

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Руденко Юлия Константиновна

**Распространение тепла в поверхностном слое жидкости и
диагностика неизотермических течений на основе измерений полей
температуры**

1.3.17. Химическая физика, горение и взрыв,
физика экстремальных состояний вещества

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Диссертация подготовлена на кафедре молекулярных процессов и экстремальных состояний вещества физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

- Научный руководитель** – *Уваров Александр Викторович,*
доктор физико-математических наук,
профессор
- Официальные оппоненты** – *Якимов Михаил Юрьевич,*
доктор физико-математических наук,
Институт проблем механики им. А.Ю.
Ишлинского РАН, лаборатория лазерных
разрядов, ведущий научный сотрудник
- Шерemet Михаил Александрович,*
доктор физико-математических наук,
профессор,
Национальный исследовательский Томский
государственный университет, механико-
математический факультет, лаборатория
моделирования процессов конвективного
теплопереноса, заведующий
лабораторией
- Моралев Иван Александрович,*
кандидат физико-математических наук,
Объединенный институт высоких
температур РАН, лаборатория плазменной
аэродинамики и стимулированного горения,
заведующий лабораторией

Защита диссертации состоится «13» ноября 2025 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.013.3 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: г. Москва, Ленинские горы, д.1 стр. 2, физический факультет, ауд. Н-16.

E-mail: malyshkinaia@my.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3530>

Автореферат разослан « ___ » _____ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

И.А. Малышкина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Конвективные процессы, возникающие при тепловыделении, являются предметом интенсивных исследований в течение десятков лет в силу своей большой практической важности для многих задач химической физики, теплофизики и геофизики. В то же время, в последние годы развитие экспериментальных методов и численного моделирования, методов ассимиляции данных с применением нейросетей позволило существенно продвинуться в исследованиях конвективных процессов. Такие экспериментальные методы, как теневой фоновый метод (ТФМ, Background Oriented Schlieren, BOS), цифровая трассерная визуализация (Particle Image Velocimetry, PIV) позволяют получать соответственно поля температуры и скорости с достаточно хорошим пространственным разрешением. В конвективных процессах эти поля связаны между собой и с другими характеристиками течения, что позволяет по измеренной одной величине восстанавливать остальные. В связи с этим активно развиваются различные методы ассимиляции данных. В применении к задачам гидродинамики становятся популярны нейросети, обучающиеся не на большом количестве размеченных данных, которых может быть недостаточно для обучения классической нейросети, но удовлетворяющие уравнениям и экспериментальным данным, так называемые физически-информированные нейросети (Physics-Informed Neural Networks, PINN). При этом, по сравнению с прямой подстановкой результатов измерений в уравнения гидродинамики, нейросеть не так чувствительна к шуму экспериментальных данных и позволяет включать различные данные, в том числе разреженные или измеренные в отдельных точках.

Для исследования течения конвективных процессов очень удобным оказывается использование в качестве экспериментальных данных поля температуры. Температурное поле может быть не только источником движения, например, для термогравитационной и термокапиллярной конвекции, но, одновременно, и источником информации о течении. Экспериментально в приповерхностных тече-

ниях поле температур на поверхности можно получить с помощью ИК-термографии высокого разрешения, а в объеме – с помощью рефракционных методов. Следует отметить, что в последнем случае поле температур усредняется по одной из координат и, как правило, с помощью этих методов точные результаты могут быть получены только для двумерных и осесимметричных течений. Однако методы решения обратных задач позволяют получить из усредненного поля температур коэффициенты турбулентной теплопроводности и турбулентной вязкости. Такой способ ассимиляции данных, как будет показано в работе, является альтернативой методам многомерной цифровой трассерной визуализации и легче реализуется на практике.

В приповерхностных течениях тепловое воздействие (с помощью нагревателя или при поглощении лазерного излучения) позволяет инициировать гидродинамический перенос и исследовать свойства межфазных поверхностей (в работе рассматривается граница раздела «жидкость-газ»). В настоящее время хорошо известно, что даже при отсутствии значительных загрязнений различные жидкости существенно отличаются по свойствам межфазных поверхностей. В воде, например, пленка естественных примесей блокирует температурную конвекцию Марангони (за исключением деионизированной воды), но температурные градиенты создают силы, которые могут нарушить целостность пленки. Если пленка не рвется, основным механизмом переноса тепла оказывается рэле-евская конвекция. Но, в отличие от стандартной термогравитационной конвекции, связанной с силой Архимеда, в данном случае причиной оказывается горизонтальное перераспределение давлений. При наличии неравномерной плотности в горизонтальной плоскости (перпендикулярной силе тяжести) возникновение конвекции неизбежно, независимо от числа Рэлея, которое в этом случае характеризует только интенсивность процесса. Именно горизонтальная конвекция конкурирует с термокапиллярной в приповерхностных слоях, в зависимости от свойств межфазной поверхности. Приповерхностные течения наиболее трудны для изучения из-за сложности граничных условий, но современные экспериментальные методы позволяют подробно исследовать поля температур, скоростей и

даже давлений (на основе анализа профиля поверхности). Во многих жидкостях с низким коэффициентом поверхностного натяжения (КПН) пленка отсутствует (силиконовое масло, спирты и др.), и в этом случае процесс распространения тепла существенно ускоряется, а господствующим механизмом оказывается термокапиллярная конвекция. Роль этой конвекции часто недооценивается, но это очень мощный механизм отвода тепла в ближней зоне от нагревателя с одним условием – это должна быть жидкость с отсутствием пленки.

Автомодельные решения, построенные в работе, позволяют получить оценки для скорости приповерхностного распространения тепла и толщины пограничного слоя в зависимости от наличия поверхностной пленки, блокирующей термокапиллярную конвекцию, для задач с линейным и цилиндрическим источниками нагрева. Сравнение двух механизмов конвекции с помощью автоматических решений приводит к выводу об их эффективности в теплоотводе. Рассмотренные ранее в других работах автоматические решения, в отличие от предложенных, как правило, не учитывали сопряженность задачи, а полученные зависимости для скорости распространения теплового фронта и толщины погранслоя были выведены исходя из численных расчетов.

Цели и задачи.

Цель работы состояла в изучении неизотермических течений на основе анализа температурного поля, полученного в результате тепловыделения, как источника конвективного движения и, одновременно, как способа визуализации течения. Для этого были поставлены следующие задачи:

1. Получение автоматических и численных решений для нестационарных конвективных течений, генерируемых приповерхностными линейными источниками тепла, и сравнение с экспериментальными результатами.

2. Получение автоматических и численных решений и сравнение с экспериментом для задач лазерного зондирования поверхности.

3. Восстановление коэффициента турбулентной теплопроводности, турбулентной вязкости, полей скорости и давления для течения осесимметричной турбулентной квазистационарной струи по экспериментально измеренным с помощью теневого фонового метода полям температуры.

Научная новизна.

Предложены новые автомодельные решения для нестационарных конвективных течений, возникающих при наличии линейного источника тепла, расположенного вблизи поверхности жидкости, и при ИК-зондировании свободной поверхности жидкости. Полученные в работе автомодельные решения, в отличие от ранее предложенных, описывают сопряженную задачу тепломассообмена и учитывают влияние температурного поля на гидродинамическое течение. При их выводе впервые также учтены различные граничные условия на поверхности. Для жидкостей, в которых на поверхности присутствует пленка, показано, что условие прилипания правильно описывает течение и приводит к совпадению численных расчетов, экспериментальных данных и автомодельных решений. Для жидкостей, демонстрирующих термокапиллярную конвекцию Марангони, в качестве граничного условия подходит условие Пирсона. Таким образом, продемонстрирована необходимость выбора различных граничных условий в зависимости от наличия или отсутствия поверхностной пленки, блокирующей термокапиллярный механизм течения.

Полученные автомодельные решения позволяют вывести универсальные количественные зависимости для скорости распространения теплового фронта и для толщины погранслоя. Оценки характеристик пограничного слоя в других работах со сходной постановкой задачи были получены численно. Полученные зависимости могут быть использованы для сравнения интенсивности процессов теплопереноса для жидкостей с наличием пленки примесей на поверхности и при ее отсутствии. В работе показано, что объемная конвекция эффективнее, чем поверхностная. Но вблизи источника тепла остается область, где гидродинамические потоки за счет поверхностных сил намного эффективнее, чем за счет силы Архимеда. Автомодельные решения для любого числа Прандтля позволяют

определить длину, на которой преобладает конвекция Марангони по сравнению с горизонтальной конвекцией за счет градиента давления.

