МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Макарова Юлия Константиновна

Многотипные ветвящиеся случайные блуждания при отсутствии и наличии иммиграции

Специальность

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва-2026

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Яровая Елена Борисовна**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Ульянов Владимир Васильевич**
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
математической статистики факультета
вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова

Топчий Валентин Алексеевич
доктор физико-математических наук,
профессор, ведущий научный сотрудник
лаборатории комбинаторных и вычислительных
методов алгебры и логики Омского филиала
Института математики имени С. Л. Соболева
Сибирского отделения РАН

Люлинцев Андрей Валерьевич
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник лаборатории прикладных
вероятностных и алгоритмических методов
Санкт-Петербургского отделения
Математического института
имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится «22» мая 2026г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы д. 1, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3906.

Автореферат разослан «22» апреля 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
кандидат физико-математических наук Е. Д. Алферова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основная тема диссертации направлена на исследование многотипных ветвящихся случайных блужданий (ВСБ), которые являются одним из интенсивно развивающихся направлений теории случайных процессов. ВСБ сочетает в себе свойства процессов ветвления, связанных с гибелью и размножением частиц, и процессов блуждания частиц по заданным множествам. В качестве множеств могут рассматриваться различные пространства, например, целочисленные решетки[1] $\mathbb{Z}^d$ или непрерывные пространства[2] $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Есть ряд исследований, посвященных ВСБ на периодических структурах[3,4]. Поведение поля частиц в ВСБ определяется расположением источников ветвления, в которых частицы могут производить потомков или умирать. Например, на целочисленных решетках можно рассматривать один источник ветвления[5], конечное число источников ветвления[6,7] или счетное число источников, расположенных в каждой точке решетки. При этом, несмотря на всю сложность изучения таких процессов, ВСБ имеют широкое применение в различных областях. В частности, в настоящее время известны приложения ВСБ в популяционной динамике, которая изучает распространение популяций на определенных территориях и вероятности их вырождений, и являются удобным инструментом для описания и исследования эволюционных процессов с рождением, гибелью и миграцией частиц[8]. Такие модели используются в биологии[9] и демографии[10].

Ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц без блуждания впервые, по-

[1] Яровая Е. Б. Пространственная структура ветвящихся случайных блужданий // Издательство МЦНМО, Москва. – 2024. – 303с. – ISBN 978-5-4439-1868-6.

[2] Cranston M., Koralov L., Molchanov S., Vainberg S. Continuous model for homopolymers // Journal of Functional Analysis. – 2009. – Vol. 256, No. 8 – P. 2656–2696.

[3] Платонова М. В., Рядовкин К. С. Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^d$ с периодическими источниками ветвления // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2017. – Т. 466. – С. 234–256.

[4] Платонова М.В., Рядовкин К.С. О среднем числе частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке с периодическими источниками ветвления // Докл. РАН. – 2018. – Т. 479, № 3. – С. 250–253.

[5] Albeverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Śerie I. Mathématique 326. – 1998 – No. 8 – P. 975–980 (english).

[6] Bulinskaya E. Vl. Complete classification of catalytic branching random walks // Theory of probability and its applications. – 2015. – Vol. 59, No. 4 – P. 545–566.

[7] Bulinskaya E. Vl. Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice // Stochastic Processes and their Applications. – 2015. – Vol. 128, No. 7 – P. 2325–2340.

[8] Zeldovich Ya. B., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D. Intermittency in random field // Physics-Uspekhi. – 1987. – Vol. 30, No. 5. – P. 353-369.

[9] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической задаче // Бюл. МГУ, Серия А, Математика и механика. – 1937. – (1(6)) – С. 1–25.

[10] Molchanov S., Whitmeyer J. Spatial models of population processes // Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics. MPSAS 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham, Panov, V. (eds). – 2017. – Vol. 208. – P. 435-454.

видимому, были рассмотрены Б. А. Севастьяновым[11]. Им исследовались ветвящиеся процессы как с дискретным, так и с непрерывным временем. В настоящее время такие процессы продолжают широко изучаться как в неслучайных, так и в случайных средах. Например, в работах[12,13] авторы исследуют ветвящиеся процессы с дискретным временем в случайной среде, то есть когда производящая функция числа потомков не является постоянной, а зависит от номера поколения. Б. А. Севастьяновым также изучались ветвящиеся процессы с возможной иммиграцией частиц. Им показано, что популяция вырождается в докритических ветвящихся процессах, то есть когда интенсивность гибели частиц превышает их рождение. В этом случае введение иммиграции помогает стабилизировать процесс, то есть прекратить его вымирание.

Особый интерес вызывают ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц, к которым добавляется возможность перемещения частиц по многомерной решетке. Такие ВСБ, в отличие от процессов с одним типом частиц, имеют больше приложений, так как могут описывать не только распространение популяции со временем, но также и процессы взаимодействия типов частиц между собой. Актуальность исследования таких процессов объясняется применениями в теории эпидемий и биологии, когда рассматривается, например, сосуществование нескольких биологических видов в природе и изучается выживаемость видов в зависимости от взаимодействия между типами. Для доказательства предельных теорем о численностях частиц в многотипных ВСБ с непрерывным временем авторами работы[14] предложено использовать мартингальные методы. В модели многотипных ВСБ может быть добавлена возможность притока частиц извне в каждую точку решетки, называемая *иммиграцией* частиц. ВСБ с иммиграцией впервые, по-видимому, было рассмотрено в работе Д. Хан с соавторами в 2017 году[15] для случая, когда каждая из частиц могла произвести лишь одного потомка. С помощью докритического ВСБ с иммиграцией можно продемонстрировать демографическую ситуацию в некоторых странах, где уровень рождаемости ниже уровня смертности, а за счет притока иммигрантов среднее число граждан может стабилизироваться.

