

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Лисеев Михаил Юрьевич

Нормальные отображения и их свойства

Специальность 1.1.3. Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026

Диссертация подготовлена на кафедре общей топологии и геометрии механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:

Садовничий Юрий Викторович
доктор физико-математических наук,
доцент.

Официальные оппоненты:

Богачев Владимир Игоревич
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории функций и функционального анализа, профессор.

Щепин Евгений Витальевич

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, отдел геометрии и топологии, главный научный сотрудник.

Геворкян Павел Самвелович

доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет, Институт математики и информатики, кафедра математического анализа имени акад. П.С. Новикова, заведующий кафедрой.

Защита диссертации состоится 13 ноября 2026 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1., ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:

<https://dissovet.msu.ru/dissertation/4099>

Автореферат разослан "___" октября 2026 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук

В.А. Кибкало

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Диссертация относится к области послойной общей топологии. Послойная общая топология (или топология непрерывных отображений) — раздел математики, развивающийся на базе общей и алгебраической топологий. По-видимому, первое упоминание идеи, имеющей отношение к послойной общей топологии, можно найти в классической статье И.А. Вайнштейна¹ 1947 года, где был определен и изучен класс бикомпактных (в современной терминологии — совершенных) отображений. Название “бикомпактное отображение” подчеркивает, что эти отображения выполняют роль компактов в классе непрерывных отображений.

Последующее развитие обусловлено появлением в 1960 году у J. Dieudonné и A. Grothendieck понятия отделимости отображения², распространяющего с пространств на непрерывные отображения понятие хаусдорфовости. С конца 60-х годов возникает интерес к компактификациям отображений (1966–1969, G. Whyburn³ и G. Cain⁴). При изучении В. М. Ульяновым^{5,6} (1974–1975) вопросов связанных с построением бикомпактных расширений пространств с первой аксиомой счетности получен ряд результатов о $\mathfrak{T}$ -бикомпактификациях отображений, где неявно используется определенное позднее Б.А. Пасынковым тихоновское отображение. Введенное В.А. Матвеевым в 1982 году понятие подчинения на отображении позволяет показать, что существует сохраняющее порядок взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{T}$ -бикомпактификациями отображений и $\mathfrak{T}$ -подчинениями на отображениях⁷. В дальнейшем это утверждение удалось распространить на общий случай компактификаций и подчинений на отображениях⁸ (1988). В 1982 году В.П. Норин⁹ вводятся

¹И.А. Вайнштейн, «О замкнутых отображениях метрических пространств». *Докл.АН СССР*. 57(4) (1947), с. 319–321.

²J. Dieudonné A. Grothendieck, «Éléments de Géométrie Algébrique I: le langage des schemas». *I.H.E.S. Publ. Math.* 4 (1960).

³G.T. Whyburn, «Compactification of mappings». *Springer Nature* 166.2 (1966), с. 168–174.

⁴G.L. Cain, «Compactification of mappings». *Proceedings of the American Mathematical Society. American Mathematical Society (AMS)* 23.2 (1969), с. 298–303.

⁵В. М. Ульянов, «Бикомпактные расширения с первой аксиомой счетности и непрерывные отображения». *Матем. заметки* 15.3 (1974), с. 491–499.

⁶В. М. Ульянов, «О бикомпактных расширениях счетного характера и абсолютах». *Матем. сб.* 98(2) (1975), с. 223–254.

⁷В. М. Ульянов В. А. Матвеев, «О $\mathfrak{T}$ -бикомпактификациях отображений». *Russian Math. Surveys* 37.2 (1982), с. 211–212.

⁸В. А. Матвеев, «Об отделимых бикомпактификациях отображений». *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 1 (1988), с. 94–96.

⁹В. П. Норин, «О близостях для отображений». *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 4 (1982),

понятия m -близости и θ — m -близости на отображении, которые обобщают понятия близости на пространствах и устанавливают связь этих понятий с компактфикациями отображений. В том же году, им исследуется размерность наростов компактификаций отображения¹⁰.

В статье Б.А. Пасынкова¹¹ 1984 года окончательно формулируются программа “от пространств — к отображениям”. Формулируются аксиомы отделимости для отображений и рассматривается широкий круг вопросов непосредственно следующих из вводимых определений. Идея распространения на отображения топологических свойств пространств (“от пространств — к отображениям”), инициировала многочисленные исследования, проводимые, в основном, учениками Б.А. Пасынкова. Поскольку до конца 90-х для отображений не было аналога леммы Урысона, считалось, что нормальность и функциональная нормальность отображений могут не совпадать. В книге¹² Б.А. Пасынкова и Д.К. Мусаева показано, что по аналогии с пространствами можно рассматривать компактные и (функционально) хаусдорфовы отображения, являющиеся (вполне) регулярными и (функционально) нормальными. Таким образом, развивались две теории (хаусдорфовых и тихоновских) компактификаций отображений.

Разными авторами рассматривались совершенные компактификации отображений (1990, Р. Мазроа¹³), методы построения расширений отображений, являющийся аналогом соответствующего метода Гельфанда-Шилова для пространств (1990, Н.И. Ильина¹⁴), метод построения всех тихоновских компактификаций отображений (1990, Л.Т. Крежевских¹⁵).

Размерность отображения определена Б.А. Пасынковым¹¹. Им же даны и простейшие связанные с этим понятием свойства. В 1995 году В.М. Карауловым¹⁶ на отображения были перенесены основные характеристики размерности $\dim$ и установлены аналоги теорем о монотонности размерности.

Классы обобщений компактных отображений изучались также Д. Бух-

с. 33—36.

¹⁰В. П. Норин, «О размерности наростов отображений». *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 5 (1982), с. 17—21.

¹¹Б.А. Пасынков, «О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств.» *Отображения и функторы. Сборник/Ред.кол.: П.С. Александров(гл.ред.) и др.* Изд-во. МГУ:М. (1984).

¹²Б.А. Пасынков Д.К. Мусаев, *О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений.* ФАН, 1994.

¹³Р. Мазроа М. Эльх, «О совершенных бикомпактификациях непрерывных отображений». *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 1 (1990), с. 23—26.

¹⁴Н.И. Ильина, «О бикомпактификациях и пополнениях непрерывных отображений». *Дис.канд. физ.-мат. наук. М.: МПГИ им. В.И. Ленина (автореферат)* (1990).

¹⁵Л.Т. Крежевских, «О расширениях непрерывных отображений». *Дис.канд. физ.-мат. наук. М.: МПГИ им. В.И. Ленина (автореферат)* (1991).

¹⁶В.М. Караулов, «О размерности непрерывных отображений». *Дис.канд. физ.-мат. наук. М.: МПГИ им. В.И. Ленина (автореферат)* (1995).

аджиром — паракомпактность отображения¹⁷ (1997 год), субпаракомпактность и (суб)метакомпактность отображений¹⁸ (1998 год). Как результат получен аналог теоремы Тамано¹⁹ для отображений²⁰ (1999 год), связывающий паракомпактные, тихоновские и (функционально)нормальные отображения. В работе Ю.Н. Мироновой²¹ (2003 год) на отображения распространяются понятия и утверждения связанные с псевдокомпактностью.

Изучение метризуемости отображений началось в 1999 году Д. Бухаджиром, Т. Miwa и Б.А. Пасынковым²². Введенное ими понятие коллективной нормальности отображения дало возможность определить МТ-отображение (metrizable type (MT)), распространяющее понятие метрического пространства на случай отображений. В 2002 году в работах Б.А. Пасынкова, F. Cammaroto²³ и Б.А. Пасынков, F. Cammaroto, G. Nardo²⁴ исследуются тривиальная семи-метризуемость, тривиальная D -вполне регулярность отображения, получены метризации теоремы для отображений. Критерии полноты и метризуемости (Нагата-Смирнова и Бинга) отображений даны V. Nguyen и Б.А.Пасынковым²⁵ в 2013. Ими же на случай отображений распространен принцип сжимающих отображений^{26,27} (2014–2015).