Также предложены новые методики ассимиляции данных для турбулентных течений, позволяющие определить распределения турбулентной вязкости, турбулентной теплопроводности, давления и скорости по экспериментально полученным с помощью ТФМ полям температуры и измеренным с помощью термоанемометра значениям скорости в выбранных точках. В первом способе численно решается система уравнений гидродинамики с подставленным полем температуры. Во втором способе применяется физически-информированная нейросеть, для обучения которой используются экспериментальные поля температуры и точечные измерения скорости. Оба метода позволяют без применения какой-либо конкретной модели турбулентности восстанавливать поля скорости, давления, турбулентных вязкости и теплопроводности. В отличие от других работ, они не подразумевают использование засева и измерение параметров турбулентного течения с помощью PIV. Трудоемкость предложенного метода восстановления коэффициентов турбулентной теплопроводности и вязкости намного меньше, чем использование трехмерных PIV-измерений. Предложенные методики применены для течения осесимметричной квазистационарной турбулентной струи.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость работы состоит в проведенном систематическом исследовании конвективных течений, возникающих при наличии линейного приповерхностного источника тепла и при локальном нагреве поверхности жидкостей с помощью ИК-лазера, что позволяет вывести автомодельные решения для количественного описания характеристик пограничного слоя для жидкостей с различной структурой поверхности, уточнить граничные условия при наличии или отсутствии поверхностной пленки. Эти решения универсальны и позволяют, в отличие от численных расчетов, существенно расширить возможности общего анализа. Также для течения турбулентной осесимметричной струи показано, что измеренные экспериментально поля температуры и точечные измерения скорости можно

использовать для ассимиляции данных с последующим восстановлением параметров течения без использования конкретной модели турбулентности. Усредненные поля температур, получаемые рефракционными методами, оказываются источником дополнительной информации, поскольку определяются влиянием коэффициентов турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности. Поля турбулентных характеристик могут быть найдены с помощью физически-информированной нейросети или при численном решении уравнений гидродинамики с подставленным экспериментальным полем температуры.

Практическая значимость работы состоит в том, что ее результаты помогают без численного моделирования процесса конвективного течения от линейного источника тепла и при лазерном ИК-зондировании жидкости оценить параметры пограничного слоя и интенсивность горизонтальной конвекции. Обе задачи имеют важное практическое значение – для исследования теплоотвода от линейных источников нагрева, прогнозирования результатов термозондирования и лазерной очистки поверхности. Разработана методика восстановления полей скорости и турбулентных вязкости и теплопроводности без использования засева и без применения высокоскоростных камер для реализации PIV. Ее эффективность продемонстрирована на примере свободной и импактной турбулентной осесимметричной струи. Предложенная методика позволяет существенно упростить необходимую для практики валидацию полуэмпирических моделей турбулентности, в том числе моделей для турбулентного числа Прандтля. Такие процедуры важны из-за наблюдаемых в настоящее время существенных расхождений результатов при использовании различных моделей турбулентности. Данная методика предполагает наличие измеренного экспериментально поля температуры и измерений скорости в некоторых точках. Важным моментом является возможность расширения методики на зоны экзотермической химической реакции, когда добавляется усредненное поле концентраций и коэффициент турбулентной диффузии.

Методология и методы исследования.

При проведении исследований в данной работе использовались следующие методы:

Теневой фоновый метод и его модификация для измерения осесимметричного среднего поля температур (с применением преобразования Абеля) с целью восстановления распределений турбулентной вязкости и теплопроводности с высокой степенью турбулизации.

ИК-термография поверхности для получения поля температур на границе раздела «жидкость-газ».

Цифровая трассерная визуализация – для измерения поля скорости в определенном сечении потока.

Moon-glade BOS – для измерения рельефа поверхности жидкости.

Численное решение уравнений гидродинамики.

Использование искусственных нейросетей для восстановления полей скорости, давления, турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности по результатам измерения усредненного поля температур и значений скорости на входе и в некоторых точках.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Предложенные новые автомодельные решения для нестационарного конвективного течения, генерируемого линейным источником тепла, расположенным вблизи поверхности жидкости, позволяют получить оценки для скорости распространения тепла в пограничном слое и рассчитать числа Нуссельта для оценки эффективности теплоотвода для различных граничных условий на межфазной поверхности.

2. Проведенные измерения полей скорости, температуры поверхности и рельефа поверхности и численное моделирование подтверждают корректность выведенных автомодельных решений для нестационарного конвективного течения, генерируемого линейным источником тепла.

3. Горизонтальная конвекция у поверхности за счет градиента давления менее эффективна с точки зрения охлаждения линейного источника тепла по сравнению с вертикальной конвекцией. Но при наличии термокапиллярной конвекции на некоторой длине вблизи источника нагрева гидродинамический перенос за счет поверхностных сил намного эффективнее и горизонтальной, и вертикальной конвекции.

4. ИК-термография и измерения рельефа поверхности с помощью теневое фонового метода (moon-glade BOS) для задачи локального ИК-нагрева поверхности CO₂-лазером позволяют сделать вывод об эффективности такого типа зондирования для определения свойств поверхности жидкости.

5. Автомодельные решения для нестационарного конвективного течения, возникающего при локальном ИК-нагреве поверхности жидкости, полученные для различных граничных условий на межфазной поверхности, позволяют рассчитать скорости распространения тепла для горизонтальной и термокапиллярной конвекции.

6. Новые методики ассимиляции данных для турбулентных квазистационарных течений позволяют восстановить поля скорости, давления, турбулентной вязкости и теплопроводности по экспериментально измеренным полям температуры и значениям скорости в некоторых точках.

7. Применение PINN (физически-информированных нейросетей) для ассимиляции температурных полей позволяет резко повысить точность определения локальных параметров на основе ограниченного набора экспериментальных данных, в том числе полученных с помощью рефракционных методов.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, полученные в диссертации, содержат два уровня анализа – численное моделирование и эксперимент. Во всех случаях проводится их сопоставление друг с другом, а также сравнение в предельных случаях с имеющимися литературными данными. Для конвекции к этим методикам добавляется нахождение и анализ автомодельных решений – как нестационарных, так и, в предельных случаях, стационарных. Это и определяет достоверность сделанных выводов. Основные положения диссертации были представлены на следующих конференциях:

1. Ломоносовские чтения (Москва, Россия, 2018, 2019, 2024, 2025).
2. Международная научная конференция-школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» (Москва, Россия, 2017, 2020, 2023).
3. Российская национальная конференция по теплообмену (Москва, Россия, 2018, 2022).
4. Школа-семинар молодых ученых и специалистов под руководством академика А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках» (Москва, Россия, 2021, 2023).
5. Минский международный форум по тепло- и массообмену. Minsk International Heat and Mass Transfer Forum. (Минск, Беларусь, 2022, 2024).
6. International conference on fluid control, measurements, and visualization (FLUCOME) (Beijing, China, 2023).
7. International conference on the methods of aerophysical research (ICMAR) (Новосибирск, Россия, 2024).
8. Всероссийская конференция, посвященная памяти академика А.М. Обухова «Турбулентность, динамика атмосферы и климата» (Москва, Россия, 2024).
9. Международная конференция «Современные проблемы теплофизики и энергетики» (Москва, Россия, 2024).
10. XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, Россия, 2025).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 7 статей в рецензируемых научных изданиях, из них 6 статей индексируются в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI.

Личный вклад автора. Автором совместно с научным руководителем были сформулированы цели и задачи исследования. Изложенные в работе результаты получены автором лично или при его непосредственном участии. Все эксперименты, связанные с ИК-термографией, теневым фоновым методом и цифровой трассерной визуализацией, проведены автором совместно с н.с. кафедры молекулярных процессов и экстремальных состояний вещества, к.ф.-м.н. Пуштаевым А.В. и доцентом, к.ф.-м.н. Плаксиной Ю.Ю. Двумерное численное моделирование для глав 2, 3 было выполнено доцентом, к.ф.-м.н. Винниченко Н.А.

Структура и содержание работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 141 страницах, включает 60 рисунков. Общее число ссылок составляет 131. В конце диссертации сформулированы основные результаты, полученные в ней.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении изложена общая характеристика диссертационной работы, ее актуальность; определены цель и задачи работы; сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава содержит литературный обзор, включающий ранее полученные для приповерхностных конвективных течений экспериментальные и численные результаты, а также автомодельные решения. При этом описываются различные механизмы горизонтальной конвекции: за счет термокапиллярных сил [1, 2] и за счет перераспределения давления при блокировке термокапиллярной конвекции поверхностной пленкой [3]. Рассматриваются различные варианты нагрева, приводящие к появлению горизонтальной конвекции [4, 5]. Приведен обзор работ, в которых были получены зависимости для течения в пограничном слое, выведенные из численных расчетов и автомодельных решений [6, 7]. Также рассматриваются исследования, посвященные осесимметричному конвективному течению, возникающему при локальном нагреве поверхности жидкости.

Такая постановка актуальна для определения поверхностных свойств, например, в целях экологического контроля или для обработки и очистки поверхности [8].

Рассмотрены различные методы ассимиляции данных [9, 10] для восстановления параметров гидродинамических течений. Отмечены немногочисленные работы, в которых исходными данными для восстановления других характеристик течения является поле температуры [11].

Вторая глава посвящена задаче горизонтальной конвекции, возникающей в жидкостях с различными свойствами межфазной поверхности при нагреве линейного источника тепла вблизи поверхности. В разделе 2.1 приведена постановка задачи, система уравнений и описаны граничные условия для жидкостей с разными свойствами межфазных границ. Рассматривается слой жидкости с источником нагрева, расположенным у поверхности. Для такой конфигурации течение вблизи поверхности можно разделить на три области, представленные на Рисунке 1: 1 – область замыкающего течения, 2 – область вблизи источника нагрева и 3 – течение в пограничном слое.