Целью работы является исследование предельного поведения моментов численностей частиц популяций (общего числа частиц в каждой точке) и субпопуляций (потомков фиксированной частицы в каждой точке) для многотипных ВСБ по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с наличием или отсутствием иммиграции, с одним

[11] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы // Главная редакция физико-математической литературы, изда-во Наука, Москва. – 1971. – 436с.

[12] Vatutin V., Wachtel V. Multi-type Subcritical Branching Processes in Random Environment // Adv. in Appl. Probab., 50:A. – 2018. – P. 281–289.

[13] Vatutin V., Dyakonova E. The Survival Probability for a Class of Multitype Subcritical Branching Processes in Random Environment // Math. Notes 107. – 2020. – P. 189–200.

[14] Смородина Н. В., Яровая Е. Б. Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий с конечным числом типов частиц // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2023. – Т. 526. – С. 172–192.

[15] Han D., Molchanov S., Whitmeyer J. Population processes with immigration // Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics. MPSAS 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham, Panov, V. (eds). – 2017. – Vol. 208. – P. 411-434.

источником ветвлением или источниками ветвления в каждой точке при различных начальных распределениях частиц.

Научная новизна. Получены новые результаты для многотипных ВСБ — для них изучено предельное поведение первых моментов численностей частиц субпопуляций при различных предположениях о числе источников на решетке и механизмах блуждания каждого из типов частиц. Для ВСБ с иммиграцией изучена устойчивость процесса по Ляпунову в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции зависят от положения частицы на решетке.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы, связанные с выводом прямых и обратных уравнений Колмогорова, условными математическими ожиданиями, стохастическими дифференциальными уравнениями, представлениями Фейнмана-Каца, теорией дифференциальных уравнений, дискретным преобразованием Фурье, преобразованиями Лапласа и спектральной теорией.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы для дальнейшего развития теории многотипных ветвящихся случайных блужданий с наличием или отсутствием иммиграции.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются предельные поведения численностей субпопуляций и популяций частиц ВСБ по целочисленным решеткам $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, поэтому тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 «Теория вероятностей и математическая статистика» по направлениям исследований: предельные теоремы, стохастические процессы, марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели, стационарные случайные процессы и поля.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема о явном решении уравнений для первых моментов численностей субпопуляций частиц в ВСБ с двумя типами частиц при совпадающих механизмах блужданий и источниками ветвления в каждой точке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

2. Теоремы о предельном поведении первых моментов численностей субпопуляций частиц в ВСБ с двумя типами частиц в случае, когда генератор случайного блуждания частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, генератор второго типа — бесконечную, при двух различных предположениях: источники ветвления находятся в каждой точке $\mathbb{Z}^d$; на $\mathbb{Z}^d$ есть один источник ветвления.

3. Теорема о предельном поведении второго момента численностей частиц для докритического ВСБ с одним типом частиц, постоянными интенсивностями ветвления и иммиграции в каждой точке решетки, источниками ветвления в каждой точке $\mathbb{Z}^d$ и с бесконечным числом частиц в начальный момент времени.

4. Теоремы об асимптотическом поведении первого и второго момента численностей частиц для докритического ВСБ с одним типом частиц и иммиграцией в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции зависят от положения

частиц на решетке, источниками ветвления в каждой точке $\mathbb{Z}^d$ и с бесконечным числом частиц в начальный момент времени.

5. Теоремы об асимптотическом поведении первого и второго момента численностей частиц в ВСБ с двумя типами частиц с возможным изменением типа частиц в случае, когда блуждания частиц обоих типов имеют конечную дисперсию скачков, и источниками ветвления в каждой точке $\mathbb{Z}^d$ с одной начальной частицей.

Апробация. Результаты диссертации прошли апробацию и докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (ACMPT-2017), Москва, Россия, 23–28 октября 2017
- IX Московская международная конференция по Исследованию Операций (ORM2018 - Germeyer100), Москва, Россия, 22–27 октября 2018
- Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 24–26 декабря 2018
- Аспирантский коллоквиум кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 13 марта 2019
- Международная научная конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019», Москва, Россия, 8–12 апреля 2019
- Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 16–18 декабря 2019
- Международная научная конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 10–27 ноября 2020
- The 5th International Conference on Stochastic Methods 2020 (ICSM-5), Москва, Россия, 23–27 ноября 2020
- 13th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics (CMStatistics 2020), Virtual, 19–21 декабря 2020
- The 5th International workshop on branching processes and their applications, Virtual, Badajoz, Испания, 6–22 апреля 2021
- 63rd ISI World Statistics Congress, Virtual, Нидерланды, 11–16 июля 2021
- Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 21–24 декабря 2021

- Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, руководитель семинара — академик РАН, профессор А. Н. Ширяев, 18 декабря 2024

Публикации. Автор имеет 10 работ по теме диссертации. Из них 4 статьи опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности и отрасли наук. Одна статья без соавторов опубликована в рецензируемом научном издании из перечня ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация, объемом 115 страниц, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 28 наименований. В работу вошли результаты, выполненные при поддержке грантов фонда РФФИ 17-01-00468 и 20-01-00487, руководитель — профессор Е. Б. Яровая.

Основное содержание работы

В первой главе диссертации описывается модель ВСБ с двумя типами частиц по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, вводятся основные объекты исследований — субпопуляции и популяции частиц каждого типа и выводятся основные уравнения моментов численностей частиц субпопуляций и популяций. Во второй главе вводится процесс иммиграции для модели ВСБ с двумя типами частиц, изучается устойчивость процесса по Ляпунову для докритического ВСБ с одним типом частиц в случае, когда интенсивности рождения, гибели и иммиграции зависят от положения частиц на решетке. В третьей главе описывается модель ВСБ в случае, когда частицы могут менять тип. Для модели ВСБ изучается предельное поведение моментов численностей частиц.