Из приведенного выше видно, что теория нормальности отображений оставалась не изученной достаточно долгое время. Не считая полученной в 1998, в качестве следствия, Леммы Урысона для отображений²⁸, о нормальности отображений было известно мало. Это побудило автора диссертации заняться изучением вопросов касающихся распространения свойств нормальных пространств на отображения.

Диссертация посвящена распространению на отображения понятий и утверждений, являющихся аналогами соответствующих понятий и утверждений

¹⁷D. Buhagiar, «Paracompact maps». *Questions and Answers in General Topology* (1997).

¹⁸T. Miwa D. Buhagiar, «Covering properties on maps». *Questions and Answers in General Topology* (1998).

¹⁹H. Tamano, «On paracompactness». *Pacific J. Math.* 10 (1960), с. 1043–1047.

²⁰D. Buhagiar, «The Tamano Theorem in MAP». *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 40 (1999), с. 1275–1290.

²¹Ю.Н. Миронова, «О некоторых связанных с псевдокомпактностью свойствах непрерывных отображений». *Дис.канд. физ.-мат. наук. М.: МПГИ им. В.И. Ленина (автореферат)* (2003).

²²Б.А. Pasyнков D. Buhagiar T. Miwa, «On metrizable type (MT) maps and spaces». *Topology and Its Applications* 96 (1999), с. 31–51.

²³Б.А. Pasyнков F. Cammaroto, «Some metrization theorems for continuous mappings». *Questions and Answers in General Topology* (2002).

²⁴G. Nardo F. Cammaroto B.A. Pasyнков, «On trivially semi-metrizable and D-completely regular mappings». *Bolletino dell Unione Matematica Italiana* 5B (2002).

²⁵Б.А. Pasyнков V. Nguyen, «Metric and metrizable mappings». *Topology and its Applications* 160 (2013), с. 1214–1226.

²⁶Б.А. Pasyнков, «Fiberwise contraction mappings principle». *Topology and its Applications* 179 (2014).

²⁷Б.А. Pasyнков V. Nguyen, «Coincidence points in the cases of metric spaces and metric maps». *Topology and its Applications* 201 (2015).

²⁸А.Ю. Зубов, «Ростки множеств и функций в послонной общей топологии». *Фундамент. и прикл. матем.* 4(1) (1998), с. 109–117.

для нормального, наследственно нормального и совершенно нормального пространств.

Для произвольного топологического пространства Y рассматривается категория Top_Y (MAP^{29}), объектами которой являются непрерывные отображения в пространство Y . Для объектов $f : X \rightarrow Y, g : Z \rightarrow Y$ морфизмом $f \rightarrow g$ является такое непрерывное отображение $F : X \rightarrow Z$, что $f = g \circ F$. В послойной общей топологии определения аксиом отделимости и прочих свойств непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ требуют только наличия топологии на X и Y . Обобщающий характер послойной общей топологии (утверждения справедливые для одноточечных (постоянных) отображений эквивалентны соответствующим утверждениям для пространств) может быть выражен на категорном языке следующим образом — категория Top есть частный случай категории Top_Y , когда пространство $Y = \{y\}$ — одноточечное. Это приводит к усложнению построений и большей вариативности возможных определений из которых ценность представляют те, которые позволяют получить утверждения, аналогичные утверждениям, имеющим место для категории Top . Иными словами, имеет место изоморфизм $Top \sim Top_{Y=\{y\}}$, а утверждения касающиеся пространств не переносятся “один к одному” на отображения.

Всюду ниже под пространством понимается топологическое пространство, а под отображением — непрерывное отображение топологических пространств. В актуальной терминологии нормальными называют отображения определяемые по Матвееву³⁰, а определенные Пасынковым¹¹ — называют преднормальными.

Цели и задачи диссертации

Построение теории нормальности отображений, в частности, распространение с пространств на непрерывные отображения понятий и утверждений касающихся (наследственной, совершенной) нормальности пространств.

Рассмотрены следующие задачи:

1. Дать послойные аналоги определений наследственной и совершенной нормальности. Привести примеры, различающие разные виды нормаль-

¹¹Б.А. Пасынков, «О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств.» *Отображения и функторы. Сборник/Ред. кол.: П.С. Александров (гл. ред.) и др.* Изд-во. МГУ:М. (1984).

²⁹D. Buhagiar, «The category MAP ». *Memoirs of the Faculty of Science and Engineering. Shimane University. Series B. Mathematical Science* 34 (2001), с. 70—83.

³⁰В.А. Матвеев, «Структуры подчинений, связанных с отображениями». *Кандидатская диссертация по специальности 01.01.04 - Геометрия и топология, Научный руководитель: Пономарев В.И., д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова Защищена в совете Д 053.05.05 при МГУ имени М.В. Ломоносова* (1989).

ности отображений, в том числе, пример различающий нормальное и преднормальное отображения. Исследовать свойства и выяснить взаимосвязи наследственно нормальных и совершенно нормальных отображений.

2. Разработать функциональные методы для работы с нормальными отображениями. Распространить на отображения теоремы Брауэра—Титце—Урысона о продолжении функций с замкнутых подмножеств нормальных пространств и “теорему Веденисова”, характеризующую совершенно нормальные пространства.
3. Исследовать сохранение свойств отображений типа нормальности замкнутыми морфизмами отображений.

Положения выносимые на защиту

- I. Способ построения f –непрерывной функции (лемма 2.2); условие сходимости функционального ряда f –непрерывных функций к f –непрерывной функции (лемма 2.3); способ построения f –непрерывных функций на согласованном семействе двоичных разбиений отображения в точке (предложение 2.5; определения 2.3 и 2.4).
- II. Пример различающий преднормальное и нормальное отображение (пример 3.4). Характеризация нормальности отображения (аналог леммы об ужатии), предложение 3.7. Функциональная характеристика нормальных отображений (теорема 3.12), эквивалентность: А) нормальность отображения; В) существование согласованного семейства двоичных разбиений (определение 2.4) отображения (аналог малой леммы Урысона для пространств); С) функциональная нормальность отображения (аналог леммы Урысона для пространств); D) возможность продолжить f –непрерывную функцию с замкнутого подотображения (послойный аналог теоремы Брауэра—Титце—Урысона для пространств). Понятие σ –нормального отображения (определение 3.8), наследуемое F_σ –подотображениями (теорема 5.4). Функциональная характеристика σ –нормального отображения (теорема 3.18), эквивалентность: А) σ –нормальность отображения; В) существование согласованного семейства двоичных разбиений (определение 2.4) — аналог малой леммы Урысона для пространств; С) функциональная отделимость замкнутого и F_σ подотображений f –равностепенно непрерывным семейством функций (аналог леммы Урысона для пространств).
- III. Определения, свойства, характеристики наследственно нормальных отображений. Иерархия различных понятий наследственной нормальности

отображений (определения 4.1, 4.2, предложение 4.7, примеры 4.2, 4.3, 4.4). Характеризации наследственно нормальных отображений (предложения 4.1, 4.3, 4.4, 4.8).