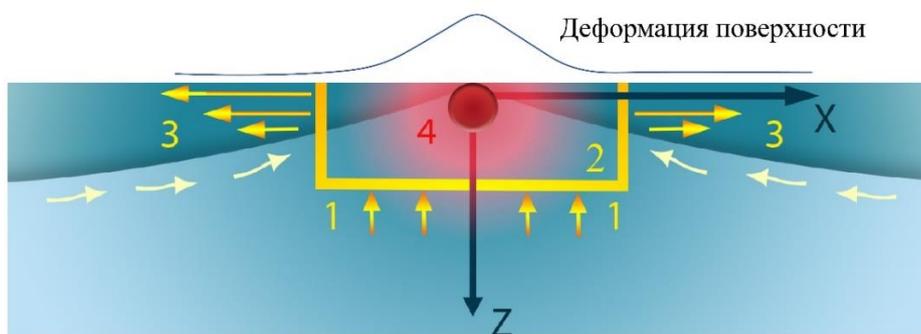


Рисунок 1 — Схема течения для линейного источника тепла у поверхности жидкости

Течение жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха. При инициировании тепловыделения возможны два механизма возникновения конвекции. При наличии поверхностной пленки, как в дистиллированной воде или глицерине, конвекция возникает за счет перераспределения давления. При отсутствии пленки (например, в этиловом спирте, силиконовых маслах) будет иметь место термокапиллярный механизм — темпера-

турная конвекция Марангони. Различие данных механизмов с точки зрения численного моделирования заключается в граничных условиях на свободной поверхности жидкости. Для дистиллированной воды задается условие прилипания: $V_x = 0$. Термокапиллярная конвекция Марангони описывается условием Пирсона: $\partial V_x / \partial z = -1 / \eta \cdot \partial \sigma / \partial x$, где σ - коэффициент поверхностного натяжения жидкости. В разделе 2.2 приведены параметры численного моделирования.

В разделе 2.3 описывается обезразмеривание и приближение пограничного слоя для вывода автомодельных решений. Автомодельные решения позволяют оценить максимальную скорость жидкости и толщину пограничного слоя, а также скорость гидродинамического переноса тепла. Случай конвекции в отсутствие термокапиллярных сил рассмотрен в разделе 2.4. Автомодельные координаты для данной задачи имеют вид: $\xi = z / \sqrt{x}$, $\hat{v} = x / t$. Координата \hat{v} зависит от времени, с ее помощью оценивается скорость распространения гидродинамического потока. Из стационарного автомодельного решения получены зависимости от мощности нагрева q (Вт/м) для размерных максимальной скорости $V_{x \max}^{\dim}$ и значения автомодельной переменной ξ_{\max}^{\dim} , соответствующего границе погранслоя $z_{\max} = \xi_{\max} \sqrt{x}$:

$$V_{x \max}^{\dim}(q) = f'_{\max} * \sqrt[3]{\frac{\rho \chi^2 g \beta}{\eta \lambda} q} \sim q^{1/3} \quad (1)$$

$$\xi_{\max}^{\dim}(q) = \xi_{\max} * \sqrt[6]{\frac{\eta \chi \lambda}{\rho g \beta q}} \sim q^{-1/6}, \quad z_{\max}^{\dim} = \xi_{\max}^{\dim} \sqrt{x^{\dim}}, \quad (2)$$

где f'_{\max} – константа, зависящая от числа Прандтля Pr , ρ – плотность, η – коэффициент динамической вязкости, λ – коэффициент теплопроводности, g – ускорение свободного падения, β – коэффициент теплового расширения, χ – коэффициент температуропроводности, z^{\dim} , x^{\dim} – размерные величины в метрах, ξ_{\max} – константа для конкретного Pr . В работе приведены автомодельные решения, полученные для чисел Прандтля, равных 0.1, 0.7, 7.16 и 70. Для локального числа

Нуссельта была выведена зависимость от числа Рэлея: $Nu_{loc} \sim Ra_X^{1/3}$, для полного: $Nu_{tot} \sim Ra_L^{1/6}$, что совпадает с оценками, полученными в литературе [5, 12].

Описание автомодельного решения для термокапиллярной конвекции приведено в разделе 2.5. Для данной задачи автомодельные координаты имеют вид: $\xi = z / x^{3/4}$, $\hat{v} = x / t^{2/3}$. Максимальная скорость достигается на поверхности при $\xi = 0$ и уменьшается при удалении от источника нагрева, $V_{X_{max}} = f'_{max} / \sqrt{x} = f'(0) / \sqrt{x}$. Поэтому для размерных переменных получается:

$$V_{X_{max}}^{dim} \sqrt{x^{dim}} = \frac{f'(0) \chi}{\sqrt{l}} = A_1 \left(\frac{\sigma_T q \chi}{\eta \lambda} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где $A_1 = f'(0)$ – константа, зависящая от числа Прандтля, $\sigma_T = -\partial \sigma / \partial T$ – тепловой градиент поверхностного натяжения. Граница погранслоя ξ_{max} определяется условием равенства нулю горизонтальной скорости. Для $\xi_{max}^{dim}(q)$ в размерном виде можно получить:

$$\xi_{max}^{dim}(q) = A_2 \sqrt[4]{\frac{\eta \chi \lambda}{\sigma_T q}}, \quad z_{max}^{dim} = \xi_{max}^{dim} x^{dim 3/4}, \quad (4)$$

где x^{dim} – координата в метрах, A_2 – константа, зависящая от Pr . В работе представлены результаты, полученные из автомодельных решений для чисел Прандтля, равных 0.2, 1, 10 и 17.4. Для локального числа Нуссельта была выведена зависимость от числа Марангони: $Nu_{loc} \sim Ma_X^{1/2}$, для полного: $Nu_{tot} \sim Ma_L^{1/4}$, что совпадает с оценками, полученными в других работах [13].

В разделе 2.6 приведены описания экспериментальных методик, примененных для исследования горизонтальной конвекции. Для измерения поля скорости используется метод цифровой трассерной визуализации (PIV). Поля температуры на поверхности регистрируются с помощью ИК-термографии. Методика moon-glade BOS используется для измерения рельефа поверхности.

Сравнительный анализ экспериментальных данных, численного моделирования и автомодельных решений приведен в разделе 2.7. На Рисунке 2 приведено

сравнение двумерных полей скорости и температуры, полученных из автоматического решения и численного расчета для $Pr=7.16$, что соответствует воде при температуре 20°C .

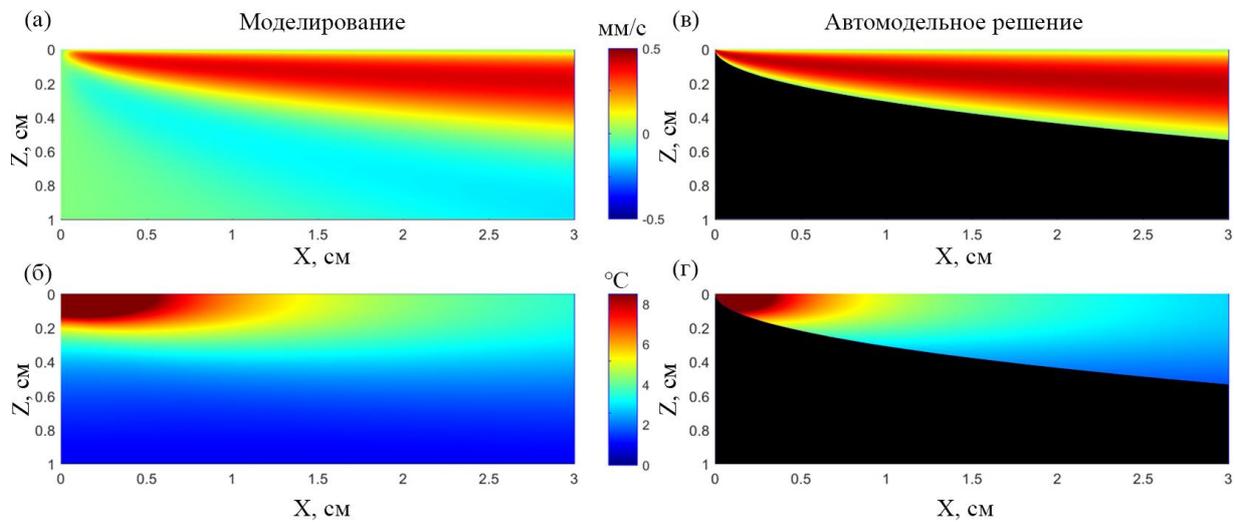


Рисунок 2 — Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автоматического решения (в), (г) для $Pr=7.16$

На Рисунке 3 показано сравнение вертикальных профилей горизонтальной скорости (а) и горизонтальных профилей вертикальной скорости (б) в дистиллированной воде спустя 20 с после начала нагрева (мощность нагрева $q=31$ Вт/м), полученных из численного моделирования и методом PIV.