Первая глава посвящена ВСБ с двумя типами частиц по многомерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$ с непрерывным временем. На решетке может быть расположен или один источник ветвления (без ограничения общности будем считать, что источник расположен в точке $0 \in \mathbb{Z}^d$), или источники расположены в каждой точке решетки. Каждая частица может блуждать между точками решетки, а в источнике частица может либо умереть, либо произвести потомком всех типов. То есть каждая частица, расположенная в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени $t > 0$, остается в этой точке некоторое время τ до первого изменения, и в момент времени $t + \tau + 0$ с частицей могут случиться следующие изменения:

1. частица типа $i = 1, 2$ может умереть с вероятностью $\mu_i dt$, $i = 1, 2$ за малое время dt, где $\mu_i \geqslant 0$ — интенсивность гибели частицы;

2. частица типа $i = 1, 2$ может произвести потомков обоих типов. Обозначим $\beta_i(k, l)$, $k + l \geqslant 2$, как интенсивность частицы типа i произвести k частиц первого типа и l частиц второго типа. Таким образом, за малое время dt частица

типа i может произвести k частиц первого типа и l частиц второго типа с вероятностью $\beta_i(k,l)dt$;

3. частицы могут блуждать по решетке. Положим, что вероятность прыжка из точки x в точку $x+z$ за малое время dt для частицы типа $i=1,2$ равна $\varkappa_i a_i(x,x+z)dt$. Здесь $\varkappa_i > 0$ — коэффициент диффузии, $a_i(x,x+z)$ — интенсивность прыжка из точки x в точку $x+z$. Будем предполагать, что блуждание

   - *симметрично* — $a_i(x,y) = a_i(y,x)$ для всех $x,y \in \mathbb{Z}^d$;
   - *однородно по пространству* — $a_i(x,x+z) = a_i(z)$ для всех $x,z \in \mathbb{Z}^d$;
   - *неприводимо* — все точки решетки достижимы, то есть
   $$\operatorname{span}\{z : a_i(z) > 0\} = \mathbb{Z}^d;$$
   - также будем считать, что $a_i(0) = -1, \sum_z a_i(z) = 0$.

   Таким образом, для каждого типа частиц $i = 1,2$ генератор случайного блуждания имеет вид
   $$\mathcal{L}_i\psi(x) = \varkappa_i \sum_v \big[\psi(x+v) - \psi(x)\big] a_i(v).$$

Основными объектами исследований являются субпопуляции частиц каждого из типов и их моменты. Введем обозначения для субпопуляций частиц

$$n_i(t,x,y) = [n_{i1}(t,x,y), n_{i2}(t,x,y)]^T, \quad i = 1,2.$$

То есть каждая из субпопуляций может быть представлена в виде вектора $n_i(t,x,y)$, $i=1,2$, каждая из компонент которого $n_{ij}(t,x,y)$ — число частиц типа j в точке y, порожденные в начальный момент времени $t=0$ одной частицей типа i в точке x. Таким образом,

$$n_{ij}(0,x,y) = \delta_i(j)\delta_x(y).$$

Введем моменты численностей частиц субпопуляций каждого из типов

$$m_{ij}^{(k)}(t,x,y) = \mathsf{E} n_{ij}^k(t,x,y).$$

В случае конечного и бесконечного числа источников ветвления были изучены поведения первых моментов численностей частиц субпопуляций. Сначала рассмотрим модель, в которой источники ветвления расположены в каждой точке целочисленной решетки. Для первых моментов численностей частиц субпопуляций можно получить точные решения в случае одинаковых генераторов случайных блужданий и асимптотические представления при $t \to \infty$ в случае различных генераторов случайных блужданий.

Положим

$$r_1 = \sum_{k+l\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,l) - \mu_1, \quad r_2 = \sum_{k+l\geqslant 2}(l-1)\beta_2(k,l) - \mu_2.$$

В случае, когда генераторы случайных блужданий совпадают, то есть $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$, верна теорема.

Теорема 1 *Пусть функция $p(t,x,y)$ является решением задачи Коши*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \varkappa \mathcal{L} p(t,x,y), \quad p(0,x,y) = \delta_x(y).$$

Тогда для $m_{ij}^{(1)}(t,x,y) = \mathsf{E} n_{ij}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$, верны следующие равенства.

Для случая *$b = 0, c = 0$ имеем*

$$\begin{aligned} m_{11}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_1 t} p(t,x,y); \quad & m_{21}^{(1)}(t,x,y) &= 0;\\ m_{22}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_2 t} p(t,x,y); \quad & m_{12}^{(1)}(t,x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Для случая *$b = 0, c > 0$ имеем*

$$\begin{aligned} &m_{11}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_1 t} p(t,x,y);\\ &m_{21}^{(1)}(t,x,y) = \begin{cases} c e^{r_1 t} p(t,x,y), & \text{если } C_2 = 0,\\ \frac{c}{r_1 - r_2}\big(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\big) p(t,x,y), & \text{если } C_2 \neq 0; \end{cases}\\ &m_{12}^{(1)}(t,x,y) = 0; \quad m_{22}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_2 t} p(t,x,y). \end{aligned}$$

Для случая *$b > 0, c = 0$ имеем*

$$\begin{aligned} &m_{11}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_1 t} p(t,x,y); \quad m_{21}^{(1)}(t,x,y) = 0;\\ &m_{12}^{(1)}(t,x,y) = \begin{cases} b e^{r_2 t} p(t,x,y), & \text{если } C_2 = 0,\\ \frac{b}{r_1 - r_2}\big(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\big) p(t,x,y), & \text{если } C_2 \neq 0; \end{cases}\\ &m_{22}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_2 t} p(t,x,y). \end{aligned}$$