- IV. Определения, свойства, характеристики совершенно нормальных отображений. Иерархия различных понятий совершенной нормальности отображений (определения 5.2, 5.3 и предложение 5.7) и их связь с наследственно нормальными отображениями (теорема 5.12). Функциональная характеристика co - σ -совершенно нормального отображения (теорема 5.18). “Функциональное” определение совершенной нормальности отображения (определение 5.4). Его промежуточное место между co - σ - и co -совершенными нормальностями отображения. Определенная таким образом совершенная нормальность отображения является co -наследственно нормальным отображением (теорема 5.16) и является наследственным свойством (предложение 5.14). Послойный аналог теоремы Веденисова характеризующий совершенную нормальность отображения (теорема 3.18 и предложение 5.20).
- V. Сохранение нормальности и σ -нормальности отображения замкнутыми морфизмами отображений (теоремы 3.10 и 3.16). Сохранение наследственной нормальности отображения замкнутыми морфизмами отображений (теорема 4.10). Сохранение $co(coit)$ -совершенной нормальности отображения замкнутыми морфизмами отображений (предложение 5.21, и следствие 5.22).

Научная новизна

Автором предложен пример различающий преднормальное и нормальное отображения, тем самым разрешен вопрос остававшийся открытым с 1988 года.

Введены наследственно и совершенно нормальные отображения, доказаны их характеристики, исследована взаимосвязь и наследственные свойства таких отображений. Приведены примеры разделяющие эти понятия и дающие способ их построения.

Разработана методика работы с f -непрерывными функциями (послойный аналог непрерывных функций в общей топологии) и приведены явные конструкции их построения.

Доказаны (функциональные) характеристики нормального и совершенно нормального отображений, обобщающие на случай непрерывных отображений Лемму Урысона, теорему Брауэра–Титце–Урысона и теорему Веденисова.

Показано сохранение (совершенной, наследственной) нормальности отображения под действием замкнутых tar -морфизмов.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер.

Полученные результаты распространяют на отображения теорию нормальности пространств, заполняют “пробел” в построении теории послойной общей топологии и могут найти применение в различных областях топологии: в топологических вопросах теории категорий, в теории пространств отображений, в теории топологических пространств функций и послойной топологии, теории размерности.

Замечания о слоях и тотальном пространстве отображений нормального типа дают возможность решать обратную задачу, то есть, имея, например, наследственно нормальное отображение сделать заключение о послойной (наследственной) нормальности тотального пространства.

Приводимые в диссертации характеристики дают возможность строить отображения нормального типа и распознавать их примеры.

Степень достоверности

Достоверность результатов автора подтверждена строгими математическими доказательствами, смысл вводимых понятий иллюстрируется примерами. Корректность определений обуславливается примерами, различающими вводимые понятия, доказательством утверждений об иерархии вводимых понятий, сопоставлением вводимых понятий с обобщаемыми понятиями для пространств (рассматриваются постоянные отображения).

Выносимые на защиту результаты получены автором самостоятельно.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 4 работы [1–4]. Основные результаты диссертации изложены в 3 статьях диссертанта [1–3] в рецензируемых изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология (физико-математические науки).

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях и семинарах:

1. XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2020”, Москва, Россия, 20 ноября 2020 (те-

ма доклада “Сохранение свойств отображений типа нормальности замкнутыми тар-морфизмами”).

2. XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2021”, Москва, Россия, 12—16 апреля 2021 (тема доклада “О свойствах совершенно нормальных отображений”).
3. Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 145-летию Томского государственного университета и 75-летию механико-математического факультета. Секция “Геометрия и топология”, Томск, Россия, 2—5 октября 2023 (тема доклада “Об отображениях нормального типа”).
4. Научная конференция “Топология и её приложения”, посвящённая памяти Е.Г. Пыткеева, Екатеринбург, Россия, 7—9 февраля 2024 (тема доклада “Функциональные характеристики нормальных отображений.”).
5. Спецсеминар по послойной общей топологии под. рук. Б.А. Пасынкова, неоднократно (2016–2018).
6. Научно-исследовательский семинар им. П.С. Александрова кафедры общей топологии и геометрии, 2023–2024 годы (темы докладов: “Функциональный подход в исследовании свойств нормальности отображений”, “О совершенной нормальности отображений (функциональный подход)”).

Обозначения

Далее всюду под пространством понимается топологическое пространство, а под отображением — непрерывное отображение пространств.

Подотображение отображения $f : X \rightarrow Y$ может рассматриваться³¹ как сужение на прообраз и обозначаться $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$, $X_0 \subset X$, сужение на прообраз и образ и обозначаться $f||_{X_0} : X_0 \rightarrow f(X_0)$, $X_0 \subset X$, и сужение на образ и обозначаться $f_{Y_0} : f^{-1}Y_0 \rightarrow Y_0$, $Y_0 \subset Y$.

Множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ обозначают натуральные, рациональные иррациональные и вещественные числа соответственно.

Топология на пространстве X обозначается τ_X . Семейство открытых окрестностей точки $x \in X$ обозначается $\mathcal{N}(x)$. Начальный ординал счетной мощности — $\omega_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Наименьший несчетный ординал обозначается ω_1 . Последовательность целых неотрицательных чисел $a, a + 1, \dots, b - 1, b$ обозначается $\overline{a, b}$.

³¹Р. Энгелькинг, *Общая топология*. Мир, 1986.

Для семейства подмножеств $\lambda = \{U_i\}_{i \in A}$ множества X , и подмножества $Z \subset X$, $\lambda \wedge Z$ обозначает семейство подмножеств $\{U_i \cap Z\}_{i \in A}$ множества Z .

Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Полный объём работы составляет 98 страницы, включая 9 рисунков. Список литературы содержит 37 наименований. Используется двойная нумерация определений, утверждений, предложений и теорем, выносных формул где первое число означает номер главы, второе — порядковые номера.

Основное содержание работы

Во **введении** описываются цели работы, кратко формулируются основные результаты, а также определяется место данных результатов в современной послойной общей топологии.

В **Главе 2** автором развит метод работы с f -непрерывными функциями, необходимый для дальнейшего изложения. В частности, лемма 2.2 это способ построения f -непрерывной функции как предела последовательности функций, а лемма 2.3 это условия сходимости функционального ряда f -непрерывных функций к f -непрерывной функции. В определении 2.2 вводится, как будет показано дальше, крайне важное определение f -равностепенно непрерывного в точке семейства функций. В определениях 2.3 и 2.4 вводятся понятия правильного k -разбиения пространства и согласованного семейства двоичных разбиений отображения. Они дают возможность строить f -непрерывную функцию по согласованному семейству двоичных разбиений отображения (предложение 2.5).

Определение 2.1. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ ограниченная функция $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется f -непрерывной в точке²⁸ $y \in Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\mathcal{O}y$ точки y , что $\text{osc}_\varphi(f^{-1}\mathcal{O}y) < \varepsilon$.

Лемма 2.2. Пусть для отображения $f : X \rightarrow Y$ и точки $y \in Y$ определены пары $(\mathcal{O}_n, \varphi_n)$, где $\mathcal{O}_n$ — окрестность точки y , $\varphi_n : X \rightarrow [0, 1]$, $n \in \omega_0$, такие, что

- (a) $\mathcal{O}_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$, $n \in \omega_0$, $\mathcal{O}_0 = Y$;
- (b) последовательность $\{\text{osc}_{\varphi_n}(f^{-1}\mathcal{O}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к 0;

²⁸А.Ю. Зубов, «Ростки множеств и функций в послойной общей топологии». *Фундамент. и прикл. матем.* 4(1) (1998), с. 109–117.

(с) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_{n+1}|_{f^{-1}\mathcal{O}_{n+1}} - \varphi_n|_{f^{-1}\mathcal{O}_{n+1}}\|$ сходится.