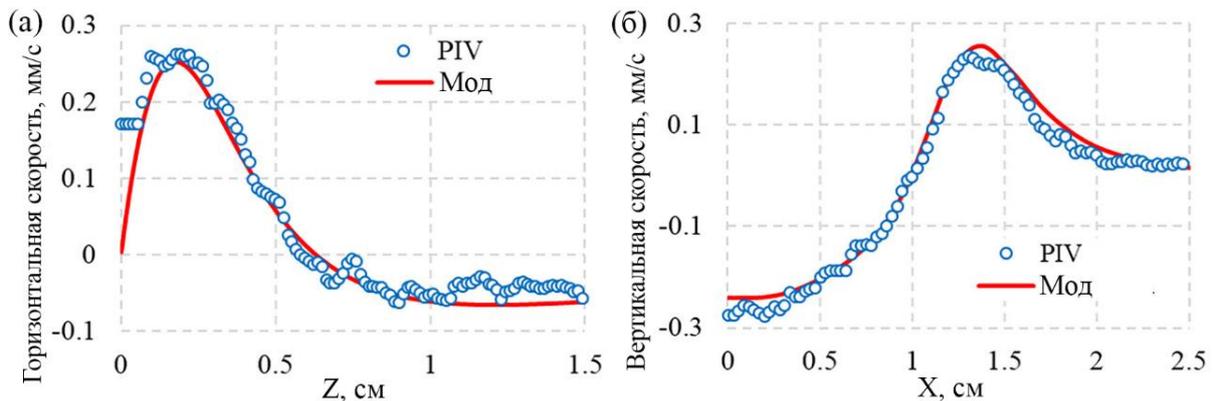


Рисунок 3 — Сравнение а) вертикальных профилей горизонтальной скорости, усредненных вдоль $1.3\text{ см} < x < 1.7\text{ см}$, б) горизонтальных профилей вертикальной скорости, усредненных вдоль $0.4\text{ см} < z < 0.6\text{ см}$, полученных экспериментально и из численного моделирования в воде спустя 22 с после начала нагрева

На Рисунке 4а приведены профили давления на поверхности воды, полученные из эксперимента, автомодельного решения и численного моделирования при величине теплового потока, равной 31 Вт/м. Видно хорошее совпадение данных несмотря на то, что автомодельное решение было выведено в предположении отсутствия боковых границ. Вблизи источника нагрева автомодельное решение не описывает течение, так как в этой области несправедливы приближения погранслоя.

На Рисунке 4б представлены горизонтальные профили температуры на поверхности воды, полученные численно и экспериментально с помощью метода ИК-термографии. Совпадение численных и экспериментальных профилей температуры подтверждает справедливость граничного условия прилипания и указывает на то, что перенос тепла при наличии пленки на поверхности правильно описывается граничным условием прилипания.

На Рисунке 5 приведено сравнение двумерных полей скорости и температуры, полученных из автомодельного решения и численного расчета для $Pr=17.4$, что соответствует этанолу при температуре 20°C.

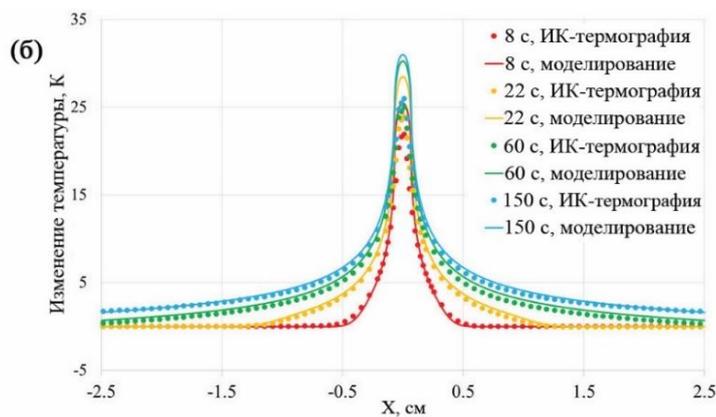
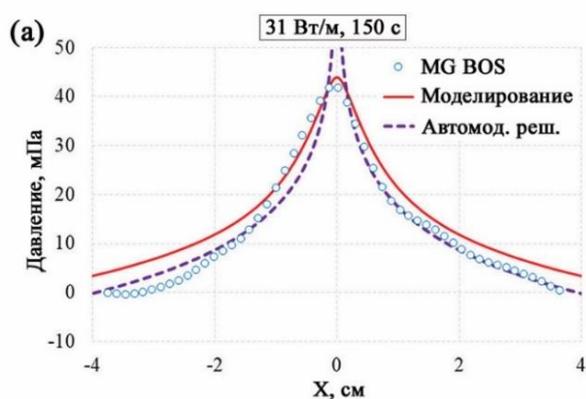


Рисунок 4 — а) Профили давления на поверхности воды, полученные из эксперимента, автомодельного решения и численного моделирования, при $q=31$ Вт/м, $t=150$ с, б) горизонтальные профили температуры, полученные экспериментально и из численного моделирования

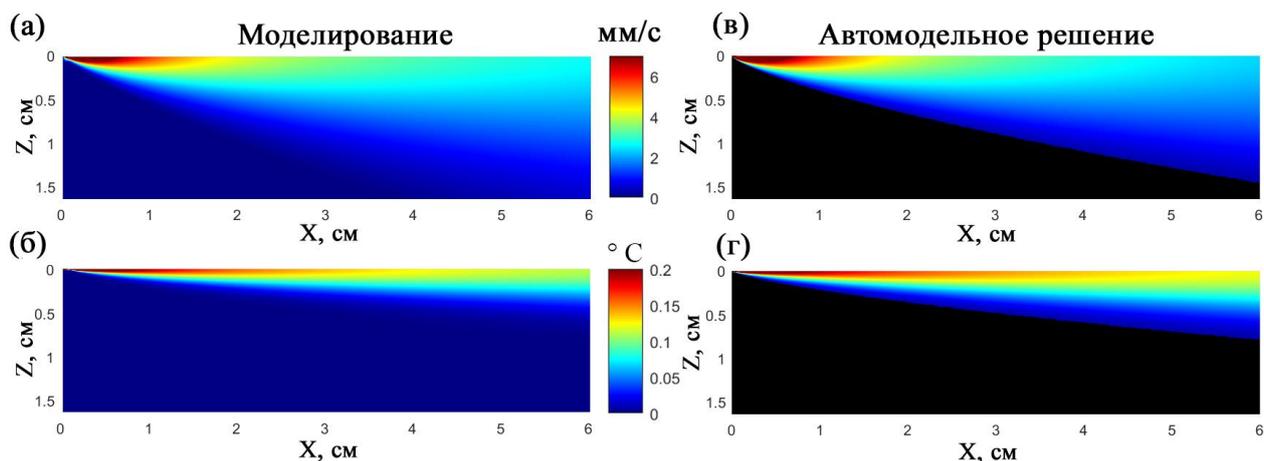


Рисунок 5 — Двумерные поля горизонтальной скорости, мм/с, (а), (в) и возмущения температуры, К, (б), (г), полученные численно (а), (б) и с помощью автомодельного решения (в), (г) для $Pr=17.4$

На Рисунке 6 показаны вертикальные профили скорости и горизонтальные профили вертикальной скорости, полученные в этаноле спустя 4 с после начала нагрева (мощность нагрева $q=4$ Вт/м) численно и экспериментально с помощью метода PIV. Видно хорошее количественное совпадение данных, что указывает на то, что условие Пирсона правильно описывает течение в этаноле при наличии термокапиллярной конвекции Марангони.

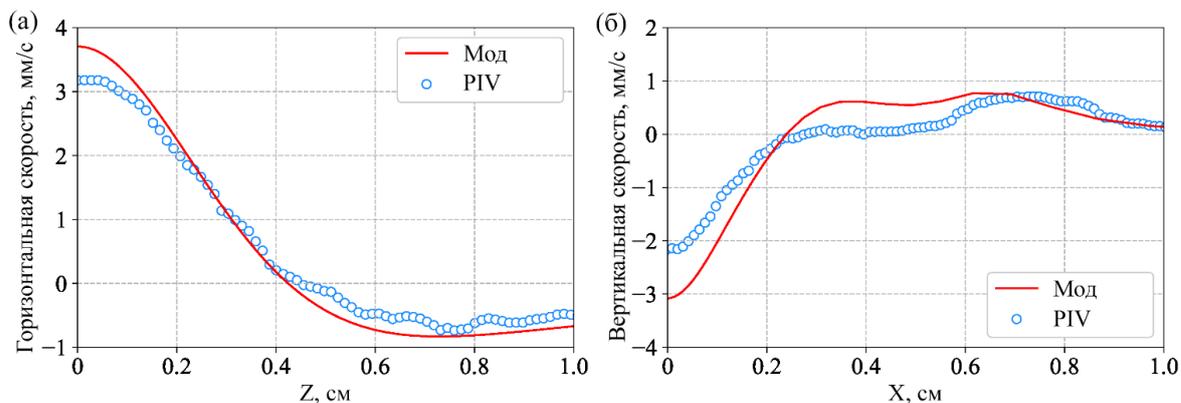


Рисунок 6 — (а) Вертикальные профили горизонтальной скорости, усредненные в области $0.8 \leq x \leq 1.2$ см; (б) горизонтальные профили вертикальной скорости, усредненные в области $0.4 \leq z \leq 0.8$ см спустя 4 с после начала нагрева

Рельеф свободной поверхности определяется с помощью метода moon-glade BOS. Его анализ позволяет сделать выводы о корректности моделирования и различии двух механизмов конвекции. Сравнение экспериментальных результатов и численных расчетов приведено на Рисунке 7а. Как видно из графиков, вначале

присутствуют нестационарные процессы, но затем картина стабилизируется. На Рисунке 7б приведены горизонтальные профили возмущения температуры, полученные численно и экспериментально с помощью метода ИК-термографии.

