUPT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_2^l(t_k) \\ 0 & 1 & 0 & p_1^l(t_k) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -p_2^r(t_k) \\ 0 & 1 & 0 & p_1^r(t_k) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим матрицы перехода и измерений ОФК. С учетом соотношения (2.73) можно записать:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1,k}^{lr} \\ H_k^l \\ H_k^r \\ H_k^{DUPT} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} F_{k+1,k}^l & 0_9 \\ \hline 0_9 & F_{k+1,k}^r \\ \hline 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & -p_k^{l-rT} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \end{array} \right],$$

$$F_{k+1,k}^l = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \hat{p}_{t_k-t_{k-1}}^l - \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n^l(s)} ds \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix},$$

$$F_{k+1,k}^r = \begin{bmatrix} I_3 & I_3 \tau_{k+1} & \hat{g}_n \frac{\tau_{k+1}^2}{2} - \hat{p}_{t_k-t_{k-1}}^r - \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n^r(s)} ds \\ 0_3 & I_3 & \hat{g}_n \tau_{k+1} \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}$$

С учетом соотношения (2.74) матрица наблюдаемости ОФК принимает вид:

$$O_k^{DUPT} = \begin{bmatrix} O_k^{DUPT,l} & O_k^{DUPT,r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
O_k^{DUPT,l} = & \\
\begin{bmatrix}
p_1'^{l-rT} & -p_1'^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_1}^l g_n - p_1'^{l-rT} \int_{t_1}^{t_k} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n^l(s)} ds g_n - p_1'^{l-rT} \sum_{i=1}^k \widehat{\nabla p_i^l} g_n \\
p_2'^{l-rT} & -p_2'^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_2}^l g_n - p_2'^{l-rT} \int_{t_2}^{t_k} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n^l(s)} ds g_n - p_2'^{l-rT} \sum_{i=2}^k \widehat{\nabla p_i^l} g_n \\
p_3'^{l-rT} & -p_3'^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_3}^l g_n - p_3'^{l-rT} \int_{t_3}^{t_k} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n^l(s)} ds g_n - p_3'^{l-rT} \sum_{i=3}^k \widehat{\nabla p_i^l} g_n \\
\vdots & \\
p_k'^{l-rT} & 0
\end{bmatrix}, \\
O_k^{DUPT,r} = & \\
\begin{bmatrix}
-p_1'^{l-rT} & p_1'^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_1}^r g_n - p_1'^{l-rT} \int_{t_1}^{t_k} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n^r(s)} ds g_n - p_1'^{l-rT} \sum_{i=1}^k \widehat{\nabla p_i^r} g_n \\
-p_2'^{l-rT} & p_2'^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_2}^r g_n - p_2'^{l-rT} \int_{t_2}^{t_k} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n^r(s)} ds g_n - p_2'^{l-rT} \sum_{i=2}^k \widehat{\nabla p_i^r} g_n \\
-p_3'^{l-rT} & p_3'^{l-rT} \hat{p}_{t_k-t_3}^r g_n - p_3'^{l-rT} \int_{t_3}^{t_k} d\tau \int_0^\tau \widehat{\nabla f_n^r(s)} ds g_n - p_3'^{l-rT} \sum_{i=3}^k \widehat{\nabla p_i^r} g_n \\
\vdots & \\
-p_k'^{l-rT} & 0
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Из-за наличия дополнительных слагаемых в матрице O_k^{DUPT} вектор $\bar{v}_4$, найденный выше, не входит в ненаблюдаемое подпространство. Следовательно, ядро матрицы наблюдаемости имеет следующий вид:

$$\mathcal{N}_k^{DUPT} = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_{1 \times 3} \\ I_3 \\ 0_{1 \times 3} \end{bmatrix} \neq \bar{\mathcal{N}}_k^{DUPT}$$

ОФК структурно несостоятелен.

Утверждение 10 доказано.

Таким образом, состоятельный ОФК в задаче навигации пешехода с коррекцией по нулевой скорости и по расстоянию между стопами нельзя построить с применением полных (FF) или комбинированных (FD) ошибок.

2.7 Особенности реализации алгоритмов

В данном разделе обсуждаются технические вопросы реализации описанного алгоритма ОФК в задаче навигации пешехода. Описывается предварительная калибровка инерциальных датчиков, инициализация алгоритма, рассматривается вопрос оценивания постоянных смещений нулевых сигналов гироскопов.

2.7.1 Калибровка ИИБ

Калибровка инерциального измерительного блока – процедура, в которой оцениваются значения параметров модели погрешностей инерциальных датчиков, например, (2.38). От качества калибровки во многом зависит точность навигации, поэтому калибровка является обязательным мероприятием перед решением задачи навигации.

В диссертационной работе ИИБ калибровался на низкоточном поворотном стенде с горизонтальной осью вращения по методике Н.А. Парусникова [114]. Эта методика подразумевает проведение трех циклов вращений ИИБ. В каждом цикле одна из приборных осей должна быть сонаправлена оси вращения стенда (с точностью до установки ИИБ на план-шайбе стенда). Показания акселерометров и гироскопов используются в качестве измерений для решения задачи калмановской фильтрации.

Между экспериментами «в полевых условиях» производилась докалибровка блока на основе методик Ю.В. Болотина [94]. Для калибровки акселерометров эти методики подразумевают установку ИИБ в 18 различных положениях и поиск калибровочных параметров, минимизирующих разницу нормы показаний акселерометров и значения удельной силы тяжести. Для калибровки гироскопов эти методики подразумевают плоские повороты на известные углы (достаточно просто реализовать плоские повороты на углы, кратные $\pi/2$) и сравнение интегралов от показаний гироскопов с известными углами. Точность калибровки по такой методике ниже, чем по методике Н.А. Парусникова, при этом не требуется специальное оборудование. Кроме того, эти методики могут работать без «начального приближения», то есть примерного знания калибровочных параметров.

Для МЭМС гироскопов характерна малая стабильность смещений «от за-

пуска к запуску». Это значит, что в каждое включение смещения гироскопов могут отличаться от значений при предыдущем включении на сотни или тысячи градусов в час. Поэтому в навигации пешехода (и не только) принята процедура грубой оценки смещений гироскопов перед началом навигации. Она подразумевает, что после включения ИИБ некоторое время T неподвижен. За это время вычисляются средние значения показаний гироскопов, которые считаются оценкой постоянных смещений. Далее эти оценки вычитаются из показаний гироскопов. При таком подходе, как было сказано ранее, угловая скорость вращения Земли не учитывается. В диссертации использовался такой подход.

2.7.2 Начальная выставка

Начальной выставкой в инерциальной навигации называется процесс определения начальных значений параметров ориентации ИИБ. Существует множество алгоритмов начальной выставки [41], [98], [24]. В высокоточной инерциальной навигации обычно различают грубую и точную начальную выставку. В данном контексте высокоточность навигации заключается в возможности определить начальное значение угла курса по показаниям гироскопов.

В процессе грубой выставки [41] параметры ориентации (углы курса, крена и тангажа, или матрица ориентации) определяются на основе алгебраических соотношений, связывающих осредненные показания инерциальных датчиков и известные значения векторов удельной силы тяжести и угловой скорости вращения Земли в навигационной с.к. Недостаток грубой выставки – она не работает на качающемся или подвижном основании.

В процессе точной начальной выставки динамические алгоритмы оценивания (обычно различные варианты фильтра Калмана) оценивают ошибки определения параметров ориентации как на неподвижном, так и на качающемся основании (начальная выставка на подвижном основании требует дополнительной информации, например, сигналов СНС). В качестве динамической системы используются уравнения ошибок БИНС, а в качестве измерений – измерения постоянных координат (позиционная коррекция), или измерения нулевых скоростей (скоростная коррекция).

В низкоточной инерциальной навигации, к которой относится и навига-

ция пешехода, полноценное решение задачи начальной выставки невозможно. Невозможно определить угол курса, поскольку низкоточные гироскопы не позволяют надежно измерять угловую скорость вращения Земли. Большинство доступных на рынке МЭМС гироскопов именно таковы. В случае, если невозможно определить азимутальную ориентацию блока относительно географической системы координат, навигация происходит в локальной системе координат.

Локальная система координат должна быть привязана к местности, на которой происходит навигация. При этом азимутальная ориентация локальной системы координат относительно географической неизвестна. Для решения именно задачи отслеживания чьих либо перемещений по заданной местности эта информация может быть и не нужна. Например, в помещениях ориентация локальной системы координат в азимуте едва ли полезна. Таким образом, при навигации в локальной системе координат необходимо лишь соотнести навигационную систему координат с ориентирами на местности, если же ориентиров нет – каким-то образом зафиксировать навигационную систему координат.

В диссертации эта задача решалась следующим образом. Изначально угол курса ИИБ в локальной системе координат (угол между продольной осью приборной с. к. и продольной осью навигационной с.к.) полагался равным нулю. Ориентация ИИБ относительно плоскости горизонта в работе вычислялась при помощи ZURT-коррекции. Выше было показано, что ошибки углов крена и тангажа наблюдаемы, поэтому для их оценки достаточно соблюдать условие неподвижности стопы в течение нескольких секунд. Во всех экспериментах длительность этого промежутка равнялась 10-20 секундам. После окончания времени начальной выставки пешеход делал несколько шагов в заданном направлении. Для этого прямолинейного участка траектории вычислялся путевой угол. Затем навигационная с.к. поворачивалась в азимуте на этот угол. После этого можно считать, что направление продольной оси навигационной с.к. задано направлением первого прямолинейного движения пешехода.

2.7.3 Оценивание дрейфов ДУС

Выше было упомянуто, что в навигации пешехода нет общепринятого подхода к моделированию погрешностей гироскопов. В этом разделе рассматривается

возможность оценки постоянных дрейфов ДУС в процессе навигации пешехода.

Рассматривается ОФК, в вектор состояния и вектор ошибок которого включены постоянные дрейфы ДУС. Измерением является нулевая скорость стопы в фазе опоры.

Модельные уравнения для такой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}'_n &= v'_n \\ \dot{v}'_n &= C'_{sn}{}^T f'_s + g_n \\ \dot{C}'_{sn} &= (\hat{\omega}'_s + \hat{\nu}^0_s) C'_{sn} \\ \dot{\nu}^0_s &= 0 \\ Z &= v'_n \end{aligned} \quad X = \begin{bmatrix} p'_n \\ v'_n \\ C'_{sn} \\ \nu^0_s \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Уравнения ошибок примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta \dot{p}_n &= \delta v_n + \hat{p}'_n C'_{ns} (\nu^s_s + \Delta \nu^0_s) \\ \delta \dot{v}_n &= \hat{g}_n \beta_n + \Delta f_n + \hat{v}'_n C'_{ns} (\Delta \nu^0_s + \nu^s_s) \\ \dot{\beta}_n &= C'_{ns} (\Delta \nu^0_s + \nu^s_s) \\ \Delta \dot{\nu}^0_s &= 0 \\ z &= \delta v_n \end{aligned} \quad x = \begin{bmatrix} \delta p_n \\ \delta v_n \\ \beta_n \\ \Delta \nu^0_s \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Здесь $\Delta \nu^0_s$ – ошибка определения постоянного смещения нулевого сигнала ДУС, ν^s_s – шумовая составляющая сигнала ДУС.

Теоретический анализ наблюдаемости в такой системе затруднен, поскольку в правой части присутствует матрица ориентации, зависящая от углов ориентации, которые в свою очередь зависят от времени и могут меняться произвольным образом. Тем не менее возможно получить некоторые качественные выводы, рассматривая упрощенную модель движения человека.

2.7.4 Теоретический анализ наблюдаемости дрейфов ДУС

Проведем упрощенный анализ наблюдаемости дрейфов ДУС по измерениям нулевой скорости для СИНП с одним ИИБ в следующих предположениях:

- Все шаги одинаковы

- фаза опоры мгновенна

Для сокращения выкладок рассмотрим уравнения ошибок без уравнения на ошибки координат, поскольку известно, что они не являются наблюдаемыми переменными:

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_n &= \hat{g}_n \beta_n + \Delta f_n + \hat{v}'_n C'_{ns}(\Delta \nu_s^0 + \nu_s^s) \\ \dot{\beta}_n &= C'_{ns}(\Delta \nu_s^0 + \nu_s^s) \\ \Delta \dot{\nu}_s^0 &= 0 \\ z &= \delta v_n \end{aligned} \quad x = \begin{bmatrix} \delta v_n \\ \beta_n \\ \Delta \nu_s^0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Рассмотрим дискретную систему, описывающую переход от одной фазы опоры к другой.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_{k+1,k} x_k + G_k q_k \\ z_k &= H x_k + r_k \end{aligned}$$

Для коррекции по нулевой скорости матрица измерений имеет вид:

$$H = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Переходная матрица этой системы может быть получена интегрированием правых частей (2.77):

$$F_{k+1,k} = \begin{bmatrix} I & \hat{g}_n T & \hat{g}_n \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_{t_k}^{\tau} C'_{ns}(s) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}'_n(\tau) C'_{ns}(\tau) d\tau \\ 0_3 & I_3 & \int_{t_k}^{t_{k+1}} C'_{ns}(\tau) d\tau \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}$$

Здесь T – длительность фазы переноса стопы, одинаковая для всех шагов.

Введем дополнительные обозначения для компактной записи переходной матрицы:

$$C_1 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} C'_{ns}(\tau) d\tau, \quad C_2 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \int_{t_k}^{\tau} C'_{ns}(s) ds, \quad C_3 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{v}'_n(\tau) C'_{ns}(\tau) d\tau$$

Если все шаги пешехода одинаковы, то матрица $F_{k+1,k}$ также не изменяется от шага к шагу, то есть $F_{k+1,k} = F$. Это позволяет существенно упростить анализ, поскольку в этом случае матрица наблюдаемости нестационарной системы, коей является система (2.77), принимает вид:

$$\mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} HF^k \\ \cdots \\ HF \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & k\hat{g}_n T & k(\hat{g}_n C_2 + C_3) + \frac{k(k-1)}{2}\hat{g}_n T C_1 \\ & \cdots & \\ I_3 & \hat{g}_n T & \hat{g}_n C_2 + C_3 \\ I_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Исследуем ненаблюдаемое подпространство $\mathcal{N}_k$, соответствующее матрице $\mathcal{O}_k$. В него входит вектор

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ g_n \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

Покажем, что других векторов, принадлежащих подпространству $\mathcal{N}_k$, в общем случае не существует. Пусть существует вектор $v_2 = \begin{bmatrix} \bar{w}^T & \bar{\beta}^T & \bar{\nu}^T \end{bmatrix}^T$ такой, что $\mathcal{O}_k v_2 = 0$. Тогда $\bar{w} = 0$. Для того, чтобы удовлетворить всем уравнениям из $\mathcal{O}_k v_2 = 0$ необходимо, чтобы $\hat{g}_n T C_1 \bar{\nu} = 0 \Leftrightarrow \bar{\nu} = C_1^{-1} g$. Рассмотрим уравнение на $\bar{\beta}$:

$$\hat{g}_n T \bar{\beta} = -(\hat{g}_n C_2 + C_3) \bar{\nu}$$

Подставляя в него выражение для $\bar{\nu}$ получим следующее неоднородное линейное уравнение:

$$\hat{g}_n T \bar{\beta} = \underbrace{-(\hat{g}_n C_2 C_1^{-1} + C_3 C_1^{-1}) g}_b$$

Матрица системы $\hat{g}_n$ вырождена и имеет ранг 2, поэтому система имеет решение только в случае, если ранг расширенной матрицы также равен 2. Для этого необходимо, чтобы вектор b имел по крайней мере третью компоненту равной нулю. Это условие может быть выполнено, если матрица $\hat{g}_n C_2 C_1^{-1} + C_3 C_1^{-1}$ вырождена, однако из двух слагаемых лишь матрица $\hat{g}_n C_2 C_1^{-1}$ всегда вырождена. В общем случае вектор b не имеет нулевых компонент и потому уравнение на $\bar{\beta}$ несовместно. Это означает, что не существует вектора v_2 такого, что $\mathcal{O}_k v_2 = 0$.