Для случая *$b > 0, c > 0$ имеем*

$$\begin{aligned} m_{11}^{(1)}(t,x,y) &= \frac{e^{C_1 t}}{2C_2}\Big(\big(r_1 - C_1 + C_2\big)e^{C_2 t} + \big(C_1 + C_2 - r_1\big)e^{-C_2 t}\Big) p(t,x,y);\\ m_{21}^{(1)}(t,x,y) &= \frac{c e^{C_1 t}}{2C_2}\Big(e^{C_2 t} - e^{-C_2 t}\Big) p(t,x,y);\\ m_{12}^{(1)}(t,x,y) &= \frac{b e^{C_1 t}}{2C_2}\Big(e^{C_2 t} - e^{-C_2 t}\Big) p(t,x,y);\\ m_{22}^{(1)}(t,x,y) &= \frac{e^{C_1 t}}{2C_2}\Big(C_1 + C_2 - r_1\big)e^{C_2 t} + \big(C_1 - C_2 - r_1\big)e^{-C_2 t}\Big) p(t,x,y). \end{aligned}$$

Перейдем к случаю, когда генераторы случайных блужданий различны. Будем предполагать, что случайное блуждание частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, то есть $\sum_v a_1(v)|v|^2 < \infty$ для частиц второго типа — бесконечную дисперсию скачков, то есть $a_2(u) \sim \frac{H(u/|u|)}{|u|^{d+\alpha}}$, $\alpha \in (0,2)$, где $H(\cdot)$ — положительная, непрерывная и симметричная функция на единичной сфере $\{u \in \mathbb{R}^d : |u| = 1\}$. Положим

$$
\begin{aligned}
a(\theta) &= \varkappa_1 \widehat{a}_1(\theta) + \Big(\sum_{k+l \geqslant 2} (k-1)\beta_1(k,l) - \mu_1 \Big); \quad b = \sum_{k+l \geqslant 2} l\beta_1(k,l) \geqslant 0;\\
d(\theta) &= \varkappa_2 \widehat{a}_2(\theta) + \Big(\sum_{k+l \geqslant 2} (l-1)\beta_2(k,l) - \mu_2 \Big); \quad c = \sum_{k+l \geqslant 2} k\beta_2(k,l) \geqslant 0;\\
D(\theta) &= \big(a(\theta) - d(\theta)\big)^2 + 4bc.
\end{aligned}
$$

В этом случае получаем теорему.

Теорема 2 *Пусть интенсивности прыжков для ВСБ с двумя типами частиц удовлетворяют следующим свойствам*

$$
\sum_v a_1(v)|v|^2 < \infty; \quad a_2(u) \sim \frac{H(u/|u|)}{|u|^{d+\alpha}}, \quad \alpha \in (0,2),
$$

где $H(\cdot)$ — положительная, непрерывная и симметричная функция на единичной сфере $\{u \in \mathbb{R}^d : |u| = 1\}$.

Тогда для первых моментов численностей частиц субпопуляций $m_{ij}^{(1)}(t,x,y) = \mathsf{E} n_{ij}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$ и для всех $x, y \in \mathbb{Z}^d$ верны следующие равенства и/или асимптотические представления при $t \to \infty$.

***Для случая** $b = 0$**,** $c = 0$ имеем*

$$
\begin{aligned}
m_{11}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_1 t} p_1(t,x,y); \quad m_{21}^{(1)}(t,x,y) &= 0;\\
m_{22}^{(1)}(t,x,y) &= e^{r_2 t} p_2(t,x,y); \quad m_{12}^{(1)}(t,x,y) &= 0.
\end{aligned}
$$

***Для случая** $b = 0$**,** $c \geqslant 0$ имеем*

$$
\begin{aligned}
&m_{11}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_1 t} p_1(t,x,y); \quad m_{12}^{(1)}(t,x,y) = 0;\\
&m_{21}^{(1)}(t,x,y) \sim \frac{c\tilde{c}}{(t2\pi)^{d/2}} e^{r_1 t} \begin{cases} \frac{e^{(d(0)-a(0))t} - 1}{d(0) - a(0)}, & \text{если } a(0) \neq d(0),\\ t, & \text{если } a(0) = d(0); \end{cases}\\
&m_{22}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_2 t} p_2(t,x,y),
\end{aligned}
$$

где $\tilde{c}$ — неотрицательная константа.

Для случая $b \geqslant 0$, $c = 0$ *имеем*

$$m_{11}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_1 t} p_1(t,x,y);$$

$$m_{12}^{(1)}(t,\theta,y) \sim \frac{b\tilde{c}}{(t2\pi)^{d/2}} e^{r_1 t} \begin{cases} \frac{e^{(d(0)-a(0))t}-1}{d(0)-a(0)}, & \text{если } a(0) \neq d(0), \\ t, & \text{если } a(0) = d(0); \end{cases}$$

$$m_{21}^{(1)}(t,x,y) = 0; \quad m_{22}^{(1)}(t,x,y) = e^{r_2 t} p_2(t,x,y),$$

где $\tilde{c}$ *— неотрицательная константа.*

Для случая $b > 0$, $c > 0$ *имеем*

$$m_{11}^{(1)}(t,x,y) \sim \frac{\tilde{c} e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}(t2\pi)^{d/2}} \Big((a(0) - \lambda_2(0)) e^{\left(d(0)+\sqrt{D(0)}\right)t/2} + (\lambda_1(0) - a(0)) e^{\left(d(0)-\sqrt{D(0)}\right)t/2} \Big);$$

$$m_{21}^{(1)}(t,x,y) \sim \frac{c\tilde{c} e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}(t2\pi)^{d/2}} \left(e^{\left(d(0)+\sqrt{D(0)}\right)t/2} - e^{\left(d(0)-\sqrt{D(0)}\right)t/2} \right);$$

$$m_{12}^{(1)}(t,\theta,y) \sim \frac{b\tilde{c} e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}(t2\pi)^{d/2}} \left(e^{\left(d(0)+\sqrt{D(0)}\right)t/2} - e^{\left(d(0)-\sqrt{D(0)}\right)t/2} \right);$$

$$m_{22}^{(1)}(t,\theta,y) \sim \frac{\tilde{c} e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}(t2\pi)^{d/2}} \Big((\lambda_1(0) - a(0)) e^{\left(d(0)+\sqrt{D(0)}\right)t/2} + (a(0) - \lambda_2(0)) e^{\left(d(0)-\sqrt{D(0)}\right)t/2} \Big),$$