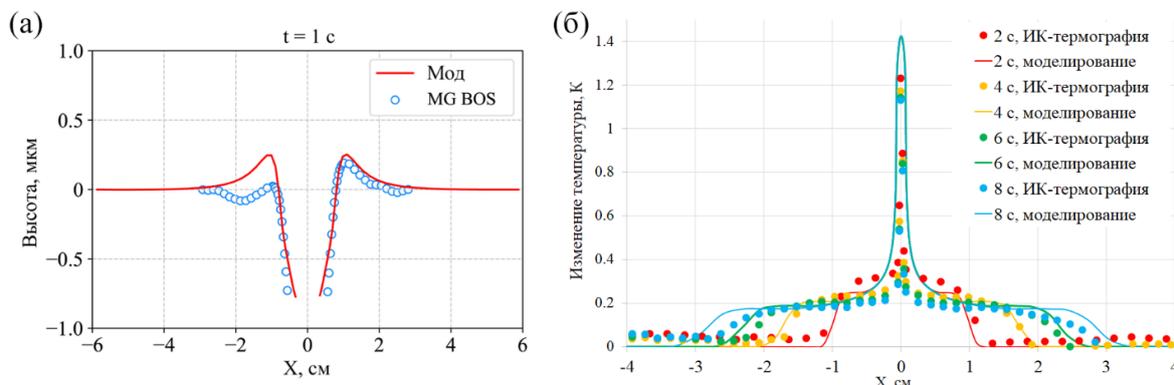


Рисунок 7 — а) Профили поверхности, полученные экспериментально с помощью метода *moon-glade BOS* и численно спустя 1 с после начала нагрева в этаноле, б) горизонтальные профили возмущения температуры на поверхности, полученные экспериментально и из численного моделирования в этаноле спустя 2, 4, 6 и 8 с после начала нагрева

В отличие от жидкости с пленкой на поверхности, в данном случае максимальное значение температуры увеличивается только на начальном этапе, а не растет постоянно, так как силы поверхностного натяжения более интенсивно переносят теплую жидкость из области источника нагрева. Профиль температуры расплывается быстрее с течением времени, чем в дистиллированной воде, несмотря на меньшую мощность нагрева.

Третья глава посвящена задаче исследования свойств межфазных поверхностей с помощью локального ИК-нагрева. Постановка задачи, система уравнений и схема эксперимента приведены в разделе 3.1. В данной задаче одновременно проводятся эксперименты с ИК-термографией и методом *moon-glade BOS* для измерения рельефа поверхности. Использовались различные жидкости: дистиллированная вода, водный раствор глицерина, этанол, силиконовое масло различной вязкости. Схема эксперимента изображена на Рисунке 8.

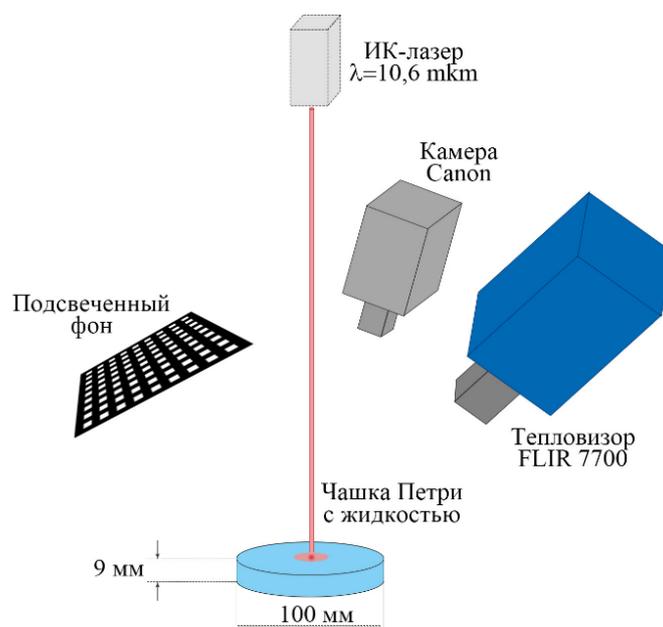


Рисунок 8 — Схема эксперимента с ИК-термографией поверхности и методом *toon-glade* BOS для измерения рельефа поверхности при локальном нагреве сверху ИК-лазером

Сколлимированный пучок лазера с длиной волны излучения $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ и мощностью излучения от 0.1 до 1 Вт фокусируется на поверхности исследуемой жидкости, находящейся в чашке Петри диаметром 100 мм. Высота жидкости составляет 9 мм. Для уменьшения мощности лазера до 0.1 Вт использовался стеклянный фильтр CaF_2 , частично прозрачный на длине волны излучения лазера.

В разделе 3.2 описывается вывод автомодельных решений для нестационарной задачи локального ИК-нагрева в цилиндрическом случае. Рассматриваются задачи с двумя различными механизмами конвекции, как и в случае нагрева линейным источником тепла. Автомодельные координаты для случая термокапиллярной конвекции имеют вид: $\xi = z / r$, $r_1 = r^2 / t$, для горизонтальной конвекции $-\xi = z / r^{2/3}$, $r_2 = r^{4/3} / t$. Автомодельные переменные для двух различных случаев позволяют провести сравнительный анализ распространения тепла. Пусть R – радиус распространения теплового возмущения, \tilde{t}_m – время распространения в случае термокапиллярной конвекции, \tilde{t}_h – в случае горизонтальной конвекции при наличии поверхностной пленки. Тогда для параметров эксперимента с дистиллированной водой и этанолом сравнение двух данных величин приведет к зависимости:

$$\frac{\tilde{t}_h}{\tilde{t}_m} = \frac{1.68}{R^{2/3}} \quad (5)$$

На достаточно большом расстоянии от источника нагрева (порядка 2 м) начинает преобладать механизм горизонтальной конвекции за счет перераспределения давления. На расстоянии порядка 1 см, как в эксперименте, термокапиллярный механизм оказывается более эффективным с точки зрения скорости теплопереноса.

В разделе 3.3 дано описание экспериментальной установки. Сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования выполнено в разделе 3.4. На Рисунке 9 представлены термограммы и карты рельефа поверхности для 90%-ого раствора глицерина с водой спустя 5 с после начала нагрева, измеренные экспериментально и полученные в численном моделировании. Приведены усредненные по углу радиальные профили сигнала тепловизора и высоты поверхности для разных моментов времени после начала нагрева.

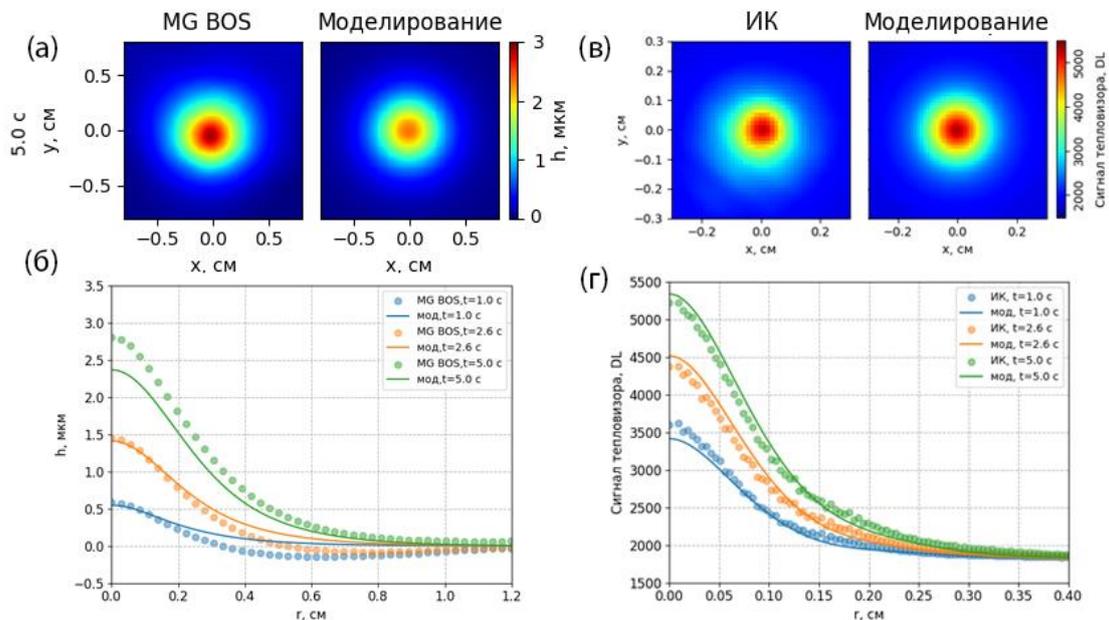


Рисунок 9 — Результаты для 90% раствора глицерина с водой: а) карты рельефа поверхности, б) сравнение усредненных радиальных профилей рельефа поверхности, в) термограммы, г) сравнение усредненных радиальных профилей сигнала тепловизора

В растворе глицерина с водой на поверхности образуется пленка, блокирующая термокапиллярный механизм конвекции. Из профилей сигнала тепловизора в разные моменты времени видно, что максимум температуры с течением времени растет, радиус теплового пятна медленно увеличивается. Пик температуры соответствует максимуму высоты поверхности. Из-за наличия пленки поверхность практически не обновляется, процесс распространения тепла происходит медленно по сравнению с термокапиллярным механизмом конвекции.

На Рисунке 10 представлены термограммы и карты рельефа поверхности для этанола спустя 0.5 с после начала нагрева, измеренные экспериментально и полученные в численном моделировании. Приведены усредненные по углу радиальные профили сигнала тепловизора и высоты поверхности в разные моменты времени после начала нагрева.