Тогда функция $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_n(x), & x \in f^{-1}\mathcal{O}_n \setminus f^{-1}\mathcal{O}_{n+1}, n \in \omega_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x), & x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}\mathcal{O}_n \end{cases}$$

f -непрерывна в точке $y \in Y$.

Лемма 2.3. Пусть для отображения $f : X \rightarrow Y$ и точки $y \in Y$ семейство f -непрерывных в точке $y \in Y$ функций $\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, такое, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|$ сходится. Тогда функция $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ f -непрерывна в точке y .

Определение 2.2. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ семейство функций $\{\varphi_n : X \rightarrow [0, 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$ будем называть f -равностепенно непрерывным в точке y , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $\mathcal{O}y$ точки y , что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\text{osc}_{\varphi_n}(f^{-1}\mathcal{O}y) < \varepsilon.$$

Определение 2.3. (а) Для $k \in \mathbb{N}$ разбиение $U^0, \dots, U^{k-1}$ пространства X назовем *правильным k -разбиением*, если

(1) множество $\bigcup_{m=0}^p U^m$ — замкнуто в X при $p = \overline{0, k-1}$

(эквивалентно множество $\bigcup_{m=l}^{k-1} U^m$ — открыто в X при $l = \overline{0, k-1}$);

(2) $(\bigcup_{m=0}^p U^m) \cap \text{cl}(\bigcup_{m=p+2}^{k-1} U^m) = \emptyset$, $p = \overline{0, k-3}$, для $k \geq 3$.

Определение 2.4. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ и точки $y \in Y$ последовательность окрестностей $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_0 = Y$, $\mathcal{O}_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$, точки y и семейств U_n^k , $k = \overline{0, 2^n - 1}$, правильных 2^n -разбиений подпространств $f^{-1}\mathcal{O}_n$, $n \in \omega_0$, назовем *согласованным семейством двоичных разбиений отображения $f : X \rightarrow Y$ в точке $y \in Y$* , если

$$U_{n+1}^{2k} \cup U_{n+1}^{2k+1} = U_n^k \cap f^{-1}\mathcal{O}_{n+1}, \quad k = \overline{0, 2^n - 1}.$$

Предложение 2.5. Пусть для отображения $f : X \rightarrow Y$ и точки $y \in Y$ задано согласованное семейство $\{\mathcal{O}_n, \{U_n^k \mid k = \overline{0, 2^n - 1}\} \mid n \in \omega_0\}$ двоичных разбиений отображения $f : X \rightarrow Y$ в точке $y \in Y$.

Тогда, для семейства функций $\varphi_n : X \rightarrow [0, 1]$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in X \setminus f^{-1}\mathcal{O}_n, \\ \frac{k}{2^n-1}, & x \in U_n^k, \quad k = \overline{0, 2^n-1}, \end{cases}$$

пары $(\mathcal{O}_n, \varphi_n)$, $n \in \omega_0$, удовлетворяют условиям леммы 2.2, задают f -непрерывную в точке $y \in Y$ функцию $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_n(x), & x \in f^{-1}\mathcal{O}_n \setminus f^{-1}\mathcal{O}_{n+1}, \quad n \in \omega_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x), & x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}\mathcal{O}_n, \end{cases}$$

и $\text{osc}_{\varphi}(f^{-1}\mathcal{O}_n) \leq \frac{1}{2^n-1}$.

Глава 3 диссертации посвящена вопросам распространения на отображения понятий и утверждений касающихся нормальных пространств. Традиционно в отношении понятия нормальности отображений используется терминология Келли (для нормальности отображения не требуется, чтобы оно было T_1 отображением). Ключевую роль и представляющую наибольший интерес в диссертации имеют разделы посвященные функциональным характеристикам свойств нормальности отображений.

Определение 3.1. Подмножества A, B пространства X называются *отделимыми окрестностями в подпространстве X' пространства¹¹ X* , если множества $A \cap X'$ и $B \cap X'$ имеют в X' дизъюнктные окрестности.

Определение 3.2. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ множества $A, B \subset X$ называются *f -отделимыми окрестностями¹¹*, если любая точка $y \in Y$ обладает окрестностью $\mathcal{O}y$, в прообразе $f^{-1}\mathcal{O}y$ которой множества A и B отделимы окрестностями.

Определение 3.3. Отображение $f : X \rightarrow Y$ *преднормально¹¹*, если любые два дизъюнктных замкнутых подмножества A и B пространства X будут f -отделимы окрестностями.

Определение 3.4. Отображение $f : X \rightarrow Y$ *нормально³⁰*, если для любого элемента $\mathcal{O} \in \tau_Y$ отображение $f_{\mathcal{O}}$ преднормально, где τ_Y — топология Y .

¹¹Б.А. Пасынков, «О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств.» *Отображения и функторы. Сборник/Ред. кол.: П.С. Александров (гл. ред.) и др.* Изд-во. МГУ:М. (1984).

³⁰В.А. Матвеев, «Структуры подчинений, связанных с отображениями». *Кандидатская диссертация по специальности 01.01.04 - Геометрия и топология, Научный руководитель: Пономарев В.И., д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова Защищена в совете Д 053.05.05 при МГУ имени М.В. Ломоносова (1989).*

Нормальность отображения не эквивалентна его послойной нормальности.

Пример 3.1. Рассмотрим квадрат прямой Зоргенфрея $K \times K$ и отображение проектирования $p : K \times K \rightarrow K$. Топологическое пространство $K \times K$ не нормально. Отображение p послойно нормально, поскольку для любой точки $y \in K$ слой $p^{-1}y = K$ нормален. Само отображение p не преднормально, поскольку для замкнутых множеств $F = \{(q, -q) : q \in \mathbb{Q}\}$ и $T = \{(r, -r) : r \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ и для любой окрестности $\mathcal{O}y \subset K$ точки $y \in K$ трубка $p^{-1}\mathcal{O}y$ будет содержать открыто-замкнутое подмножество $[z, z') \times [-z', -z)$ для $z, z' \in \mathcal{O}y$, $z < z'$, которое гомеоморфно $K \times K$.

Всякое нормальное отображение преднормально. Приведен, по-видимому, первый пример разделяющий нормальное и преднормальное отображения.

Пример 3.4. $T = ([0, \omega_1] \times [0, \omega_0]) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ — плоскость Тихонова, $\beta T = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0]$ — единственная компактификация плоскости Тихонова (александровская).

Рассмотрим отображение $f : \beta T \rightarrow S$, где S — связное двоеточие (двухточечное пространство $S = \{s_1, s_2\}$ с топологией $\tau_S = \{\emptyset, s_1, \{s_1, s_2\}\}$), такое, что $f(T) = s_1$, а $f((\omega_1, \omega_0)) = s_2$. Отображение f преднормально, но не нормально.

На отображение распространена “лемма об ужатии”(конечный вариант) (лемма 3.6). Предложение 3.7 дает характеристику нормального отображения (определение нормальности отображения в терминах конечных покрытий).

Предложение 3.7. Отображение $f : X \rightarrow Y$ нормально тогда и только тогда, когда для любых $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и $y \in \mathcal{O}$ и любого конечного открытого покрытия $\lambda = \{O_1, \dots, O_n\}$ пространства $f^{-1}\mathcal{O}$ существует такая окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$ точки y и конечное замкнутое покрытие $\{F_1, \dots, F_n\}$ пространства $f^{-1}\mathcal{O}y$, комбинаторно вписанное в покрытие $\lambda \wedge f^{-1}\mathcal{O}y$, т.е. $F_i \subset O_i \cap f^{-1}\mathcal{O}y$, $i \in \mathbb{N}$.

В определении 3.8 вводится понятие σ -нормального отображения, усиливающее понятие нормальности отображения и дающее преимущества при описании наследственных свойств отображений нормального типа и функциональной характеристики совершенно нормального отображения.