Существуют специальные случаи, когда дрейфы ненаблюдаемы. Один из них – плоское движение, когда координаты и скорости меняются в вертикаль-

ной плоскости, а из углов ориентации изменяется только тангаж. Этот вариант движения близок к типовому движению пешехода, идущего строго по прямой.

2.7.5 Оцениваемость дрейфов ДУС на имитационных данных

Необходимо выяснить, возможно ли за относительно короткое время (порядка нескольких минут) получить приемлемые оценки дрейфов гироскопов.

Теоретический анализ наблюдаемости не позволяет оценить время, необходимое для оценки тех или иных компонент вектора ошибок. На практике сходимость оценок за длительное время не представляет интереса, поэтому кроме качественного анализа необходимо выяснить количественные характеристики оценок, а именно, скорость убывания ковариаций. Первый шаг в этом случае – анализ ОФК на данных, свободных от инструментальных погрешностей, ненулевых скоростей в фазе опоры и других факторов, присутствующих в реальных экспериментах. Для получения таких данных необходимо имитировать движение стопы. Имитация походки человека – обширная тема. Существует множество подходов к решению этой задачи [115], [2]. Однако большинство подходов, описываемых в литературе, избыточно сложны для целей проверки алгоритмов навигации.

Для анализа оцениваемости дрейфов был разработан простейший имитатор движения стопы человека в процессе ходьбы. Способ моделирования шага был взят из [91]. Координаты стопы в навигационной с.к. в фазе переноса моделируются в виде гармонических функций:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{L}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi(t - t_k)}{T_1} \right) \cos \psi(t) + p_1(t_k) \\ p_2(t) &= \frac{L}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi(t - t_k)}{T_1} \right) \sin \psi(t) + p_2(t_k), \quad t \in [t_k, t_k + T_1] \\ p_3(t) &= H \left(1 - \cos \frac{2\pi(t - t_k)}{T_1} \right) + p_3(t_k) \end{aligned}$$

Здесь L – длина шага, H – высота шага, T_1 – длительность фазы переноса, $\psi(t)$ – текущий угол курса, t_k – момент окончания фазы опоры предыдущего шага.

Углы ориентации ИИБ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \psi(t_k) \\ \gamma(t) &= \gamma^* + \gamma^0 \sin \frac{3\pi(t - t_k)}{T_1}, \quad t \in [t_k, t_k + T_1] \\ \vartheta(t) &= \vartheta^* + \frac{\vartheta^0}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi(t - t_k)}{T_1} \right)\end{aligned}\quad (2.78)$$

Здесь ϑ^0, γ^0 – амплитуды изменения углов тангажа и крена в течение шага, ϑ^*, γ^* – значения углов крена и тангажа в фазе опоры.

В фазе опоры $t \in [t_k + T_1, t_{k+1}]$ координаты не изменялись, скорости полагались равными нулю, углы крена и тангажа также не изменялись. Повороты происходили в фазе опоры, изменялся заданным образом угол курса.

Из теоретического анализа наблюдаемости следует, что оцениваемость дрейфов ДУС зависит от наличия маневров пешехода по курсу (при плоском движении). Простейший маневр – поворот на 90 градусов. Естественно предположить, что при увеличении количества поворотов в траектории должно улучшаться качество оценивания дрейфов ДУС. Генерировались траектории, состоящие из одинакового количества шагов, но с разным количеством поворотов. Будет рассмотрено три траектории, состоящие из 320 шагов: квадрат со стороной 5 шагов (63 поворота), квадрат со стороной 20 шагов (15 поворотов), квадрат со стороной 80 шагов (3 поворота). Углы крена и тангажа моделировались следующим образом: $\gamma^0 = 0$, $\vartheta^0 = \frac{\pi}{3}$, $\gamma^* = 0$, $\vartheta^* = 0$. Угол курса изменялся на 90 градусов каждые n шагов, где n – длина стороны квадрата. На рисунке 2.10 приведены примеры сгенерированных траекторий.

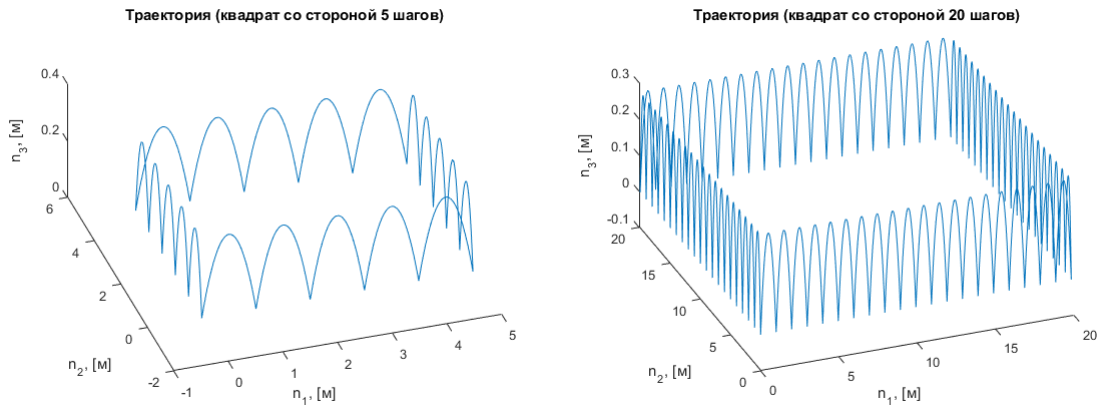


Рис. 2.10: Слева вид симитированной траектории, состоящей из отрезков по 5 шагов, справа – из 20 шагов.

На основе набора координат, скоростей и углов ориентации были смоделированы показания идеальных, то есть свободных от погрешностей, инерциальных датчиков.

Проанализируем результаты оценивания дрейфов гироскопов на данных, полученных в результате применения имитатора, описанного выше. В симитированные показания гироскопов добавлялся постоянный дрейф, равный $10^\circ/\text{час}$. Затем запускался навигационный алгоритм.

При настройке ОФК, работающего в навигационном алгоритме, использовались шумы, близкие к шумам датчиков, использовавшихся в экспериментах. Интенсивность белого шума, соответствующего ν_s^s , была выбрана равной $0.35^\circ/\sqrt{\text{ч}}$, интенсивность белого шума, соответствующего $\Delta^s f_s$, была выбрана равной $1.6\text{м}/\text{с}^2 \cdot 10^{-2}/\sqrt{\text{с}}$. Интенсивность шума измерения нулевой скорости (при осреднении за 1 секунду) была выбрана равной $0.001\text{м}/\text{с}$. Малое значение шума измерений соответствует точному знанию истинной скорости в фазе опоры, которая в имитаторе полагалась равной нулю. Начальные ковариации дрейфов ДУС были выбраны большими, что соответствует отсутствию априорной информации о величине дрейфов: $\sigma_\nu = 100^\circ/\text{ч}$.

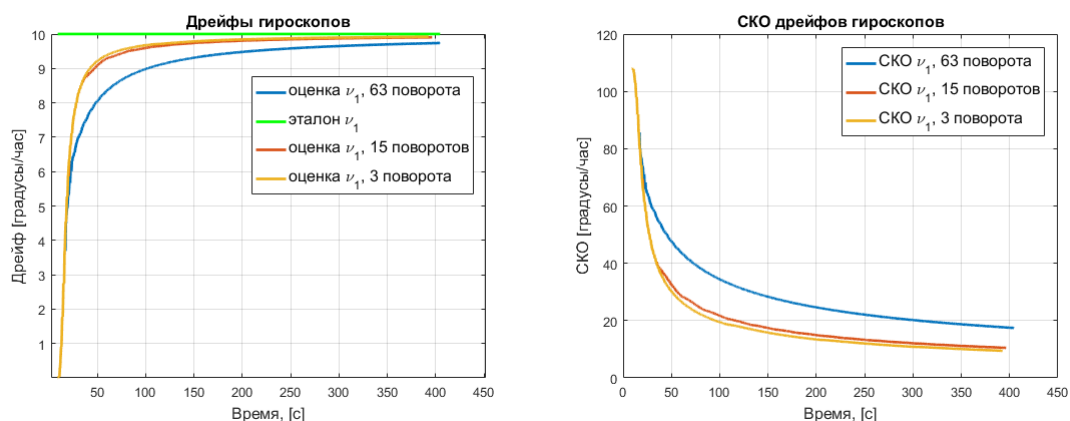


Рис. 2.11: Оценки (слева) и соответствующие им ковариации (справа) дрейфов первого (правого) ДУС для траекторий длины 320 шагов и разным количеством поворотов: 63 поворота (синяя линия), 15 поворотов (красная линия), 3 поворота (желтая линия).

На рисунках 2.11-2.13 приведены значения оценок дрейфов гироскопов и соответствующих им ковариаций для экспериментов, описанных выше. Видно, что скорость убывания ковариаций слабо зависит от количества поворотов.

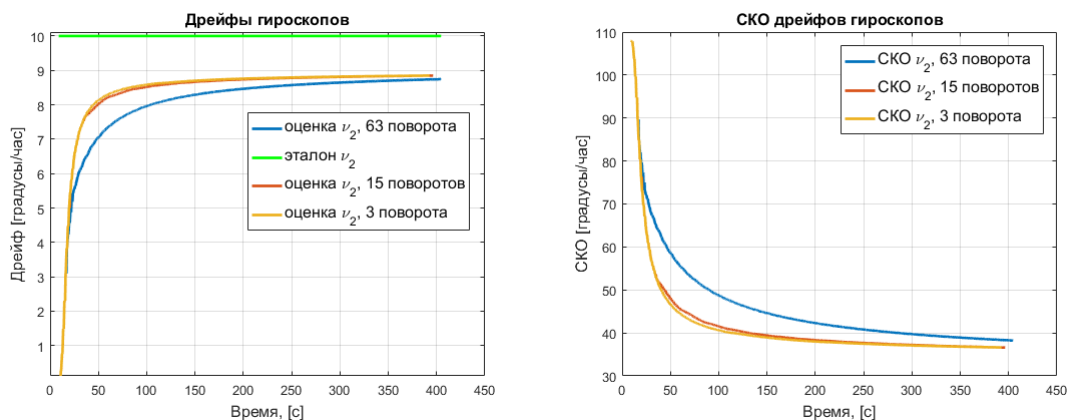


Рис. 2.12: Оценки (слева) и соответствующие им ковариации (справа) дрейфов второго (продольного) ДУС для траекторий длины 320 шагов и разным количеством поворотов: 63 поворота (синяя линия), 15 поворотов (красная линия), 3 поворота (желтая линия).

Можно заметить, что оценки дрейфов «вертикального» гироскопа (рисунок 2.13) не успевают сойтись к заданным значениям дрейфов даже за 5 минут. Ковариации при этом также убывают всего на 10%, тогда как для «горизонтальных» гироскопов ковариации убывают в несколько раз. Этот эффект имеет место при изменяющемся угле крена (когда в формуле (2.78) $\gamma^0 \neq 0$), а также при ненулевых значениях углов крена и тангажа в фазе опоры (когда в формуле (2.78) $\gamma^* \neq 0$, $\vartheta^* \neq 0$).

Таким образом, за короткое время оценку дрейфа вертикального гироскопа при коррекции по нулевой скорости получить не удастся. Описанный выше эффект важен, поскольку дрейф вертикального гироскопа главным образом и приводит к ошибке определения угла курса, а значит и путевого угла.

2.7.6 Оцениваемость дрейфов ДУС для реальных данных

Выше на симитированных данных было показано, что дрейф вертикального ДУС, сильнее всего влияющий на накопление ошибки курса, плохо оценивается, хотя формально наблюдается. В дополнение к этому была сделана попытка оценить дрейфы гироскопов на реальных данных.

Во время неподвижности перед началом движения вычислялись средние значения ДУС, которые вычитались из показаний. После проведения этой процедуры считалось, что $\nu_s^0 = 0$. Затем к показаниям третьего (вертикального)

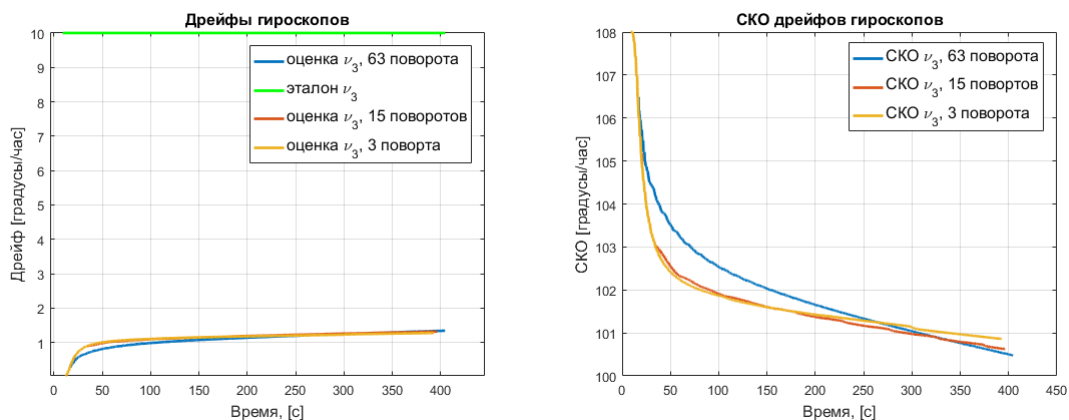


Рис. 2.13: Оценки (слева) и соответствующие им ковариации (справа) дрейфов третьего (вертикального) ДУС для траекторий длины 320 шагов и разным количеством поворотов: 63 поворота (синяя линия), 15 поворотов (красная линия), 3 поворота (желтая линия).

ДУС добавлялся искусственный постоянный дрейф, равный $10^\circ/\text{час}$. Далее запускался навигационный алгоритм.

Описанная процедура проводилась для 10 записей длительностью 10 минут. Первые 15 секунд человек стоял (в этот момент и происходило вычисление средних значений показаний ДУС), затем человек ходил с инерциальными блоками на стопах по коридорам здания. На рисунке 2.14 приведена характерная траектория. Видно, что в ней присутствуют повороты, то есть дрейфы наблюдаемы.

На рисунке 2.15 представлены оценки дрейфов гироскопов, полученные ОФК в двух экспериментах. Видно, что оценки не сходятся к заданным значениям.