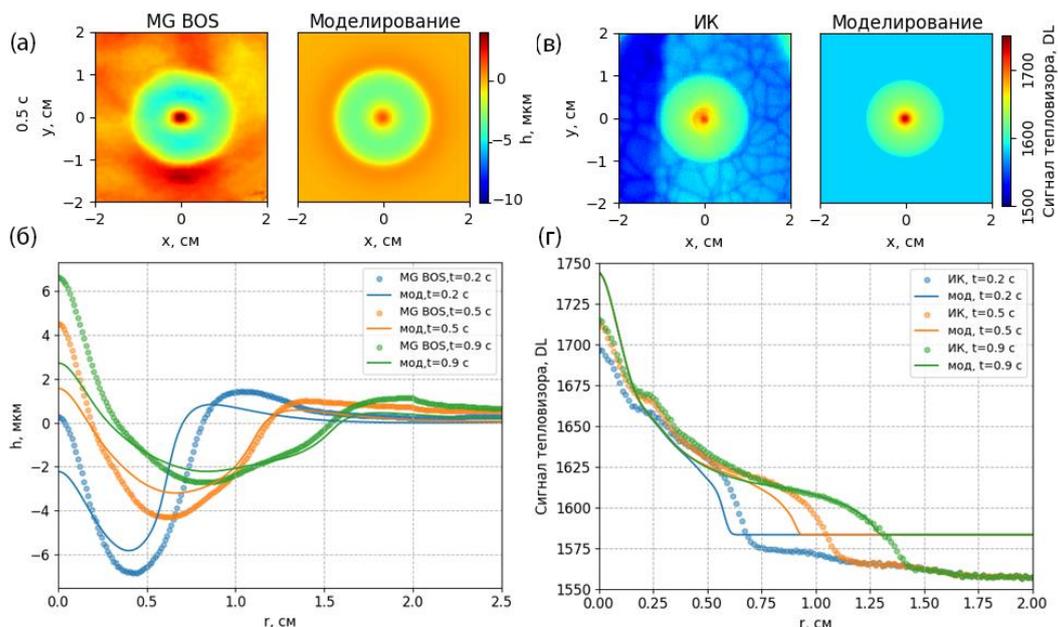


Рисунок 10 — Результаты для этанола: а) Карты рельефа поверхности, б) сравнение усредненных радиальных профилей рельефа поверхности, в) термограммы, г) сравнение усредненных радиальных профилей сигнала тепловизора

Видно различие в форме профилей поверхности в случае жидкости при наличии пленки (Рисунок 9) и в ее отсутствии (Рисунок 10). За счет термокапиллярного механизма тепловое пятно расплывается быстрее, от области нагрева распространяется волна, и в первый момент времени в центре пятна образуется впа-

дина. При наличии пленки ситуация иная: нагретая жидкость не уносится термокапиллярными силами, и чтобы компенсировать давление по сравнению с ненагретой областью вокруг теплового пятна, жидкость под пятном от лазера поднимается и образуется пик. Аналогичная ситуация наблюдается в силиконовых маслах PDMS-6.1 и PDMS-1000.

В четвертой главе описано восстановление характеристик турбулентного течения с помощью ассимиляции температурных полей. Параметры экспериментальной установки теневого фонового метода (ТФМ) приведены **в разделе 4.1**. В работе предложены две методики восстановления: с прямой подстановкой экспериментальных данных в уравнения (**раздел 4.2**) и с помощью физически-информированной нейросети (PINN) (**раздел 4.3**). Для демонстрации разработанных методов выбраны два квазистационарных осесимметричных течения: турбулентные свободная и импактная струи горячего воздуха.

Квазистационарное состояние течения струи описывается RANS-уравнениями для слабосжимаемой жидкости. Если поле температуры известно, то уравнение энергии системы можно рассматривать относительно неизвестной эффективной теплопроводности, а плотность определять через уравнение состояния. Турбулентная теплопроводность λ_t связана с турбулентной вязкостью η_t через удельную теплоемкость c_p и турбулентное число Прандтля Pr_t следующим образом: $\lambda_t = \eta_t c_p / Pr_t$.

Первая методика восстановления подразумевает прямую подстановку экспериментальных данных температуры, предварительно сглаженных с применением различных фильтров, в уравнения гидродинамики с последующим численным решением системы уравнений. Один из способов обработки экспериментальных данных подразумевает аппроксимацию поля температуры гауссовой функцией. Во втором подходе для получения сглаженного распределения температуры решается модифицированное уравнение Гельмгольца. Далее производные от сглаженного поля находятся численно с помощью центральных разностей. В третьем

подходе используется фильтр Савицкого-Голея, который аппроксимирует фрагменты экспериментальных данных полиномом низкой степени и определяет как сглаженное поле температуры, так и его пространственные производные.

Несмотря на то, что после сглаживания разными способами поля температуры незначительно различаются, результаты ассимиляции данных для компонент скорости, представленные на Рисунке 11а, похожи друг на друга и хорошо согласуются с результатами RANS-моделирования. Ассимиляция поля температуры, измеренного ТФМ, позволяет правильно восстановить структуру течения без использования засева и скоростных камер. Разница между результатами ассимиляции данных и RANS-моделирования сравнима с разницей между результатами RANS-моделирования с использованием различных моделей турбулентности.

Во втором способе используется физически-информированная нейросеть (PINN) [14], которая обучается восстанавливать характеристики течения по исходным экспериментальным данным температуры и скорости без предварительной фильтрации. Ассимиляция данных с помощью PINN не требует предварительного обучения на размеченных данных. Вместо этого на основе ограниченных данных, полученных в одном эксперименте (например, поля температуры), производится подбор полей всех величин, которые обеспечивали бы, с одной стороны, минимальное отклонение от результатов измерений, с другой стороны – минимальные невязки уравнений гидродинамики и граничных условий. Фактически PINN решает задачу аппроксимации с очень большим числом неизвестных параметров. Роль ограничений играют имеющиеся экспериментальные данные, уравнения, описывающие течение, и известные граничные условия. При этом используется тот же аппарат, что и при стандартном применении нейронных сетей. Сеть состоит из нескольких слоев нейронов (Рисунок 12), которые описываются линейными функциями, и нелинейных функций активации между слоями. То есть используется многослойная полносвязная нейросеть.

Восстановление течения производится в предположении постоянного или переменного турбулентного числа Прандтля, с использованием различных экспериментальных данных по скорости. Эти отличия учитываются в виде целевой

функции, в которую входят отклонения от экспериментальных данных и степень нарушения условия постоянства турбулентного числа Прандтля.