Определение 3.8. Отображение $f : X \rightarrow Y$ σ -преднормально, если для любых F_σ -множества $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ и замкнутого в X подмножества F таких, что $T \cap F = \emptyset$ и любой точки $y \in Y$ существуют её окрестность $\mathcal{O}y$ и

семейство открытых в $f^{-1}\mathcal{O}y$ множеств $\{\mathcal{O}_i : \mathcal{O}_i \supset F_i \cap f^{-1}\mathcal{O}y\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\mathcal{O}_i) \cap F = \emptyset$.

Отображение f σ -нормально, если отображение $f_{\mathcal{O}} : f^{-1}\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ — σ -преднормально для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$.

Упомянутые выше k -разбиения пространства и согласованные семейства двоичных разбиений отображения дают обобщения "малой Леммы Урысона" для нормальных и σ -нормальных отображений (леммы 3.11 и 3.17 соответственно). В свою очередь, авторская методика работы с f -непрерывными функциями позволяет построить на этом разбиении f -непрерывное отображение (см. предложение 2.5). Так, в теоремах 3.12 и 3.18 охарактеризованы нормальное и σ -нормальное отображения. Дополнительно, в теореме 3.12 для нормальных отображений получен аналог теоремы Брауэра–Титце–Урысона для пространств.

Теорема 3.12. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ следующие условия эквивалентны.

(А) Отображение f — нормально;

(В) Для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и любой пары дизъюнктивных замкнутых в $f^{-1}\mathcal{O}$ подмножеств F и T , для любой точки $y \in \mathcal{O}$ существует такое согласованное семейство двоичных разбиений $\{\mathcal{O}_n, \{U_n^k \mid k = \overline{0, 2^n - 1}\} \mid n \in \omega_0\}$ отображения $f : X \rightarrow Y$ в точке y , что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$(a) \quad F \cap f^{-1}\mathcal{O}_n \subset U_n^0, \quad T \cap f^{-1}\mathcal{O}_n \subset U_n^{2^n-1};$$

$$(b) \quad F \cap \text{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}_n}(\bigcup_{k=1}^{2^n-1} U_n^k) = \emptyset, \quad \text{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}_n}(\bigcup_{k=0}^{2^n-2} U_n^k) \cap T = \emptyset.$$

(С) Для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и любой пары дизъюнктивных замкнутых в $f^{-1}\mathcal{O}$ подмножеств F и T , для любой точки $y \in \mathcal{O}$ существуют f -непрерывная в точке y функция $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ и окрестность $\mathcal{O}y$ точки y такие, что $\text{osc}_{\varphi}(f^{-1}\mathcal{O}y) < \frac{1}{2}$ и

$$F \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \varphi^{-1}(0) \cap f^{-1}\mathcal{O}y, \quad T \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \varphi^{-1}(1) \cap f^{-1}\mathcal{O}y;$$

$$F \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset f^{-1}\mathcal{O}y \setminus \text{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\varphi^{-1}[\frac{1}{2}, 1] \cap f^{-1}\mathcal{O}y), \\ T \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \text{int}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\varphi^{-1}[\frac{1}{2}, 1] \cap f^{-1}\mathcal{O}y).$$

(D) Пусть $\mathcal{O} \in \tau_Y$, непустое замкнутое подмножество $F \subset f^{-1}\mathcal{O}$ и $y \in \mathcal{O}$ — произвольные. Тогда, для любой $\tilde{f}$ -непрерывной в точке y функции $\tilde{\varphi} :$

$F \rightarrow \mathbb{R}$ отображения $\tilde{f} : F \rightarrow \mathcal{O}$, ($\tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in F$) существует f -непрерывная в точке y функция $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ для отображения $f : X \rightarrow Y$ такая, что

- (a) $\tilde{\varphi}|_{F \cap f^{-1}G} = \varphi|_{F \cap f^{-1}G}$, где $G - G_\delta$ -подмножество $\mathcal{O}$ и $y \in G$
(в частности, $\tilde{\varphi}|_{F \cap f^{-1}y} = \varphi|_{F \cap f^{-1}y}$),
- (b) $\|\varphi\| \leq \|\tilde{\varphi}\|$,
- (c) для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\mathcal{O}(\varepsilon) \subset \mathcal{O}$ точки y такая, что
 $\|\tilde{\varphi}|_{F \cap f^{-1}\mathcal{O}(\varepsilon)} - \varphi|_{F \cap f^{-1}\mathcal{O}(\varepsilon)}\| < \varepsilon$.

Теорема 3.18. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ следующие условия эквивалентны:

- (А) Отображение $f - \sigma$ -нормально.
- (В) Для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и любых дизъюнктных замкнутого подотображения $f_{\mathcal{O}}|_F : F \rightarrow \mathcal{O}$ и F_σ -подотображения $f_{\mathcal{O}}|_T : T \rightarrow Y$ отображения $f_{\mathcal{O}} : f^{-1}\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ и любой точки $y \in \mathcal{O}$ существуют согласованные семейства двоичных разбиений $\{\mathcal{O}_n, \{U_n^k(l) \mid k = \overline{0, 2^n - 1}\} \mid n \in \omega_0\}$, $l \in \mathbb{N}$, отображения $f : X \rightarrow Y$ в точке y , такие что для любого $n \in \mathbb{N}$

- (a) $T \cap f^{-1}\mathcal{O}_1 = \bigcup_{l=1}^{\infty} T_l$, где T_l замкнуто в $f^{-1}\mathcal{O}_1$, $l \in \mathbb{N}$;
- (b) $F \cap f^{-1}\mathcal{O}_n \subset U_n^0(l)$, $T_l \cap f^{-1}\mathcal{O}_n \subset U_n^{2^n-1}(l)$, $l \in \mathbb{N}$;
- (c) $F \cap \text{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}_n}(\bigcup_{k=1}^{2^n-1} U_n^k(l)) = \emptyset$, $\text{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}_n}(\bigcup_{k=0}^{2^n-2} U_n^k(l)) \cap T_l = \emptyset$, $l \in \mathbb{N}$.

- (С) Для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и любых дизъюнктных замкнутого подотображения $f_{\mathcal{O}}|_F : F \rightarrow Y$ и F_σ -подотображения $f_{\mathcal{O}}|_T : T \rightarrow Y$ отображения $f_{\mathcal{O}} : f^{-1}\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ и любой точки $y \in \mathcal{O}$ существуют ее окрестность $\mathcal{O}y$ и f -равностепенно непрерывное в точке y семейство функции $\varphi_l : X \rightarrow [0, 1]$, $l \in \mathbb{N}$, такие, что

- (a) $T \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_l$, $T_l -$ замкнуто в $f^{-1}\mathcal{O}y$, $l \in \mathbb{N}$;
- (b) $\text{osc}_{\varphi_l}(f^{-1}\mathcal{O}y) < \frac{1}{2}$, $l \in \mathbb{N}$;
- (c) $F \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \varphi_l^{-1}(0) \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ и $T_l \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \varphi_l^{-1}(1) \cap f^{-1}\mathcal{O}y$, $l \in \mathbb{N}$;
- (d) $T_l \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \text{int}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\varphi_l^{-1}(\frac{1}{2}, 1] \cap f^{-1}\mathcal{O}y)$,
 $\text{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\varphi_l^{-1}(\frac{1}{2}, 1] \cap f^{-1}\mathcal{O}y) \cap F = \emptyset$, $l \in \mathbb{N}$.