2.8 Выводы к главе 2

Исследована задача навигации пешехода с использованием одного и двух инерциальных блоков, закрепленных на стопах. Рассмотрен обобщенный фильтр Калмана, являющийся алгоритмической основой решения задачи. Предложенная схема линеаризации уравнений задачи для применения ОФК несколько отличается от общепринятой. Суть предложенной схемы в том, что ошибки оценки не порождены локальной системой координат на многообразии. Это позволяет корректно описывать процедуру компенсации вектора состояния в случае использования так называемых динамических ошибок.

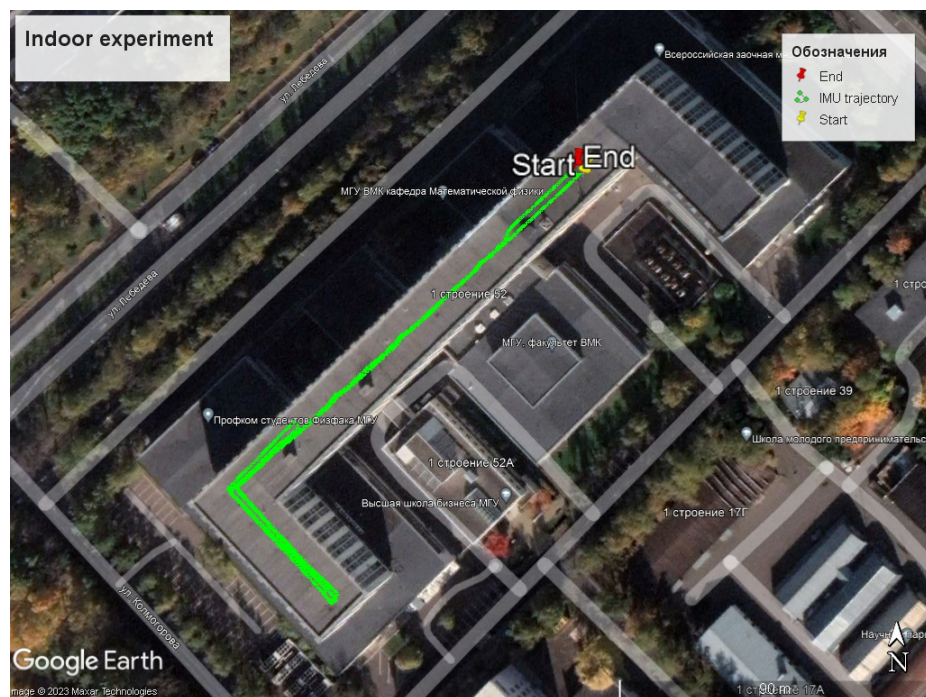


Рис. 2.14: Типовая траектория пешехода в экспериментах, для которых производились оценки дрейфов.

Центральная тема главы – понятие состоятельности ОФК. Описано понятие состоятельности фильтра по Бар-Шалому и вводится определение состоятельности, подходящее для ОФК. Вводится понятие структурной состоятельности, которое позволяет аналитически проверять несостоятельность ОФК.

Приведены необходимые сведения о системах координат и параметрах ориентации, использующихся в работе.

Рассмотрена система инерциальной навигации пешехода с одним инерциальным блоком. Выписаны точные и упрощенные уравнения движения, за счет решения которых происходит прогноз траектории. В упрощенных уравнениях не учитывается вращение Земли и зависимость силы тяжести от местоположения. Описаны модели погрешностей инерциальных датчиков и обсуждается причина, по которой в работе учитываются лишь случайные погрешности. Записываются уравнения ошибок. Описывается понятие динамических ошибок и уравнения ошибок записываются в трех различных формах, отвечающих трем комбинациям полных и динамических ошибок: форма FF (полные ошибки координат и скоростей), форма FD (полные ошибки координат и динамические ошибки скоростей), форма DD (динамические ошибки координат и скоростей). Описывается применявшийся в работе подход к коррекции по нулевой скоро-

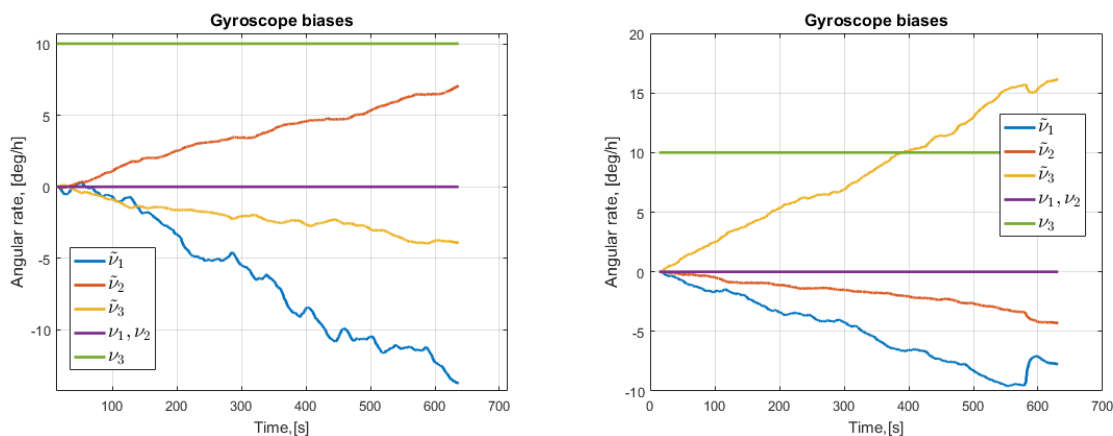


Рис. 2.15: Оценки дрейфов гироскопов в двух реальных экспериментах. Зеленая линия – введенный ненулевой дрейф по вертикальной оси ИИБ, фиолетовая линия – нулевые дрейфы по другим осям. Синяя, красная, желтая линии – оценки дрейфов по все трем осям.

сти стопы: детектор нулевой скорости и различные формы уравнений измерений для ОФК. В дополнение к трем формам уравнений ошибок вводятся две формы записи уравнений нулевой скорости: форма N (в навигационной с.к.) и форма S (в приборной с.к.). Также описывается инициализация алгоритма, а именно процедура начальной выставки.

Рассмотрена система инерциальной навигации пешехода с двумя инерциальными блоками, закрепленными на разных стопах. Вводятся нужные обозначения и описывается коррекция по расстоянию между стопами. Рассматривается две формы уравнений измерений, возникающих из-за применения полных (формы FF и FD) или динамических (форма DD) ошибок координат.

С помощью понятия структурной состоятельности исследованы два алгоритма коррекции в навигации пешехода: коррекция по нулевой скорости и коррекция по расстоянию между стопами. Для коррекции по нулевой скорости также проводится ковариационный анализ и статистическое моделирование, которое подтверждает полученный аналитически вывод: ОФК в задаче коррекции по нулевой скорости несостоятелен при использовании полных ошибок скоростей (форма FF уравнений ошибок) и любых форм уравнений измерений, и состоятелен при использовании динамических ошибок скорости (формы FD и DD) и формы S уравнений измерений. ОФК в задаче коррекции по нулевой скорости и по расстоянию между стопами структурно состоятелен при исполь-

зовании динамических ошибок координат (форма DD уравнений ошибок).

В конце главы рассмотрены технические особенности реализации алгоритмов. Обсуждается калибровка инерциального блока, начальная выставка. Кроме того описаны попытки оценки постоянных дрейфов гироскопов. На основе анализа наблюдаемости задачи, а также проверки качества оцениваемости на реальных и имитационных данных сделан вывод о нецелесообразности оценки постоянных смещений гироскопов при помощи ОФК с коррекцией по нулевой скорости.

Глава 3

Методы коррекции путевого угла в навигации пешехода

Рассматривается проблема нарастания ошибок навигации из-за ошибок определения угла курса БИНС и практические способы борьбы с этим явлением. Анализируется подход, основанный на коррекции траектории пешехода по информации о прямолинейности движения. В рамках этого подхода измеряется и корректируется путевой угол. Подразумевается, что угол курса ведет себя так же, как путевой угол. При определенных гипотезах, наложенных на движение пешехода, можно компенсировать ошибки путевого угла, какую бы природу они не имели, будь то ошибки ДУС, ошибки детектирования нулевой скорости или прочие погрешности. Описывается алгоритм коррекции предложенный в работе [1] и его модификация [42], призванная увеличить надежность работы.

Предлагается новый алгоритм, главная идея которого – учет сильных сторон эвристических алгоритмов коррекции путевого угла: алгоритмов коррекции по расстоянию между стопами (DUPТ-коррекции) и по информации о прямолинейности движения (HDE). За основу берется DUPТ-коррекция, поскольку она более надежна. Методы алгоритмов HDE используются для придания алгоритму DUPТ-коррекции адаптивности. Адаптивность заключается в неодинаковой интенсивности коррекции разных БИНС в зависимости от оценки их точности, вырабатываемой самим алгоритмом. Представляются результаты тестирования

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [21], [102].

предложенного алгоритма на большом количестве экспериментальных данных.

Большинство результатов в этой главе носит экспериментальный характер.

Последовательность изложения следующая. Вначале приводятся необходимые сведения об алгоритмах коррекции по прямолинейному движению. Затем описывается предлагаемый алгоритм адаптивной коррекции: идея, реализация. В конце описываются эксперименты, проведенные для апробации алгоритма и приводятся результаты их обработки различными алгоритмами.

3.1 Алгоритмы коррекции по прямолинейному движению

Выше было показано, что оценивание дрейфов ДУС не дает приемлемых результатов, а значит не позволит бороться с накоплением ошибки путевого угла.

Одним из способов борьбы с ошибкой путевого угла является эвристическая процедура, которую мы дальше будем обобщенно называть коррекцией по прямолинейному движению. Суть этой процедуры следующая. В процессе движения анализируется траектория пешехода, обычно на скользящем интервале, в который попадают координаты нескольких следовых точек (следовой точкой называется положение ИИБ в момент фазы опоры ноги). Анализируя изменение координат, можно обнаружить участки, где пешеход идет прямо, то есть путевой угол не меняется от шага к шагу. Основное предположение алгоритмов коррекции по прямолинейному движению — небольшие отклонения от такого движения являются следствием накопления ошибок, которые не могут быть скомпенсированы коррекцией по нулевой скорости. По этой причине при обнаружении прямолинейного движения происходит коррекция путевого угла. Измерением служит азимут так называемого выделенного направления (по терминологии авторов [1] *dominant direction*) – фиксированного в навигационной системе координат направления. Выделенные направления могут выбираться по-разному. Такая процедура позволяет скомпенсировать нарастание ошибок путевого угла на участках прямолинейного движения человека.

Описанную выше идею можно реализовать различными способами. Первым, по-видимому, был предложен алгоритм *Heuristic Drift Reduction (HDR)* [19],

суть которого заключалась в коррекции «виртуальной угловой скорости», то есть величины, пропорциональной скорости изменения путевого угла. В дальнейшем была предложена его модификация [20], которая называлась Heuristic Drift Elimination (HDE). Ее особенностью была коррекция непосредственно путевого угла. Этот алгоритм подробно рассматриваться не будет, поскольку использовавшиеся в нем решения широко не применялись. Вместо этого будет описан алгоритм [1], на котором базируется большинство современных алгоритмов коррекции по прямолинейному движению. В настоящее время принято называть подобные алгоритмы HDE с возможным уточнением типа (iHDE – improved HDE, eHDE - enhanced HDE и т.п.).

3.1.1 Алгоритм HDE

Опишем шаги алгоритма HDE следуя статье [1].

Первый блок алгоритма HDE — анализ траектории пешехода. Информацию о траектории удобно использовать в форме следовых точек пешехода. Следовая точка — это точка, задаваемая значениями координат БИНС в момент фазы опоры. Будем обозначать координаты следовых точек следующим образом: $p_k^\circ = p'_n(t_k^\circ)$. Поскольку длительность фазы опоры, как правило, больше одного отсчета, примем, что t_k° — последний отсчет текущей фазы опоры.

Для определения прямолинейности движения авторы [1] предлагали проверять следующие условия:

- шаг сделан при «нормальной ходьбе» (по терминологии авторов [1] normal walking)
- путевой угол на текущем шаге мало отличается от путевого угла на предыдущем шаге

Условие «нормальной ходьбы» эвристично и заключается в проверке длины шага:

$$\|p_k^\circ - p_{k-1}^\circ\| > \delta_{SL} \Rightarrow SL_k = 1$$

$$\|p_k^\circ - p_{k-1}^\circ\| < \delta_{SL} \Rightarrow SL_k = 0$$

Здесь флаг $SL_k = 1$ означает, что шаг сделан при «нормальной ходьбе». Нижний индекс k обозначает момент времени t_k° . Порог δ_{SL} задается априорно.

Если $SL_k = 1$, проверяется условие постоянства путевого угла.

$$\begin{aligned} |\psi_k^{step} - \psi_{k-1}^{step}| &> \delta_{SH} \Rightarrow SLP_k = 0 \\ |\psi_k^{step} - \psi_{k-1}^{step}| &< \delta_{SH} \Rightarrow SLP_k = 1 \end{aligned}$$

Здесь $\psi_k^{step}, \psi_{k-1}^{step}$ обозначают путевые углы пешехода на k и $k - 1$ шагах:

$$\psi_k^{step} = \arctg \frac{p_{n2,k}^\circ - p_{n2,k-1}^\circ}{p_{n1,k}^\circ - p_{n1,k-1}^\circ}$$

выражения $p_{n2,k}^\circ - p_{n2,k-1}^\circ, p_{n1,k}^\circ - p_{n1,k-1}^\circ$ описывают приращения координат за шаг вдоль горизонтальных координатных осей навигационной с.к. Флаг $SLP_k = 1$ (straight line path) означает прямолинейное движение. Порог δ_{SH} задает максимальное изменение путевого угла, считающееся не нарушающим условие прямолинейности движения.

Второй блок алгоритма HDE — формирование измерения в моменты прямолинейного движения, то есть когда $SLP_k = 1$. Измерение — это разность путевого угла ψ_k^{step} , вычисленного на предыдущем шаге, и азимута выделенного направления ψ_k^{DD} , которое также выбирается из фиксированного множества выделенных направлений $\{\psi^{DD}\}$. Множество выделенных направлений выбирается заранее.

Авторы [1] формировали $\{\psi^{DD}\}$ следующим образом. Вначале выбиралось одно выделенное направление ψ_I^{DD} с помощью спутниковой карты здания, в котором происходила навигация (см. рисунок 3.1). Остальные выделенные направления вычислялись следующим образом:

$$\psi_{II}^{DD} = \psi_I^{DD} + \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{III}^{DD} = \psi_I^{DD} + \pi, \quad \psi_{IV}^{DD} = \psi_I^{DD} + \frac{3\pi}{2} \quad (3.1)$$

Таким образом в [1] множество выделенных направлений имеет вид $\{\psi^{DD}\} = \{\psi_I^{DD}, \psi_{II}^{DD}, \psi_{III}^{DD}, \psi_{IV}^{DD}\}$.