где $\tilde{c}$ *— неотрицательная константа.*

В случае, когда на решетке есть только один источник ветвления (без ограничения общности будем считать, что источник расположен в точке $0 \in \mathbb{Z}^d$), будем изучать поведение преобразований Лапласа первых моментов численностей частиц. Напомним, что преобразование Лапласа для произвольной допустимой функции $f(t)$ определяется по формуле

$$Lf(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Положим $\beta = \beta_1(1,1) = \beta_2(1,1)$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ и $\beta^2 G_{\lambda,1}(0,0) G_{\lambda,2}(0,0) \neq 1$, где

$$G_{\lambda,i}(x,y) = Lp_i(\lambda,x,y), \quad i = 1,2.$$

Функция $p_i(t,x,y)$, $i=1,2$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial p_i(t,x,y)}{\partial t} = \mathcal{L}_i p_i(t,x,y), \quad p_i(0,x,y) = \delta_x(y).$$

Будем предполагать, что генераторы случайных блужданий различны, и случайное блуждание частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, а случайное блуждание частиц второго типа — бесконечную. Тогда верна теорема

Теорема 3 *Пусть $\beta^2 G_{\lambda,1} G_{\lambda,2}(0,0) \neq 1$ и интенсивности прыжков для ВСБ с двумя типами частиц удовлетворяют следующим свойствам*

$$\sum_v a_1(v)|v|^2 < \infty; \quad a_2(u) \sim \frac{H(u/|u|)}{|u|^{d+\alpha}}, \quad \alpha \in (0,2),$$

где $H(\cdot)$ — положительная, непрерывная и симметричная функция на сфере $\{u \in \mathbb{R}^d : |u| = 1\}$. Если на решетке есть один источник ветвления в точке $0 \in \mathbb{Z}^d$, то для преобразований Лапласа функций $Lm_{ij}^{(1)}(t,x,y)$, $i,j = 1,2$ и для всех x, $y \in \mathbb{Z}^d$

$$Lm_{ij}^{(1)}(t,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} m_{ij}^{(1)}(t,x,y)dt, \quad \lambda \geqslant 0,$$

верны следующие асимптотические представления при $\lambda \to 0$.

Для случая $d = 1, \alpha \in (1,2)$ *имеем*

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim -\gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}; \quad Lm_{22}(t,0,0) \sim -\gamma_{1,\alpha} \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}};$$

$$Lm_{12}(t,0,0) \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}.$$

Для случая $d = 1, \alpha = 1$ *имеем*

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim -\gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}; \quad Lm_{22}(t,0,0) \sim \gamma_{1,1} \ln \lambda;$$

$$Lm_{12}(t,0,0) \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}.$$

Для случая $d = 1, \alpha \in (0,1)$ *имеем*

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim -\gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}; \quad Lm_{22}(t,0,0) \sim -G_{0,2};$$

$$Lm_{12}(t,0,0) \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}.$$

Для случая $d = 2, \alpha \in (0,2)$ *имеем*

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim -\gamma_2 \ln\lambda; \quad Lm_{22}(t,0,0) \sim -G_{0,2};$$
$$Lm_{12}(t,0,0) \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim -\frac{1}{\beta}.$$

Для случая $d \geqslant 3, \alpha \in (0,2)$ *имеем*

$$Lm_{11}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2 G_{0,1}^2 G_{0,2}}{1-\beta^2 G_{0,1}G_{0,2}}; \quad Lm_{22}(t,0,0) \sim \frac{\beta^2 G_{0,1} G_{0,2}^2}{1-\beta^2 G_{0,1}G_{0,2}};$$
$$Lm_{12}(t,0,0) \sim Lm_{21}(t,0,0) \sim \frac{\beta G_{0,1} G_{0,2}}{1-\beta^2 G_{0,1}G_{0,2}}.$$

Во второй главе описывается модель ВСБ с иммиграцией. Основное отличие от модели, описанной в первой главе — возможность притока частиц обоих типов извне. То есть за малое время $dt \to 0$ в некоторой точке решетки $x \in \mathbb{Z}^d$ может появиться случайное число частиц χ_i с интенсивностью $k_{i,\chi_i}(x)$. Для модели ВСБ с двумя типами частиц в работе получены дифференциальные уравнения первых моментов численностей частиц субпопуляций. Полученные уравнения достаточно сложны для исследований в общем виде, поэтому во второй главе особое внимание уделено ВСБ с одним типом частиц в докритическом случае, то есть когда интенсивность рождения частиц меньше интенсивности гибели.

Для модели с одним типом частиц будем предполагать, что случайное блуждание, лежащее в основе процесса, имеет те же свойства, что и для процесса, описанного в первой главе. Для интенсивностей ветвления введем обозначения:

- μ — интенсивность смерти;
- b_n — интенсивность частицы породить $n-1$ новую частицу и самой остаться в той же точке решетки;
- будем предполагать, что $\mu + \sum_{n\geqslant 2} b_n = -b_1 > 0$.

Новым преобразованием поля частиц является иммиграция. В любой точке решетки $x \in \mathbb{Z}^d$ за временной интервал $(t, t+dt)$ с вероятностью kdt может появиться одна новая частица, где k — интенсивность иммиграции.