Из того, что любое пространство является непрерывным образом некоторого дискретного пространства следует, что класс пространств нормального типа не сохраняется непрерывными отображениями. Дополнительное требование замкнутости отображения обеспечивает сохранение (совершенной, наследственной) нормальности. В диссертации исследовано сохранение $(\sigma-)$ нормальности отображения замкнутыми морфизмами отображений (определение 3.7). В теореме 3.10 доказано, что нормальное отображение сохраняется замкнутым *тар*-морфизмом.

Для отображений $f : X \rightarrow Z$ и $g : Y \rightarrow Z$, отображение $\Phi : X \rightarrow Y$ называется *тар-морфизмом*¹¹ $\Phi : f \rightarrow g$, если $f = g \circ \Phi$ (т. е. $\Phi(f^{-1}z) \subset g^{-1}z$, $\forall z \in Z$).

Определение 3.7. *Мар-морфизм* $\Phi : f \rightarrow g$ отображений $f : X \rightarrow Z$ и $g : Y \rightarrow Z$, называется *замкнутым тар-морфизмом*, если отображение $\Phi : X \rightarrow Y$ замкнуто.

Пример 3.5 показывает, что уже вполне регулярность (Тихоновость)¹¹ отображения не сохраняется замкнутым тар-морфизмом отображений. По-видимому, класс отображений нормального типа единственный, кроме T_1 отображений, сохраняющийся при замкнутыми тар-морфизмами, что согласуется с соответствующими утверждениями для пространств.

Пример 3.5. Пусть $f : X \rightarrow \{y\}$ постоянное отображение плоскости Немыцкого $X = P \cup L$, где $P = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$, а $L = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$. Из регулярности пространства X следует регулярность отображения f . Отображение f не нормально.

Введем на X отношение эквивалентности $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $y = y' = 0$ или $x = x'$, $y = y'$, $y > 0$. Полученное таким образом факторпространство обозначим $Z = X/\sim$. Все классы эквивалентности, кроме $[z] = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, тривиальны (точки переходят в себя). Факторное отображение $\Phi : X \rightarrow Z$ замкнуто, поскольку единственный нетривиальный класс эквивалентности $[z]$ замкнут³¹.

Пространство Z не регулярно. Значит постоянное отображение $g : Z \rightarrow \{y\}$ не регулярно. Очевидно, что $f = g \circ \Phi$ и тар-морфизм Φ замкнут. Таким образом, показано, что регулярность отображения не сохраняется замкнутым тар-морфизмом.

Теорема 3.10. Пусть $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow Y$ сюръективные отображения, f – нормально и $\Phi : f \rightarrow g$ – замкнутый тар-морфизм. Тогда отображение g нормально.

¹¹Б.А. Пасынков, «О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств.» *Отображения и функторы. Сборник/Ред. кол.: П.С. Александров (гл. ред.) и др.* Изд-во. МГУ:М. (1984).

³¹Р. Энгелькинг, *Общая топология.* Мир, 1986.

Теорема 3.16. Пусть $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow Y$ сюръективные отображения, f — σ -нормально и $\Phi : f \rightarrow g$ — замкнутый *map*-морфизм. Тогда отображение g — σ -нормально.

Глава 4 посвящена свойствам наследственно нормальных отображений. Вводится естественное определение *co*-наследственной нормальности отображения — отображение всякое подотображение которого нормально.

Определение 4.1. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *co*-наследственно нормальным, если каждое его подотображение $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$, $X_0 \subset X$ в смысле сужения на прообраз нормально.

Приведены характеристики *co*-наследственно нормальных отображений. Предложение 4.1 специфичное для случая отображений, тавтологично для постоянного отображения. Предложение 4.3 характеризует *co*-наследственно нормальность в терминах отделимости (через отделимость отделенных подотображений).

Предложение 4.1. Отображение $f : X \rightarrow Y$ *co*-наследственно нормально тогда и только тогда, когда всякое его подотображение $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$, $X_0 \subset X$ преднормально.

Предложение 4.3. Отображение $f : X \rightarrow Y$ *co*-наследственно нормально тогда и только тогда, когда для любых двух отделенных в X подмножеств P и Q и каждой точки $y \in Y$ существует такая окрестность $Oy \subset Y$ точки y , что в $f^{-1}Oy$ множества P и Q отделимы окрестностями.

На отображения распространена характеристика наследственно нормальных пространств³¹ известная еще с классической работы П.С. Урысона³².

Предложение 4.4. Отображение $f : X \rightarrow Y$ *co*-наследственно нормально тогда и только тогда, когда всякое открытое подотображение отображения f преднормально.

Определяются *coit*- и *it*-наследственно нормальные отображения, которые обобщают понятие наследственной нормальности пространства (в случае постоянного отображения понятия *co*-, *coit*- и *it*-наследственно нормальных отображений совпадают).

Определение 4.2. Отображение $f : X \rightarrow Y$ назовем *coit*-наследственно нормальным (наследственно нормальным в смысле ограничения на прообраз

³¹Р. Энгелькинг, *Общая топология*. Мир, 1986.

³²Р. Urysohn, «Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen.» German. *Math. Ann.* 94 (1925), с. 262—295. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01208659.

и образ), если каждое его подотображение $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow f(X_0)$, $X_0 \subset X$ нормально.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ назовем *it-наследственно нормальным* (наследственно нормальным в смысле ограничения на образ), если каждое его подотображение $f_{Y_0} : f^{-1}Y_0 \rightarrow Y_0$, $Y_0 \subset Y$ нормально.

Устанавливается иерархия типов наследственной нормальности отображений.

Предложение 4.7. Всякое *co*-наследственно нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ *coit*-наследственно нормально.

Каждое *coit*-наследственно нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ *it*-наследственно нормально.

Всякое *it*-наследственно нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ нормально.

Обоснованность определений устанавливается разделяющими эти виды наследственно нормальных отображений примерами 4.2, 4.3 и 4.4.

Предложение 4.8. Отображение *coit*-(*it*-)наследственно нормально тогда и только тогда, когда всякое его сужение на прообраз и образ (образ) соответственно преднормально.

Что касается слоев рассматриваемых отображений, то *it*-наследственно нормальное отображение послойно нормально, *coit*-наследственно нормальное отображение послойно наследственно нормально (см. замечание 4.1). Из нормальности тотального пространства не следует *co*-наследственная нормальность отображения, хотя в ряде случаев удается построить *co*-наследственно нормальное отображение, тотальное пространство которого не нормально. Таково, например, тождественное отображение плоскости Тихонова (замечание 4.2).

Как и в случае пространств, наследственная нормальность отображения сохраняется замкнутым *тар*-морфизмом.

Теорема 4.10. Пусть $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow Y$ сюръективные отображения, f — *co*-, *coit*- или *it*-наследственно нормально и $\Phi : f \rightarrow g$ — замкнутый *тар*-морфизм (сюръективный в случае, когда f — *coit*-наследственно нормально) Тогда отображение g , соответственно, *co*-, *coit*- или *it*-наследственно нормально.

В главе 5 исследованы совершенно нормальные отображения и их связь с наследственно нормальными отображениями. Вводится естественное определение совершенно нормального отображения, как нормального отображения любое открытое подотображение которого имеет тип F_σ .

В определении 5.1 вводится понятие F_σ -подотображения, основные свойства которого установлены в предложениях 5.1, 5.2 и 5.3.

Определение 5.1. Подотображение $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$, $X_0 \subset X$ отображения $f : X \rightarrow Y$ имеет тип F_σ или является F_σ -подотображением, если для любой точки $y \in Y$ существует такая её окрестность $\mathcal{O}y \subset Y$, что $(f|_{X_0})^{-1}\mathcal{O}y$ является F_σ -подмножеством $f^{-1}\mathcal{O}y$.