В качестве ψ_k^{DD} выбирается выделенное направление, ближайшее к направ-

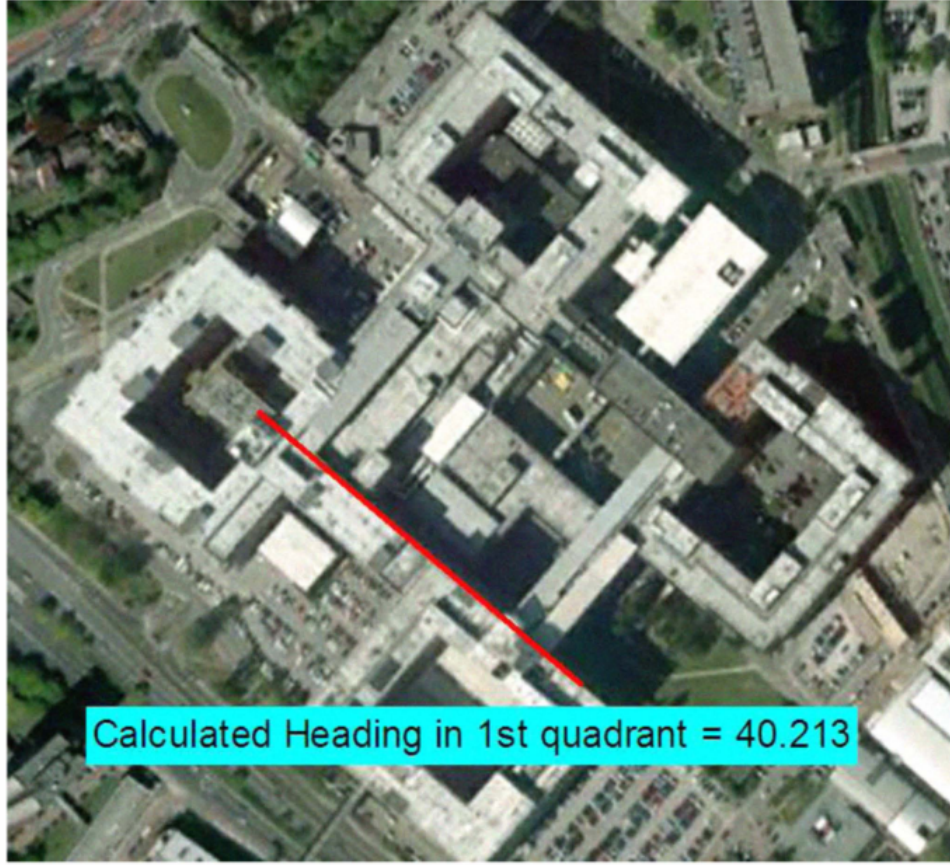


Рис. 3.1: Спутниковое изображение здания и выделенное направление в географической с.к., вычисленное по изображению. Рисунок из [1].

лению движения пешехода, которое отождествляется с путевым углом ψ_k^{step} .

$$\psi_k^{DD} = \begin{cases} \psi_I^{DD}, & |\psi_k^{step} - \psi_I^{DD}| = \min_{DD} |\psi_k^{step} - DD| \\ \psi_{II}^{DD}, & |\psi_k^{step} - \psi_{II}^{DD}| = \min_{DD} |\psi_k^{step} - DD| \\ \psi_{III}^{DD}, & |\psi_k^{step} - \psi_{III}^{DD}| = \min_{DD} |\psi_k^{step} - DD| \\ \psi_{IV}^{DD}, & |\psi_k^{step} - \psi_{IV}^{DD}| = \min_{DD} |\psi_k^{step} - DD| \end{cases}, \quad (3.2)$$

$$DD = \{\psi_I^{DD}, \psi_{II}^{DD}, \psi_{III}^{DD}, \psi_{IV}^{DD}\} \quad (3.3)$$

Измерения в терминах вектора ошибок формируются следующим образом:

$$z_k^{HDE} = \psi_k^{step} - \psi_k^{DD} + r^{HDE} = H^{HDE}x + r^{HDE}$$

Вид матрицы H^{HDE} зависит от процедуры линеаризации параметров ориентации, в рассматриваемом случае — матрицы ориентации, а также состава вектора ошибок. Ниже будет рассматриваться вектор ошибок вида $x =$

$\begin{pmatrix} \delta p_n^T & \delta v_n^T & \beta_n^T \end{pmatrix}^T$. В [1] вместо точного выражения для H^{HDE} используется приближение:

$$H^{HDE} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Предполагается, что по измерению путевого угла ψ_k^{step} можно корректировать ошибку курса БИНС – β_3 . Другими словами, считается, что угол курса ведет себя так же, как путевой угол. При этом значительное отличие путевого угла от угла курса не влияет на работу алгоритма.

3.1.2 Алгоритм iHDE

Алгоритм HDE позволяет значительно повысить точность при движении пешехода вдоль выделенных направлений. Очевидно, это условие может быть не выполнено. В [42] были выделены два случая, в которых алгоритм HDE может вносить в навигационное решение систематические ошибки:

- Прямолинейное движение происходит вдоль направления, значительно отличающегося от выделенного
- Движение происходит по кривой большого радиуса, вследствие чего детектор прямолинейного движения принимает дугу окружности за прямую.

Для решения проблемы авторы предложили [42] алгоритм iHDE (improved HDE). От описанного выше HDE их алгоритм отличался двумя важными усовершенствованиями. Авторы предлагали:

- Вычислять ковариацию измерения HDE, которая зависит от близости обнаруженного направления прямолинейного движения к выделенному:

$$\sigma_{HDE} = \frac{\sigma_0}{e^{\kappa \|\psi_k^{step} - \psi_k^{DD}\|}}$$

Здесь κ – весовой коэффициент, σ_0 – априорное значение ковариации.

Таким образом, чем дальше найденное направление от выделенного, тем меньше вес соответствующего измерения ошибки курса.

- Анализировать более двух шагов для более надежного обнаружения прямолинейного участка. Авторы [42] предложили «скользящее окно» из 5 шагов. В этом скользящем окне вычислялось среднее значение путевого угла и с порогом сравнивалось максимальное отклонение от него.

$$SLP_k = \begin{cases} 1, & \max_{j=k-N, \dots, k} (|\psi_j^{step} - \bar{\psi}^{step}|) < \delta_{SH}^*, \\ 0, & \max_{j=k-N, \dots, k} (|\psi_j^{step} - \bar{\psi}^{step}|) > \delta_{SH}^* \end{cases} \quad \bar{\psi}^{step} = \frac{1}{N} \sum_{j=k-N}^k \psi_j^{step}$$

Предложенные авторами усовершенствования позволили значительно увеличить надежность алгоритма. Под надежностью далее будет пониматься вероятность не внести систематические ошибки алгоритмом коррекции в навигационное решение. Чем выше такая вероятность – тем выше надежность. В дальнейшем предлагались и другие усовершенствования алгоритмов типа HDE [43],[30], однако все они предлагали в основном ужесточение критериев прямолинейности движения.

Алгоритмы типа HDE могут существенно увеличивать точность [1], [20] в тех случаях, когда гипотезы, лежащие в основе алгоритма, выполняются (много прямолинейных участков, направления которых близки к выделенным направлениям) и почти не влияют на решение в противном случае (прямолинейных участков мало, либо они есть, но их направления далеки от выделенных).

3.2 Алгоритм адаптивной коррекции по расстоянию между стопами (ADUPT)

Предлагается новый алгоритм, который является синтезом алгоритмов коррекции по расстоянию между стопами (далее DUPT-коррекция или просто DUPT) и алгоритмов коррекции по информации о прямолинейном движении (далее HDE). При этом основой является DUPT, поскольку он априори более надежен. Всегда верна гипотеза о том, что стопы пешехода не могут удаляться друг от друга на расстояние, большее определенной константы. Алгоритм HDE является вспомогательным. Его элементы используются для того, чтобы придать алгоритму DUPT-коррекции адаптивность. Ниже будет вначале описана общая идея алгоритма, а затем приведено формальное описание.

3.2.1 Идея ADUPT

Для объяснения идеи адаптивной коррекции по расстоянию между стопами рассмотрим пример.

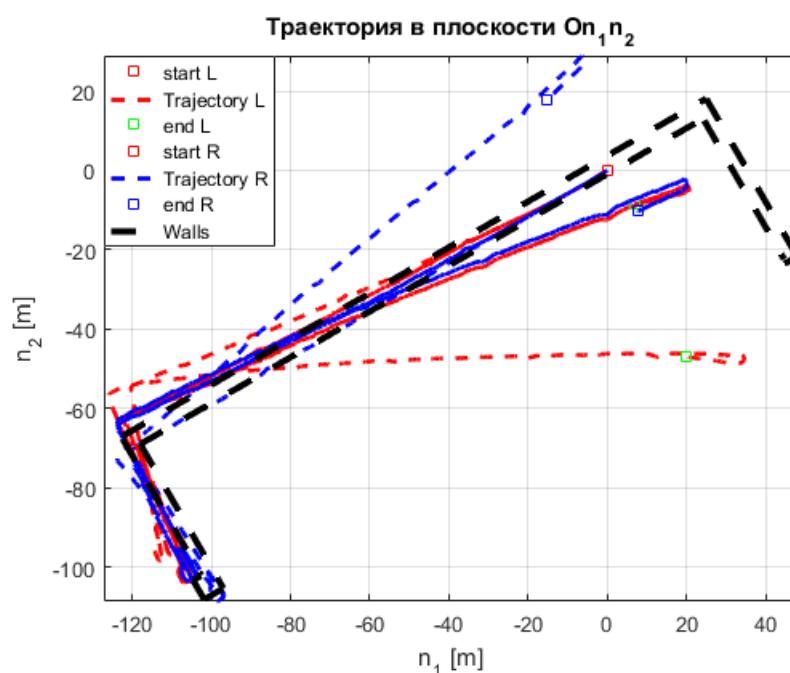


Рис. 3.2: Траектории левой (красный) и правой (синий) БИНС. Пунктиром обозначены независимые решения. Сплошные линии – траектории после применения DUPT-коррекции.

На рисунке 3.2 изображены траектории двух БИНС, закрепленных на левой и правой стопах пешехода. Черным пунктиром обозначены стены здания, в котором проходил эксперимент. Эксперимент заключался в ходьбе человека в здании по замкнутой траектории. Поэтому начальная точка в идеале должна совпадать с конечной. Точность навигации оценивается как отклонение конечной точки траектории от начальной.

Пунктиром красного и синего цвета обозначены траектории, полученные в результате независимой обработки информации двух БИНС (только ZUPT-коррекция). Очевидно, точность левой БИНС (красная линия) ниже. Это выражается в большей ошибке навигации. Она вызвана в первую очередь накоплением ошибки определения курса, которая проявляется в искажении путевого угла. У левой БИНС это накопление происходит быстрее, в результате траектория «загибается» в большей степени.

Сплошные линии обозначают траектории, полученные в результате применения DUPТ-коррекции. Хорошо видно, что траектории обеих БИНС после применения DUPТ лежат посередине между траекториями левой и правой БИНС, полученными при независимой обработке информации. Это следствие неявного предположения, принимаемого для DUPТ-коррекции: БИНС равно точны. Это проявляется в симметричной матрице измерений:

$$H^{DUPТ} = \begin{bmatrix} S^l & S^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^l & -S^l \end{bmatrix}$$

При одинаковых настройках ОФК для левой и правой БИНС будут равны соответствующие им блоки ковариаций. В этих условиях векторы ошибок, формируемые при DUPТ-коррекции, для левой и правой БИНС будут обладать следующим свойством:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^l \\ \tilde{x}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^l \\ -\tilde{x}^l \end{pmatrix}$$

Это соотношение и приводит к наблюдаемому эффекту – скорректированные по расстоянию между стопами траектории БИНС проходят как бы посередине между независимыми (корректируемыми только по ZUPТ).

Очевидно, что точность навигации была бы выше, если бы каким-то образом была учтена неодинаковая точность БИНС, так хорошо заметная на рис.3.2. Желательно, чтобы для учета неравноточности не было необходимости оценивать параметры ошибок БИНС предварительно, поскольку это требует дополнительных экспериментов.

Допустим, удалось оценить точность каждой БИНС в каждый момент времени. Тогда на основе этой информации можно изменить симметричный характер DUPТ-коррекции, а именно – добиться того, чтобы менее точная БИНС корректировалась в большей степени. То есть, к примеру, если правая БИНС точнее левой (как на рисунке 3.2), должно быть выполнено неравенство $\|x^l\| > \|x^r\|$. В этом случае траектории после DUPТ-коррекции не будут представлять из себя среднее между траекториями левой и правой БИНС. Вместо этого траектория левой БИНС будет скорректирована в большей степени, чем правой. В результате точность навигации увеличится.

Таким образом задача построения адаптивной DUPТ-коррекции (далее ADUPТ) сводится к следующим подзадачам:

- Оценивание точности БИНС в режиме реального времени
- Учет точности БИНС при DUPТ-коррекции

3.2.2 Мера ошибок БИНС

Рассмотрим задачу оценивания точности БИНС. Ее можно решать по-разному. Идеальным вариантом является предварительный учет всех особенностей системы. В высокоточной навигации этим предварительным этапом является калибровка. Для этого проводятся специальные эксперименты и используется сложное оборудование. При эксплуатации системы неизбежно искажение калибровочных параметров, таких как смещения нулевых сигналов и масштабных коэффициентов. Поэтому общепринятым подходом является оценка инструментальных погрешностей инерциальных датчиков в режиме навигации. При наличии необходимой корректирующей информации оценки инструментальных погрешностей позволяют с высокой точностью компенсировать индивидуальные особенности БИНС.

В случае низкоточных микромеханических датчиков, которые рассматриваются в диссертационной работе, описанный выше подход малоэффективен. Предварительная калибровка МЭМС, в особенности гироскопов, малопродуктивна, поскольку дрейфы от запуска к запуску могут достигать сотен градусов в час. Поэтому приходится прибегать к упрощенной процедуре калибровки, когда вычисляются средние значения показаний ДУС на участке неподвижности и далее эти значения считаются грубыми оценками дрейфов (процедура описана в разделе 2.7.1). Также не дает удовлетворительных результатов и оценивание дрейфов ДУС в процессе навигации с привлечением информации о нулевой скорости стопы (см. раздел 2.7.3).

Некоторые подходы из высокоточной навигации все же можно применить в навигации при помощи МЭМС. Существуют способы оценки случайных составляющих ошибок инерциальных датчиков [110]. Большинство из них основаны на интерпретации вариации Аллана – эмпирической оценки рассеивания в шумах измерений [119]. Анализируя вариацию Аллана, можно оценивать интенсивности шумов в уравнениях динамики систем, соответствующих случайным ошибкам инерциальных датчиков [31]. Для проведения подобного анализа

необходимы длительные эксперименты, поскольку достоверность оценок параметров кривой вариации Аллана зависит от длительности записи. Кроме того, оценки параметров шумов обычно фиксируются. Однако ошибки БИНС могут меняться в процессе навигации в силу низкой стабильности инструментальных погрешностей. На последние может влиять изменение температуры, ударная нагрузка и т.п. Учитывать все эти эффекты с помощью моделей затруднительно.

Предлагается оценивать точность БИНС, анализируя навигационное решение. Такой подход позволяет отказаться от моделирования ошибок датчиков, надежность которого в случае МЭМС сомнительна. Вместо этого используется методы алгоритмов типа HDE, а именно. Ищутся участки прямолинейного движения. На этих участках вычисляются меры ошибок для каждой БИНС. Меры ошибок вычисляются исходя из предположений алгоритма HDE – искривление траектории на прямолинейных участках есть следствие накопления различных ошибок.