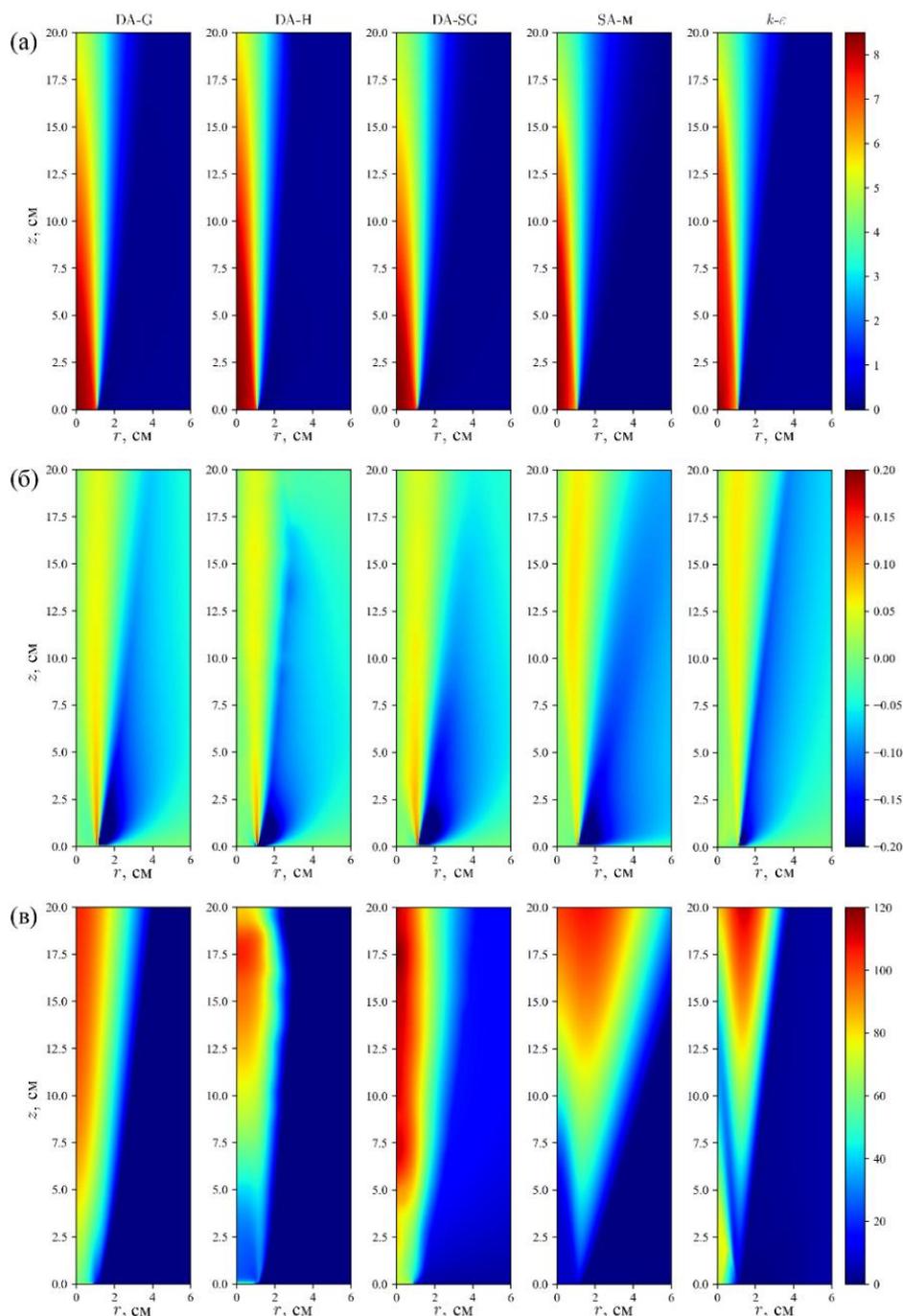


Рисунок 11 — Поля (а) осевой скорости (м/с), (б) радиальной скорости (м/с), (в) отношения полной вязкости к молекулярной. Результаты ассимиляции данных: DA-G – с аппроксимацией гауссовой функцией, DA-H – с решением модифицированного уравнения Гельмгольца, DA-SG – с использованием фильтра Савицкого–Голя. RANS-моделирование: SA-m – с модифицированной моделью Спаларта–Аллараса, k-ε – с k-ε моделью

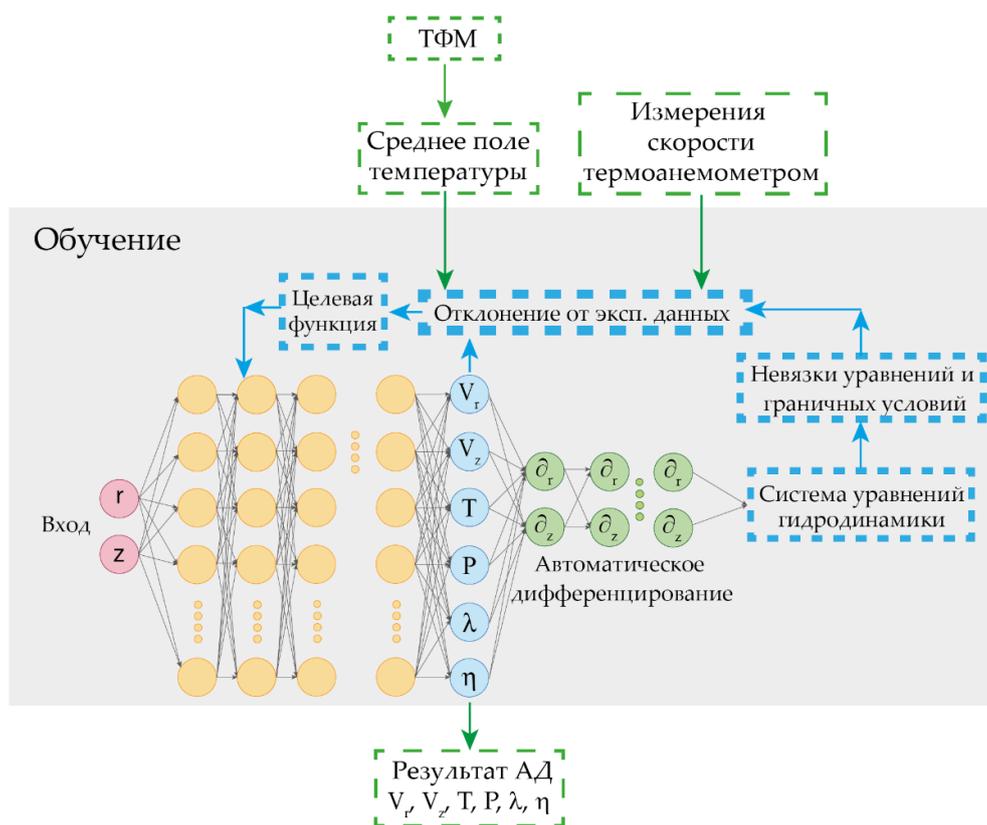


Рисунок 12 — Архитектура PINN и процесс обучения

На Рисунке 13 представлены результаты ассимиляции полей компонент скорости, давления, и турбулентных вязкости и теплопроводности по полям температуры и профилям осевой скорости для импактной струи с расстоянием от сопла до преграды, равным 4.7 см. Используются следующие обозначения для различных подходов:

- PINN-1: постоянное турбулентное число Прандтля ($Pr_t = 0.9$), без дополнительного профиля скорости;
- PINN-2: постоянное турбулентное число Прандтля ($Pr_t = 0.9$), с дополнительным профилем скорости;
- PINN-3: переменное турбулентное число Прандтля с дополнительным профилем скорости.

Результаты восстановления с PINN-2 и PINN-3 характеризуются сопоставимыми ошибками, но PINN-3 позволяет получить распределение турбулентного числа Прандтля напрямую из экспериментального поля температуры. Дополнительные данные по скорости могут в дальнейшем улучшить качество восстановления полей турбулентной вязкости и других величин.

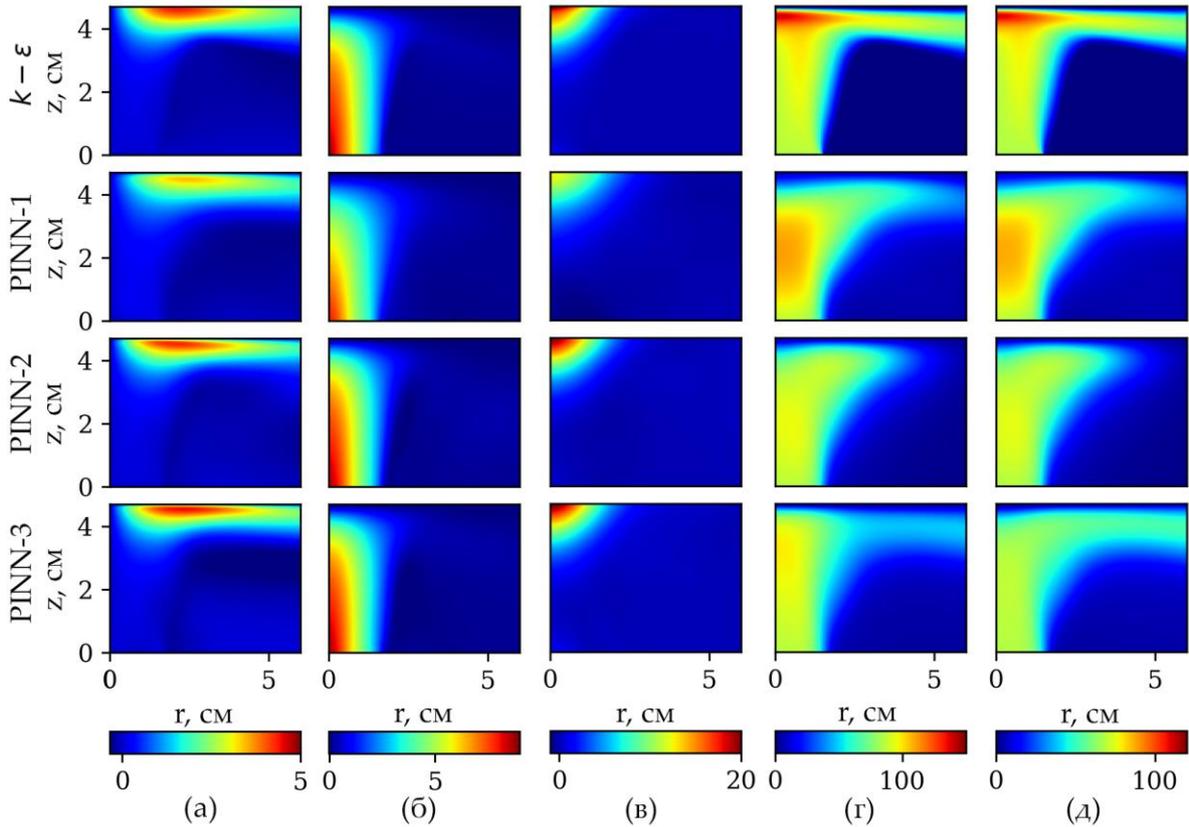


Рисунок 13 — Поля: (а) радиальной скорости (м/с), (б) осевой скорости (м/с), (в) возмущения давления (Па), (г) отношения полной вязкости к молекулярной, (д) отношения полной теплопроводности к молекулярной, полученные из RANS-моделирования с $k-\varepsilon$ моделью турбулентности и восстановленные PINN-1, PINN-2, PINN-3 для эксперимента с импактной струей при высоте расположения пластины 4.7 см

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Впервые получены автомодельные решения для задачи конвекции при нагреве поверхности жидкости линейным источником тепла в жидкостях с различными свойствами межфазной границы. Эти решения хорошо согласуются с результатами проведенных экспериментов (ИК-термография поверхности, методом цифровой трассерной визуализации (PIV) и теньвым фоновым методом (moon-glade BOS) для определения рельефа) и численного моделирования, что свидетельствует о правильном описании граничных условий на поверхности жидкости и механизмов конвекции. В зависимости от граничных условий на по-

верхности конвекция обусловлена или преимущественно термокапиллярным эффектом, или взаимодействием термокапиллярного и концентрационного эффектов, что приводит к замедлению движения поверхности и ее полной блокировке.