Положим $\beta = \sum_{n\geqslant 2}(n-1)b_n$. Далее будем предполагать, что $\mu < \beta$, то есть ветвящийся процесс является докритическим. Объектом изучения является поле частиц $n(t,x)$, где $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$, то есть $n(t,x)$ есть число частиц в момент времени t в точке решетки $x \in \mathbb{Z}^d$. Для поля частиц $n(t,x)$ будут исследоваться асимптотическое поведение первого и второго момента численностей частиц

$$m_1(t,x) = \mathsf{E}n(t,x), \quad m_2(t,x,y) = \mathsf{E}n(t,x)n(t,y).$$

В случаем постоянных коэффициентов было получено при $t \to \infty$, что

$$m_1(t,x) \to \frac{k}{\mu - \beta}.$$

Для второго момента численностей частиц для докритического ВСБ с иммиграцией в случае, когда интенсивности ветвления и иммиграции постоянные величины, верна теорема.

Теорема 4 *Пусть для ВСБ с одним типом частиц*

$$\beta = \sum_n (n-1) b_n < \mu, \quad k > 0.$$

Тогда второй момент численности частиц $m_2(t,x,y)$ при $t \to \infty$ имеет следующее асимптотическое поведение

$$\begin{aligned} m_2(t,x,y) \to & \frac{k^2}{(\mu-\beta)^2} + \frac{k}{\mu-\beta}\delta_0(x-y) \\ & + \frac{k}{(\varkappa+\mu-\beta)(\mu-\beta)}\Bigg(\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2} b_n\Bigg)\Bigg(\delta_0(x-y) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\varkappa}{\varkappa+\mu-\beta}\Big)^n (a+\delta_0)(x-y)^{*(n)}\Bigg), \end{aligned}$$

где $f^{*(n)}(u) = (\underbrace{f * \ldots * f}_{n})(u)$ — n-кратная свертка функции $f(u)$.

Перейдем к модели ВСБ, в которой интенсивности рождения, гибели и иммиграции являются функциями, зависящими от положения частицы на решетке. В этом случае для первого и второго момента численностей частиц была изучена устойчивость процесса по Ляпунову. Далее нам понадобятся обозначения при фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\mu_0 - \beta_0 = v_0 > 0; \quad k_0 > 0; \quad u_0 > 0; \quad \tilde{u}_0 > 0; \tag{1}$$

$$v_0 - \varepsilon \leqslant v(x) \leqslant v_0 + \varepsilon; \quad k_0 - \varepsilon \leqslant k(x) \leqslant k_0 + \varepsilon; \tag{2}$$

$$u_0 - \varepsilon \leqslant u_0(x) \leqslant u_0 + \varepsilon; \quad \tilde{u}_0 - \varepsilon \leqslant u_0(x,y) \leqslant \tilde{u}_0 + \varepsilon. \tag{3}$$

Тогда для первого и второго момента численностей частиц верны теоремы.

Теорема 5 *Пусть $\varepsilon \leqslant \frac{\min(k_0, v_0)}{2}$. Тогда при выполнении условий (1)–(3) для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$C_1^- \varepsilon + C_0^- e^{-(v_0+\varepsilon)t} \leqslant m_1(t,x) - \frac{k_0}{v_0} \leqslant C_1^+ \varepsilon + C_0^+ e^{-(v_0-\varepsilon)t},$$

где константы $C_0^{\pm}$, $C_1^{\pm}$ зависят только от k_0, v_0, u_0.

Теорема 6 *При выполнении условий* (1)–(3) *для всех* $t \geqslant 0$ *верно неравенство*

$$A \leqslant m_2(t,x,y) - \int\limits_0^t \delta_x(y) F(t-s,x) e^{-\int\limits_0^t V\left(x(\tau),y(\tau)\right)d\tau} ds - \frac{k_0^2}{v_0^2} \leqslant B,$$

где

$$A = C_2^- e^{-(v_0+\varepsilon)t} + C_3^- e^{-2(v_0+\varepsilon)t} + C_4^- \varepsilon - \frac{\varkappa k_0}{v_0^2}\Big(1 - e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\Big);$$
$$B = C_2^+ e^{-(v_0-\varepsilon)t} + C_3^+ e^{-2(v_0-\varepsilon)t} + C_4^+ \varepsilon + \frac{\varkappa k_0}{v_0^2}\Big(1 - e^{-2(v_0-\varepsilon)t}\Big),$$

$C_j^{\pm}$, $j = 2,3,4$ — *константы.*

В третьей главе, в отличие от первой главы, рассматривается пример ВСБ с двумя типами частиц в случае, когда частицы могут менять тип. Объектом изучения являются не субпопуляции частиц, как это было в первой главе, а общая численность частиц каждого типа в каждой точке целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Положим для $i = 1,2$

$$N_i(t,y) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \sum_{s\in\{1,\dots,l_1\}} n_{1i,s}(t,x,y) + \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \sum_{m\in\{1,\dots,l_2\}} n_{2i,m}(t,x,y),$$

где вторая сумма берется по всем частицам, расположенным в начальный момент времени в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Для нашей модели будем предполагать, что начальное условие имеет вид

$$N_1(0,x) = \delta_0(x),\ \ N_2(0,x) \equiv 0 \text{ для всех } x \in \mathbb{Z}^d.$$

Будем называть частицы первого типа зараженными частицами, а второго типа — частицами, которые выработали иммунитет. Пусть за малое время dt зараженная частица может выработать иммунитет с вероятностью $rdt + o(dt)$, то есть r — интенсивность выработать иммунитет для зараженной частицы. В начальный момент времени предположим, что на решетке была одна зараженная частица в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Без ограничения общности можно считать, что в начальный момент времени частица находилась в узле $0 \in \mathbb{Z}^d$.

Асимптотическое поведение численностей частиц будет изучаться с помощью исследования моментов численностей частиц каждого из типов. Сначала рассмотрим первые моменты численностей частиц $M_i(t,x) = \mathsf{E} N_i(t,x)$. В случае, когда генераторы частиц обоих типов совпадают, верна теорема.