Меры ошибок вычисляются следующим образом. Обозначим через T_{SLP} множество моментов времени, когда установлено, что пешеход идет прямо. Способ отнесения моментов времени к T_{SLP} будет описан позже. Отметим, что под моментами времени в данном случае понимаются моменты, когда нога находится в фазе опоры (аналогично определению моментов времени, соответствующих следовым точкам в разделе 3.1.1). При определении прямолинейного движения пешехода, то есть $t_k \in T_{SLP}$, для каждой БИНС выбирается выделенное направление $\psi_k^{DD,l}$, $\psi_k^{DD,r}$ как ближайшее выделенное направление к текущему путевому углу $\psi_k^{step,l}$, $\psi_k^{step,r}$. Обозначим меры ошибок левой и правой БИНС в момент времени t_k как α_k^l и α_k^r соответственно. Вычисляются они как накапливающиеся суммы модулей измерений HDE:

$$\alpha_k^l = \sum_{t_i \in T_{SLP}}^{t_i \leq t_k} |\psi_i^{step,l} - \psi_i^{DD,l}|, \quad \alpha_k^r = \sum_{t_i \in T_{SLP}}^{t_i \leq t_k} |\psi_i^{step,r} - \psi_i^{DD,r}| \quad (3.4)$$

Таким образом, меры ошибок обновляются в моменты прямолинейного движения пешехода и пропорциональны отклонению путевого угла пешехода от выделенного направления. Возникает вопрос, надежна ли такая характеристика для оценки точности БИНС в свете проблем HDE, о которых говорилось в разделе 3.1.2. Положительный ответ на этот вопрос был получен экспериментально.

3.2.3 Учет мер ошибок БИНС при DUPТ-коррекции

Рассмотрим задачу учета мер ошибок БИНС в процедуре коррекции по расстоянию между стопами. Изначально автором предпринимались попытки использовать формализм адаптивной каламновской фильтрации. Один из вариантов описан в [55]. Автор предлагал оценивать интенсивности шумов измерений и шумов в динамической системе посредством обработки ошибок оценок измерений ФК. Однако такой подход не удалось применить в рассматриваемом случае, поскольку ОФК не обрабатывает измерения HDE. В нашем случае невязки $\psi_i^{step} - \psi_i^{DD}$ служат лишь для вычисления мер ошибок.

Другой способ адаптации ФК к параметрам системы предлагался в [57], однако авторы предъявляли специфические требования к системе, например, независимость вектора состояния от адаптируемых параметров. Далее будет видно, что это условие невозможно выполнить в рассматриваемой задаче.

В диссертации предложен способ адаптации ОФК, использующегося для DUPТ-коррекции, при помощи мер ошибок БИНС [21]. Его основная идея – увеличение ковариаций, соответствующих менее точной БИНС, на некоторую матрицу ΔP , способ формирования которой описан ниже:

$$\begin{bmatrix} P^l & P^{l-r} \\ P^{l-r} & P^r \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} P^l & P^{l-r} \\ P^{l-r} & P^r + \Delta P \end{bmatrix}, & \alpha_k^l < \alpha_k^r \\ \begin{bmatrix} P^l + \Delta P & P^{l-r} \\ P^{l-r} & P^r \end{bmatrix}, & \alpha_k^l > \alpha_k^r \end{cases}$$

Здесь P^l , P^r и P^{l-r} обозначают блоки матрицы ковариаций P^{lr} , соответствующей СИНП с двумя БИНС:

$$P^{lr} = E[x^{lr} x^{lrT}] = \begin{bmatrix} P^l & P^{l-r} \\ P^{l-rT} & P^r \end{bmatrix}$$

Таким образом, необходимый результат ($\|x^l\| > \|x^r\|$) достигается корректно с точки зрения теории оценивания:

$$x^{lr} = Kz = \begin{pmatrix} x^l \\ x^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P^l + \Delta P - P^{l-r})S^{lT}z \\ -(P^r - P^{l-r})S^{lT}z \end{pmatrix} \Rightarrow \|x^l\| > \|x^r\|$$

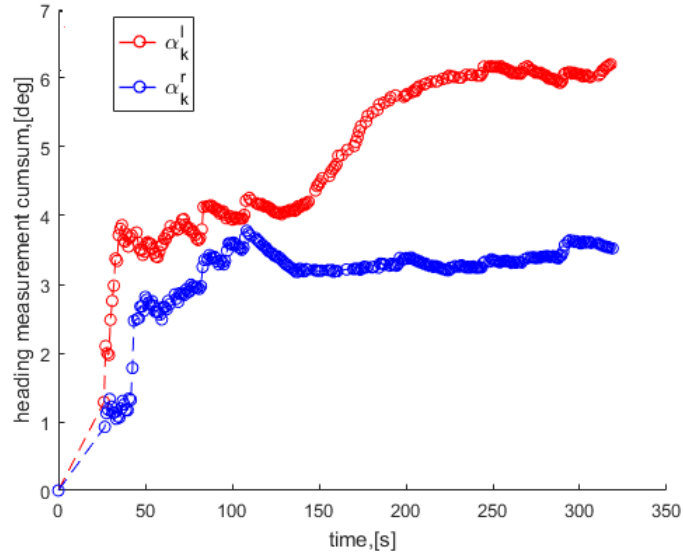


Рис. 3.3: Меры ошибок для левой и правой БИНС.

На рисунке 3.3 приведены меры ошибок для левой и правой БИНС, а на рисунке 3.4 – результат применения ADUPT с изменением ковариаций. Видно, что механизм изменения ковариаций сработал благодаря стабильно большей мере ошибки левой БИНС. Поэтому результат ADUPT (голубая и фиолетовая сплошные линии) оказался лучше результата DUPT (красная и синяя сплошные линии).

3.2.4 Реализация ADUPT

Опишем детали алгоритма адаптивной коррекции по расстоянию между стопами. Используются обозначения, ранее введенные в разделе 3.1.1.

На этапе инициализации левая и правая БИНС работают независимо. После начала движения БИНС работают в режиме DUPT-коррекции, одновременно для каждой БИНС анализируется траектория на предмет наличия участков прямолинейного движения.

В каждой следовой точке проверяется условие «нормальной ходьбы»:

$$SL_k = \begin{cases} 1, & \|p_k^\circ - p_{k-1}^\circ\| < \delta_{SL} \\ 0, & \|p_k^\circ - p_{k-1}^\circ\| > \delta_{SL} \end{cases}$$

в работе $\delta_{SL} = 1.3$ м.

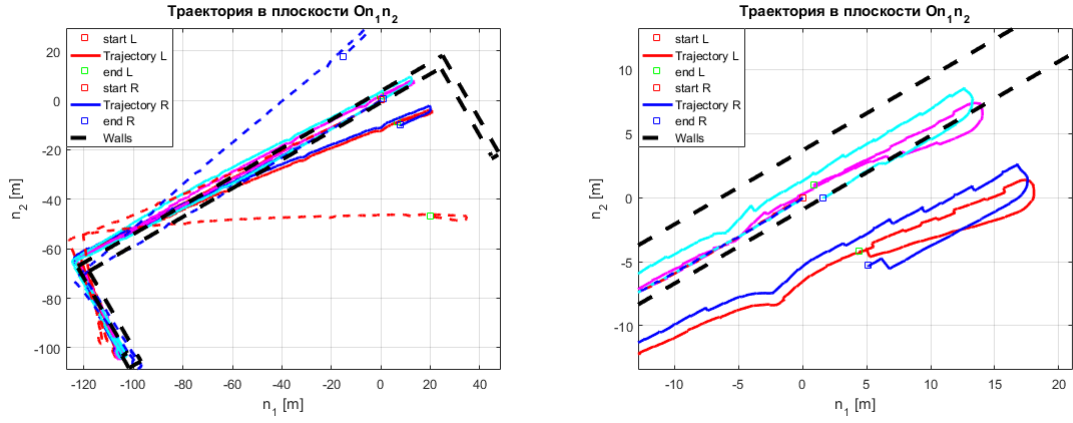


Рис. 3.4: Траектории левой и правой БИНС. Пунктиром обозначены независимые решения. Синяя и красная сплошные линии – траектории после применения DURT-коррекции. Фиолетовая и голубая сплошные линии – траектории после применения ADURT-коррекции. Слева траектории целиком, а справа – увеличенный фрагмент конечного участка.

Если $SL_k = 1$, для определения прямолинейного движения применяется следующий детектор:

$$SLP_k = \begin{cases} 1, & \max_{k \in \Delta_n} (\psi_k^{step} - \bar{\psi}^{step}) < \delta_{SH} \vee \frac{1}{n-1} \sum_{k \in \Delta_n} (\psi_k^{step} - \bar{\psi}^{step})^2 < \delta_{SH}^* \\ 0, & \max_{k \in \Delta_n} (\psi_k^{step} - \bar{\psi}^{step}) > \delta_{SH} \wedge \frac{1}{n-1} \sum_{k \in \Delta_n} (\psi_k^{step} - \bar{\psi}^{step})^2 > \delta_{SH}^* \end{cases}$$

Здесь $\vee$ – логическое ИЛИ, а $\wedge$ – логическое И, Δ_n – множество моментов времени, образующих скользящий интервал из n точек, в котором анализируется траектория, $\bar{\psi}^{step}$ – среднее значение ψ_k^{step} в скользящем интервале Δ_n . В работе $n = 6$, $\delta_{SH} = \delta_{SH}^* = 3^\circ$.

Для каждой из БИНС формируется флаг прямолинейного движения: SLP_k^l , SLP_k^r .

Затем проверяется гипотеза о прямолинейном движении пешехода. Теоретически возможна ситуация, когда $SLP_k^l \neq SLP_k^r$, поэтому проверке подлежат следующие гипотезы:

- $\mathcal{H}_0^{lr}$: Движение пешехода непрямолинейное
- $\mathcal{H}_1^{lr}$: Движение пешехода прямолинейное

Формализуются они следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^{lr} &: SLP_k^l = 0 \vee SLP_k^r = 0 \\ \mathcal{H}_1^{lr} &: SLP_k^l = 1 \wedge SLP_k^r = 1\end{aligned}$$

Мы считаем движение пешехода прямолинейным, когда для обоих БИНС принята гипотеза о прямолинейности движения. Во всех остальных случаях движение пешехода считается непрямолинейным.

Если принята гипотеза $\mathcal{H}_1^{lr}$ происходит выбор выделенного направления ψ_k^{DD} по формуле (3.2). В диссертационной работе в качестве первого выделенного направления ψ_I^{DD} выбирается направление первого участка прямолинейного движения. Остальные выделенные направления задаются формулой (3.1), то есть используется подход авторов [19],[20].

После выбора выделенного направления вычисляются меры ошибок для каждой БИНС по формуле (3.4). Далее происходит проверка следующих гипотез:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &: \text{Левая БИНС точнее правой} \\ \mathcal{H}_1 &: \text{Правая БИНС точнее левой}\end{aligned}$$

Формализуются они так:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &: \alpha^l < \alpha_k^r \\ \mathcal{H}_1 &: \alpha^l > \alpha_k^r\end{aligned}$$

При выборе гипотезы $\mathcal{H}_0$ увеличивается блок матрицы ковариаций, соответствующий ошибкам координат правой БИНС:

$$P^{lr} = \begin{bmatrix} P^l & P^{l-r} \\ P^{l-r} & P^r + \Delta P \end{bmatrix}, \quad \Delta P = \begin{bmatrix} P_p & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

При выборе гипотезы $\mathcal{H}_1$ увеличивается блок матрицы ковариаций, соответствующий ошибкам координат левой БИНС:

$$P^{lr} = \begin{bmatrix} P^l + \Delta P & P^{l-r} \\ P^{l-r} & P^r \end{bmatrix}, \quad \Delta P = \begin{bmatrix} P_p & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Видно, что увеличиваются только ковариации ошибок координат. Предпринимались попытки увеличивать также ковариации ошибки угла курса β_3 , однако результаты оказались хуже. Величина P_p – настроечный параметр алгоритма. В работе использовалось $P_p = I_3 \sigma_p, \sigma_p = 0.5\text{м}$.

Если в момент времени $t_k \in \Delta_n$ происходит коррекция по расстоянию между стопами, вычисление мер ошибок прекращается, поскольку изменение координат БИНС из-за DUPТ-коррекции может повлиять на вычисление α_k^l, α_k^r .

3.2.5 Тестирование ADUPТ

Алгоритм ADUPТ, как и алгоритмы HDE или DUPТ, является эвристическим. Распространенным методом тестирования эвристических алгоритмов является их проверка на данных реальных экспериментов. При этом должны существовать некоторые эталонные характеристики самих экспериментов.

В задачах инерциальной навигации, где качество работы – это точность навигационного решения, эталонами чаще всего служат навигационные решения, полученные сторонними устройствами, например СНС. Однако такой эталон недоступен в помещении. Другой вариант получения эталонного навигационного решения – использование оптических систем или систем видеоанализа, позволяющих получать положения и параметры ориентации объекта с высокой точностью. Недостатком данных систем является ограниченность площадки для проведения эксперимента, а также высокая стоимость таких систем. В этом случае можно получить эталонную траекторию целиком и сравнивать ее с навигационным решением в каждый момент времени.

В навигации пешехода для оценки точности навигации часто используют ошибку возвращения в стартовую точку. Эксперимент планируется таким образом, чтобы пешеход возвращался в точку старта. При идеальном функционировании алгоритма навигации получаемая траектория будет замкнутой, то есть конечная точка будет совпадать с начальной. Чем больше отличие конечной точки от начальной, тем ниже точность системы. Такая характеристика точности плоха тем, что существуют траектории, при которых ошибки навигационного решения могут быть компенсированы формой траектории. Однако в отсутствие внешнего эталона эта характеристика – единственный доступный

индикатор точности. В работе применялся такой критерий.

Для проверки алгоритмов использовалось два набора данных. Первый – 60 экспериментов в помещении. В экспериментах участвовали 15 испытуемых разного пола и возраста. Каждый из испытуемых участвовал в четырех типах экспериментов: 1, 3, 5, 10 минутных. Каждый эксперимент заключался в ходьбе по коридорам 2 гуманитарного корпуса МГУ на одном этаже в течение заданного времени с возвращением в точку старта. Вид здания на спутниковом снимке и наложенная на него траектория одного из испытуемых приведены на рисунке 2.14. В дальнейшем будет называть эти эксперименты «эксперименты в помещении».



Рис. 3.5: Слева – способ крепления ИИБ на стопы в первой серии экспериментов. Справа – сам ИИБ.

Датчики крепились к стопам эластичными ремнями, как показано на рисунке 3.5. Использовались ИИБ на основе инерциальных датчиков MPU9250 – типовых датчиков потребительского класса точности, доступных на рынке. Динамический диапазон измерений гироскопов составлял $\pm 2000^\circ/\text{с}$, а динамический диапазон измерений акселерометров равнялся $\pm 16g$. Этих динамических диапазонов оказалось достаточно для регистрации любых движений пешеходов при ходьбе. В случае бега потребовался бы, вероятно, больший динамический диапазон акселерометров, но эксперименты при беге в диссертации не рассматриваются. Данные передавались с датчиков на смартфон по Bluetooth. Частота

записи данных составляла 125 Гц.