2. С помощью расчетов гидродинамических течений, возникающих при нагреве поверхности жидкости линейным источником тепла, впервые проведен сравнительный анализ эффективности теплоотвода от нагреваемого линейного источника в зависимости от свойств поверхности. Показано, что при наличии поверхностной пленки горизонтальная конвекция за счет градиента давления дает намного менее эффективное охлаждение по сравнению со случаем источника тепла, расположенного в объеме жидкости. Для горизонтальной конвекции за счет градиента давления получена зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея $Nu \sim Ra^{1/6}$, а для вертикальной конвекции $Nu \sim Ra^{1/5}$. Но, если поверхностная пленка отсутствует, отвод тепла за счет термокапиллярного механизма очень эффективен в ближней зоне с максимальными тепловыми нагрузками (число Нуссельта зависит от числа Марангони как $Nu \sim Ma^{1/4}$).

3. Впервые полученные автомодельные решения для нестационарной задачи конвекции при локальном ИК-нагреве поверхности позволяют рассчитать скорость распространения тепла для двух механизмов горизонтальной конвекции. Полученные результаты хорошо согласуются с выполненными численными расчетами и экспериментами (ИК-термография поверхности и теневого фонового метода (moon-glade BOS) для определения рельефа).

4. Показано существенное влияние свойств межфазной границы на параметры конвекции. При отсутствии поверхностной пленки, когда основной является термокапиллярная конвекция, эффективность теплоотвода существенно возрастает. В несколько раз при тех же условиях возрастают числа Нуссельта и скорость распространения тепла.

5. Показано, что регистрируемое с помощью ИК-термографии поле температуры поверхности жидкости при локальном зондировании поверхности лазерным излучением резко меняется при наличии поверхностной пленки примесей. Блокировка движения поверхности пленкой примесей (например, в воде,

кроме деионизированной) приводит при тех же параметрах зондирующего импульса к резкому увеличению температуры в центре и отсутствию существенного расплывания теплового пятна. Наблюдаемые отличия позволяют использовать зондирование лазерным излучением в сочетании с тепловизионными наблюдениями для исследования свойств поверхности жидкости.

6. Впервые проведенное экспериментальное исследование рельефа поверхности и поля давлений с помощью теневого фонового метода (moon-glade BOS) привело к выводу о существенном влиянии на эти поля свойств межфазной поверхности — как в задаче с нагревом линейным источником тепла, так и в задаче локального зондирования. Это обусловлено различием механизма конвекции. Если для термокапиллярной конвекции основным фактором являются поверхностные силы, то при наличии пленки конвекция определяется перераспределением давления вблизи поверхности, приводящим к искривлению поверхности. Результаты экспериментов хорошо согласуются с численным расчетом, выполненным с учетом деформации поверхности жидкости.

7. Предложенный новый метод ассимиляции данных для турбулентных квазистационарных течений с помощью подстановки в уравнения гидродинамики экспериментальных полей температуры позволяет восстановить поля скорости, турбулентной вязкости и теплопроводности по экспериментально измеренным усредненным полям температуры для квазистационарной свободной осесимметричной струи горячего воздуха.

8. Впервые примененная для ассимиляции температурных полей и данных скорости физически-информированная нейросеть (PINN) позволяет восстановить поля скорости, давления, турбулентной вязкости и теплопроводности, а также получить распределение турбулентного числа Прандтля для квазистационарной свободной и импактной осесимметричной струи горячего воздуха. Новый метод обладает перспективой развития как для более подробного анализа неизотермических течений, так и для химически-реагирующей среды при учете изменения концентраций веществ.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.3.17. Химическая физика, горение и взрыв, физика экстремальных состояний вещества:

[A1] Rudenko Yu.K. Horizontal convection driven by nonuniform radiative heating in liquids with different surface behavior / Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Yu.Yu., Rudenko Yu.K., Uvarov A.V. // International Journal of Heat and Mass Transfer – 2018. – Vol. 126, Part B. – P. 400-410. Импакт-фактор 5.8 (JIF), EDN: YBHJJZ, 1,3 печ. л., вклад автора 0,3.

[A2] Rudenko Yu.K. Horizontal convective flow from a line heat source located at the liquid-gas interface in presence of surface film / Rudenko Yu.K., Vinnichenko N.A., Plaksina Yu.Yu., Pushtaev A.V., Uvarov A.V. // Journal of Fluid Mechanics – 2022. – Vol. 944. – A35. Импакт-фактор 3.9 (JIF), EDN: ZMTKXC, 2,7 печ. л., вклад автора 0,5.

[A3] Rudenko Yu.K. Color-encoded M-array Background Oriented Schlieren for measurements of strongly refracting objects / Vinnichenko N.A., Andrianova A.V., Pushtaev A.V., Rudenko Yu.K., Plaksina Yu.Yu., Uvarov A.V. // International Journal of Thermofluids – 2023. – Vol. 18. – P. 100364. Импакт-фактор 1.43 (SJR), EDN: AICGWM, 0,6 печ. л., вклад автора 0,3.

[A4] Rudenko Y.K. Reconstruction of turbulent flow from temperature field measured using Background Oriented Schlieren / Rudenko Y.K., Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Y.Yu., Uvarov A.V. // International Journal of Thermofluids – 2024. – Vol. 23. – P. 100744. Импакт-фактор 1.43 (SJR), EDN: SKKRMD, 0,6 печ. л., вклад автора 0,6.

[A5] Rudenko Y. Complete characterization of axisymmetric turbulent jet using background oriented schlieren and physics-informed neural network / Rudenko Y., Vinnichenko N., Plaksina Y., Uvarova I., Ganichev A., Uvarov A. // Heat Transfer Research – 2025. – Vol. 56, No. 5. – P. 17-35. Импакт-фактор 1.6 (JIF), EDN: IIXZUB, 2,2 печ. л., вклад автора 0,6.

[A6] Rudenko Yu.K. Background-oriented schlieren with image processing based on phase-shifting profilometry / Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Rudenko Yu.K., Plaksina Yu.Yu., Uvarov A.V. // *Experiments in Fluids* – 2025. – Vol.66, No. 3. – P. 47. Импакт-фактор 2.5 (JIF), EDN: WLPHRQ, 2,1 печ. л., вклад автора 0,3.

Иные публикации в рецензируемых научных журналах:

[A7] Руденко Ю.К. Возникновение конвекции в приповерхностном слое жидкости / Плаксина Ю.Ю., Руденко Ю.К., Пуштаев А.В., Винниченко Н.А., Уваров А.В. // *Процессы в геосредах*. – 2017. – №3. – С.619-626. Импакт-фактор 0.129 (РИНЦ), EDN: ZMQSKD, 0,8 печ. л., вклад автора 0,3.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1966, Vol. 7, P. 43-44.
2. Shmyrov A., Mizev A., Demin V., Petukhov M., Bratsun D. On the extent of surface stagnation produced jointly by insoluble surfactant and thermocapillary flow // *Adv. Colloid Interface Sci.* 2018, Vol. 255, P. 10-17.
3. Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Yu.Yu., Rudenko Yu.K., Uvarov A.V. Horizontal convection driven by nonuniform radiative heating in liquids with different surface behavior // *Int. J. Heat Mass Transfer* 2018, Vol. 126, P. 400-410.
4. Rossby H.T. On thermal convection driven by non-uniform heating from below: an experimental study // *Deep-Sea Res.* 1965, Vol. 12, No.1, P. 9-16.
5. Mullarney J.C., Griffiths R.W., Hughes G.O. Convection driven by differential heating at a horizontal boundary // *J. Fluid Mech.* 2004, Vol. 516, P. 181-209.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем./ Под ред. Л.Г. Лойцянского — М.: Наука, 1969. —742 с.
7. Glauert M.B. The wall jet // *J. Fluid Mech.* 1956, Vol. 1, P. 625-643.
8. Ivanova N.A., Starov V.M., Trybala A., Flyagin V.M. Removal of micrometer size particles from surfaces using laser-induced thermocapillary flow: Experimental results // *J. Colloid Interface Sci.* 2016, Vol. 473, P. 120-125.

9. Cai S., Mao Z., Wang Z., Yin M., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: a review // *Acta. Mech. Sin.* 2021, Vol. 37, No. 12, P. 1727-1738.
10. Brenner O., Piroozmand P., Jenny P. Efficient assimilation of sparse data into RANS-based turbulent flow simulations using a discrete adjoint method // *J. Comput. Phys.* 2022, Vol. 471, 111667.
11. Tesch K., Ryms M., Lewandowski W.M. Method of reconstructing two-dimensional velocity fields on the basis of temperature field values measured with a thermal imaging camera // *Int. J. Heat Mass Transfer* 2022, Vol. 184, 122264.
12. Rocha C.B., Bossy T., Llewellyn Smith S.G. Improved bounds on horizontal convection // *J. Fluid. Mech.* 2020, Vol. 883, 41.
13. Boeck T. Bénard-Marangoni convection at large Marangoni numbers: Results of numerical simulations // *Adv. Space Res.* 2005, Vol. 36, No. 1, P. 4-10.
14. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving non-linear partial differential equations // *J. Comput. Phys.* 2019, Vol. 378, P. 686-707.