

**ОТЗЫВ научного руководителя
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Пустовойтова Сергея Евгеньевича
на тему «Топология и классификация слоений Лиувилля интегрируемых
возмущений классических и топологических билиардов»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

В последнее время теория интегрируемых билиардов привлекает интерес научного сообщества. Математическим билиардом называется динамическая система, описывающая движение точки внутри области на плоскости, ограниченной некоторой кусочно-регулярной кривой, все углы излома которой равны половине развернутого угла. Движение билиардной частицы происходит без потери скорости по отрезкам прямых, а отражения на границы предполагаются абсолютно упругими (при этом падающий и отраженный углы совпадают). Особый интерес представляют билиарды, форма которых обеспечивает сохранение вдоль всей траектории некоторой функции, независимой от энергии системы. К таким билиардам относятся билиарды в прямоугольнике, круге, области, ограниченной дугами софокусных квадрик. Знаменитая гипотеза Дж.Д.Биркгофа гласит, что если интегрируемый билиард ограничен кривой без изломов, то такая кривая есть эллипс. Данная гипотеза в различных вариантах формулировок была недавно доказана многими российскими математиками совместно с зарубежными коллегами (С.В.Болотин, А.А. Глуцук, М. Бялый, А.Ю. Миронов, В.Ю. Калошин, А. Соррентино). Справедливость этой гипотезы (являющейся теоремой в некоторых естественных предположениях на дополнительный интеграл) означает, что класс классических интегрируемых билиардов довольно узок. Однако у задачи такого билиарда есть несколько интересных обобщений. Во-первых, пользуясь симметричностью области, можно добавить к системе дополнительные интегрируемые возмущения, к примеру, наличие потенциала и магнитного поля. А во-вторых, можно рассмотреть билиард на клеточном комплексе (так называемую билиардную книжку), двумерные клетки которого принадлежат интегрируемым билиардам из одного интегрируемого класса. Диссертация С.Е.Пустовойтова посвящена указанным обобщениям.

Методы исследования интегрируемых билиардов, применяемые в работе, были разработаны А.Т.Фоменко, Х.Цишангом, С.В.Матвеевым, А.В.Болсиновым для изучения топологии лиувиллевых слоений интегрируемых гамильтоновых систем. Данный топологический подход позволяет описать качественное поведение замыканий решений (нерезонансных лиувиллевых торов), их бифуркации, устойчивость и неустойчивость критических решений. В частности, он предполагает вычисление меченой молекулы – инварианта Фоменко-Цишанга – кодирующего слоение Лиувилля неособой изоэнергетической поверхности. Данный инвариант является графом Роба, снабжённым информацией о топологической структуре особых слоев и типах склеек их друг с другом.

Главной ценностью данной работы является разработка метода исследования обобщений интегрируемых билиардов на основе уже известных методов вышеуказанной теории Фоменко-Цишанга. Исследуются два основных обобщения дополнительными силами: добавление потенциала и введение магнитного поля. Для билиардов с потенциалами были получены следующие результаты. Во-первых, были изучены билиарды с потенциалом Гука (данное исследование обобщает работу И.Ф.Кобцева, изучавшего билиард в эллипсе), ограниченные дугами софокусных квадрик. Во-вторых, были исследованы решения уравнения В.В.Козлова, позволяющих получить целый класс полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость классического эллиптического билиарда. Для потенциала четвертой степени (принадлежащему к данному классу) был исследован билиард в эллипсе. А именно, С.Е.Пустовойтовым были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга на произвольном неособом уровне энергии H , построены бифуркационные диаграммы и описана топологию неособого изоэнергетического многообразия. Данное исследование позволило промоделировать с помощью интегрируемых билиардов целый ряд особенностей слоений, содержащих невырожденные точки ранга 0 или вырожденные орбиты. При этом указанные особенности ранга ноль отображения момента имеют структуру прямого или почти прямого произведения минимаксных и седловых особенностей. Для моделирования фокусных особенностей в работе С.Е.Пустовойтовым была изучена билиардная книжка, склеенная из нескольких круговых билиардов, снабженных потенциалом Гука. В рамках исследования таких

бильярдных книжек с потенциалом, в частности, были вычислены бифуркационные диаграммы и найдена матрица монодромии вокруг изолированной точки ранга ноль (прообраз которой есть особенность типа фокус-фокус).

Также в работе было полностью завершено исследование топологии слоения Лиувилля интегрируемых плоских бильярдов в постоянном магнитном поле, а также слоение топологических магнитных бильярдов (т.е. бильярдов на многообразиях, склеенных из дисков и колец, ограниченных концентрическими окружностями). А именно, удалось полностью вычислить все инварианты Фоменко-Цишанга и построить бифуркационные диаграммы.

Работа успешно сочетает как уже известные методы, разработанные для изучения гладких интегрируемых гамильтоновых систем, так и методы, успешно применяемые для изучения кусочно-гладких систем. В частности, для вычисления бифуркационной диаграммы был использован метод Харламова, позволяющий избежать вычисления ранга отображения момента в точках негладкости фазового четырёхмерного многообразия. При этом в работе содержится ряд существенных продвижений, в том числе разработаны методы и подходы, которые могут быть применены к системам интегрируемых бильярдов гораздо более широкого класса, в частности, к бильярдным книжкам с потенциалами высоких степеней.

Все результаты диссертации являются новыми, получены С.Е.Пустовойтовым самостоятельно или при равноценном вкладе с соавторами. Результаты изложены в семи статьях, опубликованных в ведущих математических журналах. Неоднократно докладывались на различных конференциях, как всероссийских, так и международных.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Пустовойтова Сергея Евгеньевича удовлетворяет всем требованиям “Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова” и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 Геометрия и топология.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Ведюшкина Виктория Викторовна

30 мая 2025 г.

Подпись профессора кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» Ведюшкиной В.В. удостоверяю:

Декан механико-математического
факультета МГУ имени М.В.Ломоносова,
член-корреспондент РАН А.И. Шафаревич

30 мая 2025 г.