Производитель не предоставляет данных о характеристиках погрешностей датчиков, важных для решения задачи навигации, таких как случайное блуждание угла (angle random walk – ARW), случайное блуждание скорости (velocity random walk – VRW), нестабильность нуля (bias instability – BI). Эти характеристики были получены в результате анализа вариации Аллана, построенной для акселерометров и гироскопов. Вид вариаций Аллана приведен на рисунке 3.6. Значения параметров приведены в таблице 3.1.

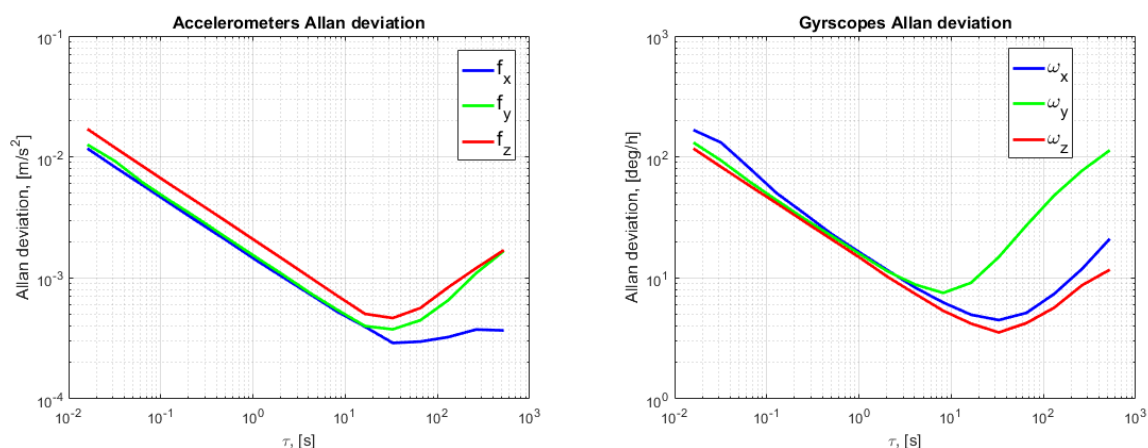


Рис. 3.6: Слева – вариация Аллана для акселерометров, справа – для гироскопов.

Датчик	Параметр	Единицы измерений	ось X	Ось Y	Ось Z
Гироскоп	ARW	$^{\circ}/\sqrt{\text{час}}$	0.35	0.28	0.24
	BI	$^{\circ}/\text{час}$	4.48	7.51	3.53
Акселерометр	VRW	$\text{м}/\text{с}^2 \cdot 10^{-2}/\sqrt{\text{с}}$	1.48	1.60	2.14
	BI	$\text{м}/\text{с}^2 \cdot 10^{-2}$	0.29	0.37	0.46

Таблица 3.1: Параметры инерциальных датчиков, использовавшихся в экспериментах

Параметры ARW и VRW использовались для настройки интенсивности шумов динамической системы Q в ОФК. Значения BI давали представление о максимальном качестве осреднения сигналов датчиков (на графиках это минимальное значение вариации Аллана).

Второй набор экспериментов состоял из 9 экспериментов на улице в сквере перед главным зданием МГУ. Эксперименты также заключались в ходьбе испытуемых с ИИБ на стопах по замкнутым траекториям. Длительность экспериментов составляла от 5 до 20 минут. Суммарная длительность всех экспериментов составила 1,5 часа. Отличием от экспериментов в помещении было:

- «Сложность» траекторий
- Наличие траектории, полученной с приемника СНС

Наличие спутникового эталона было необходимо лишь для удобства оценки результата. Траектории, полученные при помощи СНС приемника, имели невысокую точность и использовались для визуализации результатов.

Цель создания второго набора экспериментов – проверка алгоритма ADUPT и сравнение с алгоритмами HDE и DUPT. Сравнение с HDE необходимо, поскольку в определенных условиях (большое количество прямолинейных участков, расположенных под прямыми углами) данный алгоритм позволяет получить почти идеальные точности. В первом наборе экспериментов описанные выше условия выполнены, поэтому алгоритм HDE заведомо дает там лучшие, чем DUPT и ADUPT, результаты. Для полноценного сравнения алгоритмов целесообразно было провести эксперименты с неблагоприятными для HDE условиями.

Рассмотрим два класса траекторий, которые будем называть «простые» и «сложные». Будем называть траекторию «простой», если она содержит множество прямолинейных участков, расположенных под прямыми углами, то есть идеальна с точки зрения гипотез, заложенных в HDE. В противном случае будем называть траекторию «сложной». Первый набор экспериментов состоит из «простых» траекторий, а второй из «сложных». Примеры траекторий из второго набора приведены на рисунках 3.7, 3.8

Во втором наборе экспериментов использовались датчики того же типа, что и в первом наборе.

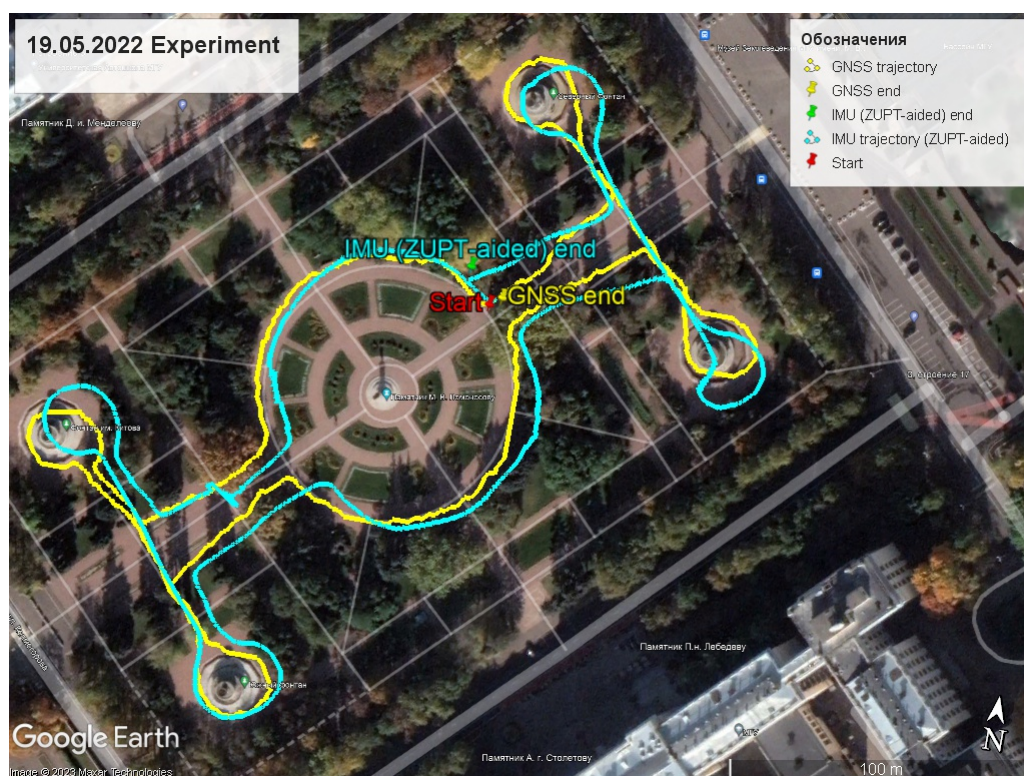


Рис. 3.7: Эксперимент длительностью 20 минут. Желтым цветом обозначена траектория, полученная с приемника СНС, бирюзовым цветом – траектория, полученная алгоритмом ADUPT

Тип алгоритма	Эксперименты в здании				Эксперименты на улице
	1 мин	3 мин	5 мин	10 мин	
ZUPT	1.3	6.9	21.6	23.2	24.6
ZUPT+DUPT	1.17	5.11	19.48	15.6	23.6
ZUPT+ADUPT	1.14	5.10	18.42	13.44	21.2
ZUPT+HDE	0.7	1.7	3.3	4.6	-

Таблица 3.2: Средняя ошибка навигации в горизонтальной плоскости в метрах для разных алгоритмов коррекции

В таблице 3.2 приведены средние значения ошибок навигации для первого («простые» траектории) и второго («сложные» траектории) набора экспериментов.

Видно, что для экспериментов с «простыми» траекториями лучшие результаты показал алгоритм HDE. Это неудивительно, учитывая, что все траектории из первого набора представляли собой наборы прямых отрезков под прямыми

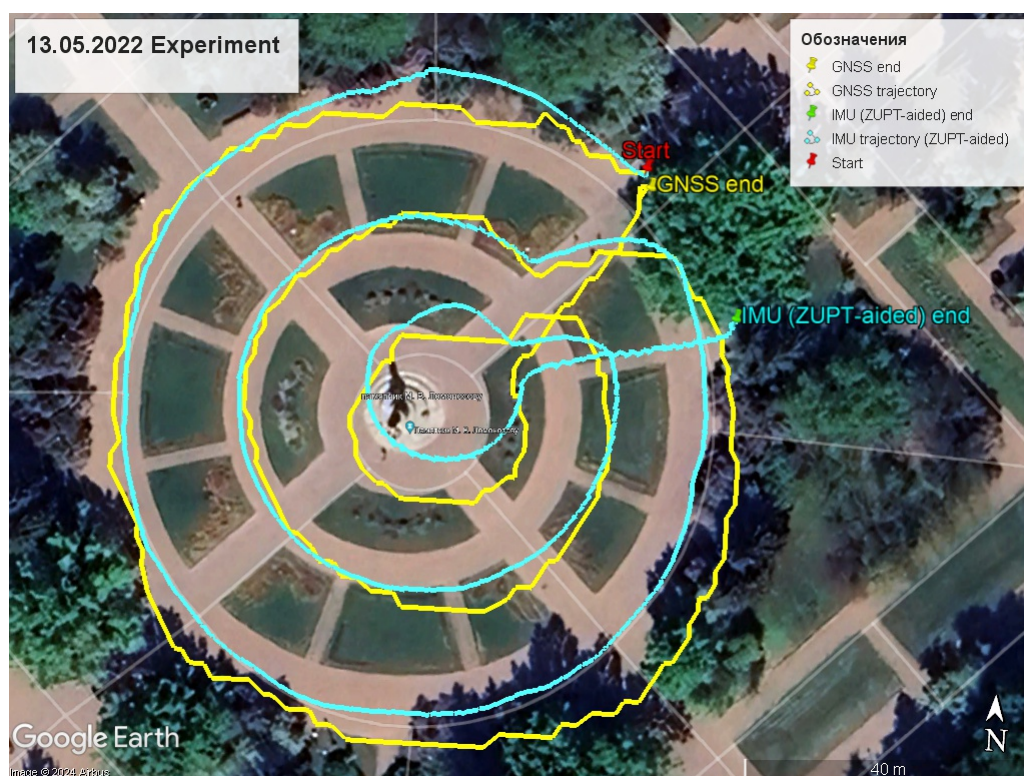


Рис. 3.8: Эксперимент длительностью 5 минут. Желтым цветом обозначена траектория, полученная с приемника СНС, бирюзовым цветом – траектория, полученная алгоритмом ADUPT

углами, то есть коррекция курса происходила практически непрерывно. DUPT показал лучшие результаты, чем базовый алгоритм, в который входит только ZUPT-коррекция. ADUPT показал некоторое превосходство над DUPT. Отличие для коротких (1 и 3 минуты) экспериментов незначительное, в то время как для 5 и 10 минутных экспериментов отличия составляют соответственно 27% и 14%.

Для экспериментов со «сложными» траекториями лучшие результаты показал ADUPT. Алгоритм HDE потерял работоспособность из-за сложности траекторий. Средняя ошибка для уличных экспериментов для HDE составила 417 метров. Алгоритмы DUPT и ADUPT не потеряли работоспособность и показали лучший результат, чем базовый алгоритм. DUPT оказался лучше ZUPT на 4%, а ADUPT оказался лучше DUPT на 10%.

На рисунках 3.9, 3.10 приведены примеры работы всех трех алгоритмов на одном из уличных экспериментов. На рисунке 3.10 видно, что алгоритм HDE привел к значительной деформации траектории из-за того, что на каждом пря-

мом участке траектория «притягивалась» к одному из четырех ортогональных выделенных направлений, в то время как истинные направления прямых участков отличались менее чем на 90 градусов. На рисунке 3.9 можно заметить, что ADUPT смог учесть разную точность БИНС и за счет этого уменьшить ошибку курса по сравнению со стандартной DUPT-коррекцией.

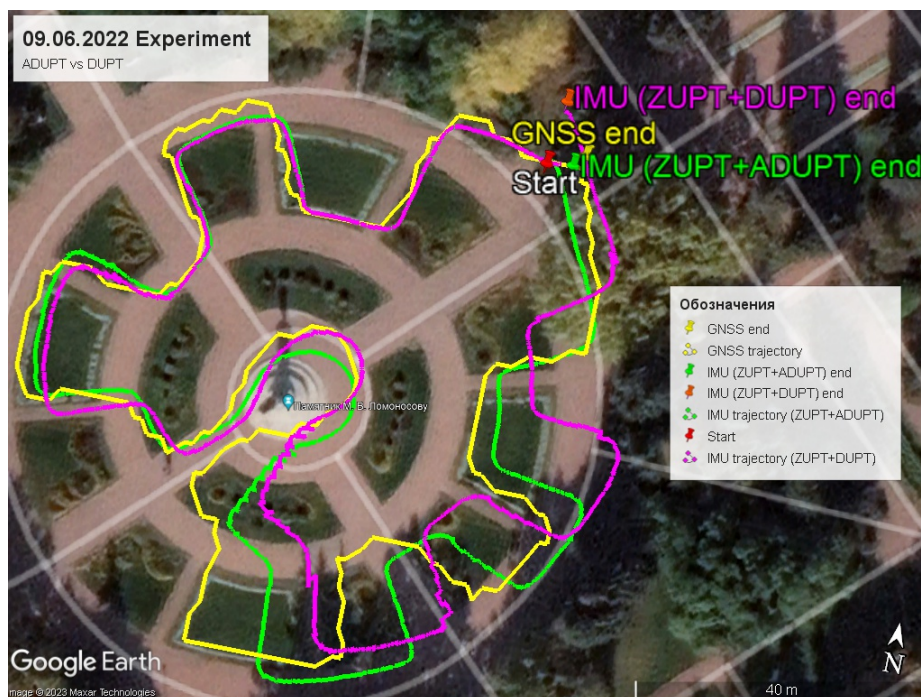


Рис. 3.9: Сравнение работы DUPT (фиолетовая линия) и ADUPT (зеленая линия). Желтая линия – траектория, полученная с приемника СНС.

Результаты работы ADUPT на первом наборе экспериментов показывает, что алгоритм надежен – вычисляемые меры ошибок БИНС не ухудшили алгоритм DUPT-коррекции.

Результаты работы ADUPT на втором наборе экспериментов показывают, что несмотря на потерю работоспособности алгоритмом HDE информация о прямолинейном движении была использована успешно и позволила несколько увеличить точность алгоритма коррекции по расстоянию между стопами за счет адаптации к разной точности БИНС. Это позволяет говорить о предпочтительности использования ADUPT в случае «сложных» траекторий. Таким образом, поставленная изначально цель – объединить преимущества алгоритмов DUPT и HDE, достигнута.