Подотображение $f||_{X_0} : X_0 \rightarrow f(X_0)$, $X_0 \subset X$ отображения $f : X \rightarrow Y$ имеет тип F_σ или является F_σ -подотображением, если для любой точки $y \in f(X_0)$ существует такая её окрестность $\mathcal{O}y \subset f(X_0)$, что $(f||_{X_0})^{-1}\mathcal{O}y$ является F_σ -подмножеством $f^{-1}\mathcal{O}y$.

Предложение 5.2. Пусть $f : X \rightarrow Y$, $X_0 \subset X$. Если $f|_{X_0}$ (соответственно $f||_{X_0}$) является F_σ -подотображением f , то тогда $f|_{X_0}$ (соответственно $f||_{X_0}$) является F_σ -подотображением $f|_A$ (соответственно $f||_A$) для любого A , $X_0 \subset A \subset X$.

Если $f|_A$ (соответственно $f||_A$) является F_σ -подотображением $f|_{X_0}$ (соответственно $f||_{X_0}$), $f|_{X_0}$ (соответственно $f||_{X_0}$) является F_σ -подотображением отображения f , то тогда $f|_A$ (соответственно $f||_A$) является F_σ -подотображением f .

Предложение 5.3. Если любое открытое подотображение $f|_O$, $O \subset X$ отображения $f : X \rightarrow Y$ имеет тип F_σ , то и любое открытое подотображение произвольного подотображения $f|_{X_0}$, $X_0 \subset X$ имеет тип F_σ .

Теорема 5.4. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ σ -нормально, подотображение $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$, $X_0 \subset X$ имеет тип F_σ . Тогда отображение $f|_{X_0}$ σ -нормально.

В частности, если отображение $f : X \rightarrow Y$ σ -преднормально, X_0 — F_σ -подмножество X , то отображение $f|_{X_0}$ σ -преднормально.

Причина по которой нормальность отображения усиливается до σ -нормальности состоит в том, что теорема 5.4 справедлива для σ -нормального отображения, но, по-видимому, не имеет места для нормального отображения.

В зависимости от интерпретации подотображения как сужения на прообраз или прообраз и образ в диссертации вводятся определения *со-* и *coit-*совершенной нормальности отображения соответственно.

Определение 5.2. Нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ будем называть *со-совершенно нормальным* (соответственно *coit-совершенно нормальным*) если любое его открытое подотображение $f|_O$ (соответственно $f||_O$), $O \in \tau_X$, имеет тип F_σ .

Предложение 5.7. Любое co -совершенно нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ — $coit$ -совершенно нормально.

В отличие от случая топологических пространств, для отображений нарушается связь наследственной и совершенной нормальности, что показано в примере 5.5 ($coit$ -совершенно нормальное, не co -наследственно нормальное тождественное отображение) и примере 5.6 ($coit$ -, но не co -совершенно нормальное, co -($coit$ -) наследственно нормальное, тождественное отображение). Для устранения этих проблем, как и в случае с проблемой наследования нормальности отображения F_σ -подотображением, вводится усиленное определение co -($coit$ -) σ -совершенно нормального отображения.

Определение 5.3. σ -нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется co - σ -совершенно нормальным отображением, если любое его открытое подотображение $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ имеет тип F_σ .

σ -нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется $coit$ - σ -совершенно нормальным отображением, если любое его открытое подотображение $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow f(X_0)$ имеет тип F_σ .

Предложение 5.11. а) Любое co - σ -совершенно нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ — $coit$ - σ -совершенно нормально.

б) Любое отображение $f : X \rightarrow Y$ совершенно нормального пространства co - σ -совершенно нормально.

в) Любое $co(coit)$ - σ -совершенно нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ является $co(coit)$ -совершенно нормальным.

Распространенная на отображения "нормализующая лемма" (лемма 5.5) и распространенная на σ -нормальные отображения утверждение о том, что в нормальном пространстве два отделенных F_σ -подмножества отделимы (см. предложение 5.6) дает основную теорему главы 5.

Теорема 5.12. Любое co - σ -совершенно нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ co -наследственно нормально.

Любое F_σ -подотображение co - σ -совершенно нормального отображения $f : X \rightarrow Y$ является co - σ -совершенно нормальным.

Следствие 5.13. Если отображение $f : X \rightarrow Y$ co - σ -совершенно нормально, то всякое его подотображение co -совершенно нормально.

Далее, переходим от рассмотрения возникших естественным образом "наивных" определений совершенной нормальности к "функциональному" определению совершенной нормальности отображения.

Определение 5.4. Отображение $f : X \rightarrow Y$ совершенно нормально, если для любого открытого подмножества $O \subset X$ и для любой точки $y \in Y$ существуют: окрестность $\mathcal{O}y$ точки y и f -равностепенно непрерывное в точке $y \in Y$ счетное семейство функций $\{\varphi_l : X \rightarrow [0, 1] \mid l \in \mathbb{N}\}$ такие, что

$$(1) \quad O \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} (\varphi_l^{-1}(1) \cap f^{-1}\mathcal{O}y),$$

$$(2) \quad f^{-1}\mathcal{O}y \setminus O \subset \varphi_l^{-1}(0) \cap f^{-1}\mathcal{O}y, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Предложение 5.14. Подотображение $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ совершенно нормального отображения $f : X \rightarrow Y$ совершенно нормально.

Поскольку совершенная нормальность отображения наследственное свойство, и любое совершенно нормальное отображение преднормально, то из предложения 4.4 имеем

Теорема 5.16. Совершенно нормальное отображение $f : X \rightarrow Y$ со-наследственно нормально.

Определение 5.5 обобщает понятие функциональной открытости (замкнутости) с пространств на отображения. В теореме 5.18 и следствии 5.19 дана функциональная характеристика со- σ -совершенно нормального отображения (то есть, получен аналог теоремы Веденисова³¹ характеризующий совершенно нормальные пространства).

Определение 5.5. Подотображение $f|_U : U \rightarrow Y$ отображения $f : X \rightarrow Y$ называется f -функционально открытым, если для любой точки y существуют такие окрестность $\mathcal{O}y$ и f -непрерывная функция $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$, что $U \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \varphi^{-1}(0, 1] \cap f^{-1}\mathcal{O}y$.

Подотображение $f|_F : F \rightarrow Y$ отображения $f : X \rightarrow Y$ называется f -функционально замкнутым, если для любой точки y найдутся такие окрестность $\mathcal{O}y$ и f -непрерывная функция $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$, что $F \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \varphi^{-1}(0) \cap f^{-1}\mathcal{O}y$.

Теорема 5.18. Отображение $f : X \rightarrow Y$ со- σ -совершенно нормально в том и только в том случае, если для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$, для любого открытого подмножества $U \subset f^{-1}\mathcal{O}$, и для любого F_σ -подмножества $F = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} F_l \subset U$, где

множества F_l замкнуты в $f^{-1}\mathcal{O}$, $l \in \mathbb{N}$, для любой точки $y \in \mathcal{O}$ существуют окрестность $\mathcal{O}y$ точки y и f -равностепенно непрерывное в точке y семейство функций $\varphi_l : X \rightarrow [0, 1]$ и $\psi_l : U \rightarrow [0, 1]$, $l \in \mathbb{N}$, такие, что

$$(a) \quad \text{osc}_{\varphi_l}(f^{-1}\mathcal{O}y) < \frac{1}{2}, \quad \text{osc}_{\psi_l}(f^{-1}\mathcal{O}y) < \frac{1}{2}, \quad l \in \mathbb{N};$$

³¹Р. Энгелькинг, *Общая топология*. Мир, 1986.