Теорема 7 *Пусть* $p(t,x)$ — *решение задачи Коши*

$$\frac{\partial p_1(t,x)}{\partial t} = \varkappa \mathcal{L}_1 p_1(t,x), \quad p_1(0,x) = \delta_0(x).$$

Тогда первые моменты $M_i(t,x) = \mathsf{E}N_i(t,x)$, $i = 1,2$ численностей частиц удовлетворяют равенствам

$$M_1(t,x) = e^{(\beta-\mu_1-r)t}p(t,x);$$

если $\beta-\mu_1-r = -\mu_2$, то

$$M_2(t,x) = rte^{-\mu_2 t}p(t,x);$$

если $\beta-\mu_1-r \neq -\mu_2$, то

$$M_2(t,x) = \frac{r}{\beta-\mu_1-r+\mu_2}\left(e^{(\beta-\mu_1-r)t} - e^{-\mu_2 t}\right)p(t,x).$$

В случае, когда генератор блуждания имеет конечную дисперсию скачков, то есть

$$\sum_{z\neq\bar{0}} a_i(z)|z|^2 < \infty, \quad i = 1,2,$$

получаем следствие теоремы.

Следствие 1 *В случае, когда случайное блуждание частиц первого и второго типа имеет конечную дисперсию скачков, первые моменты численностей частиц при $t\to\infty$ имеют асимптотические представления*

$$M_1(t,x) \sim e^{(\beta-\mu_1-r)t}\frac{\gamma_d}{t^{d/2}};$$

если $\beta-\mu_1-r = -\mu_2$, то

$$M_2(t,x) \sim rte^{-\mu_2 t}\frac{\gamma_d}{t^{d/2}};$$

если $\beta-\mu_1-r \neq -\mu_2$, то

$$M_2(t,x) \sim \frac{r}{\beta-\mu_1-r+\mu_2}\left(e^{(\beta-\mu_1-r)t} - e^{-\mu_2 t}\right)\frac{\gamma_d}{t^{d/2}}.$$

Для вторых моментов численностей частиц каждого из типов также можно получить асимптотическое представление при $t\to\infty$. Рассмотрим сначала поведение второго момента численностей частиц первого типа. Для получения уравнения для второго момента случайной величины $N_1(t,x)$ рассмотрим более общую задачу. Пусть $N_1(t,x,y)$ — число частиц в момент времени t в точке $y\in\mathbb{Z}^d$, порожденных частицей, которая в момент времени $t=0$ находилась в точке $x\in\mathbb{Z}^d$. Начальное условие для этой задачи $N_1(0,x,y) = \delta_x(y)$. В обозначениях исходной задачи имеем $N_1(t,x) = N_1(t,0,x)$. Введем обозначение второго момента $M_1^{(2)}(t,x,y) = \mathsf{E}N_1^2(t,x,y)$. Тогда при $t\to\infty$ в случае, когда генератор частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, верна теорема.

Теорема 8 *Пусть случайное блуждание частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, то есть* $\sum\limits_{z\neq\bar{0}} a_1(z)|z|^2 < \infty$. *Тогда для второго момента численности частиц первого типа*

$$M_1^{(2)}(t,x,y) = \mathsf{E}N_1^2(t,x,y)$$

при $t\to\infty$ *верны следующие асимптотические представления:*

Для случая $d=1$ *имеем*

$$M_1^{(2)}(t,x,y) \sim \frac{\gamma_1}{\sqrt{t}}e^{(\beta-\mu_1-r)t} + \beta^{(2)}\gamma_1^2\left(\ln t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big((\mu_1+r-\beta)t\big)^n}{n\cdot n!}\right)e^{(\beta-\mu_1-r)t},$$

где γ_1 *— константа. В частном случае* $\beta-\mu_1-r=0$ *получаем*

$$M_1^{(2)}(t,x,y) \sim \beta^{(2)}\gamma_1^2\ln t.$$

Для случая $d\geqslant 2$ *имеем*

$$M_1^{(2)}(t,x,y) \sim \frac{\gamma_d}{t^{d/2}}e^{(\beta-\mu_1-r)t} + e^{(\beta-\mu_1-r)t}\int\frac{\beta^{(2)}\gamma_d^2}{t^d}e^{(\mu_1+r-\beta)t}dt,$$

где γ_d *— константа. В частном случае* $\beta-\mu_1-r=0$ *получаем при* $t\to\infty$

$$M_1^{(2)}(t,x,y) \sim \begin{cases}\big(\gamma_2-\beta^{(2)}\gamma_2^2\big)/t, & \text{если } d=2;\\ \gamma_d/t^{d/2}, & \text{если } d\geqslant 3.\end{cases}$$

Для второго момента численностей частиц второго типа аналогично можно получить асимптотическое представление при $t\to\infty$. Положим

$$M_{22}(t,x,y) = \mathsf{E}\big[N_2(t,x)N_2(t,y)\big].$$

Тогда в случаем конечной дисперсии скачков случайного блуждания частиц второго типа получаем теорему.

Теорема 9 *Пусть случайное блуждание частиц второго типа имеет конечную дисперсию скачков, то есть* $\sum\limits_{z\neq\bar{0}} a_2(z)|z|^2 < \infty$. *Тогда для второго момента численности частиц второго типа*

$$M_{22}(t,x,y) = \mathsf{E}N_2(t,x)N_2(t,y)$$

при $t \to \infty$ верны следующие асимптотические представления:

$$M_{22}(t,x,y) \sim \begin{cases} C_1 t^{5/2}, & \text{если } d = 1; \\ C_2 t^2 \ln t, & \text{если } d = 2; \\ C_3 t^{3/2}, & \text{если } d = 3; \\ C_4 t \ln t, & \text{если } d = 4; \\ C_d \frac{1}{t^{d/2-1}}, & \text{если } d \geqslant 5, \end{cases}$$

где C_d, $d \in \mathbb{N}$ — некоторые константы.

Заключение. Диссертация посвящена многотипным ВСБ по целочисленным решеткам $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. В представленной работе изучаются поведения субпопуляций и популяций частиц при различных предположениях о количестве источников ветвления на многомерной решетке и начальному распределению частиц. Перечислим основные результаты диссертации.