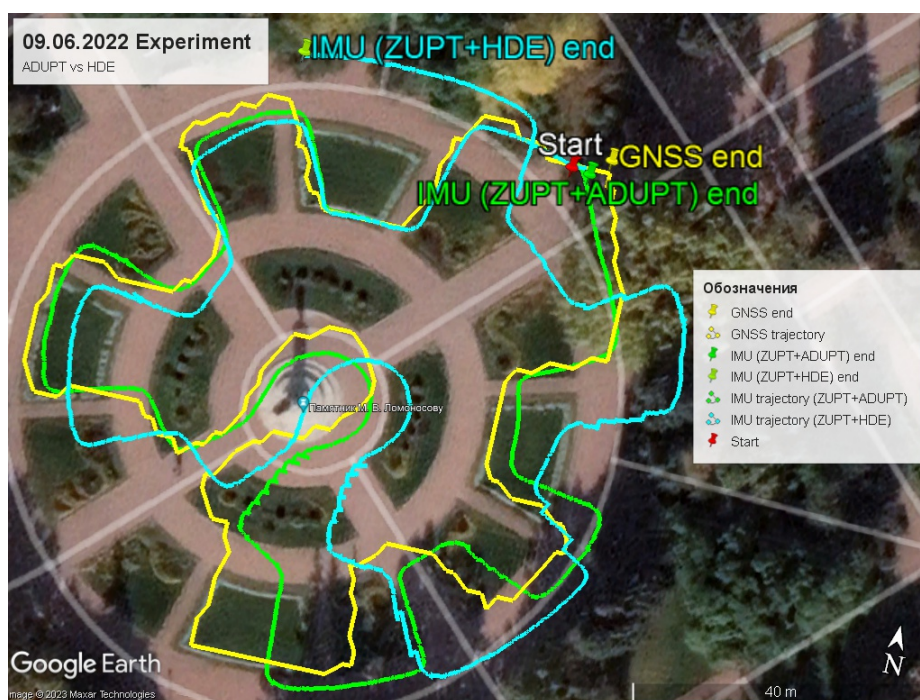


Рис. 3.10: Сравнение работы HDE (голубая линия) и ADUPT (зеленая линия). Желтая линия – траектория, полученная с приемника СНС.

3.3 Выводы к главе 3

Описано два алгоритма коррекции по информации о прямолинейности движения: алгоритм HDE и его модификация – алгоритм iHDE.

Далее был представлен алгоритм адаптивной коррекции по расстоянию между стопами (ADUPT). Приведены результаты его тестирования на реальных данных и сравнения с другими алгоритмами коррекции (коррекция по расстоянию между стопами, коррекция по информации о прямолинейности движения). Показано, что предложенный алгоритм позволяет добиться большей надежности решения задачи навигации, а в некоторых ситуациях – и лучшей точности, чем известные в литературе алгоритмы типа HDE.

Заключение

В работе рассмотрена задача автономной навигации пешехода с применением инерциальных датчиков, прикрепленных к стопам. Исследование проведено в двух направлениях.

Первое направление – теоретическое исследование различных форм записи уравнений ошибок и уравнений измерений, возникающих в задаче навигации пешехода. Изучалось влияние этих форм на свойства обобщенного фильтра Калмана (ОФК), являющегося традиционным методом решения задач навигации. Важное требование к ОФК – состоятельность, то есть соответствие истинных среднеквадратических ошибок ковариациям, вычисляемым фильтром. Для аналитического исследования состоятельности ОФК было введено понятие структурной несостоятельности, основанное на сравнении свойств ОФК и его идеализированной версии – ИОФК. ИОФК использует уравнения движения и уравнения измерений, линеаризованные в окрестности истинной траектории. Доказано, что из структурной несостоятельности фильтра следует несостоятельность. Это может использоваться для простой теоретической проверки состоятельности алгоритмов.

С помощью введенного понятия исследованы два алгоритма коррекции в навигации пешехода: коррекция по нулевой скорости, или ZUPT-коррекция, и коррекция по расстоянию между стопами, или DUPT-коррекция. Для ZUPT-коррекции показано, что запись уравнений ошибок в динамических ошибках скорости и одновременно запись уравнений нулевой скорости в приборной системе координат позволяют получить структурно состоятельный ОФК. Статистическим моделированием доказана состоятельность соответствующего варианта ОФК. Для DUPT-коррекции показано, что при записи уравнений ошибок в полных ошибках координат ОФК структурно несостоятелен, а при записи уравнений ошибок в динамических ошибках координат структурно состоятелен

(уравнения измерений в случае DUPТ-коррекции меняются вместе с уравнениями ошибок при переходе от одних типов ошибок к другим).

Таким образом, получен способ проверки структурной состоятельности, и с его помощью проведен анализ двух распространенных типов коррекции в задаче навигации пешехода.

Второе направление – разработка алгоритма коррекции, позволяющего получать лучшие точности, чем DUPТ-коррекция, и обладающего большей надежностью, чем алгоритмы коррекции, использующие информацию о прямолинейном движении человека, или алгоритмы типа HDE. Необходимым условием является наличие двух БИНС и крепление их к разным стопам. Предложен алгоритм адаптивной коррекции по расстоянию между стопами, названный в диссертации ADUPТ. Адаптивность заключается в увеличении ковариаций БИНС, которая по результатам анализа траектории признана менее точной. Эта эвристическая процедура позволяет увеличивать точность навигации по сравнению с алгоритмом DUPТ-коррекции. Одновременно использование надежной информации о том, что стопы не могут расходиться далее определенной константы (идея DUPТ), позволяет преодолеть проблему малой надежности алгоритмов, основанных на информации о прямолинейном движении.

На большом наборе экспериментальных данных показано, что ADUPТ превосходит DUPТ по точности в любых условиях, а для «сложных» траекторий превосходит алгоритмы типа HDE в надежности.

Результаты первого направления исследований могут использоваться для анализа различных алгоритмов коррекции, результаты второго направления могут применяться в реальных системах навигации пешехода в случаях, когда необходимо обеспечить высокую точность и надежность навигационного решения без каких-либо дополнительных сенсоров.

Литература

- [1] Abdulrahim K., Hide C., Moore T., Hill C. Aiding MEMS IMU with building heading for indoor pedestrian navigation // 2010 ubiquitous positioning indoor navigation and location based service. 2010. P. 1-6. <https://doi.org/10.1109/UPINLBS.2010.5653986>.
- [2] Abid M., Renaudin V., Robert T., Aoustin Y., Le-Carpentier E. A human-like walking gait simulator for estimation of selected gait parameters // 2017 14th Workshop on Positioning, Navigation and Communications. 2017. P. 1-6. <https://doi.org/10.1109/WPNC.2017.8250063>.
- [3] Afzal M. H., Renaudin V., Lachapelle G. Magnetic field based heading estimation for pedestrian navigation environments // 2011 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. 2011. P. 1-10. <https://doi.org/10.1109/IPIN.2011.6071947>.
- [4] Ahmed D. B. Inertial pedestrian localization with soft constraints based on biomechanical models // 2019 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. 2019. P. 1-8. <https://doi.org/10.1109/IPIN.2019.8911779>
- [5] Aidala V., Hammel S. Utilization of modified polar coordinates for bearings-only tracking // IEEE Transactions on automatic control. 1983. Vol. 28. № 3. P. 283-294.
- [6] Angermann M., Robertson P., Kemptner T., Khider M. A high precision reference data set for pedestrian navigation using foot-mounted inertial sensors // 2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. 2010. P. 1-6. <https://doi.org/10.1109/IPIN.2010.5646839>.

- [7] Bai N., Tian Y., Liu Y., Yuan Z. Xiao Z., Zhou J. A high-precision and low-cost IMU-based indoor pedestrian positioning technique // IEEE Sensors Journal. 2020. Vol. 20. № 12. P. 6716-6726.
- [8] Bancroft J.B., Lachapelle G., Cannon M.E., Petovello M.G. Twin IMU-HSGPS integration for pedestrian navigation // Proceedings of the 21st International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation. 2008. P. 1377-1387.
- [9] Bancroft J. B., Lachapelle G. Estimating MEMS gyroscope g-sensitivity errors in foot mounted navigation // 2012 Ubiquitous Positioning, Indoor Navigation, and Location Based Service. 2012. P. 1-6. <https://doi.org/10.1109/UPINLBS.2012.6409753>.
- [10] Bar-Shalom Y., Li X. R., Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software. John Wiley & Sons, 2004. 557 P.
- [11] Barrau A., Bonnabel S. An EKF-SLAM algorithm with consistency properties // arXiv preprint arXiv:1510.06263. 2015.
- [12] Barrau A., Bonnabel S. The invariant extended Kalman filter as a stable observer // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. Vol. 62. № 4. P. 1797-1812.
- [13] Barrau A., Bonnabel S. Invariant kalman filtering // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. 2018. Vol. 1. P. 237-257.
- [14] Barrau A., Bonnabel S. Linear observed systems on groups // Systems & Control Letters. 2019. Vol. 129. P. 36-42.
- [15] Barrau A., Bonnabel S. The geometry of navigation problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 68. № 2. P. 689-704.
- [16] Bolotin Y.V., Bragin A.V. Comparison of Navigation Accuracy of Pedestrian Navigation for Several Aiding Algorithms // 2021 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2021. P. 1-4. <https://doi.org/10.23919/ICINS43216.2021.9470865>.

- [17] Bolotin Y.V., Bragin A.V., Gartseev I.B. Covariance error analysis for pedestrian dead reckoning with foot mounted imu // CEUR Workshop Proceedings. — 2019. — Vol. 2498. — P. 243–250.
- [18] Bolotin Y.V., Bragin A.V., Gulevskii D.V. Studying the Consistency of Extended Kalman Filter in Pedestrian Navigation with Foot-Mounted SINS // Gyroscopy and Navigation. 2021. Vol. 12. P. 155-165.
- [19] Borenstein J., Ojeda L., Kwanmuang S. Heuristic reduction of gyro drift for personnel tracking systems // The Journal of navigation. 2009. Vol. 62. № 1. P. 41-58.
- [20] Borenstein J., Ojeda L. Heuristic drift elimination for personnel tracking systems // The Journal of Navigation. 2010. Vol. 63. № 4. P. 591-606.
- [21] Bragin A.V., Bolotin Y.V. Novel Aiding Algorithm for Autonomous Pedestrian Navigation // 2023 30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2023. P. 1-8. <https://doi.org/10.23919/ICINS51816.2023.10168390>.
- [22] Brand T. J., Phillips R. E. Foot-to-foot range measurement as an aid to personal navigation // Proceedings of the 59th Annual Meeting of The Institute of Navigation and CIGTF 22nd Guidance Test Symposium. 2003. P. 113-121.
- [23] Callmer J., Ternqvist D., Gustafsson F. Probabilistic stand still detection using foot mounted IMU // 2010 13th International Conference on Information Fusion. 2010. P. 1-7. <https://doi.org/10.1109/ICIF.2010.5712024>.
- [24] Chang L., Qin F., Xu J. Strapdown inertial navigation system initial alignment based on group of double direct spatial isometries // IEEE Sensors Journal. 2021. Vol. 22. № 1. P. 803-818.
- [25] Chen C., Lu X., Markham A., Trigoni N. Ionet: Learning to cure the curse of drift in inertial odometry. // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2018. Vol. 32. № 1. <https://doi.org/10.1609/aaai.v32i1.12102>.

- [26] Chen C., Zhao P., Lu C.X., Wang W., Markham A., Trigoni N. Deep-learning-based pedestrian inertial navigation: Methods, data set, and on-device inference // IEEE Internet of Things Journal. 2020. Vol. 7. № 5. P. 4431-4441.
- [27] Cho S.Y., Park C.G. MEMS based pedestrian navigation system // The Journal of Navigation. 2006. Vol. 59. № 1. P. 135-153.
- [28] Cho S.Y., Park C.G. Reduction of Heading Error Using Dual Foot-mounted IMU // CEUR Workshop Proceedings. 2019. Vol. 2498. P. 370–376.
- [29] de Villa S.G., Diaz E.M., Ahmed D.B., Martin A.J., Dominguez J.J.G. IMU-based Characterization of the Leg for the Implementation of Biomechanical Models // 2019 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. 2019. P. 1-8. <https://doi.org/10.1109/IPIN.2019.8911818>
- [30] Deng Z. Cao Y., Wang P., Wang B. An improved heuristic drift elimination method for indoor pedestrian positioning // Sensors. 2018. Vol. 18. № 6. P. 1874.
- [31] El-Sheimy N., Hou H., Niu X. Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance // IEEE Transactions on instrumentation and measurement. 2007. Vol. 57. № 1. P. 140-149.
- [32] Elwell J., Inertial navigation for the urban warrior // Proceedings of the Digitalization of the Battlespace IV conference. 1999. P. 196–204. <https://doi.org/10.1117/12.351609>
- [33] Foxlin E. Pedestrian tracking with shoe-mounted inertial sensors // IEEE Computer Graphics and Applications. 2005. Vol. 25. № 6. P. 38–46
- [34] Garcia-de-Villa S. Casillas-Perez D., Jimenez-Martin A., Garcia-Dominguez J.J. Inertial Sensors for Human Motion Analysis: A Comprehensive Review // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2023. Vol. 72.
- [35] Gordon N.J., Salmond D.J., Smith A.F.M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation // IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing). 1993. Vol. 140. № 2. P. 107-113.

- [36] Herath S., Yan H., Furukawa Y. Ronin: Robust neural inertial navigation in the wild: Benchmark, evaluations, & new methods // 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2020. P. 3146-3152. <https://doi.org/10.1109/ICRA40945.2020.9196860>.
- [37] Hesch J.A. Kottas D.G., Bowman S.L. Observability-constrained vision-aided inertial navigation // University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng., MARS Lab, Tech. Rep. 2012. Vol. 1. P. 6.
- [38] Huang G.P., Mourikis A.I., Roumeliotis S.I. Analysis and improvement of the consistency of extended Kalman filter based SLAM // 2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2008. P. 473-479. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2008.4543252>.
- [39] Huang G., Kaess M., Leonard J.J. Towards consistent visual-inertial navigation // 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2014. P. 4926-4933. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2014.6907581>.
- [40] Jao C.S., Wang Y., Shkel A.M. Pedestrian inertial navigation system augmented by vision-based foot-to-foot relative position measurements // 2020 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium. 2020. P. 900-907. <https://doi.org/10.1109/PLANS46316.2020.9109993>.
- [41] Jiang Y.F. Error analysis of analytic coarse alignment methods // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1998. Vol. 34. № 1. P. 334-337.
- [42] Jimenez A.R., Seco F., Zampella F., Prieto J.C., Guevara J. Improved Heuristic Drift Elimination (iHDE) for pedestrian navigation in complex buildings // 2011 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. 2011. P. 1-8. <https://doi.org/10.1109/IPIN.2011.6071923>.
- [43] Ju H.J. Lee M.S., Park C.G., Lee S., Park S. Advanced heuristic drift elimination for indoor pedestrian navigation // 2014 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. 2014. P. 729-732. <https://doi.org/10.1109/IPIN.2014.7275553>.