- (b) $f^{-1}\mathcal{O}y \setminus U \subset \varphi_l^{-1}(0) \cap f^{-1}\mathcal{O}y$, $F_l \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \varphi_l^{-1}(1) \cap f^{-1}\mathcal{O}$, $l \in \mathbb{N}$;
(c) $f^{-1}\mathcal{O}y \setminus U \subset \psi_l^{-1}(0) \cap f^{-1}\mathcal{O}$, $U \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \psi_l^{-1}(1) \cap f^{-1}\mathcal{O}$, $l \in \mathbb{N}$.

Следствие 5.19. Для σ -нормального отображения $f : X \rightarrow Y$ следующие условия эквивалентны:

- (А) Отображение $f : X \rightarrow Y$ *со- σ -совершенно* нормально.
(В) Для любого открытого подотображения $f|_U : U \rightarrow Y$ отображения $f : X \rightarrow Y$ и любой точки $y \in Y$ существуют окрестность $\mathcal{O}y$ точки y и f -равностепенно непрерывное в точке y семейство функций $\psi_l : X \rightarrow [0, 1]$, $l \in \mathbb{N}$, такие, что

$$(1) \operatorname{osc}_{\psi_l}(f^{-1}\mathcal{O}y) < \frac{1}{2}, l \in \mathbb{N};$$

$$(2) f^{-1}\mathcal{O}y \setminus U \subset \psi_l^{-1}(0) \cap f^{-1}\mathcal{O}y, l \in \mathbb{N}, U \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \psi_l^{-1}(1) \cap f^{-1}\mathcal{O}y.$$

Предложение 5.20. Любое *со- σ -совершенно* нормальное отображение совершенно нормально. Любое совершенно нормальное отображение *со-совершенно* нормально.

Опираясь на теорему 3.10 доказывается, что *со-*, *coim-*совершенно нормальные отображения сохраняются замкнутыми *тар-*морфизмами.

Предложение 5.21. Пусть $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow Y$ сюръективные отображения, f — *со-совершенно* нормально (*coim-*совершенно нормально) и $\Phi : f \rightarrow g$ — замкнутый (сюръективный) *тар-*морфизм. Тогда отображение g — *со-совершенно* нормально (*coim-*совершенно нормально).

Доказывается, что совершенно нормальное, *со- σ -* и *coim- σ -совершенная* нормальность отображения тоже сохраняются замкнутым *тар-*морфизмом.

Следствие 5.22. Пусть $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow Y$ сюръективные отображения, f — *со- σ -(coim- σ -)*совершенно нормально и $\Phi : f \rightarrow g$ — замкнутый (сюръективный) *тар-*морфизм. Тогда отображение g — *со- σ -(coim- σ -)*совершенно нормально.

Заключение

Диссертация посвящена исследованию свойств отображений нормального типа. В ней продолжена реализация сформулированной Б.А. Пасынковым программы “от пространств к отображениям”, в вопросах касающихся распространения на отображения понятий и утверждений связанных с пространствами нормального типа.

В главе 3 автору удалось решить вопрос, стоявший с 1988 года, а именно, построить пример преднормального не нормального отображения (**пример 3.4**). В главе 2 развит авторский метод работы с f -непрерывными функциями, и приведены явные конструкции построения таких функции (**леммы 2.2, 2.3 и предложение 2.5**). Используя вышеупомянутые результаты, в **Теореме 3.12** охарактеризована нормальность отображения, использующая аналогии леммы Урысона и теоремы Брауэра–Титце–Урысона для отображений.

Введено "усиленное" определение σ -нормального отображения (**определение 3.8**), наследуемое F_σ -подотображениями (**теорема 5.4**). Функциональная характеристика (аналог леммы Урысона) σ -нормальности отображения получена в **теореме 3.18**.

Определениями 4.1 и 4.2 введено понятие наследственно нормального отображения. Иерархия в подходах к определению наследственной нормальности отображения установлена **предложением 4.7** и **примерами 4.2, 4.3 и 4.4**. В **предложениях 4.1, 4.4 и 4.8** установлены характеристики наследственно нормальных отображений.

В **определениях 5.2 и 5.3** вводятся понятия совершенной нормальности отображения, иерархия в подходах к определению которых установлена **примером 5.4, предложением 5.7 и предложением 5.11**. В **теореме 5.12** показано, что любое co - σ -совершенно нормальное отображение co -наследственно нормально, а также, что co - σ -совершенная нормальность наследственное по F_σ -подотображениям свойство. Введенное в главе 2 понятие f -равностепенно непрерывного семейства функций (**определение 2.2**), позволило дать функциональную характеристику co - σ -совершенно нормального отображения (**теорема 5.18 и следствие 5.19**).

Предложено "функциональное" определение совершенной нормальности отображения, использующее f -равностепенно непрерывное семейство функций в точке (**определение 5.4**). Введенное понятие совершенной нормальности является наследственным свойством (**предложение 5.14**) и совершенно нормальное отображение является co -наследственно нормальным (**теорема 5.16**). **Предложение 5.20** связывает совершенную, co - и co - σ -совершенную нормальности отображения.

Сохранение (σ) -нормальности отображения под действием замкнутых tar -морфизмов установлено в **теоремах 3.10, 3.16**. Сохранение co -, $coit$ -, it -наследственной и co -, $coit$ -(σ)совершенной нормальностей отображений под действием замкнутых tar -морфизмов установлено в **теореме 4.10 и предложении 5.21**.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам в общей топологии, алгебраической топологии и функциональном анализе.

Благодарности

Автор выражает особую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Садовничему Юрию Викторовичу за возможность по новому взглянуть на работу, продолжить исследования и глубже погрузиться в тематику, тем самым, получить новые результаты. Также, благодарю руководителей, сопровождавших меня на отдельных этапах работы: доктора физико-математических наук, профессора Бориса Алексеевича Пасынкова за знакомство с топологией непрерывных отображений, начальную постановку задач и доктора физико-математических наук, профессора Константина Леонидовича Козлова за терпение, неоценимый вклад и поддержку. Благодарю коллектив кафедры общей топологии и геометрии где сложилась как научная так и творческая атмосфера, дающая возможность вести продуктивную научную работу.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология (физико-математические науки):

1. Лисеев М. Ю. Сохранение свойств отображений типа нормальности замкнутыми тар-морфизмами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2019. – № 6. – С. 61-64. EDN: POAUXD. Импакт фактор 0,548 (РИНЦ). Объем 0,250 п.л.

Перевод: Liseev M. Yu. Normal Type Properties of Mappings Are Preserved by Closed Map-Morphisms // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2019. – vol. 74, no. 6. – pp. 253-255. EDN: DKVTHW. Импакт фактор 0,4 (JIF).

2. Лисеев М. Ю. О свойствах (наследственно) нормальных отображений // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2021. – № 6. – С. 7-13. EDN: YPGENH. Импакт фактор 0,548 (РИНЦ). Объем 0,438 п.л.

Перевод: Liseev, M. Yu. Properties of (Hereditarily) Normal Mappings // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2021. – vol. 76, no. 6. – pp. 244-250. EDN: UVKCGA. Импакт фактор 0,4 (JIF).

3. Лисеев М. Ю. Функциональный подход в исследовании свойств нормальности отображений // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2025. – Т. 31, № 1. – С. 119-137. EDN: CGUVPL. Импакт фактор 0,437 (РИНЦ). Объем 1,188 п.л.

Публикации в прочих изданиях:

4. М. Ю. Лисеев. О понятии совершенной нормальности отображения // Вестник Кыргызского национального Университета имени Жусупа Баласагына. – 2021. – № 2(106). – С. 7-18. EDN: НКТJSY. Импакт фактор 0,015 (РИНЦ). Объем 0,750 п.л.