Для ВСБ с двумя типами частиц в предположении, что источники ветвления находятся в каждой точке решетки, были получены асимптотические представления первого момента численностей субпопуляций частиц в случае, когда блуждания частиц обоих типов совпадают, а также в случае, когда блуждание частиц первого типа имеет конечную дисперсию скачков, а частиц второго типа — бесконечную. Также в случае, когда блуждания частиц первого и второго типа различны, были получены асимптотические представления первого момента численностей субпопуляций частиц в случае, когда на решетке есть только один источник ветвления. Для моментов старших порядков численностей субпопуляций частиц выведены дифференциальные уравнения. Для ВСБ с иммиграцией с одним типом частиц получены асимптотические представления первого и второго момента численностей популяций частиц в случае, когда источники ветвления расположены в каждой точке решетки, а интенсивности ветвления и иммиграции либо постоянны, либо зависят от положения частиц на решетке. Для ВСБ с возможным изменением типа частиц получены асимптотические представления первого и второго момента численностей популяций частиц обоих типов в случае, когда блуждания частиц обоих типов имеют конечную дисперсию скачков, источники ветвления расположены в каждой точке решетки.

Дальнейшие исследования по теме диссертации могут быть посвящены изучению предельного поведения моментов старших порядков численностей субпопуляций и популяций частиц для получения асимптотического поведения численностей частиц при больших временах. Другим направлением является обобщение результатов для ВСБ с двумя типами частиц при отсутствии и наличии иммиграции для ВСБ с конечным числом типов частиц.

Благодарность. Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Елене Борисовне Яровой за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности и отрасли наук

1. Han D., Makarova Yu., Molchanov S., Yarovaya E. Branching random walks with immigration // Analytical and Computational Methods in Probability Theory, Lecture Notes in Computer Science. – 2017. – Vol. 10684. – P. 401–408.
   DOI: 10.1007/978-3-319-71504-9_33 / Импакт-фактор 0.295 (SJR).
   Вклад соискателя 0.317 п.л. / Общий объем 0.46 п.л.
   Идея написания работы и постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Одна из постановок задач предложена Д. Хан для более простой модели. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно.

2. Makarova Yu., Han D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Immigration. Lyapunov Stability // Markov Processes and Related Fields. – 2019. – Vol. 25. – № 4. – P. 683–708.
   EDN: JJSKMW / Импакт-фактор 0.204 (SJR).
   Вклад соискателя 1.237 п.л. / Общий объем 1.50 п.л.
   Идея написания работы и постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Одна из постановок задач предложена Д. Хан для более простой модели. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно.

3. Makarova Yu., Kutsenko V., Yarovaya E. On Two-Type Branching Random Walks and Their Applications for Genetic Modelling // Recent Developments in Stochastic Methods and Application, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2021. – Vol. 371. – P. 255–268.
   DOI: 10.1007/978-3-030-83266-7_19 / Импакт-фактор 0.204 (SJR).
   Вклад соискателя 0.46 п.л. / Общий объем 0.80 п.л.
   Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой. Введение модели и описание приложений (разделы 1-2) принадлежит В. А. Куценко. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно (разделы 3-5).

4. Makarova Iu., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Two Types of Particles on Multidimensional Lattices // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 6. – P. 1–46.
   DOI: 10.3390/math10060867 / Импакт-фактор 0.446 (SJR).
   Вклад соискателя 1.727 п.л. / Общий объем 2.647 п.л.
   Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Д. М. Балашовой принадлежат результаты разделов 5 и 7. Ю. К. Макаровой принадлежат результаты разделов об описании модели, исследованиях первого и второго момента численностей частиц (разделы 2-4) и раздела 6 о поведении численностей частиц в случае, когда частицы могут изменить тип.

Иные публикации

5. Макарова Ю. К. Ветвящиеся случайные блуждания с двумя типами частиц и разными дисперсиями скачков // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института имени В. А. Стеклова РАН. – 2023. – Т. 526. – С. 130–139.
   EDN: YYXETQ / Общий объем 0.576 п.л.

6. Han D., Makarova Yu., Molchanov S., Yarovaya E. Branching random walks with immigration // Proceedings of the International Conference Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications, РУДН, Москва. – 2017. – С. 281–285.
   Идея написания работы и постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Одна из постановок задач предложена Д. Хан для более простой модели. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно.

7. Balashova D., Makarova Yu., Molchanov S., Yarovaya E. Clustering conditions in branching random walks // Proceedings of the international scientific conference, The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5), РУДН, Москва. – 2020. – P. 24–28.
   Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Д. М. Балашовой принадлежат результаты о кластеризации. Ю. К. Макаровой принадлежат описание модели, исследованиях первого и второго момента численностей частиц и раздела о поведении численностей частиц в случае, когда частицы могут изменить тип.

8. Makarova Yu., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Two Types of Particles // Proceedings of the international scientific conference, The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5), РУДН, Москва. – 2020. – P. 97–101.
   Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову. Д. М. Балашовой принадлежат результаты о кластеризации. Ю. К. Макаровой принадлежат описание модели, исследованиях первого и второго момента численностей частиц и раздела о поведении численностей частиц в случае, когда частицы могут изменить тип.

9. Kutsenko V., Makarova Yu., Yarovaya E. Model of the effect of gene recombination on lethal mutations. An approach using branching random walks // Proceedings of the international scientific conference, The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5), РУДН, Москва. – 2020. – P. 329–333.
   Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой. Описание приложений принадлежит В. А. Куценко. Все результаты получены Ю. К. Макаровой самостоятельно.

10. Makarova Iu. Two-type Branching Random Walks with Different Configurations of Branching Sources // Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress – 2021. – P. 1230–1235.

Макарова Юлия Константиновна

Многотипные ветвящиеся случайные блуждания
при отсутствии и наличии иммиграции

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать __.__.____. Заказ № ________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 120 экз.
Типография ____________________________________