- [44] Judd C.T. A personal dead reckoning module // Proceedings of the 10th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation. 1997. P. 47-51.
- [45] Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B. Linear estimation. Prentice Hall. 2000. 854 P.
- [46] Kalman R.E. et al. Contributions to the theory of optimal control // Bol. soc. mat. mexicana. 1960. Vol. 5. № 2. P. 102-119.
- [47] Khandelwal S., Wickstrem N. Evaluation of the performance of accelerometer-based gait event detection algorithms in different real-world scenarios using the MAREA gait database // Gait & posture. 2017. Vol. 51. P. 84-90.
- [48] Ko N. Y. et al. Improvement of extended kalman filter using invariant extended kalman filter //2018 18th International Conference on Control, Automation and Systems. 2018. P. 948-950.
- [49] Kourogi M., Kurata T., Personal positioning based on walking locomotion analysis with self-contained sensors and a wearable camera // Proceedings of the Second IEEE and ACM International Symposium on Mixed and Augmented Reality. 2003. P. 103-112
- [50] Laverne M., George M., Lord D., Mukherjee T. Experimental validation of foot to foot range measurements in pedestrian tracking // Proceedings of the 24th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation. 2011. P. 1386-1393.
- [51] Li Y., Efatmaneshnik M., Dempster A. G. Attitude determination by integration of MEMS inertial sensors and GPS for autonomous agriculture applications // GPS solutions. 2012. Vol. 16. P. 41-52.
- [52] Lu C., Uchiyama H., Thomas D., Shimada A., Taniguchi R. Indoor positioning system based on chest-mounted IMU // Sensors. 2019. Vol. 19. № 2. P. 420.
- [53] Ma M., Song Q., Li Y., Zhou Z. A zero velocity intervals detection algorithm based on sensor fusion for indoor pedestrian navigation //2017 IEEE 2nd

- Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference. 2017. P. 418-423. <https://doi.org/10.1109/ITNEC.2017.8284765>.
- [54] McGee L.A., Schmidt, S.F. Discovery of the Kalman filter as a practical tool for aerospace and industry // NASA-TM-86847. 1985.
- [55] Mehra R. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Transactions on automatic control. 1970. Vol. 15. № 2. P. 175-184.
- [56] Mezentsev O., Lachapelle G., Collin J. Pedestrian dead reckoning — A solution to navigation in GPS signal degraded areas? // Geomatica. 2005. Vol. 59. № 2. P. 175-182.
- [57] Mohamed A. H., Schwarz K. P. Adaptive Kalman filtering for INS/GPS // Journal of geodesy. 1999. Vol. 73. P. 193-203.
- [58] Nilsson J.O. Skog i., Handel P., Hari K.V.S. Foot-mounted INS for everybody- an open-source embedded implementation // Proceedings of the 2012 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium. 2012. P. 140-145. <https://doi.org/10.1109/PLANS.2012.6236875>.
- [59] Nilsson J. O., Skog I., Handel P. A note on the limitations of ZUPTs and the implications on sensor error modeling // 2012 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. 2012. P.1-6.
- [60] Ojeda L., Borenstein J. Non-GPS navigation for security personnel and first responders // The Journal of Navigation. 2007. Vol. 60. № 3. P. 391-407.
- [61] Park S.K., Suh Y.S. A zero velocity detection algorithm using inertial sensors for pedestrian navigation systems // Sensors. 2010. Vol. 10. № 10. P. 9163-9178.
- [62] Park S.Y., Ju H., Park C.G. Stance phase detection of multiple actions for military drill using foot-mounted IMU // Sensors. 2016. Vol. 14. P. 16.
- [63] Pateman J.E. Inertial navigation // The Aeronautical Journal. 1959. Vol. 63. № 578. P. 113-117.
- [64] Prateek G.V., Girisha R., Hari K.V.S., Handel P. Data fusion of dual foot-mounted INS to reduce the systematic heading drift // 2013 4th International

- Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation. 2013. P. 208-213.
<https://doi.org/10.1109/ISMS.2013.46>.
- [65] Rantakokko J., Stromback P., Emilsson E., Rydell J. Soldier positioning in GNSS-denied operations // Symposium SET-168 on Navigation Sensors and Systems in GNSS Denied Environments. 2012. P. 1-12.
- [66] Saab S.S., Gunnarsson K.T. Automatic alignment and calibration of an inertial navigation system // Proceedings of 1994 IEEE Position, Location and Navigation Symposium. 1994. P. 845-852.
<https://doi.org/10.1109/PLANS.1994.303400>.
- [67] Saarinen J., Suomela J., Heikkila M., Elomaa M., Halme A. Personal navigation system // 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2004. P. 212-217.
<https://doi.org/10.1109/10.1109/IROS.2004.1389354>.
- [68] Savage P.G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1: Attitude algorithms // Journal of guidance, control, and dynamics. 1998. Vol. 21. № 1. P. 19-28.
- [69] Savage P.G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 2: Velocity and position algorithms // Journal of Guidance, Control, and dynamics. 1998. Vol. 21. № 2. P. 208-221.
- [70] Shkel A.M. Micromachined gyroscopes: challenges, design solutions, and opportunities // Smart Structures and Materials 2001: Smart Electronics and MEMS. 2001. Vol. 4334. P. 74-85. <https://doi.org/10.1117/12.436629>.
- [71] Skog I., Nilsson J.O., Zachariah D., Handel P. Fusing the information from two navigation systems using an upper bound on their maximum spatial separation // 2012 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation 2012. P. 1-5. <https://doi.org/10.1109/IPIN.2012.6418862>.
- [72] Skog I., Handel P., Nilsson J.O., Rantakokko J. Zero-velocity detection — An algorithm evaluation // IEEE transactions on biomedical engineering. 2010. Vol. 57. № 11. P. 2657-2666.

- [73] Starbuck B., Fornasier A., Weiss S., Pradalier C. Consistent state estimation on manifolds for autonomous metal structure inspection // 2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). P. 10250-10256. <https://doi.org/10.1109/ICRA48506.2021.9561837>.
- [74] Stirling R., Collin J., Fyfe K., Lachapelle G. An innovative shoe-mounted pedestrian navigation system // proceedings of European navigation conference GNSS. 2003. Vol. 110.
- [75] Smolyanov D.I., Golovan A.A. On the Navigation Problem of Unmanned Wheeled Agricultural Machinery Using MEMS-Based INS, GNSS and Odometry // 2023 30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2023. P. 1-3. <https://doi.org/10.23919/ICINS51816.2023.10168339>.
- [76] Tarek M. et al. Enhanced navigation precision through interaction multiple filtering: Integrating invariant and extended Kalman filters // IEEE Access. 2024. Vol 12. P. 175357-175374.
- [77] Taylor J. The Cramer-Rao estimation error lower bound computation for deterministic nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 24. № 2. P. 343-344.
- [78] Utrilla P., Mazo C., Domingo R., Bea M. Chapter 14. Maps in Prehistoric Art // Making Scenes: Global Perspectives on Scenes in Rock Art. New York, Oxford: Berghahn Books. 2021. P. 207-222.
- [79] Wagner J.F., Kohl M., Györfi B. Reevaluation of algorithmic basics for ZUPT-based pedestrian navigation // IEEE access. 2022. Vol. 10. P. 118419-118437.
- [80] Wagstaff B., Kelly J. LSTM-based zero-velocity detection for robust inertial navigation // 2018 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. 2018. P. 1-8. <https://doi.org/10.1109/IPIN.2018.8533770>.
- [81] Wagstaff B., Peretroukhin V., Kelly J. Robust data-driven zero-velocity detection for foot-mounted inertial navigation // IEEE Sensors Journal. 2019. Vol. 20. № 2. P. 957-967.

- [82] Wahlstrem J., Skog I., Gustafsson F., Markham A., Trigoni N. Zero-velocity detection — A Bayesian approach to adaptive thresholding // IEEE Sensors Letters. 2019. Vol. 3. № 6. P. 1-4.
- [83] Wahlstrem J., Skog I. Fifteen years of progress at zero velocity: A review // IEEE Sensors Journal. 2020. Vol. 21. № 2. P. 1139-1151.
- [84] Wang J., Liu J., Xu X., Yu Z., Li Z. A yaw correction method for pedestrian positioning using two low-cost MIMUs // Measurement. 2023. Vol. 217. P. 112992
- [85] Wang Y., Askari S., Shkel A.M. Study on Mounting Position of IMU for Better Accuracy of ZUPT-Aided Pedestrian Inertial Navigation // 2019 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems. 2019. P 1-4. <https://doi.org/10.1109/ISISS.2019.8739708>.
- [86] Wang Y., Chernyshoff A., Shkel A.M. Error analysis of ZUPT-aided pedestrian inertial navigation // 2018 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. 2018. P. 206-212. <https://doi.org/10.1109/IPIN.2018.8533814>.
- [87] Wang Q., Fu M., Wang J., Sun L., Huang R., Li X., Jiang Z., Hyang Y., Jiang C. Free-walking: Pedestrian inertial navigation based on dual foot-mounted IMU // Defence Technology. 2024. Vol. 33. P. 573-587.
- [88] Zachariah D., Skog I., Jansson M., Handel P. Bayesian estimation with distance bounds // IEEE Signal Processing Letters. 2012. Vol. 19. № 12. P. 880-883.
- [89] Zhao H., Wang Z., Qiu S., Wang J., Xu F., Wang Z., Shen Y. Adaptive gait detection based on foot-mounted inertial sensors and multi-sensor fusion // Information Fusion. 2019. Vol. 52. P. 157-166.
- [90] Zhou W., Hou J., Liu L., Sun T., Liu J. Design and simulation of the integrated navigation system based on extended Kalman filter // Open Physics. 2017. Vol. 15. № 1. P. 182-187.

- [91] Zhu M., Wu Y., Luo S. A pedestrian navigation system by low-cost dual foot-mounted IMUs and inter-foot ranging // 2020 DGON Inertial Sensors and Systems. 2020. P. 1-20. <https://doi.org/10.1109/ISS50053.2020.9244897>.
- [92] Zhu R., Wang Y., Yu B., Gan X., Jia H., Wang B. Enhanced heuristic drift elimination with adaptive zero-velocity detection and heading correction algorithms for pedestrian navigation // Sensors. 2020. Vol. 20. № 4. P. 951.
- [93] Zhu T., Pan X., Zhang S. A zero velocity detection method for soldier navigation based on deep learning // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1345. № 3. P. 032018.
- [94] Спецпрактикум по теоретической и прикладной механике / Под ред. профессора В.В. Алексадрова, профессора Ю.В. Болотина. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2018. – 264 с.
- [95] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации: Автономные системы. – Изд-во “Наука”, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1966. 580 с.
- [96] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации: корректируемые системы. – Изд-во “Наука”, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1967. 648 с.
- [97] Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Динамические системы – 1 // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. 1985 Т. 1. С. 7–140.
- [98] Баранцев Г.О., Голован А.А., Кузнецов П.Ю. Модели задачи начальной выставки бескарданной инерциальной навигационной системы при угловом движении основания // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2021. № 5. С. 52–56.
- [99] Болотин Ю.В., Брагин А.В. О необходимых условиях состоятельности обобщенного фильтра Калмана // Международная конференция Математика в созвездии наук к юбилею ректора МГУ Академика В.А. Садовниченко: Тезисы докладов. 2024. С. 362–364.

- [100] Болотин Ю.В., Брагин А.В. О некоторых свойствах фильтра Калмана в задаче навигации пешехода // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2023. № 3. С. 56–61.
- [101] Болотин Ю.В., Фатехрад М. Навигация пешехода с использованием бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), установленной на стопе // Российский журнал биомеханики. 2015. Т. 19. № 1. С. 25–36.
- [102] Брагин А.В. Адаптивный алгоритм коррекции по расстоянию между стопами в навигации пешехода // Проблемы управления. 2023. № 3. С. 77-87.
- [103] Борзов В.И., Морозов В.М., Парусников Н.А. Теория навигационных систем. Изд-во МГУ Москва, 1980. 227 с.
- [104] Ван Ю., Цзяо Ч.Ш., Шкель А.М. Пешеходная инерциальная навигация с коррекцией по нулевой скорости и комплексированием датчиков // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29. № 1. С. 3-31.
- [105] Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы инерциальных навигационных систем. Издательство Московского университета Москва, 2020. 164 с.
- [106] Голован А.А., Горицкий А.Ю. [и др]. Алгоритмы корректируемых инерциальных навигационных систем, решающих задачу топопривязки М.: Изд. механико-математического факультета МГУ. 1994. 48 с.
- [107] Голован А.А., Никитин И.В. Задачи интеграции БИНС и одометра с точки зрения механики корректируемых инерциальных навигационных систем. Часть 1 // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № 2. С. 69-72.
- [108] Голован А.А., Никитин И.В. Задачи интеграции БИНС и одометра с точки зрения механики корректируемых инерциальных навигационных систем. Часть 2 // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № 4. С. 68-72.

- [109] Девянин Е.А., Парусников Н.А. Об устойчивости движения точки в поле сил притягивающего центра // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1969. № 4. С. 40–42.
- [110] Измайлов Е.А., Кухтевич С.Е., [и др.]. Анализ методов оценки случайной составляющей дрейфа лазерных гироскопов с вибрационной подставкой // Труды ФГУП НПЦАП. Системы и приборы управления. 2015. Т. 2. № 32. С. 22–28.
- [111] Ишлинский А.Ю. К теории гирогоризонткомпаса // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 4. С. 487–499.
- [112] Каплин А.Ю., Степанов М.Г. Использование автономной навигационной системы высокоточного позиционирования пешехода на местности // Информационно-управляющие системы. 2015. № 6 (79). С. 86–92.
- [113] Каплин А.Ю., Степанов М.Г., Ярмолич А.Г. Оценка точности пешеходной навигационной системы методом имитационного моделирования // Радиопромышленность. 2017. № 27. С. 4.
- [114] Козлов А.В., Парусников Н.А., [и др.] Динамическая стендовая калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем в сборе // Известия ЮФУ. Технические науки. 2018. Т. 195. № 1. С. 241–257.
- [115] Колесникова Г.П., Формальский А.М. Об одном способе моделирования походки человека // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 1 (25). С. 11.
- [116] Купоросова Е.С. Оценка эффективности алгоритмов обнуления скорости пешеходной инерциальной навигационной системы при разных способах крепления блока датчиков первичной информации // XXIII ТУПОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ (школа молодых ученых). 2017. С. 62–67.
- [117] Лукьянов В.В. Прикладные алгоритмы навигации пешехода // Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана. Серия «Приборостроение». 2007. № 1. С. 86–96.

- [118] Маринушкин П.С., Бахтина В.А. [и др.] Вопросы разработки инерциальных пешеходных навигационных систем на основе МЭМС-датчиков // Наука и образование: научное издание МГТУ им. НЭ Баумана. 2015. № 6. С. 157-173.
- [119] Сирая Т.Н. Статистическая интерпретация вариации Аллана как характеристики измерительных и навигационных устройств // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28. № 1. С. 108.
- [120] Скворцов Д.В. Клинический анализ движений. Анализ походки: Издательство НПЦ-“Стимул”, Иваново. 1996. 344 с.
- [121] Степанов О.А. Фильтр Калмана: история и современность // Гироскопия и навигация. 2010. Т. 69. № 2. С. 107-121.