

**ОТЗЫВ официального оппонента  
о диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
Макаровой Юлии Константиновны  
на тему: «Многотипные ветвящиеся случайные блуждания  
при отсутствии и наличии иммиграции»  
по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая  
статистика**

Диссертация посвящена современному разделу теории стохастических процессов --- теории ветвящихся случайных блужданий по решеткам. Такие процессы представляют собой одну из наиболее быстро развивающихся областей теории случайных процессов. Важнейшим направлением теории ветвящихся случайных блужданий является изучение предельной по времени пространственной структуры поля частиц на решетках, что существенно расширяет круг как фундаментальных задач, рассматриваемых в теории ветвящихся процессов и теории случайных блужданий, так и возможных приложений --- от популяционной динамики до статистической физики.

Отметим основные особенности диссертации. Время во всех изучаемых процессах предполагается непрерывным, а фазовое пространство неограниченным. Публикаций о многотипных ветвящихся случайных блужданиях, в отличие от многотипных ветвящихся процессов, в настоящий момент немного. Это связано со значительными трудностями исследования таких процессов. Отметим лишь ряд статей Молчанова, Яровой и их учеников, среди которых и автор диссертации Макарова.

Отличительной особенностью диссертации Макаровой является предположение о существовании в системе двух типов частиц, которые могут различаться не только законами размножения и гибели, но и законами блуждания. Для приложений в теории эпидемий существенным является предположение о возможном изменении типа частицы в ходе эволюции. Такие модели ветвящихся случайных блужданий также вошли в диссертацию.

Другой отличительной особенностью является изучение моделей с возможным притоком частиц извне в точки решетки, которые называются

ветвящимися случайными блужданиями с иммиграцией. При этом иммиграция может зависеть от расположения источника. Видимо, впервые такая модель была рассмотрена в статье Макаровой с соавторами в 2019г.

Исследования ветвящихся случайных блужданий, как правило, начинаются с изучения моментов численностей частиц, которые существенно усложняются в предположении существования нескольких типов частиц и при наличии иммиграции. По соотношению между предельными моментами можно выявлять различные эффекты, характеризующие предельную структуру поля частиц, например, такой эффект как «перемежаемость», т.е. наличие нерегулярной структуры поля с возникновением высоких пиков.

В представленной работе автор исследует именно предельное поведение первого момента и моментов второго порядка субпопуляций и популяций частиц двухтипного ветвящегося случайного блуждания при различных предположениях о начальном распределении частиц и о количестве источников ветвления, т.е. источников размножения и гибели частиц, на многомерной решетке.

В связи с перечисленными новыми постановками задач актуальность и новизна диссертации не вызывают сомнений.

Перейдем к анализу основных результатов диссертации. Диссертация, объемом 115 страниц, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 28 наименований (без учета работ автора диссертации).

К основным результатам первой главы можно отнести теорему о поведении первых моментов численностей частиц субпопуляций для ветвящихся случайных блужданий с двумя типами частиц и источниками ветвления в каждой точке многомерной решетки при совпадающих механизмах блужданий (теорема 1.1.1). В связи с этим, возникает вопрос о поведении процесса при различных механизмах блуждания. И Макарова доказывает теорему 1.1.2, обобщающую теорему 1.1.1 на случай, когда генератор случайного блуждания первого типа частиц имеет конечную

дисперсию скачков, а генератор второго типа --- бесконечную. Затем автор переходит от изучения однородной ветвящейся среды, когда источники ветвления одинаковой интенсивности расположены в каждой точке решетки, к изучению неоднородной среды, т.е. среды с одним источником ветвления частиц, и получает теорему 1.2.3. Хочу отметить опубликованную в 2023 году на эту тему статью Макаровой без соавторов.

Вторая глава посвящена ветвящимся случайным блужданиям с иммиграцией. Основное отличие от ветвящегося случайного блуждания, изученного в первой главе, --- добавление возможности притока частиц обоих типов извне. Для этой модели в работе получены дифференциальные уравнения первых моментов численностей частиц в субпопуляциях. Полученные уравнения достаточно сложны для исследования в общем виде. В связи с этим, для объяснения основных эффектов автор уделяет особое внимание более простому случаю --- ветвящемуся случайному блужданию с одним типом частиц в докритическом случае, т.е. когда интенсивность рождения частиц меньше интенсивности гибели. Приток частиц извне позволяет избежать вырождения и свести процесс к стационарному. По моему мнению, весьма интересна теорема 2.2.1 о предельном поведении моментов второго порядка численностей частиц для докритического ветвящегося случайного блуждания с одним типом частиц и иммиграцией. Этот результат обобщается на докритическое ветвящееся случайное блуждание с одним типом частиц и иммиграцией в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции зависят от положения частиц на решетке, а, именно, изучено асимптотическое поведение первого момента численностей частиц в теореме 2.3.1 и моментов второго порядка в теореме 2.3.2. Для ветвящегося случайного блуждания с иммиграцией изучена устойчивость процесса по Ляпунову в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции зависят от положения частицы на решетке.

В третьей главе рассмотрено ветвящееся случайное блуждание с двумя типами частиц и с возможным изменением типа частиц. Доказана теорема

3.2.1 об асимптотическом поведении первого момента численностей частиц каждого из двух типов. Доказаны теоремы об асимптотическом поведении моментов второго порядка численностей частиц первого типа (теорема 3.3.1) и второго типа (теорема 3.4.1).

Для доказательства теорем автор применяет как методы теории вероятностей и стохастических процессов, связанные с выводом прямых и обратных уравнений Колмогорова, условными математическими ожиданиями, стохастическими дифференциальными уравнениями, представлениями Фейнмана-Каца, так и методы теории дифференциальных уравнений и спектральной теории, что, несомненно, подтверждает квалификацию автора.

Полученные Макаровой результаты создают базу для дальнейших исследований ветвящихся случайных блужданий с конечным числом типов частиц при отсутствии и наличии иммиграции.

Апробация результатов автора впечатляет, в частности, приглашенный доклад на Мировом конгрессе по статистке в 2021г. Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Результаты автора опубликованы в 10 статьях. Из них 4 статьи --- в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности и отрасли наук. Одна статья без соавторов опубликована в рецензируемом научном издании из перечня ВАК.

Прежде всего, отмечу, что у меня нет существенных претензий к содержательной стороне работы, однако имеется целый ряд замечаний к изложению и оформлению диссертации и автореферата:

- Весьма затрудняет чтение несоответствие номеров теорем в автореферате и диссертации.
- В положениях, выносимых на защиту, было бы желательно указывать номера теорем.

- Ряд теорем можно было бы сформулировать более компактно за счет объединения случаев, в которых получаются совпадающие асимптотические представления.
- В теореме 6 в автореферате (теореме 2.3.2 в диссертации) в определениях А и В вторые слагаемые можно убрать.
- В теореме 8 в автореферате (теореме 3.3.1 в диссертации) в случае  $d=1$  в формуле эквивалентности для второго момента первое слагаемое можно убрать, а в случае  $d > 1$  для интеграла следовало указать область интегрирования.

Вместе с тем, указанные замечания не влияют на значимость диссертационного исследования.

Результаты диссертации вносят важный вклад в развитие теории многотипных ветвящихся случайных блужданий. Положения, выносимые на защиту, получены лично автором, обоснованы и подтверждены четко сформулированными и строго доказанными теоремами. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки) по направлениям исследований: предельные теоремы, стохастические процессы, марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели, стационарные случайные процессы и поля.

На основании изучения диссертации и работ соискателя, в которых излагаются основные научные результаты диссертации могу заключить, что диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование

оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Макарова Юлия Константиновна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,

профессор кафедры математической статистики

факультета вычислительной математики и кибернетики

Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Ульянов Владимир Васильевич

8 мая 2026

Контактные данные:

тел.: +7(495) 919-53-94, e-mail: [vulyanov@cs.msu.ru](mailto:vulyanov@cs.msu.ru)

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:

01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:

119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики

Тел. +7 (495) 939-30-10; e-mail: [cmc@cs.msu.ru](mailto:cmc@cs.msu.ru)

Подпись В.В. Ульянова удостоверяю: