МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Белозеров Глеб Владимирович

ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИЛЛИАРДОВ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1.3. Геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН А. Т. Фоменко

Москва – 2025 г.

Оглавление

Введение

Актуальность работы

Диссертация относится к области дифференциальной геометрии и топологии и является исследованием на стыке двух актуальных направлений: теория интегрируемых гамильтоновых систем и теория математического биллиарда. Работа посвящена изучению софокусных биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве как интегрируемых систем. Более точно, изучается топология слоений Лиувилля двух видов биллиардов: геодезические биллиарды на квадриках внутри софокусных областей и трехмерные биллиарды, ограниченные софокусными квадриками. Для каждого из этих видов получена топологическая классификация. Определены классы гомеоморфности неособых изоэнергетических поверхностей трехмерных софокусных биллиардов, а также биллиарда с потенциалом Гука внутри трехосного эллипсоида.

В последние десятилетия активно изучаются интегрируемые гамильтоновы системы (далее ИГС). Наиболее геометрически наглядными ИГС являются интегрируемые биллиарды и их обобщения. Напомним, что *математическими биллиардом* называется задача о движении материальной точки внутри области D риманова многообразия M^n с абсолютно упругим отражением от ее границы (предполагается, что граница области D является кусочно-гладкой). Интегрируемость плоского биллиарда в области, ограниченной эллипсом, отмечена в работе Дж. Д. Биркгофа [1]. В книге В. В. Козлова и Д. В. Трещева [2], а также в книге С. Л. Табачникова [3] дан обзор современных и классических исследований, посвященных теории математического биллиарда.

Биллиарды внутри плоских областей, ограниченных дугами софокусных квадрик, также являются интегрируемыми. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности начали изучаться в работах В. Драговича, М. Раднович [4], [5], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [6], [7]. В. В. Ведюшкина классифицировала все локально-плоские топологические биллиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол, а также области, полученные склейками элементарных областей вдоль выпуклых [8] и невыпуклых [9],[10] сегментов границ. Была определена эквивалентность биллиардных столов [11] и для каждого класса эквивалентности вычислены инварианты Фоменко (грубые молекулы) и Фоменко-

Цишанга (меченые молекулы).

Напомним, что в случае двух степеней свободы грубой молекулой называется тип базы слоения Лиувилля системы в ограничении на изоэнергетическую поверхность. Это граф Риба, вершины которого дополнительно оснащены символами бифуркаций (3-атомов Фоменко) торов Лиувилля. Они классифицируют интегрируемые системы в ограничении на инвариантное 3-подмногообразие с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности (гомеоморфизма баз слоений Лиувилля, поднимаемого в окрестности каждой точки базы до гомеоморфизма самих слоений Лиувилля). Отметим также, что в работе Н. Т. Зунга [12] грубой эквивалентностью названо более сильное отношение эквивалентности, учитывающее связь поднятий разных точек базы.

Для описания систем с двумя степенями свободы на всем симплектическом многообразии M^4, а также в многомерном случае (для систем с тремя и более степенями свободы) А. Т. Фоменко ввел более общий инвариант нерезонансных интегрируемых по Лиувиллю систем, называемый *бифуркационным комплексом*, и изучил ряд его свойств [13], [14]. В работе [15] был предложен подход к стратификации этого объекта по рангу отображения момента. За вычетом слоев, содержащих вырожденные орбиты пуассонова действия системы или точки коранга 2 и более, фазовое пространство системы допускает описание в терминах (меченых) сетей. Этот подход нашел свое применение в механике, например, при описании М. П. Харламовым и П. Е. Рябовым фазовой топологии системы Ковалевской в двух полях — интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы с тремя степенями свободы [16].

Инвариант Фоменко-Цишанга получается из инварианта Фоменко добавлением числовых меток r, ε, n, вычисляемых по диффеоморфизмам склейки граничных торов 3-атомов [17]. Данный инвариант классифицирует системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности — послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля в ограничении на трехмерный уровень постоянной энергии (с условием ориентации критических окружностей 3-атомов, подробнее см. [18]).

Инварианты Фоменко и Фоменко-Цишанга были вычислены для широкого класса интегрируемых систем геометрии [19]–[23], механики [24]–[30] и их аналогов на алгебрах Ли [31]–[35]. При этом, в частности, были обнаружены нетривиальные эквивалентности между различными системами.

Метод инвариантов нашел широкое применение в теории интегрируемых биллиардов, вообще говоря, являющихся лишь кусочно-гладкими интегрируемыми системами. В работах В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко биллиардами были реализованы инварианты Фоменко-Цишанга многих интегрируемых систем двух степеней свободы [11], [36], [37]. Активно изучается гипотеза А. Т. Фоменко о реализации интегрируемыми биллиардами произвольных слоений Лиувилля и их особенностей [38]-[46]. Обзор и наглядное изложение последних результатов по различным разделам гипотезы Фоменко о биллиардах сделаны в [47]. Для этого рассматриваются не только плоские интегрируемые биллиарды, но и их обобщения — биллиарды на клеточных комплексах (введенные В. В. Ведюшкиной топологические биллиарды [9], [10] и биллиардные книжки [38], [39]), биллиарды с потенциалом [48]-[50], биллиарды в постоянном магнитном поле, биллиарды с проскальзыванием [51] или биллиарды в пространстве с метрикой Минковского [52]. Отметим также недавнюю работу [53], где введенные А. Т. Фоменко эволюционные силовые биллиарды были применены для топологического моделирования систем Эйлера и Лагранжа сразу на всех классах их неособых уровней энергии.

Недавние результаты по доказательству гипотезы Биркгофа (А. А. Глуцюк [54], М. Бялый и А. Е. Миронов [55],[56], А. Ю. Калошин [57],[58]) показывают, что для интегрируемости плоского биллиарда без потенциала требуется принадлежность гладких дуг его границы концентрическим окружностям или софокусным квадрикам (с некоторыми уточнениями). Несмотря на конечность количества классов таких плоских биллиардов (как в смысле комбинаторного устройства границы, так и топологии их слоений Лиувилля), переход от плоских биллиардов к биллиардам на склеенных столах-комплексах позволил реализовать широкий класс слоений Лиувилля интегрируемых систем.

Настоящая работа посвящена изучению топологии слоений Лиувилля двух видов биллиардов в евклидовом $\mathbb{R}^3$: геодезические биллиарды в софокусных областях на квадриках (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды), а также трехмерные софокусные биллиарды.

Конфигурационное пространство софокусного геодезического биллиарда на квадрике E — компактная область $\mathcal{Z}^2$, ограниченная конечным числом квадрик, софокусных с E. Будем предполагать, что углы излома на границе $\mathcal{Z}^2$ равны $\pi/2$. Такие области будем называть *биллиардными столами на квадрике* E. Внутри биллиардного стола частица движется вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы $\mathcal{Z}^2$ абсолютно упруго. Софокусные геодезические биллиарды на квадриках являются интегрируемыми по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Касательные прямые, проведенные к каждой точке гладкости траектории-ломаной софокусного геодезического биллиарда, касаются помимо E еще одной квадрики, софокусной с ней и общей для всех точек гладкости траектории. Параметр этой квадрики является дополнительным первым интегралом системы. Отметим, что в отличие от плоских биллиардов, конфигурационное пространство софокусного геодезического биллиарда лежит на квадрике (эллипсоид, пара гиперболоидов), т.е. на поверхности ненулевой гауссовой кривизны. Этот факт усложняет качественное исследование системы. Тем не менее, автором получена полная лиувиллева классификация софокусных геодезических биллиардов на квадриках при условии постоянства энергии.

Бо́льшая часть диссертационной работы посвящена интегрируемым биллиардам с тремя степенями свободы. Переход к ним — естественный следующий шаг при изучении биллиардов самих по себе и их связей с гладкими и вещественно-аналитическими интегрируемыми системами. Мы будем рассматривать движение материальной точки внутри компактной трехмерной области, ограниченной конечным числом софокусных квадрик и имеющей двугранные углы излома на границе, равные $\pi/2$. Такие области мы будем называть *трехмерными биллиардными столами.* Также мы будем считать, что на материальную точку не действуют никакие силы, то есть она движется по отрезкам прямых с постоянной по модулю скоростью. Оказывается, что такие системы обладают тремя независимыми первыми интегралами. Один из них — полная механическая энергия $H(x, v) = \|v\|^2/2$, два других — параметры софокусных квадрик, которых одновременно касаются все прямые, содержащие звенья данной траектории шара. Отметим, что биллиард внутри эллипсоида был рассмотрен В. Драговичем и М. Раднович в работе [5], где они описали прообразы точек отображения момента. В диссертации автором описаны все возможные трехмерные софокусные биллиардные столы и особенности отвечающих им биллиардов, проведена полная классификация всех трехмерных софокусных биллиардов относительно грубой лиувиллевой эквивалентности.

Одна из важных задач, возникающих при исследовании ИГС — определить класс гомеоморфности неособой поверхности постоянной энергии. Для ИГС с двумя степенями свободы топологический тип изоэнергетического многообразия Q^3 (класс гомеоморфности многообразия без учета возникающего на нем слоения Лиувилля) можно вычислить по инварианту Фоменко-Цишанга. Для ряда плоских и топологических биллиардов тип Q^3 был найден В. В. Ведюшкиной [8]. Для биллиардных столов-книжек (клеточных комплексов с перестановками, задающими динамику шара при переходе с листа на лист) было доказано, что поверхность Q^3 является топологическим многообразием [59]. Однако для систем с тремя степенями свободы такой метод определения класса гомеоморфности Q^5 не подходит. Тем не менее, оказалось, что для трехмерных софокусных биллиардов эту задачу можно решить, зная, чему гомеоморфен биллиардный стол. В работе автором показано, что если стол гомеоморфен $\overline{D}^3$, $\overline{D}^2 \times S^1$, $\overline{D}^1 \times S^2$, где $\overline{D}^n$ — замкнутый n-мерный диск, то поверхность Q^5 гомеоморфна S^5, $S^4 \times S^1$, $S^3 \times S^2$ соответственно. Идея доказательства этого факта была модернизирована, и с ее помощью были определены классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии биллиарда с потенциалом Гука внутри эллипсоида.

Цели диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели.

1. Классифицировать все компактные области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах, ограниченные софокусными квадриками, с углами излома на границе, равными $\pi/2$.

2. Для каждой софокусной области на квадриках вычислить инвариант Фоменко-

Цишанга соответствующего биллиарда.

3. Классифицировать все компактные области в евклидовом трехмерном пространстве, ограниченные софокусными квадриками и имеющие двугранные углы излома на границе, равные $\pi/2$.

4. Классифицировать все трехмерные софокусные биллиарды относительно грубой лиувиллевой эквивалентности.

5. Определить классы гомеоморфности поверхностей постоянной энергии трехмерных софокусных биллиардов.

6. Определить классы гомеоморфности неособых изоэнергетических поверхностей трехмерного биллиарда внутри эллипсоида с потенциалом Гука.

Цели и задачи работы

- Описать все компактные области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах, ограниченные софокусными квадриками, с углами излома на границе, равными $\pi/2$.

- Вычислить инварианты Фоменко-Цишанга софокусных биллиардов на квадриках, получить их лиувиллеву классификацию.

- Описать все компактные области в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченные софокусными квадриками, с двугранными углами излома на границе, равными $\pi/2$.

- Классифицировать все трехмерные софокусные биллиарды относительно грубой лиувиллевой эквивалентности.

- Определить классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии трехмерных софокусных биллиардов, а также биллиарда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука.

Положения, выносимые на защиту

1. На эллипсоиде имеется 21 тип комбинаторно неэквивалентных областей, ограниченных софокусными квадриками, с углами излома границы, равными $\pi/2$, на однополостном гиперболоиде — 21 тип, на двуполостном гиперболоиде — 13 типов.

2. На эллипсоиде имеется в точности 7 лиувиллево неэквивалентных софокусных геодезических биллиардов, на однополостном гиперболоиде — 7, на двуполостном гиперболоиде — 6. Некоторые биллиарды на квадриках разного вида лиувиллево эквивалентны. Всего на квадриках существует в точности 10 лиувиллево неэквивалентных биллиардов.

3. Существует в точности 35 комбинаторно неэквивалентных трехмерных биллиардных областей, ограниченных софокусными квадриками, с двугранными углами излома границы, равными $\pi/2$.

4. Существует в точности 24 класса грубо лиувиллево неэквивалентных трехмерных софокусных биллиардов.

5. Если трехмерный софокусный биллиардный стол гомеоморфен трехмерному диску, сферическому слою или полноторию, то поверхность постоянной энергии Q^5 гомеоморфна S^5, $S^2 \times S^3$ или $S^1 \times S^4$ соответственно.

6. Если h — неособый уровень энергии биллиарда с потенциалом Гука внутри эллипсоида, то при $k > 0$ имеем $Q^5_h \cong S^5$. Если же $k < 0$, то Q^5_h — либо пятимерная сфера S^5, либо несвязное объединение двух пятимерных сфер, либо $S^1 \times S^4$, либо $S^2 \times S^3$.

Основные результаты диссертации

1. Классифицированы все компактные области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах, ограниченные софокусными квадриками и имеющие углы излома на границе, равные $\pi/2$, относительно их комбинаторного устройства. На эллипсоиде имеется 21 тип неэквивалентных областей, на однополостном гиперболоиде — 21 тип, на двуполостном гиперболоиде — 13 типов.

2. Для каждой софокусной области на квадриках вычислены инварианты Фоменко-Цишанга соответствующего биллиарда. В итоге, на эллипсоиде имеется 7 лиувиллево неэквивалентных биллиардов, на однополостном гиперболоиде — 7, на двуполостном гиперболоиде — 6. Некоторые биллиарды на квадриках разного вида оказались лиувиллево эквивалентными. Всего на квадриках существует в точности 10 лиувиллево неэквивалентных биллиардов. Все эти биллиарды оказались лиувиллево эквивалентны известным ИГС физики, механики и геометрии.

3. Классифицированы все компактные области в евклидовом трехмерном пространстве, ограниченные софокусными квадриками и имеющие двугранные углы излома на границе, равные $\pi/2$. Как оказалось, существует в точности 35 комбинаторно неэквивалентных трехмерных софокусных биллиардных областей. При этом, любая такая область гомеоморфна либо трехмерному диску, либо сферическому слою, либо полноторию.

4. Для каждой трехмерной софокусной области описано слоение Лиувилля соответствующего биллиарда вблизи произвольного слоя. Классифицированы все трехмерные софокусные биллиарды относительно грубой лиувиллевой эквивалентности. Показано, что существует в точности 24 класса грубо лиувиллево неэквивалентных трехмерных софокусных биллиардов.

5. Найдены классы гомеоморфности поверхностей постоянной энергии Q^5 трехмерных софокусных биллиардов. Как оказалось, ответ зависит лишь от класса гомеоморфности биллиардного стола. Если стол гомеоморфен трехмерному диску, то $Q^5 \cong S^5$. Если стол гомеоморфен сферическому слою, то $Q^5 \cong S^2 \times S^3$. Если стол гомеоморфен полноторию, то $Q^5 \cong S^1 \times S^4$. Более того, показано, что малая деформация биллиардной области не изменит класс гомеоморфности Q^5 соответствующего, вообще говоря, неинтегрируемого биллиарда.

6. Определены классы гомеоморфности неособых изоэнергетических поверхностей Q_h^5 трехмерного биллиарда с потенциалом Гука внутри эллипсоида. Если h — неособый уровень энергии такого биллиарда, то при $k > 0$ имеем $Q^5 \cong S^5$. Если же $k < 0$, то Q_h^5 — либо пятимерная сфера S^5, либо несвязное объединение двух пятимерных сфер, либо $S^1 \times S^4$, либо $S^2 \times S^3$.

Научная новизна

Автором получены новые результаты, которые заключаются в следующем.

Описаны всевозможные софокусные области на квадриках (эллипсоиды и гиперболоиды) в трехмерном евклидовом пространстве, вычислены инварианты Фоменко-Цишанга соответствующих геодезических биллиардов. Получена лиувиллева классификация таких систем, найдены лиувиллево эквивалентные им известные интегрируемые системы механики и геометрии.

Представлен полный список комбинаторно неэквивалентных трехмерных областей, ограниченных софокусными квадриками. Описано полулокальное устройство слоения Лиувилля соответствующих биллиардных систем. Проведена классификация таких биллиардов относительно грубой лиувиллевой эквивалентности.

Найдены классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии трехмерных биллиардов, ограниченных софокусными квадриками, а также биллиарда с потенциалом Гука внутри трехосного эллипсоида.

Теоретическая и практическая значимость

Предлагаемая работа имеет теоретический характер.

Результаты классификации софокусных геодезических биллиардов на квадриках, а также биллиардов в трехмерных софокусных областях могут быть использованы для установления изоморфизмов (по крайней мере локальных) слоений Лиувилля с другими интегрируемыми системами двух и трех степеней свободы.

Метод понижения степени свободы, описанный в диссертации и использованный для описания полулокального вида особенностей трехмерных биллиардов, может быть обобщен на многомерный случай. Этот метод применим не только к интегрируемым биллиардам, но и к другим ИГС. С помощью него можно весьма наглядно описать полулокальное устройство особенностей некоторых довольно сложных ИГС.

Конструкция, описывающая топологические типы изоэнергетических поверхностей трехмерных софокусных биллиардов, (представлена в четвертой главе) никак не использует интегрируемость и может быть обобщена на многомерные биллиардные столы, не обязательно софокусные.

Степень достоверности

Достоверность результатов автора подтверждена строгими математическими доказательствами. Научные результаты автора опубликованы в открытой печати, прошли апробацию на научных семинарах.

Все результаты, выносимые автором на защиту, получены самостоятельно.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 3 печатных работах (общим объемом 5,188 п.л.), в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология и индексируемых базами цитирования Scopus, Web of Science, RSCI и РИНЦ.

Методы исследования

В работе используются методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем, построенная А. Т. Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым, Н. Т. Зунгом и др. Применяются методы исследования слоений Лиувилля интегрируемых локально-плоских биллиардов двух степеней свободы, описанные В. В. Ведюшкиной. Используются алгебраические методы работы с интегрируемыми системами, разработанные М. П. Харламовым.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях и неоднократно семинарах.

- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2019», Москва, Россия, с 8 по 12 апреля 2019.
- Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020», Воронеж, Россия, с 27 по 4 февраля 2020.
- Всероссийская конференция «Ломоносовские чтения – 2020», Москва, Россия, с 17 по 29 октября 2020.
- IV-ая международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», посвященная 90-летию со дня рождения профессора Ю. Г. Борисовича, Воронеж, Россия, с 9 по 11 ноября 2020.
- XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2020», Москва, Россия, с 10 по 27 ноября 2020.
- Международная конференция «Dynamics in Siberia – 2021», Новосибирск, Россия, с 1 по 7 марта 2021.
- Всероссийская студенческая школа-конференция «Математическая весна – 2021», Нижний Новгород, Россия, с 30 марта по 2 апреля 2021.
- XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2021», Москва, Россия, с 12 по 23 апреля 2021.
- Третья международная конференция «International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics», Ярославль, Россия, с 4 по 8 октября 2021.
- Международная конференция «Классическая и современная геометрия», посвященная 100-летию со дня рождения Левона Сергеевича Атанасяна, Москва, Россия, с 1 по 4 ноября 2021.
- V-ая международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», посвященная 90-летию ВГПУ, Воронеж, Россия, с 15 по 17 ноября 2021.
- Всероссийская конференция «Ломоносовские чтения – 2022», Москва, Россия, с 14 по 22 апреля 2022.

- International conference «XXI geometrical seminar», Belgrade, Serbia, с 26 июня по 2 июля 2022.

- Семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений под рук. акад. А. Т. Фоменко, 22 марта 2022, 18 апреля 2022, 16 сентября 2024.

- Семинар «Современные геометрические методы» под рук. акад. А. Т. Фоменко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. С. Мищенко, проф. Е. А. Кудрявцевой, доц. И. М. Никонова, доц. А. Ю. Коняева, асс. В. А. Кибкало, 20 октября 2021.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст диссертации изложен на 151 странице. Список литературы содержит 76 наименований.

Благодарности

Автор выражает особую благодарность своему научному руководителю академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор искренне благодарен д.ф.-м.н. профессору Виктории Викторовне Ведюшкиной, д.ф.-м.н. профессору Андрею Александровичу Ошемкову и к.ф.-м.н. ассистенту Владиславу Александровичу Кибкало за поддержку и внимание, а также всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений за создание плодотворной научной атмосферы.

Глава 1

Софокусные биллиарды как интегрируемые системы

В этой главе мы напомним основные понятия и фундаментальные теоремы теории интегрируемых гамильтоновых систем, а также метод инвариантов, предложенный А. Т. Фоменко, для качественного исследования таких систем. Помимо этого, мы покажем, что трехмерные софокусные биллиарды и софокусные биллиарды на квадриках в $\mathbb{R}^3$ являются интегрируемыми в кусочно-гладком смысле.

1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы. Методы их исследования

1.1.1 Основы теории ИГС. Теорема Лиувилля. Виды эквивалентностей ИГС

Определение 1.1.1. Пара (M^{2n}, ω), где M^{2n} — гладкое многообразие, а ω — замкнутая невырожденная 2-форма на нем, называется *симплектическим многообразием.*

Определение 1.1.2. Пусть $H \in C^\infty(M^{2n})$, тогда векторное поле

$$\operatorname{sgrad} H = (\operatorname{sgrad} H)^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

называется *гамильтоновой системой* (или *гамильтоновым векторным полем*), а функция H — его *гамильтонианом* (или *функцией Гамильтона*).

Замечание 1.1.1. Если на симплектическом многообразии задана гамильтонова система, то число, равное половине размерности многообразия, принято называть *степенью свободы* этой гамильтоновой системы.

Симплектическая форма ω определяет на пространстве $C^\infty(M^{2n})$ *скобку Пуассона* $\{\cdot,\cdot\}$ следующей формулой.

$$\{f,g\} = \omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} \qquad \forall f,g \in C^\infty(M^{2n})$$

Говорят, что гладкие функции f и g *находятся в инволюции* (или *коммутируют*), если скобка Пуассона f и g равна нулю, т.е. $\{f,g\}=0$.

Определение 1.1.3. Гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} H$ называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций $f_1,\dots,f_n$, таких, что:

1. $f_1,\dots,f_n$ — первые интегралы v,
2. $f_1,\dots,f_n$ функционально независимы на M, то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,
3. $\{f_i,f_j\}=0$ при любых i и j,
4. векторные поля $\operatorname{sgrad} f_j$ полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Первые интегралы $f_1,\dots,f_n$ вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы задают разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты их совместного уровня. Это разбиение порождает слоение, которое называется *слоением Лиувилля.* Слоение Лиувилля состоит из регулярных и особых слоев. Напомним их определения.

Определение 1.1.4. Точку $x \in M^{2n}$ будем называть *регулярной*, если векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$ линейно независимы в x. В противном случае будем называть такую точку *критической.* Слой слоения Лиувилля будем называть *регулярным*, если он целиком состоит из регулярных точек, иначе — *критическим.*

Устройство слоения Лиувилля в малой окрестности регулярного слоя устанавливает следующая классическая теорема.

Теорема 1.1.1 (Ж. Лиувилль)**.** *Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n},ω) задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} H$ и T_ξ — регулярная поверхность уровня интегралов $f_1,\dots,f_n$. Тогда*

1. *Поверхность T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} f_1,\dots,\operatorname{sgrad} f_n$.*
2. *Если подмногообразие T_ξ связно, то оно диффеоморфно $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$. В частности, если T_ξ компактно, оно диффеоморфно n-мерному тору T^n. Этот тор называется тором Лиувилля.*

3. *Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n.*

4. *В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \dots, s_n$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:*

   - *$s_1, \dots, s_n$ — координаты на диске D^n, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе T^n, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*
   - *$\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.*
   - *Переменные действия s_i являются функциями от интегралов $f_1, \dots, f_n$.*
   - *В переменных действие-угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U, т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид $\dot{s}_i = 0, \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), i = 1, 2, \dots, n$. Это означает, что на каждом торе поток v задает условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).*

Замечание 1.1.2. Поскольку функция Гамильтона H — первый интеграл системы $\operatorname{sgrad} H$, то, как правило, считают, что $f_1 = H$.

Насколько похожи две наперед заданные интегрируемые системы? Этот вопрос является наиболее важным в теории ИГС. Впрочем, вопрос о схожести двух изучаемых объектов является основным в любой математической науке.

Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо задать отношение (отношения) эквивалентности на множестве всех ИГС. Напомним основные виды эквивалентностей ИГС. Наиболее сильными являются сопряженность и траекторная эквивалентность. В их определении интегрируемость систем не требуется.

Определение 1.1.5. Две динамические системы v_1 и v_2 на многообразиях M_1^{2n} и M_2^{2n} называются *топологически* (*гладко*) *сопряженными*, если существует гомеоморфизм (соответственно диффеоморфизм) $\varphi : M_1^{2n} \to M_2^{2n}$, коммутирующий с потоками ψ_1^t, ψ_2^t, задаваемых системами v_1 и v_2, т.е. $\psi_1^t = \varphi^{-1} \circ \psi_2^t \circ \varphi$.

Определение 1.1.6. Две динамические системы v_1 и v_2 на многообразиях M_1^{2n} и M_2^{2n} называются *топологически* (*гладко*) *траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм (соответственно диффеоморфизм) $\varphi : M_1^{2n} \to M_2^{2n}$, переводящий ориентированные траектории одной системы в ориентированные траектории другой (и не обязательно сохраняющий время на траекториях).

Следующие отношения эквивалентности относятся только к интегрируемым системам и определяют меру схожести их слоений Лиувилля.

Определение 1.1.7. Две вполне интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 на симплектических многообразиях M_1^{2n} и M_2^{2n}, обладающие наборами первых интегралов $(f_1, \ldots, f_n)$ и $(g_1, \ldots, g_n)$ в смысле определения 1.1.3, называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : M_1^{2n} \to M_2^{2n}$ слоений Лиувилля этих систем.

Определение 1.1.8. Две вполне интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 на симплектических многообразиях M_1^{2n} и M_2^{2n}, обладающие наборами первых интегралов $(f_1, \ldots, f_n)$ и $(g_1, \ldots, g_n)$ в смысле определения 1.1.3, называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между базами слоений Лиувилля этих систем, который локально (т.е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма самих слоений.

Замечание 1.1.3. Аналогичные определения эквивалентностей можно сформулировать для ограничений ИГС на поверхности уровня функции Гамильтона (т.е. на изоэнергетические поверхности).

Замечание 1.1.4. Уточним определение лиувиллевой эквивалентности ИГС двух степеней свободы на изоэнергетических многообразиях. Будем считать, что две такие системы лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда существует диффеоморфизм изоэнергетических поверхностей, переводящий слоение Лиувилля в слоение Лиувилля и сохраняющий ориентацию всех критических окружностей, а также ориентацию самих 3-многообразий.

Согласно теореме 1.1.1 на торах Лиувилля траектории представляют собой прямолинейные обмотки. Как правило, такие обмотки условно-периодические, а следовательно, они всюду плотно покрывают тор. Также отметим, что почти во всех известных аналитических интегрируемых системах механики регулярные слои всюду плотны. Следовательно, если две интегрируемые системы траекторно эквивалентны, то в описанных выше ограничениях "общего положения" эти системы лиувиллево эквивалентны.

Универсальным подходом к описанию слоений Лиувилля ИГС является метод инвариантов, предложенный академиком А. Т. Фоменко. В случае двух степеней свободы А. Т. Фоменко и Х. Цишанг описали инварианты, классифицирующие ИГС на компактных неособых изоэнергетических поверхностях с точностью до лиувиллевой и грубой лиувиллевой эквивалентностей. Основные идеи этого метода будут изложены в следующих пунктах.

1.1.2 ИГС с одной и двумя степенями свободы. Бифуркации и атомы. Грубые молекулы

Рассмотрим гамильтонову систему $v = \operatorname{sgrad} H$ на двумерном компактном симплектическом многообразии (M^2, ω). Эта система является вполне интегрируемой. Действительно, ее первым интегралом является функция H, а полнота потока $\mathrm{sgrad}\, H$ следует из компактности многообразия M^2. Согласно теореме Лиувилля связные компоненты регулярных поверхностей уровня $H = \mathrm{const}$ представляют собой окружности, а их малые окрестности диффеоморфны цилиндру. Однако как происходит перестройка этих окружностей при прохождении через критические уровни?

Как правило, в известных механических ИГС функция H является функцией Морса. Напомним определение функции Морса.

Определение 1.1.9. Гладкая функция f на многообразии N^n называется *функцией Морса*, если все ее критические точки являются невырожденными, т.е. если $df|_x = 0$, то $d^2f|_x$ имеет полный ранг (равен n).

Функция Морса на компактном многообразии обладает лишь конечным количеством критических точек. При этом, согласно лемме Морса в окрестности критической точки на M^2 подходящим выбором криволинейных координат функция H приводится к виду $H = H_0 \pm x^2 \pm y^2$ (см., например, [60]). Однако лемма Морса дает лишь локальное представление функции в окрестности невырожденной точки. Глобальное устройство функции Морса в окрестности критического слоя однозначно описывается 2-атомом. Напомним его определение.

Определение 1.1.10. Пусть f — функция Морса на двумерном компактном многообразии M^2 и c — ее критическое значение. Предположим также, что c — единственное критическое значение функции f на отрезке $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Тогда связную компоненту P^2 множества $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, расслоенную на линии уровня функции f, будем *называть 2-атомом (двумерным атомом)* (P^2, f).

Все 2-атомы рассматриваются с точностью до следующего отношения эквивалентности.

Определение 1.1.11. Будем называть 2-атомы (P_1^2, f_1) и (P_2^2, f_2) *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм между P_1^2 и P_2^2, переводящий функцию f_1 в функцию f_2.

Приведем несколько примеров 2-атомов. Если точка $x \in M^2$ является точкой минимума или точкой максимума функции H, то согласно лемме Морса, 2-атом, отвечающий этой особенности, представляет собой двумерный диск, расслоенный на концентрические окружности (см. рис. 1.1.1). Такой атом называется *2-атомом A*.

Двумерный атом, содержащий на критическом слое ровно одну особую точку и отвечающий перестройке из одной окружности в две через критический уровень, гомеоморфный "восьмерке", называется *2-атомом B*. Он изображен на рисунке 1.1.2. На рисунках 1.1.3 и 1.1.4 проиллюстрированы 2-атомы C_2 и D_1 соответственно. Все эти атомы понадобятся нам в дальнейшем.

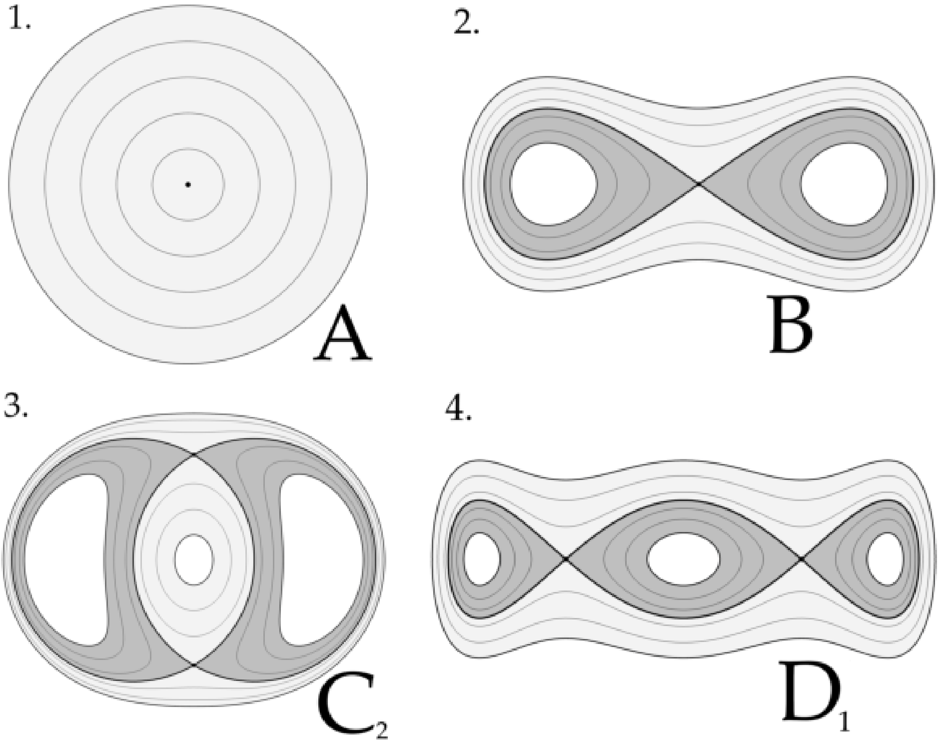


Рис. 1.1: Двумерные атомы A, B, C_2, D_1 и их расслоения линиями уровня функции Морса f. На рисунках 2–4 черной жирной линией выделен критический уровень $f = c$, светло-серым и темно-серым цветами — области $c < f \leqslant c + \varepsilon$ и $c - \varepsilon \leqslant f < c$.

Построим теперь по системе $\operatorname{sgrad} H$ на многообразии M^2 топологический инвариант. Для этого рассмотрим базу слоения Лиувилля этой системы. Она представляет собой граф (*граф Риба*), вершинам которого отвечают критические слои функции H, а ребрам — однопараметрические семейства регулярных слоев-окружностей. Сопоставим каждой вершине этого графа символ атома, соответствующий окрестности особого слоя в этой вершине. При этом предполагается, что граничные окружности атомов находятся во взаимно-однозначном соответствии с ребрами графа, примыкающими к данной вершине. Полученный объект называется 2-*молекулой*. Два-молекулы классифицируют ИГС на двумерных компактных многообразиях с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Теорема 1.1.2 (А. Т. Фоменко [18]). *Если молекулы W_1 и W_2 двух ИГС $v_1 = \operatorname{sgrad} H_1$ и $v_2 = \operatorname{sgrad} H_2$ на многообразиях M_1^2 и M_2^2 совпадают, то существует диффеоморфизм $\varphi : M_1^2 \to M_2^2$ переводящий функцию H_1 в функцию H_2, т.е. $H_2 = \varphi \circ H_1$.*

Теперь рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему двух степеней свободы на многообразии M^4 с гладким гамильтонианом H. Пусть f — дополнительный интеграл системы, а $Q^3 = \{x \in M^4 | H(x) = \text{const}\}$ — неособая компактная поверхность уровня гамильтониана. Выберем на Q^3 ориентацию. В этом случае интеграл f задает слоение Лиувилля на Q^3. Базой этого слоения снова является граф (*граф Кронрода-Риба*), вершинам которого отвечают особые слои, а ребрам — однопараметрические семейства 2-торов Лиувилля. Для того чтобы из этого графа получить аналог 2-молекулы, необходимо разобраться с устройством критических слоев функции f и их малых окрестностей.

В известных механических интегрируемых системах функция f на Q^3 является функцией Ботта. Напомним определение функции Ботта.

Определение 1.1.12. Гладкая функция f на многообразии N^n называется *функцией Ботта*, если все ее критические точки собраны в невырожденные подмногообразия.

Невырожденность в последнем определении означает следующее. Ограничение функции f на площадку трансверсальную к критическому подмногообразию является функцией Морса.

Замечание 1.1.5. Одномерные критические многообразия функции Ботта на компактных многообразиях диффеоморфны окружности, двумерные — либо двумерному тору, либо бутылке Клейна. Мы будем предполагать, что все критические подмногообразия функции f на Q^3 — окружности. Отметим, что на всех критических окружностях задана ориентация, определяемая гамильтоновым потоком $\operatorname{sgrad} H$.

По аналогии с двумерным случаем напомним определение 3-атома.

Определение 1.1.13. Пусть L — особый слой слоения функции f на Q^3, отвечающий критическому значению c. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы функция f не принимала бы помимо c никаких других критических значений из отрезка $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Обозначим через $U(L)$ связную компоненту множества $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, содержащую слой L. Тогда множество $U(L)$, расслоенное на поверхности уровня функции f будем называть 3-*атомом.* Количество критических окружностей в слое L называется *сложностью* 3-*атома* $U(L)$.

Все 3-атомы также как их двумерные аналоги рассматриваются с точностью до следующего отношения эквивалентности.

Определение 1.1.14. Два 3-атома будем называть *эквивалентными*, если между ними существует диффеоморфизм, сохраняющий структуру слоения Лиувилля, а также ориентации всех критических окружностей.

Оказывается, 3-атом $U(L)$ является многообразием Зейферта (более подробно см. [18],[61]). Более того, справедлива следующая теорема о топологическом устройстве 3-атомов.

Теорема 1.1.3 (А. Т. Фоменко [18])**.**

a) *Трехмерное многообразие $U(L)$ является многообразием Зейферта, все особые слои которого (если они существуют) имеют один и тот же тип* $(2,1)$.

б) Эти особые слои являются в точности критическими окружностями интеграла f с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами.

в) Если особых слоев у этого расслоения Зейферта нет, то многообразие $U(L)$ является прямым произведением $P(L) \times S^1$, где $P(L)$ — ориентируемый 2-атом.

г) В общем случае структура расслоения Зейферта на $U(L)$ и структура слоения Лиувилля на $U(L)$ согласованы в том смысле, что каждый слой расслоения Зейферта (окружность) лежит на некотором торе Лиувилля.

Согласно теореме 1.1.3 все 3-атомы можно разбить на две группы: не содержащие особые слои в расслоении Зейферта и обладающие особыми слоями. При этом, представители первой группы разлагаются в прямое произведение ориентируемого 2-атома и окружности. Поэтому обозначать такие 3-атомы принято теми же символами, что их 2-атомы-базы расслоения Зейферта.

Среди всех 3-атомов с тривиальным расслоением Зейферта выделяется 3-атом A (см. рис. 1.2.1). Он соответствует минимумам и максимумам функции f. Все остальные 3-атомы отвечают седловым особенностям. Также отметим 3-атом B (см. рис. 1.2.2). Он содержит одну критическую окружность на особом слое и отвечает перестройке одного тора Лиувилля в два (и наоборот). Во второй группе 3-атомов (не обладающих тривиальным S^1-расслоением Зейферта) выделим 3-атом A^* (см. рис. 1.2.3). Он обладает только одной критической окружностью, которая является особым слоем расслоения Зейферта. Три-атомы A, B, A^* — это в точности все трехмерные атомы сложности 1.

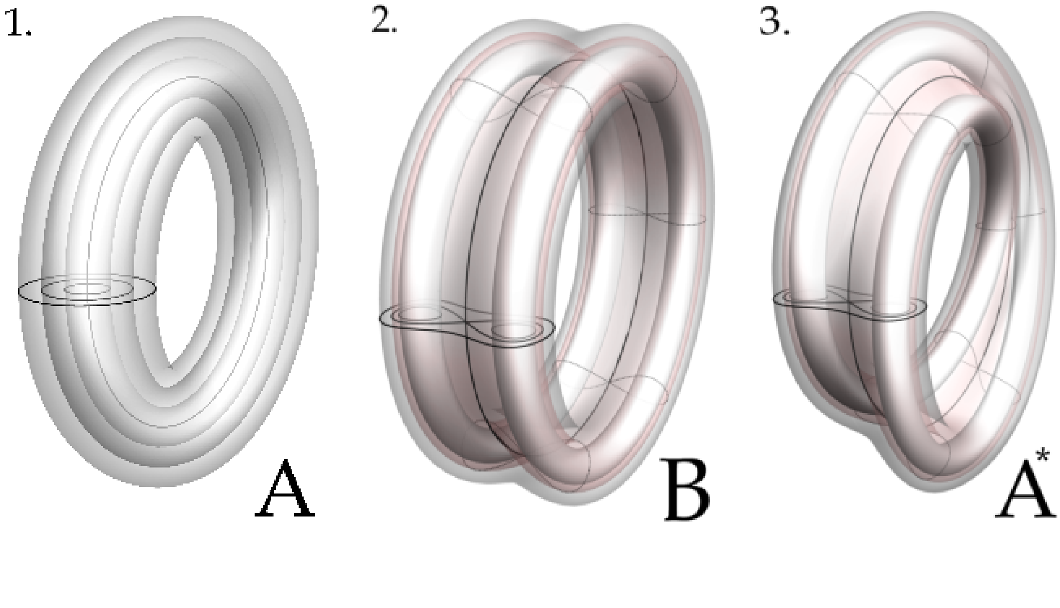


Рис. 1.2: Три-атомы сложности один и их слоения Лиувилля.

Замечание 1.1.6. Все 3-атомы можно описать с помощью следующей конструкции. Рассмотрим базу расслоения Зейферта 3-атома $U(L)$. Она представляет собой либо ориентируемый 2-атом, либо расслоенное кольцо с выделенной окружностью, отвечающей критическому слою. Отметим на базе расслоения Зейферта атома $U(L)$ звездочками в точности те точки, которые соответствуют особым слоям. Полученный объект называется 2-*атомом со звездочками.* Если же, наоборот, рассмотреть произвольный 2-атом или расслоенное кольцо с выделенной (критической) окружностью, поставить на критический слой конечное число звездочек (звездочки запрещаем ставить в критические точки), то по такому объекту можно однозначно восстановить 3-атом. В частности, поэтому 3-атомы, содержащие особые слои в расслоении Зейферта, принято называть 3-*атомами со звездочками.*

Итак, рассмотрим граф Кронрода-Риба функции f на неособой компактной изоэнергетической поверхности Q^3. Оснастим вершины этого графа символами атомов, описывающих отвечающую вершине бифуркацию торов Лиувилля. Как и в случае одной степени свободы, мы снова дополнительно подразумеваем, что граничные 2-торы Лиувилля атомов естественно взаимно однозначно соответствуют ребрам графа Кронрода-Риба, примыкающим к данной вершине. Получившийся в результате объект называется *грубой молекулой.*

Теорема 1.1.4 (А. Т. Фоменко, [62])**.** *Пусть v_1 и v_2 — две интегрируемые системы на изоэнергетических поверхностях Q_1^3 и Q_2^3, а W_1 и W_2 — отвечающие им грубые молекулы. Тогда системы v_1 и v_2 грубо лиувиллево эквивалентны (с учетом ориентации) тогда и только тогда, когда молекулы W_1 и W_2 совпадают.*

1.1.3 Инвариант Фоменко-Цишанга

Грубые молекулы содержат информацию о полулокальном виде особенностей. Однако для глобального описания топологии слоения Лиувилля ее недостаточно. Необходимо указать, как "склеиваются" между собой торы Лиувилля на границах соседних атомов. Ниже мы кратко опишем процедуру выбора допустимых базисов на граничных торах Лиувилля 3-атомов, а также напомним алгоритм вычисления инварианта Фоменко-Цишанга. Более подробная информация изложена в работах [17], [18], [63].

Рассмотрим ИГС $v = \operatorname{sgrad} H$ на симплектическом многообразии (M^4, ω) с дополнительным боттовским первым интегралом f. Пусть Q^3 — неособая компактная изоэнергетическая поверхность, а W — грубая молекула системы v на Q^3. Зафиксируем на Q^3 ориентацию и разрежем молекулу W по всем ее ребрам (т.е. разрежем Q^3 на атомы). Теперь на каждом граничном торе выберем допустимый базис в группе одномерных гомологий. Процедура выбора такого базиса зависит от вида 3-атома.

1. *Три-атом A.* В качестве первого базисного цикла λ выберем тот, что стягивается в точку при стремлении граничного тора к критической окружности. Дополним λ до базиса

циклом μ. Заметим, что цикл μ стягивается к критической окружности и определен неоднозначно. Поскольку на критической окружности есть естественная ориентация, задаваемая гамильтоновым векторным полем v, перенесем эту ориентацию на цикл μ. Сменим ориентацию цикла λ (если нужно), так, чтобы пара (λ, μ) задавала бы положительную ориентацию на торе Лиувилля. Базис (λ, μ) будем называть *допустимым* на 3-атоме A.

2. *Седловые атомы без звездочек.* Рассмотрим произвольное сечение P тривиального S^1-расслоения Зейферта такого 3-атома. В качестве циклов μ_i на граничных торах Лиувилля выберем граничные окружности 2-атома P, а в качестве λ_i — слои расслоения Зейферта (т.е. окружности, стягивающиеся к критической). Пары (λ_i, μ_i), действительно, являются базисами, поскольку все слои расслоения Зейферта 3-атомов без звездочек гомологичны критическим окружностям. Ориентацию на циклах λ_i позаимствуем от критических окружностей, а циклы μ_i ориентируем так, чтобы пары (λ_i, μ_i) задавали бы положительную ориентацию на торах Лиувилля. Построенные базисы назовем *допустимыми* на седловых 3-атомах без звездочек.

3. *Атомы со звездочками.* В качестве циклов λ_i на торах Лиувилля, как и в предыдущем случае, выберем слои расслоения Зейферта. Однако циклы μ_i тем же способом нам не удастся задать, поскольку расслоение Зейферта 3-атомов со звездочками обладает особыми слоями. Однако эти циклы можно вполне естественно определить, используя дубль $\widehat{P}$ базы P расслоения Зейферта рассматриваемого 3-атома.

Множество $\widehat{P}$ является дублем P в следующем смысле. Существует разветвленное двулистное накрытие $\widehat{P}$ на P, точками ветвления которого являются звездочки атома P. Оказывается, что $\widehat{P}$ можно вложить в 3-атом так, что каждый неособый слой расслоения Зейферта будет проходить через него в точности два раза, в то время как особые слои — ровно один раз. Обозначим через $\widehat{\mu}_i$ пересечение $\widehat{P}$ и соответствующего граничного тора Лиувилля. Ориентируем эти циклы так, что бы пары (λ_i, μ_i) задавали бы положительную ориентацию на граничных торах. Отметим, что такие пары не являются базисами, поэтому циклы μ_i необходимо "подправить".

Возможны два случая. В первом случае $\widehat{\mu}_i$ состоит из двух гомологичных циклов на торе, а λ_i пересекает каждый из них ровно один раз. Тогда оставим от $\widehat{\mu}_i$ ровно одну компоненту связности, которую и обозначим через μ_i. Во втором случае $\widehat{\mu}_i$ состоит из одной компоненты связности и пересекает λ_i в двух точках. Тогда положим $\mu_i = \dfrac{1}{2}(\lambda_i + \widehat{\mu}_i)$. В обоих случаях пары (λ_i, μ_i) будут базисами на торах Лиувилля. Однако для согласования различных определений допустимых циклов на 3-атомах со звездочками (более подробно см. [18]), необходимо к одному из циклов μ_i прибавить несколько раз цикл λ (все λ_i гомологичны друг другу). При этом количество таких циклов определяется из уравнения

$$\sum_i \mu_i = \frac{\partial \widehat{P} + s\lambda}{2},$$

где s — количество особых слоев 3-атома. Построенные пары циклов (λ_i, μ_i) на граничных торах Лиувилля будем называть *допустимыми базисами* на 3-атомах со звездочками.

Итак, пусть e_i — ребро грубой молекулы W. После разреза этого ребра на торе Лиувилля, отвечающем точке разреза, возникают два допустимых базиса с соседних атомов. Пусть $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ — матрица склейки этих базисов.

Определение 1.1.15. *Числовой рациональной меткой* r_i на ребре e_i молекулы W называется число

$$r_i = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{\beta_i} (\mathrm{mod}\ 1) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{символ } \infty, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Определение 1.1.16. *Числовой целочисленной меткой* ε_i на ребре e_i молекулы W называется число

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \operatorname{sign} \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \operatorname{sign} \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Ребро молекулы назовем *бесконечным*, если метка $r_i = \infty$. Остальные ребра будем называть *конечными*. Разрежем молекулу по всем конечным ребрам. В результате молекула распадется на некоторое число связных кусков.

Определение 1.1.17. *Семьей* называется кусок молекулы, который не содержит атомов A после разреза молекулы по всем конечным ребрам.

В каждой семье все ребра можно разделить на три класса: *входящие*, *выходящие* и *внутренние*.

Определение 1.1.18. Сопоставим каждому из этих ребер e_i целое число Θ_i по следующему правилу:

$$\Theta_i = \begin{cases} \left[\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}\right], & \text{если } e_i \text{ – выходящее ребро}, \\ \left[-\dfrac{\delta_i}{\beta_i}\right], & \text{если } e_i \text{ – входящее ребро}, \\ \left[-\dfrac{\gamma_i}{\alpha_i}\right], & \text{если } e_i \text{ – внутреннее ребро}. \end{cases}$$

Тогда для каждой семьи определяется *целочисленная метка* n по следующему правилу:

$$n = \sum \Theta_i,$$

где сумма берется по всем ребрам данной семьи.

Определение 1.1.19. Грубая молекула, оснащенная метками r, ε, n, называется *меченой молекулой* или *инвариантом Фоменко-Цишанга.*

Теорема 1.1.5 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, [17]). *Две интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 |\ H_1(x) = h_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 | H_2(x) = h_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

1.1.4 Невырожденные особенности многомерных ИГС и их топология

Рассмотрим ИГС v на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) с набором функционально независимых попарно коммутирующих первых интегралов $f_1, \ldots, f_n$. В таком случае определено *отображение момента* $\mathcal{F}$, сопоставляющие каждой точке x многообразия M^{2n} вектор $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$.

Определение 1.1.20. *Бифуркационной диаграммой* называется множество особых значений отображения $\mathcal{F}$.

Множество K всех критических точек отображения $\mathcal{F}$ разбивается на n подмножеств $K_0, \ldots, K_{n-1}$, где K_i состоит их точек многообразия M^{2n}, в которых ранг дифференциала отображения $\mathcal{F}$ равен i. Как правило, в известных ИГС почти все особенности являются невырожденными. Напомним определение невырожденной особой точки.

Пусть $x \in K_i$, тогда существует невырожденная линейная замена системы функций $f_1, \ldots, f_n$ на $g_1, \ldots, g_n$, такая, что $dg_1, \ldots, dg_{n-i}$ равны нулю в x, а $dg_{n-i+1}, \ldots, dg_n$ линейно независимы в этой точке. В таком случае линеаризации $A_1 = \omega^{-1} d^2 g_1, \ldots, A_{n-i} = \omega^{-1} d^2 g_{n-i}$ векторных полей $\operatorname{sgrad} g_1, \ldots, \operatorname{sgrad} g_{n-i}$ в точке x являются коммутирующими операторами из $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$.

Обозначим через L подпространство $T_x M^{2n}$, порожденное косыми градиентами функций $g_{n-i+1}, \ldots, g_n$, а через L' — косоортогональное дополнение к L. Заметим, что $L \subset L'$, поскольку L — изотропно. Оказывается, операторы $A_1, \ldots, A_{n-i}$ корректно определены на фактор-пространстве L'/L. Более того, на пространстве L'/L существует естественная симплектическая структура $\tilde{\omega}$, а операторы $A_1, \ldots, A_{n-i}$, действующие на этом пространстве, являются элементами алгебры $\mathfrak{sp}(2(n-i), \mathbb{R})$ (более подробно см. [18]). Обозначим через $K(x, \mathcal{F})$ коммутативную подалгебру в $\mathfrak{sp}(2(n-i), \mathbb{R})$, порожденную операторами $A_1, \ldots, A_{n-i}$.

Определение 1.1.21. Критическая точка $x \in K_i$ называется *невырожденной*, если подалгебра $K(x, \mathcal{F})$ является картановской в $\mathfrak{sp}(2(n-i), \mathbb{R})$.

Последнее определение технически сложно в практическом применении, поэтому сформулируем его более простой аналог.

Рассмотрим линейное пространство, порожденное функциями $f_1, \ldots, f_n$, как коммутативную алгебру Ли. Рассмотрим в ней подалгебру K_x, состоящую из функций f, таких, что $df|_x = 0$. Пусть L — снова подпространство T_xM^n, порожденное векторами $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$, а L' — его косоортогональное дополнение.

Определение 1.1.22. Критическая точка $x \in K_i$ называется *невырожденной*, если выполнены следующие условия.

1. Для любой функции $f \in K_x$, отличной от нуля, квадратичная форма $d^2f|_x$ не равна тождественно нулю на пространстве L'.

2. Существует функция $f \in K_x$, такая, что многочлен

$$P(\mu) = \det(d^2f|_x - \mu\,\omega|_x)|_{L'}$$

имеет $2(n-i)$ различных ненулевых корней.

Для того чтобы изучить устройство топологии слоения Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки, необходимо знать, как устроена картановская подалгебра $K(x, \mathcal{F})$. Отметим, что в вещественной алгебре ли $\mathfrak{sp}(2(n-i), \mathbb{R})$ не все картановские подалгебры сопряжены (в отличии от комплексного случая). Полная классификация картановских подалгебр в $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ была получена Вильямсоном в работе [64]. Чтобы сформулировать его теорему, рассмотрим $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ как пространство однородных полиномов степени 2 в симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2m}$ с канонической формой ω. Коммутатор в этой алгебре — скобка Пуассона квадратичных многочленов. Отметим, что изоморфизм между классическим представлением алгебры $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ и алгеброй квадратичных полиномов со скобкой Пуассона устанавливает формула: $f \to A_f$ (функции f сопоставляем линеаризацию векторного поля sgrad в точке x).

Теорема 1.1.6 (J. Williamson, [64])**.** *Пусть $K \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ — подалгебра Картана. Тогда существует симплектическая система координат $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ в $\mathbb{R}^{2m}$ и базис $e_1, \ldots, e_m$ в K такие, что каждый из квадратичных полиномов e_i имеет один из следующих видов:*

1. $e_i = x_i^2 + y_i^2$ *(эллиптический тип),*

2. $e_i = x_i y_i$ *(гиперболический тип),*

3. $e_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$, $e_{i+1} = x_i y_i + x_{i+1} y_{y+1}$ *(тип фокус-фокус).*

Эта теорема не только классифицирует картановские подалгебры, но также говорит об устройстве слоения Лиувилля вблизи невырожденной особой точки. Более того, существует аналог леммы Морса на основе полученной классификации невырожденных особенностей.

Полученное описание слоения Лиувилля вблизи особой точки является локальным. Тем не менее, оказывается, что в случае компактного многообразия M^{2n} существует и полулокальное описание слоения Лиувилля (т.е. описание слоения Лиувилля в окрестности слоя, с критическими точками). Эти результаты принадлежат Н. Т. Зунгу (см. [65, 66]). Для краткости мы сформулируем их для седловых особенностей ранга нуль. Напомним, что особая точка x называется *седловой*, если все функции базиса $K(x, \mathcal{F})$ в смысле теоремы 1.1.6 имеют гиперболический тип.

Определение 1.1.23. Рассмотрим особый слой L слоения Лиувилля с невырожденными седловыми особыми точками ранга ноль и его малую окрестность $U(L)$ в M^{2n}. Эта окрестность с соответствующим слоением Лиувилля на ней (рассматриваемым с точностью до послойного диффеоморфизма) называется $2n$-мерной *невырожденной седловой особенностью ранга нуль*.

Определение 1.1.24. Будем говорить, что для невырожденной седловой $2n$-мерной особенности $U(L)$ ранга ноль выполняется *условие нерасщепляемости по Зунгу*, если в некоторой окрестности критического значения $y_0 = \mathcal{F}(L)$ существует диффеоморфизм, приводящий бифуркационную диаграмму к набору из n гиперплоскостей общего положения, проходящих через точку y_0.

Теперь рассмотрим набор седловых 2-атомов $V_1, \ldots, V_n$ со своими симплектическими структурами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и функциями Морса $f_1, \ldots, f_n$ соответственно. Пусть на каждом атоме V_i действует одна и та же конечная группа G, причем каждое из этих действий φ_i сохраняет как симплектическую структуру ω_i, так и функцию f_i. Тогда на прямом произведении $V_1 \times \cdots \times V_n$ определена симплектическая структура $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_n$, а также структура лиувиллева слоения, задаваемая функциями $f_1, \ldots, f_n$ (они, очевидно, коммутируют относительно формы ω). Пусть также действие группы G на $V_1 \times \cdots \times V_n$, заданное формулой $\varphi(g)(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_1(g)x_1, \ldots, \varphi_n(g)x_n)$, свободно. Тогда фактор-многообразие $(V_1 \times \cdots \times V_n)/G$ является $2n$-мерной окрестностью связного особого слоя L с невырожденными седловыми особыми точками ранга нуль. Такую особенность будем называть *особенностью типа почти прямого произведения* (или *просто почти прямым произведением*). При этом, будем говорить, что почти прямое произведение $(V_1 \times \cdots \times V_n)/G$ *несократимо*, если каждый элемент группы G (кроме единицы) действует нетривиально не менее чем на двух сомножителях прямого произведения $V_1 \times \cdots \times V_n$.

Теорема 1.1.7 (Н. Т. Зунг, [66])**.** *Любая нерасщепляемая по Зунгу невырожденная седловая особенность $U(L)$ ранга нуль является особенностью типа почти прямого произведения. Причем если почти прямое произведение $(V_1 \times \cdots \times V_n)/G$ несократимо, то представление особенности $U(L)$ в виде почти прямого произведения единственно.*

1.2 Софокусные квадрики и их свойства

Определение 1.2.1. *Семейством софокусных квадрик в* $\mathbb{R}^3$ называется множество квадрик, заданных уравнением

$$(b-\lambda)(c-\lambda)x^2 + (a-\lambda)(c-\lambda)y^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)z^2 = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda), \qquad (1.1)$$

где $a > b > c$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр. Если параметр квадрики этого семейства равен a, b или c, то она называется *вырожденной*, в противном случае квадрика называется *невырожденной*.

Замечание 1.2.1. Отметим, что вырожденные квадрики — это в точности координатные плоскости. Если же $\lambda \in (-\infty, c)$, то соответствующая квадрика является эллипсоидом, если $\lambda \in (c, b)$, то — однополостным гиперболоидом, если $\lambda \in (b, a)$, то — двуполостным гиперболоидом. На рисунке 1.3 изображены три софокусные квадрики в $\mathbb{R}^3$ различных типов.

Рис. 1.3: Три софокусные квадрики: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды.

Замечание 1.2.2. В евклидовом n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n(x_1, \ldots, x_n)$ семейство софокусных квадрик определяется формулой

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n-\lambda} = 1,$$

где $a_1 > \cdots > a_n$ — постоянные числа, а λ — вещественный параметр. Приводимые ниже факты о софокусных квадриках в $\mathbb{R}^3$ легко обобщаются на случай произвольной размерности.

Замечание 1.2.3. Софокусные квадрики и их свойства изучались К. Г. Якоби в [67], а также М. Шалем в [68]. Они являются основой доказательства знаменитой теоремы Якоби-Шаля об интегрируемости геодезического потока на эллипсоидах в $\mathbb{R}^n$. Мы еще не раз обратимся к этой теореме.

Семейство софокусных квадрик обладает многими замечательными свойствами. Приведем наиболее важные для нас.

Предложение 1.2.1. *Касательные плоскости в точках пересечения двух софокусных квадрик ортогональны.*

Доказательство. Покажем для невырожденных квадрик параметров λ_1 и λ_2. В таком случае уравнения 1.1 этих квадрик можно поделить на соответствующие выражения $(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)$. Координаты точек пересечения квадрик будут удовлетворять следующей системе.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a-\lambda_1} + \dfrac{y^2}{b-\lambda_1} + \dfrac{z^2}{c-\lambda_1} = 1 \\ \dfrac{x^2}{a-\lambda_2} + \dfrac{y^2}{b-\lambda_2} + \dfrac{z^2}{c-\lambda_2} = 1 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, а затем, поделим получившееся выражение на $\lambda_1 - \lambda_2$:

$$\frac{x^2}{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)} + \frac{y^2}{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)} + \frac{z^2}{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)} = 0.$$

Поскольку левая часть последнего выражения — с точностью до константы скалярное произведение градиентов функций, задающих квадрики, это уравнение можно переформулировать следующим образом: векторы нормалей в точках пересечения двух софокусных квадрик ортогональны. А это равносильно доказываемому утверждению. Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.2.2. *Через каждую точку $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, такую, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, проходит в точности три невырожденные софокусные квадрики: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды.*

Доказательство. Для точки P, все декартовы координаты которой отличны от нуля, рассмотрим функцию $f_P(\lambda) = \dfrac{x^2}{a-\lambda} + \dfrac{y^2}{b-\lambda} + \dfrac{z^2}{c-\lambda}$. Заметим, что $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} f(\lambda) = 0$ и для $k = a, b, c$ имеем $\lim\limits_{\lambda\to k-0} f(\lambda) = +\infty$, $\lim\limits_{\lambda\to k+0} f(\lambda) = -\infty$. Отсюда, а также из теоремы Вейерштрасса о промежуточном значении непрерывной функции заключаем, что на интервалах $(-\infty, c)$, (c, b), (b, a) обязательно должны найтись корни уравнения $f_P(\lambda) = 1$ (см. рис. 1.4).

Таким образом, через точку P обязательно проходит три софокусные квадрики: эллипсоид и два гиперболоида. Чтобы доказать, что корней не более трех, достаточно показать, что функция $f_P(\lambda)$ является возрастающей на интервалах $(-\infty, c)$, (c, b), (b, a). В этом можно легко убедиться, вычислив ее производную. Предложение доказано. $\square$

Следствие 1.2.1. *Через каждую точку $\mathbb{R}^3$ проходит три софокусные квадрики с учетом кратности. Если упорядочить по возрастанию параметры этих квадрик и обозначить их через $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$, то $\lambda_1 \in (-\infty, c]$, $\lambda_2 \in [c, b]$, $\lambda_3 \in [b, a]$.*

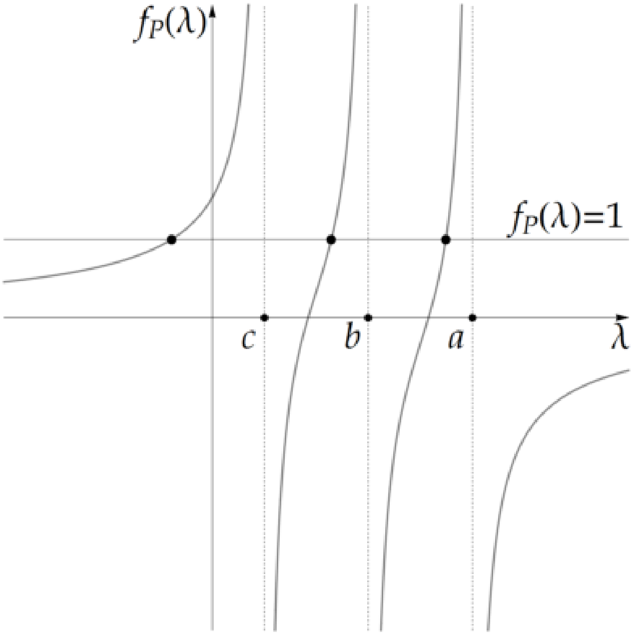


Рис. 1.4: Иллюстрация того, что уравнение $f_P(\lambda) = 1$ имеет в точности три вещественных корня.

Доказательство. Заметим, что параметры софокусных квадрик, проходящих через точку $P = (x, y, z)$, суть корни кубического уравнения 1.1. Согласно предложению 1.2.2 в каждой точке внутри любого координатного октанта это уравнение имеет в точности три вещественных корня. Поскольку коэффициенты уравнения 1.1 гладко зависят от декартовых координат точки P, а плоскости Oxy, Oxz, Oyz являются множествами меры нуль, это уравнение имеет три вещественных корня в произвольной точке $\mathbb{R}^3$. Ограничения на области изменения этих корней также вытекают из предложения 1.2.2. Следствие доказано. □

Пусть $P \in \mathbb{R}^3$, а $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ — параметры софокусных квадрик, проходящих через P.

Определение 1.2.2. Функции $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются *эллиптическими координатами* в $\mathbb{R}^3$.

Предложение 1.2.3. *Связь между эллиптическими и декартовыми координатами описывает следующая система.*

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(a-b)(a-c)} \\ y^2 = \dfrac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{(b-a)(b-c)} \\ z^2 = \dfrac{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)(c-\lambda_3)}{(c-a)(c-b)} \end{cases} \tag{1.2}$$

Доказательство. Проверяется прямыми вычислениями. □

Используя последнее предложение, нетрудно показать, что в каждом координатном октанте эллиптические координаты являются однозначными, гладкими и регулярными.

Для дальнейшего анализа необходимо понять, как устроены те точки, в которых некоторые из эллиптических координат совпадают. Хорошо известно, что на плоскости этим точкам отвечают фокусы семейства софокусных квадрик. В нашем случае возможны два варианта: $\lambda_1 = \lambda_2 = c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = b$. Рассмотрим каждый из них.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = c$. Ясно, что все такие точки должны лежать в плоскости $z = 0$. Для того чтобы описать интересующее нас подмножество плоскости $z = 0$, посмотрим на пределы софокусных квадрик (в смысле Хаусдорфа) при стремлении параметра λ к c. Сначала рассмотрим левый предел, т.е. предел софокусных эллипсоидов при $\lambda \to c - 0$. В этом случае, меньшая полуось эллипсоидов устремится к нулю, в то время как другие две к $\sqrt{a-c}$ и $\sqrt{b-c}$. Таким образом, в пределе получится множество $A_{c-0} = \left\{(x,y,0)\Big|\dfrac{x^2}{a-c} + \dfrac{y^2}{b-c} \leqslant 1\right\}$, т.е. плоская фигура, лежащая внутри эллипса $\mathfrak{F}_1 = \left\{(x,y,0)\Big|\dfrac{x^2}{a-c} + \dfrac{y^2}{b-c} = 1\right\}$ (см. рис. 1.5.1). Вне области A_{c-0} в плоскости $z = 0$ через каждую точку проходит софокусный эллипсоид, а значит, в таких точках $\lambda_1 < c$.

При $\lambda \to c + 0$ мнимая полуось однополостного гиперболоида устремится к нулю, а вещественные к $\sqrt{a-c}$ и $\sqrt{b-c}$. Следовательно, в пределе получим множество $A_{c+0} = \left\{(x,y,0)\Big|\dfrac{x^2}{a-c} + \dfrac{y^2}{b-c} \geqslant 1\right\}$, т.е. плоскую фигуру лежащую вне эллипса $\mathfrak{F}_1$ (см. рис. 1.5.2). Внутри области A_{c-0} в плоскости $z = 0$ через каждую точку проходит софокусный однополостный гиперболоид, а значит, в таких точках $\lambda_2 > c$. Таким образом, уравнение $\lambda_1 = \lambda_2$ определяет эллипс $\mathfrak{F}_1$.

2. $\lambda_2 = \lambda_3 = b$. Аналогичными рассуждениями доказывается, что интересующим нас множеством является гипербола $\mathfrak{F}_2 = \left\{(x,0,z)\Big|\dfrac{x^2}{a-b} - \dfrac{z^2}{b-c} = 1\right\}$ (см. рис. 1.5.3-4).

Определение 1.2.3. Эллипс $\mathfrak{F}_1$ и гипербола $\mathfrak{F}_2$ называются *фокальными кривыми.*

Фокальные кривые сыграют важную роль в настоящей работе. Перечислим некоторые их свойства.

Предложение 1.2.4. *Эллипс $\mathfrak{F}_1$ состоит из омбилических точек двуполостных гиперболоидов данного семейства софокусных квадрик, а гипербола $\mathfrak{F}_2$ — из омбилических точек эллипсоидов того же семейства.*

Доказательство. Известно, что эллипсоид вида $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$, где $\alpha > \beta > \gamma > 0$, имеет ровно 4 омбилические точки, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям: $x^2 = \alpha^2\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \gamma^2}$, $y = 0$, $z^2 = \gamma^2\dfrac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2}$.

В нашем случае $\alpha^2 = a - \lambda$, $\beta^2 = b - \lambda$, $\gamma^2 = c - \lambda$. Подставим эти выражения в уравнения омбилических точек: $x^2 = (a - \lambda)\dfrac{a-b}{a-c}$, $y = 0$, $z^2 = (c - \lambda)\dfrac{b-c}{a-c}$. Разделим первое урав-

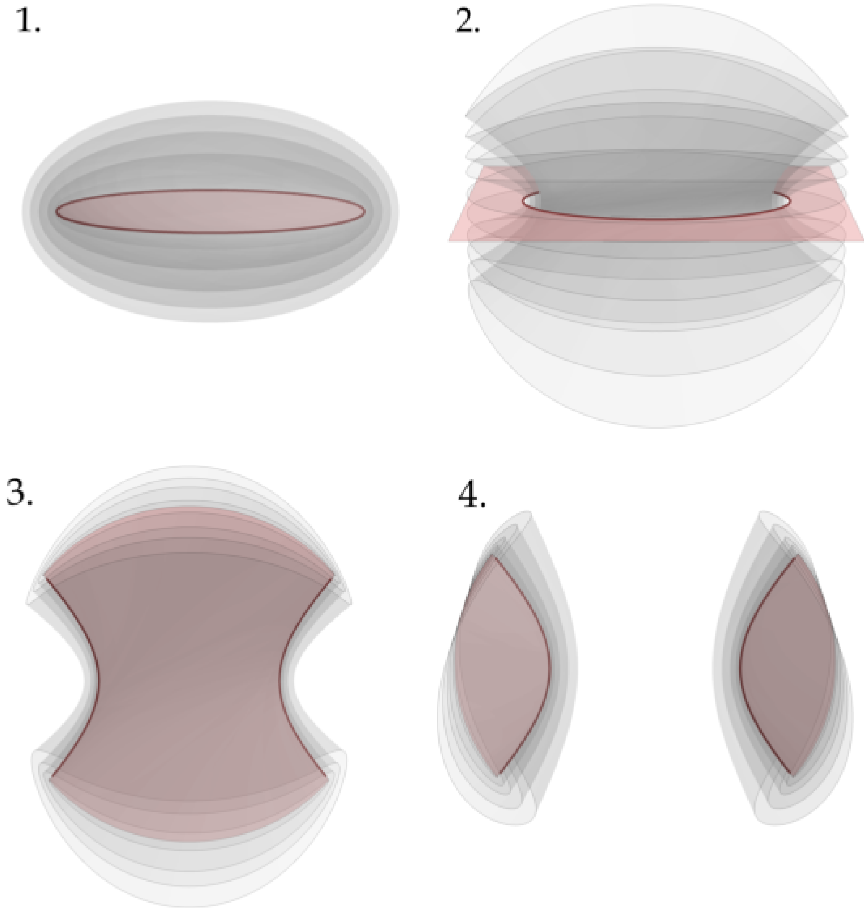


Рис. 1.5: Пределы софокусных квадрик при 1. $\lambda \to c-0$, 2. $\lambda \to c+0$, 3. $\lambda \to b-0$, 4. $\lambda \to b+0$.

нение на $\dfrac{a-c}{a-b}$, а третье поделим на $-\dfrac{a-c}{b-c}$, после чего сложим их:

$$x^2\frac{a-c}{a-b} - z^2\frac{a-c}{b-c} = a-c.$$

Разделив последнее равенство на $a-c$, получим уравнение гиперболы $\mathfrak{F}_2$. Аналогичным образом можно показать, что эллипс $\mathfrak{F}_1$ состоит из омбилических точек двуполостных гиперболоидов этого семейства. Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.2.5. *Эллипс $\mathfrak{F}_1$ проходит через фокусы гиперболы $\mathfrak{F}_2$, а гипербола $\mathfrak{F}_2$ проходит через фокусы эллипса $\mathfrak{F}_1$.*

Доказательство. Известно, что фокальное расстояние эллипса равняется квадратному корню разности квадратов его большей и меньшей полуосей. Следовательно, фокальное расстояние эллипса $\mathfrak{F}_1$ равно $\sqrt{\left(\sqrt{a-c}\right)^2 - \left(\sqrt{b-c}\right)^2} = \sqrt{a-b}$. Значит, фокусы эллипса $\mathfrak{F}_1$ расположены в точках $(\sqrt{a-b}, 0, 0)$ и $(-\sqrt{a-b}, 0, 0)$. Осталось заметить, что гипербола $\mathfrak{F}_2$ проходит через эти точки. Доказательство второй части утверждения проводится аналогично. Предложение доказано. $\square$

Замечание 1.2.4. Отметим, что в плоском случае расположение фокусов на оси Ox однозначно определяло семейство софокусных квадрик. Однако существует ли аналог таких точек у софокусных семейств в $\mathbb{R}^3$? На самом деле, да, существует. Заметим, что кривые $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ (сами по себе) однозначно восстанавливают семейство софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$, поскольку их полуоси содержат информацию о величинах $a-b, a-c$. При этом, согласно предложению 1.2.5 мы можем восстановить эллипс $\mathfrak{F}_1$ и гиперболу $\mathfrak{F}_2$, зная расположение их фокусов (с точностью до поворота вокруг фокальной прямой). Таким образом, по фокусам кривых $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ мы можем восстановить семейство софокусных квадрик (см. рис. 1.6). Стало быть, эти четыре точки можно считать *фокусами* семейства софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$.

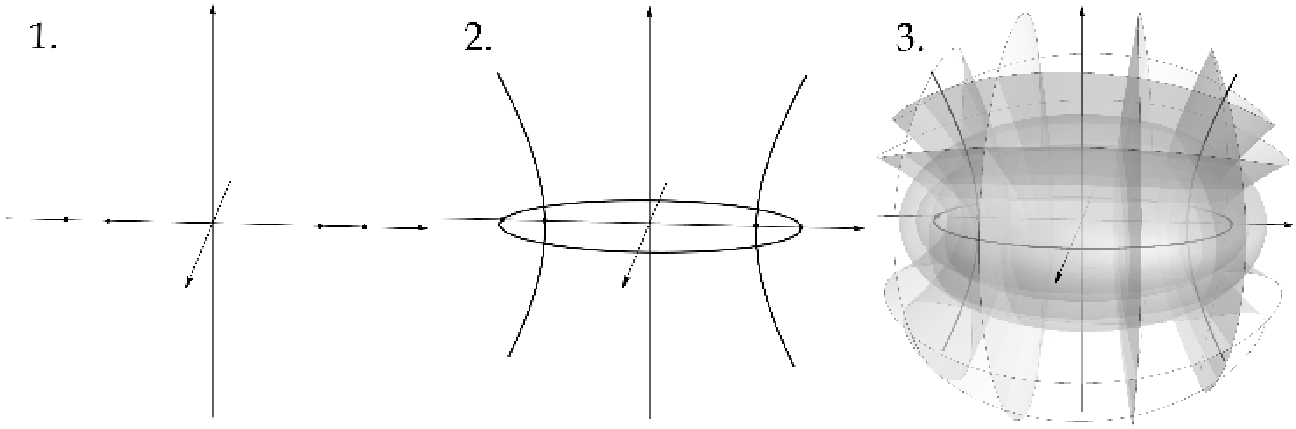


Рис. 1.6: Восстановление семейства софокусных квадрик по двум парам точек, симметрично расположенным на оси Ox. Сначала определяем фокальные кривые (переход от 1 к 2), после чего находим семейство софокусных квадрик (переход от 2 к 3).

1.3 Софокусные биллиарды в $\mathbb{R}^3$. Описание системы

Зафиксируем в $\mathbb{R}^3$ семейство софокусных квадрик. По этому семейству можно определить 2 различных вида биллиардов: софокусные биллиарды на квадриках и трехмерные биллиарды, ограниченные софокусными квадриками. Ввиду схожести этих двух систем, мы разделим страницы данного параграфа на две колонки: в первой будет идти речь о биллиардах на квадриках, а во второй — о трехмерных биллиардах. Прежде чем определить динамику этих систем, опишем их конфигурационные пространства.

Определение 1.3.1. Рассмотрим на невырожденной квадрике E из софокусного семейства связную область с компактным замыканием, ограниченную конечным числом софо-

Определение 1.3.2. *Трехмерным биллиардным столом* $\mathcal{Z}^3$ будем называть замыкание связной ограниченной области в $\mathbb{R}^3$, граница которой состоит из конечного числа гладких кусных с E квадрик и имеющую углы излома на границе, равные $\pi/2$. Замыкание $\mathcal{Z}^2$ этой области будем называть *биллиардным столом на квадрике* E.

граней, лежащих на квадриках софокусного семейства. При этом, мы будем предполагать, что двугранные углы излома на границе $\mathcal{Z}^3$ равны $\pi/2$.

Примеры трехмерных биллиардных столов, а также биллиардных столов на квадриках показаны на рисунке 1.7.

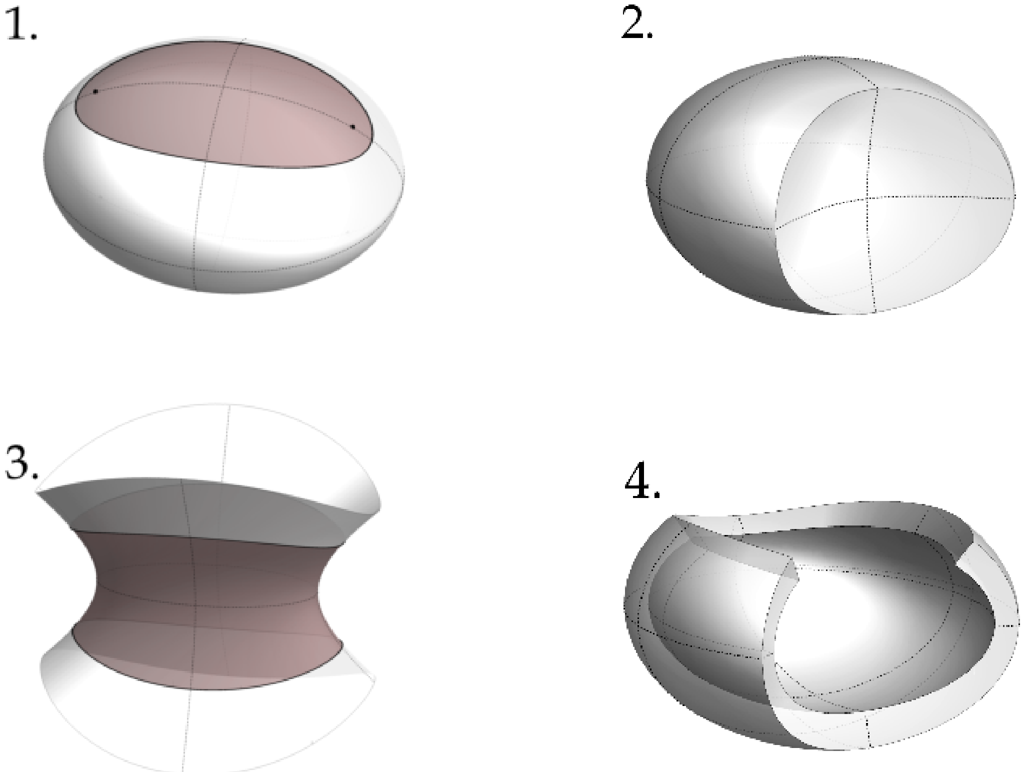


Рис. 1.7: Примеры биллиардных столов: 1 — на эллипсоиде, 3 — на однополостном гиперболоиде (столы выделены темным цветом); 2, 4 — трехмерные биллиардные столы. Пунктирными линиями выделены участки пересечения столов с координатными плоскостями. На рисунке 1 выделенные точки — омбилические.

Теперь зададим динамику материальной точки для каждого вида биллиардных столов и опишем соответствующие фазовые пространства.

Пусть $\mathcal{Z}^2$ — биллиардный стол на невырожденной квадрике из софокусного семейства. Рассмотрим следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри $\mathcal{Z}^2$ вдоль геодезических

Пусть $\mathcal{Z}^3$ — трехмерный биллиардный стол. Рассмотрим следующую динамическую систему: материальная точка единичной массы движется внутри трехмерного биллиардного стола $\mathcal{Z}^3$ по прямым с постоянной по мос постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы стола абсолютно упруго. Такую динамическую систему будем называть *софокусным геодезическим биллиардом.*

дулю скоростью, отражаясь от границы $\mathcal{Z}^3$ абсолютно упруго. Такую динамическую систему мы будем называть *трехмерным софокусным биллиардом.*

Остается определить динамику систем в точках излома границы столов.

В силу того, что углы излома на границе стола $\mathcal{Z}^2$ (если такие есть) равны $\pi/2$, динамику частицы в угловых точках можно доопределить по непрерывности. А именно, при попадании в такой угол материальная точка отразится в противоположном направлении, не теряя своей скорости.

Поскольку все двугранные углы излома на границе стола $\mathcal{Z}^3$ равны $\pi/2$, отражение в таких точках можно доопределить по непрерывности. А именно, при попадании в точку x границы биллиардного стола вектор скорости частицы должен последовательно отразиться от всех стенок $\mathcal{Z}^3$, смыкающихся в x.

Замечание 1.3.1. В силу ортогональности эллиптических координат все отражения от стенок биллиардного стола коммутируют между собой. Поэтому результат отражения вектора v не зависит от последовательности его отражений от касательных плоскостей квадрик, входящих в состав границы стола в точке x. Так же нам важно, что все углы излома на границе столов равны $\pi/2$, а не $3\pi/2$, поскольку это позволяет однозначно определить отражение в точках излома по непрерывности.

Опишем теперь фазовые пространства рассматриваемых систем.

Фазовое пространство софокусного геодезического биллиарда на квадрике E — топологическое пространство $M^4 = \{(x,v)|x \in \mathcal{Z}^2, v \in T_xE\}/\sim$, где отношение эквивалентности $\sim$ на границе стола $\mathcal{Z}^2$ задается так. Пары (x_1,v_1) и (x_2,v_2), где x_1,x_2 лежат на границе $\mathcal{Z}^2$, *эквивалентны* в том и только том случае, когда $x_1 = x_2$, а v_2 может быть получен из v_1 путем нескольких отражений относительно стенок $\mathcal{Z}^2$, смыкающихся в этой точке.

Фазовое пространство трехмерного софокусного биллиарда — это топологическое пространство $M^6 = \{(x,v)|x \in \mathcal{Z}^3, v \in T_x\mathbb{R}^3\}/\sim$, где $\sim$ есть следующее отношение эквивалентности на границе стола $\mathcal{Z}^3$. Пары (x_1,v_1) и (x_2,v_2), где $x_1,x_2 \in \partial\mathcal{Z}^3$, *эквивалентны* в том и только том случае, когда $x_1 = x_2$, а вектор v_2 может быть получен из v_1 путем нескольких последовательных отражений относительно стенок $\mathcal{Z}^3$, смыкающихся в этой точке.

Отметим, что функция $H = \|v\|^2/2$ (кинетическая энергия материальной точки) является непрерывной на фазовых пространствах софокусных биллиардов и сохраняется вдоль траекторий систем, т.е. является *первым интегралом.*

Для более удобной работы исключим из фазовых пространств биллиардов все пары точка-вектор с нулевыми векторами скорости, оставив обозначения самих пространств прежними. В таком случае “обновленные” фазовые пространства будут топологическими многообразиями. Аналогичное утверждение справедливо и для поверхностей постоянной энергии $Q_h = \{x \in M | H(x) = h\}$. Доказательство этих фактов приведено в четвертой главе и не требует интегрируемости систем.

Система биллиарда в общем случае не является гладкой, так как склейка в точках границы, как правило, не позволяет ввести гладкую структуру на фазовом многообразии. Описываемый ниже подход предложен А. Т. Фоменко.

Многообразие M^4 софокусного биллиарда на квадрике (соответственно M^6 трехмерного софокусного биллиарда) является кусочно-гладким. Оно распадается на гладкие куски, объединение которых обозначим через $\widetilde{M}^4$ (соответственно $\widetilde{M}^6$). На $\widetilde{M}$ можно ввести каноническую симплектическую структуру. Симплектические структуры в соседних гладких областях непрерывно согласованы на границе раздела, то есть их пределы “справа” и “слева” совпадают. Будем говорить, что кусочно-гладкая система на M^4 (соответственно на M^6) *интегрируема в кусочно-гладком смысле* (но в дальнейшем будем говорить, для краткости, просто об интегрируемости), если существуют непрерывные на M^4 (на M^6) и гладкие на $\widetilde{M}^4$ (на $\widetilde{M}^6$) функционально независимые функции f и H (соответственно f_1, f_2 и H), которые находятся в инволюции на $\widetilde{M}^4$ (на $\widetilde{M}^6$). Вопросы “сглаживания” фазового многообразия рассматривались В. Ф. Лазуткиным в работе [69] и Е. А. Кудрявцевой в [70] .

Рассмотрим кусочно-гладкое изоэнергетическое многообразие Q^3 биллиарда двух степеней свободы и связную компоненту совместного уровня функций f и H. Пусть потоки $\operatorname{sgrad} f$ и $\operatorname{sgrad} H$ полны. Если удается показать, что связная компактная компонента совместного уровня функций f и H гомеоморфна либо кусочно-гладкому тору, либо особому слою кусочно-гладкого трехмерного атома (для конечного числа значений f), то будем говорить, что выполнена *кусочно-гладкая теорема Лиувилля* (аналогично для Q^5 трехмерного биллиарда и интегралов H, f_1, f_2). При этом, если малые окрестности особых слоев гомеоморфны 3-атомам, то в таком случае мы можем построить грубую молекулу W и определить метки. Отметим, что для биллиардов в компактных областях полнота гамильтоновых потоков очевидна.

Напомним, гамильтониан биллиарда — кинетическая энергия материальной точки, т.е. функция $H = \|v\|^2/2$. В следующем параграфе мы покажем, что софокусные геодезические биллиарды на квадриках, а также трехмерные софокусные биллиарды являются интегрируемыми в кусочно-гладком смысле.

1.4 Интегрируемость софокусных биллиардов в $\mathbb{R}^3$

В настоящем параграфе будет показана интегрируемость софокусных биллиардов на квадриках, а также трехмерных софокусных биллиардов.

Для начала рассмотрим движение материальной точки единичной массы по инерции в $\mathbb{R}^3$. Определим параметры квадрик софокусного семейства 1.1, которых касается прямая-траектория материальной точки. Пусть в некоторый момент времени частица находилась в точке $P = (x, y, z)$ с вектором скорости $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Тогда параметризация ее траектории имеет вид: $P + \tau v$, $\tau \in \mathbb{R}$. Для того чтобы найти точки пересечения этой прямой с произвольной квадрикой параметра λ, необходимо подставить эту параметризацию в уравнение квадрики и решить получившееся квадратное относительно τ уравнение. Следовательно, траектория касается софокусной квадрики параметра λ в том и только том случае, когда дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю. Это условие можно переписать следующим образом.

$$\left(\frac{x\dot{x}}{a-\lambda} + \frac{y\dot{y}}{b-\lambda} + \frac{z\dot{z}}{c-\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\dot{x}^2}{a-\lambda} + \frac{\dot{y}^2}{b-\lambda} + \frac{\dot{z}^2}{c-\lambda}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1\right) \quad (1.3)$$

Корни λ этого уравнения и есть параметры квадрик касания.

Преобразуем уравнение 1.3, домножив его на $(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$ и приведя подобные слагаемые. В результате мы получим квадратное уравнение $H\lambda^2 - F_1\lambda + F_2 = 0$, где H — кинетическая энергия материальной точки, а функции F_1 и F_2 вычисляются по формулам:

$$F_1 = \frac{1}{2}\big((b+c)\dot{x}^2 + (a+c)\dot{y}^2 + (a+b)\dot{z}^2\big) - \frac{1}{2}\big(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2\big),$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\big(bc\,\dot{x}^2 + ac\,\dot{y}^2 + ab\,\dot{z}^2\big) - \frac{1}{2}\big(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2\big).$$

Здесь K_x, K_y, K_z — компоненты вектора кинетического момента K материальной точки. Напомним, что $K = P \times v$. Трехчлен $H\lambda^2 - F_1\lambda + F_2$ назовем *многочленом касания.*

Поскольку функции H, F_1, F_2 являются полиномиальными, можно достаточно быстро вычислить их попарные скобки Пуассона и убедиться, что все они равны нулю. Однако для того чтобы увидеть глубинный смысл этих функций, перейдем к эллиптическим координатам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и сопряженным им импульсам p_1, p_2, p_3. Получим:

$$H = 2\left(\frac{\Delta_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}p_1^2 + \frac{\Delta_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}p_2^2 + \frac{\Delta_3}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2\right),$$
$$F_1 = 2\left(\frac{(\lambda_2+\lambda_3)\Delta_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}p_1^2 + \frac{(\lambda_1+\lambda_3)\Delta_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}p_2^2 + \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\Delta_3}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2\right),$$
$$F_2 = 2\left(\frac{\lambda_2\lambda_3\Delta_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}p_1^2 + \frac{\lambda_1\lambda_3\Delta_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}p_2^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2\Delta_3}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2\right),$$

где $\Delta_i = (a-\lambda_i)(b-\lambda_i)(c-\lambda_i)$.

Рассмотрим на кокасательном расслоении к $\mathbb{R}^3$ три скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_1$, $\{\cdot,\cdot\}_2$, $\{\cdot,\cdot\}_3$, определяемые следующими формулами.

$$\{f,g\}_i = \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial \lambda_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad \forall\, f,g \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^3), \quad i = 1,2,3$$

Будем называть эти скобки Пуассона *частичными.*

Предложение 1.4.1. *Функции H, F_1, F_2 коммутируют относительно всех частичных скобок Пуассона.*

Доказательство. Докажем это утверждение для функций H, F_1 и первой частичной скобки Пуассона. Остальные случаи разбираются аналогично. Обозначим функции $\dfrac{\Delta_i}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)}$ через A_i, тогда

$$\{H,F_1\}_1 = 8\bigg(\frac{\partial A_1}{\partial \lambda_1}p_1^2 + \frac{\partial A_2}{\partial \lambda_1}p_2^2 + \frac{\partial A_3}{\partial \lambda_1}p_3^2\bigg)(\lambda_2+\lambda_3)A_1p_1 -$$
$$-8\bigg((\lambda_2+\lambda_3)\frac{\partial A_1}{\partial \lambda_1}p_1^2 + (\lambda_1+\lambda_3)\frac{\partial A_2}{\partial \lambda_1}p_2^2 + (\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial A_3}{\partial \lambda_1}p_3^2 + A_2p_2^2 + A_3p_3^2\bigg)A_1p_1 =$$
$$= 8A_1p_1\left(\bigg((\lambda_2-\lambda_1)\frac{\partial A_2}{\partial \lambda_1} + A_2\bigg)p_2^2 + \bigg((\lambda_3-\lambda_1)\frac{\partial A_3}{\partial \lambda_1} + A_3\bigg)p_3^2\right).$$

Остается воспользоваться тем, что функции A_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(\lambda_i-\lambda_j)\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_j} + A_i = 0 \qquad \forall i \neq j.$$

Предложение доказано. □

Следствие 1.4.1. *Функции H, F_1, F_2 коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.*

Доказательство. Стандартная скобка Пуассона является суммой всех частичных. Поскольку H, F_1, F_2 коммутируют относительно всех частичных скобок, то они коммутируют относительно стандартной. Следствие доказано. □

Оказывается функции H, F_1, F_2 являются функционально независимыми. Это устанавливает следующее предложение.

Предложение 1.4.2. *Функции H, F_1, F_2 функционально независимы.*

Доказательство. Рассмотрим определитель матрицы Якоби этих функций по переменным импульса (обозначения A_i возьмем из доказательства предыдущего предложения):

$$\frac{D(H,F_1,F_2)}{D(p_1,p_2,p_3)} = 64\, p_1p_2p_3A_1A_2A_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1+\lambda_3 & \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_2\lambda_3 & \lambda_1\lambda_3 & \lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Заметим, что функции p_i, A_i почти всюду не обращаются в нуль (они обнуляются на нескольких гиперповерхностях в $\mathbb{R}^6(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2,p_3)$). Покажем, что аналогичным свойством обладает определитель справа, а именно, он равен нулю в том и только том случае, когда $\lambda_i=\lambda_j$ для некоторых $i\neq j$. Построим по каждому столбцу матрицы справа многочлен с таким же набором коэффициентов: $P_1(z)=z^2+(\lambda_2+\lambda_3)z+\lambda_2\lambda_3=(z+\lambda_2)(z+\lambda_3)$, $P_2(z)=z^2+(\lambda_1+\lambda_3)z+\lambda_1\lambda_3=(z+\lambda_1)(z+\lambda_3)$, $P_3(z)=z^2+(\lambda_1+\lambda_2)z+\lambda_1\lambda_2=(z+\lambda_1)(z+\lambda_2)$. Эти многочлены линейно зависимы в том и только том случае, когда определитель матрицы в формуле 1.4 равен нулю.

Предположим, что все λ_i различны, тогда никакой из P_i не может линейно выражаться через остальные, поскольку $z=-\lambda_i$ является корнем всех многочленов кроме P_i. Если же $\lambda_i=\lambda_j$ для некоторого $i\neq j$, то многочлены P_i и P_j совпадают.

Следовательно, множество, где якобиан 1.4 не равен нулю, является открытым и всюду плотным в $T^*\mathbb{R}^3$, т.е. H,F_1,F_2 функционально независимы. Предложение доказано. □

Докажем еще одно полезное свойство интегралов H,F_1,F_2, с помощью которого мы определим количество корней многочлена касания.

Предложение 1.4.3. *На совместном уровне h,f_1,f_2 первых интегралов H,F_1,F_2 уравнения движения материальной можно переписать в следующем виде.*

$$\dot{\lambda}_i = \pm\frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)}\sqrt{(a-\lambda_i)(b-\lambda_i)(c-\lambda_i)(h\lambda_i^2-f_1\lambda_i+f_2)} \qquad \forall i=1,2,3 \tag{1.5}$$

Доказательство. Заметим, что $H\lambda_i^2-F_1\lambda_i+F_2=2\Delta_ip_i^2$. Из этой формулы выражаем p_i. Аналогично выражаем p_i из уравнения $\dot{\lambda}_i=\partial H/\partial p_i$. Приравняв эти выражения, получим требуемые формулы. Предложение доказано. □

Из этого предложения немедленно вытекает следующий факт.

Следствие 1.4.2. *Многочлен касания всегда имеет 2 вещественных корня с учетом кратности. Иными словами, произвольная прямая в $\mathbb{R}^3$ касается двух софокусных квадрик с учетом кратности.*

Доказательство. Предположим, что многочлен касания не имеет вещественных корней. Тогда согласно формуле 1.5 подкоренное выражение обязано быть отрицательным на одном из интервалов: (c,b), (b,a). Однако это, вообще говоря, невозможно, поскольку движение вдоль одной из эллиптических координат не было бы определено. Предложение доказано. □

Это следствие носит имя замечательного французского математика М. Шаля. Доказательство Шаля можно найти в работе [68].

Следствие 1.4.3. *Произвольная прямая в* $\mathbb{R}^3$

- *не может касаться двух софокусных эллипсоидов;*
- *не может касаться двух софокусных двуполостных гиперболоидов;*
- *может касаться двух софокусных однополостных гиперболоидов.*

Доказательство. Предположим, что некоторая прямая в $\mathbb{R}^3$ касается двух софокусных эллипсоидов. Тогда многочлен, стоящий под корнем в формуле 1.5, не обращается в нуль на интервалах (c, b) и (b, a). Однако знаки этого многочлена на промежутках (c, b) и (b, a) разные. Это означает, что движение частицы по одной их эллиптических координат не определено. Противоречие.

Аналогичные рассуждения применимы для оставшихся типов невырожденных квадрик. Следствие доказано. □

Из доказанных выше предложений следует интегрируемость биллиардов, обсуждаемых в предыдущем параграфе.

Теорема 1.4.1.

1. *Трехмерные биллиарды, ограниченные софокусными квадриками, являются интегрируемыми в кусочно-гладком смысле. Более того, все прямолинейные участки (или их продолжения) произвольной траектории-ломаной материальной точки трехмерного софокусного биллиарда касаются двух софокусных квадрик (с учетом кратности), общих для всех звеньев траектории.*

2. *Софокусные биллиарды на квадриках являются интегрируемыми в кусочно-гладком смысле. Более того, касательные прямые, проведенные к траектории софокусного биллиарда на некоторой квадрике (во всех точках гладкости траектории), касаются помимо этой квадрики еще одной софокусной с данной. Эта квадрика является общей для всех точек гладкости траектории.*

Замечание 1.4.1. Теорему 1.4.1 можно вывести из классической теоремы Якоби-Шаля об интегрируемости геодезического потока на эллипсоидах, дополнительно уточнив, что интегралы этой задачи инвариантны относительно отражений от квадрик, софокусных с эллипсоидом. Тем не менее, мы приводим доказательство теоремы 1.4.1, поскольку факты, используемые в ней, будут крайне полезны в дальнейшем изложении.

Доказательство. Начнем с первого пункта, поскольку он по сути нами уже доказан. Заметим, что функции H, F_1, F_2 зависят только от квадратов импульсов p_1, p_2 и p_3, а следовательно, они сохраняются при отражении прямолинейной траектории материальной точки относительно грани софокусной квадрики. Получается, что согласно следствию 1.4.1 и предложению 1.4.2 (а также ввиду очевидной полноты потока системы) произвольный трехмерный софокусный биллиард является интегрируемым в кусочно-гладком смысле.

Параметры софокусных квадрик, которых касается звено траектории-ломаной (такая квадрика называется *каустикой*), суть корни уравнения с коэффициентами H, F_1, F_2. При этом, согласно следствию 1.4.2, многочлен касания всегда имеет два вещественных корня с учетом кратности. Следовательно, параметров квадрик-каустик в точности два, и они являются первыми интегралами. Таким образом, первое утверждение теоремы полностью доказано.

Чтобы доказать второе утверждение, внимательно присмотримся к предложению 1.4.1. Заметим, что если мы фиксируем некоторую квадрику, например, эллипсоид, то в качестве локальных координат на ней выступают эллиптические координаты λ_2 и λ_3. Каноническая скобка Пуассона на эллипсоиде есть сумма второй и третьей частичных скобок. Однако функции H, F_1, F_2 коммутируют относительно всех частичных скобок, следовательно, они являются интегралами геодезического потока на нем. Остается заметить несколько фактов. Во-первых, H и F_1 являются функционально независмыми. Доказательство этого свойства почти полностью совпадает с доказательством предложения 1.4.2. Во-вторых, функции H, F_1, F_2 не меняются при отражении от квадрики, а следовательно, все софокусные геодезические биллиарды интегрируемы. В-третьих, утверждение о касании по-прежнему остается справедливым. Действительно, существуют в точности две софокусные квадрики-каустики, однако одна их них — именно та, на которой рассматривается биллиард. Таким образом, теорема доказана. □

Остается ответить еще на один важный вопрос. В каком смысле некоторая прямая может касаться вырожденной квадрики? Ответ на этот вопрос дает следующее предложение.

Предложение 1.4.4.

1. *Касание прямой l и квадрики параметра $\lambda = c$ равносильно тому, что прямая l пересекает фокальный эллипс $\mathfrak{F}_1$.*

2. *Касание прямой l и квадрики параметра $\lambda = b$ равносильно тому, что прямая l пересекает фокальную гиперболу $\mathfrak{F}_2$.*

3. *Касание прямой l и квадрики параметра $\lambda = a$ равносильно тому, что прямая l лежит в плоскости $x = 0$.*

Доказательство. Мы ограничимся доказательством первого пункта. Остальные разбираются по аналогии. Прямая l, заданная в параметрическом виде $(x+\tau\dot{x}, y+\tau\dot{y}, z+\tau\dot{z})$ проходит через фокальный эллипс $\mathfrak{F}_1$ в том и только том случае, когда система

$$\begin{cases} z+\tau\dot{z}=0, \\ \dfrac{(x+\tau\dot{x})^2}{a-c}+\dfrac{(y+\tau\dot{y})^2}{b-c}=1, \end{cases}$$

имеет решение (относительно τ). Исключая τ из нее получим уравнение (условие совместности системы)

$$(b-c)(x\dot{z}-z\dot{x})^2+(a-c)(y\dot{z}-z\dot{y})^2=(a-c)(b-c)\dot{y}^2.$$

А это уравнение как раз равносильно тому, что $\lambda=c$ является корнем многочлена касания. Чтобы в этом убедиться, необходимо написать многочлен касания в декартовых координатах, а затем подставить в него $\lambda=c$. $\square$

Глава 2

Софокусные биллиарды на квадриках

В настоящей главе мы классифицируем все софокусные геодезические биллиарды относительно лиувиллевой эквивалентности. Для этого, следуя В. В. Ведюшкиной (см. работы [7], [71]), на множестве софокусных биллиардных столов на заданной квадрике (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды) введем отношение комбинаторной эквивалентности, согласованное с отношением лиувиллевой эквивалентности соответствующих биллиардов, после чего докажем теорему классификации. Затем мы последовательно вычислим инварианты Фоменко и Фоменко-Цишанга для каждого класса эквивалентности столов и тем самым получим полную лиувиллеву классификацию софокусных геодезических биллиардов.

Через Λ будем обозначать дополнительный первый интеграл софокусного биллиарда (на квадрике) — параметр софокусной квадрики, которой касаются все касательные прямые, проведенные в точках гладкости траектории (см. теорему 1.4.1).

2.1 Комбинаторная эквивалентность столов. Теоремы классификации

Пусть E — невырожденная квадрика из софокусного семейства 1.2.1. Введем на множестве биллиардных столов на E следующее отношение эквивалентности.

Определение 2.1.1. Будем говорить, что софокусные биллиардные столы $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ на квадрике E *комбинаторно эквивалентны*, если и только если $\mathcal{Z}_2$ можно получить из $\mathcal{Z}_1$ применением нескольких преобразований следующего вида:

- последовательным изменением сегментов границы путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик, так, чтобы параметр λ изменяемого сегмента границы не принимал значения b, если E — эллипсоид, значения c, если E — двуполостный гиперболоид, и значений b, c, если E — однополостный гиперболоид;

- симметрией относительно координатных плоскостей.

Замечание 2.1.1. Такое отношение эквивалентности выбрано не случайно. Согласно следствию 1.4.3 касательная прямая к эллипсоиду не может касаться другого софокусного эллипсоида. Следовательно, тип каустики к траекториям системы может измениться лишь при $\Lambda = b$. Аналогично в случае двуполостного гиперболоида тип каустики меняется при $\Lambda = c$. Тем временем, касательная прямая к однополостному гиперболоиду может касаться софокусной квадрики любого вида, следовательно, тип каустики может поменяться как при $\Lambda = b$, так и при $\Lambda = c$.

Поскольку семейство софокусных квадрик содержит квадрики трех различных типов (эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды), нам необходимо классифицировать биллиардные столы для каждого вида квадрик.

Теорема 2.1.1 (Классификация биллиардных областей на квадриках)**.** *Пусть E — невырожденная квадрика из софокусного семейства, тогда (с точностью до комбинаторной эквивалентности):*

1. *Если E — эллипсоид, то на нем существует ровно* 21 *тип неэквивалентных биллиардных столов (см. таблицу пункта 2.2.3);*
2. *Если E — однополостный гиперболоид, то на нем существует ровно* 21 *тип неэквивалентных биллиардных столов (см. таблицу пункта 2.3.3);*
3. *Если E — двуполостный гиперболоид, то на нем существует ровно* 13 *типов неэквивалентных биллиардных столов (см. таблицу пункта 2.3.4).*

Докажем эту теорему цепочкой нескольких предложений.

Предложение 2.1.1. *На эллипсоиде существует в точности* 21 *тип комбинаторно неэквивалентных биллиардных столов. Все они перечислены в таблице пункта 2.2.3.*

Доказательство. Рассмотрим эллипсоид E из софокусного семейства и эллиптическую систему координат на нем (см. рис. 2.1.1).

Занумеруем омбилические точки эллипсоида E, как показано на рисунках 2.1.1-2, а затем разрежем E плоскостью $y = 0$. В результате чего получим две одинаковые фигуры, каждая из которых гомеоморфна единичному квадрату в декартовой плоскости. Ввиду ортогональности эллиптических координат этот гомеоморфизм можно выбрать так, что вершинам квадратов будут соответствовать омбилические точки, границе — эллипс $\{y = 0\} \cap E$, а линиям параллельным сторонам квадратов — линии эллиптических координат на эллипсоиде. Обозначим эти квадраты через K_1 и K_2.

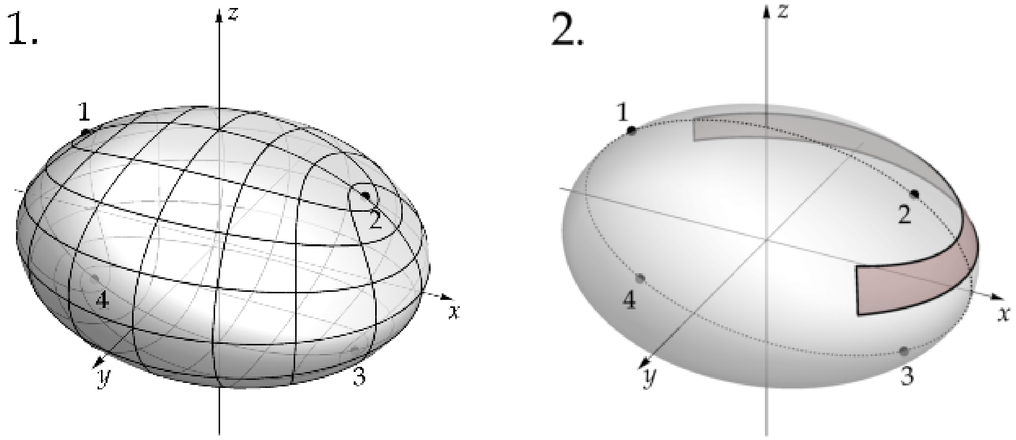


Рис. 2.1: 1. Эллиптические координаты на эллипсоиде; 2. Пример софокусного биллиардного стола на эллипсоиде.

Замостим декартову плоскость единичными квадратами. Зафиксируем некоторый квадрат K замощения и положим $K = K_1$. Пронумеруем вершины K как у K_1. Все квадраты, имеющие с K общую сторону, объявим за K_2 и пронумеруем их оставшиеся вершины как у K_2. Далее поступаем аналогичным образом. В итоге получим плоскость Π, замощенную квадратами K_1 и K_2 в шахматном порядке (см. рис. 2.2.1), а также соответствующее отображение замощения $f : \Pi \to E$. Далее вершины квадратов K_i мы будем называть *вершинами замощения.*

Отметим, что f — не что иное, как разветвленное накрытие плоскости на сферу, которое можно реализовать с помощью знаменитой функции Вейерштрасса.

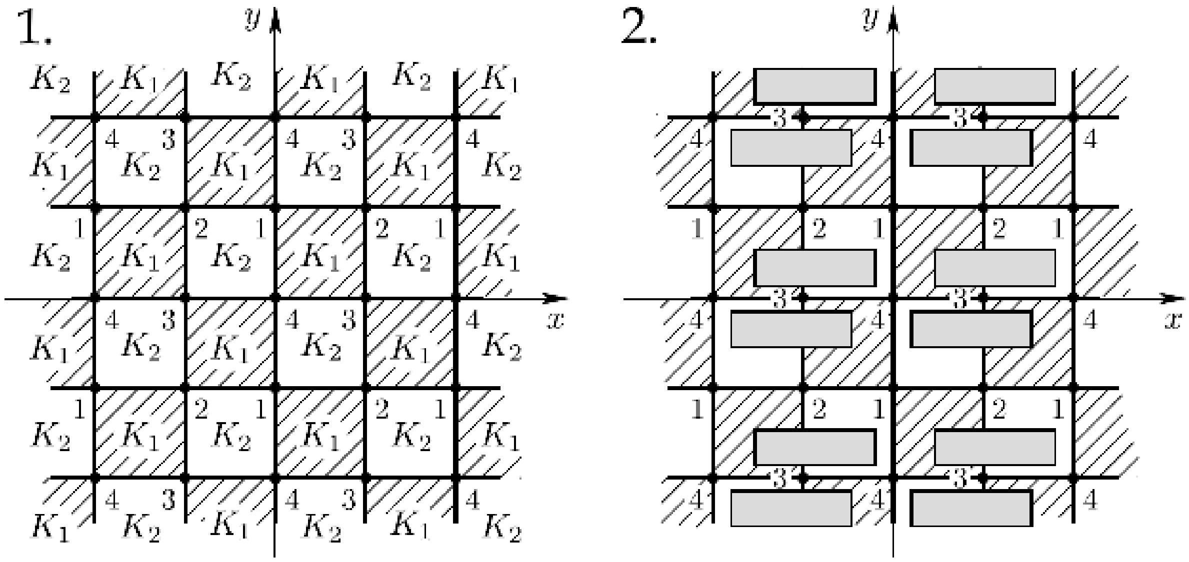


Рис. 2.2: 1) Плоскость замощенная квадратами K_1 и K_2; 2) Прообраз биллиардного стола, изображенного на рисунке 2.1.2 при отображении f.

Легко заметить, что прообраз биллиардного стола при этом отображении — либо вся плоскость П, либо счетный набор полос, либо счетный набор прямоугольников (быть может сцепленных в некоторых вершинах). Это следует из того, что углы излома границы биллиардного стола равны $\pi/2$. Выясним теперь, как эквивалентные преобразования столов действуют в плоскости П.

• Непрерывная деформация стенок стола $\mathcal{Z} \subset E$ в классе софокусных квадрик соответствует прямолинейному растяжению/сжатию сторон фигур $f^{-1}(\mathcal{Z})$ на плоскости П. Напомним, что при деформации стенок $\mathcal{Z}$ запрещено заходить на слой $\lambda = b$. Поэтому при соответствующей деформации в П множества $f^{-1}(\mathcal{Z})$ не могут заходить на границы квадратов K_i, поскольку границы K_i являются прообразами слоя $\lambda = b$ при отображении f.

• Симметрия эллипсоида E относительно плоскости $z = 0$ соответствует одновременной симметрии всех квадратов замощения плоскости П, отображающей вершины 1 в вершины 4, а вершины 2 — в вершины 3, и наоборот.

• Симметрия эллипсоида E относительно плоскости $x = 0$ соответствует одновременной симметрии всех квадратов замощения плоскости П, отображающей вершины 1 в вершины 2, а вершины 3 — в вершины 4, и наоборот.

• Симметрия эллипсоида E относительно плоскости $y = 0$ соответствует отражению плоскости П относительно оси x (или оси y, так как результат не изменится), т.е. квадраты K_1 и K_2 меняются местами.

Приступим к классификации. Проведем ее в терминах прообразов биллиардных столов на плоскости П относительно преобразований выше.

1. Пусть сначала прообраз стола $\mathcal{Z}$ при отображении f равен всей плоскости. Это означает, что стол — весь эллипсоид. Элементарные преобразования не меняют его. Значит, такой стол больше ничему не эквивалентен (стол 1 из таблицы 2.2.3).

2. Если $f^{-1}(\mathcal{Z})$ состоит из счетного числа полос, то существует два варианта их расположения: горизонтальное и вертикальное. Отметим, что преобразования выше не могут перевести горизонтальные полосы в вертикальные. Следовательно, столы отвечающие разным расположениям полос неэквивалентны.

Рассмотрим горизонтальные полосы. В этом случае возможны только два неэквивалентных подслучая (относительно преобразований выше): полоса не пересекается с горизонтальными границами квадратов K_i; полоса пересекает горизонтальные участки K_i. Каждый из этих подслучаев определяет ровно один класс эквивалентности столов. Абсолютно аналогичные рассуждения справедливы и для вертикальных полос. Следовательно, горизонтальные и вертикальные полосы отвечают четырем классам эквивалентности столов (столы $2 - 5$).

3. Остается разобрать случай, когда прообраз стола $\mathcal{Z}$ при отображении f состоит из счетного числа прямоугольников (быть может сцепленных в некоторых вершинах). Выберем один из прямоугольников и обозначим его через Z. Рассмотрим всевозможные неэквивалентные расположения Z на замощенной плоскости П.

Заметим, что плоскость П остается инвариантной относительно преобразований центральной симметрии в вершинах квадратов K_i. Поэтому если некоторая вершина замощения попала в Z, то она либо лежит строго внутри Z, либо совпадает с одной из его вершин. При этом, строго внутри Z может лежать только одна вершина замощения. Такая вершина будет единственной попавшей в Z (ввиду инвариантности замощения относительно центральной симметрии в вершинах K_i). Отметим также, что длины сторон Z не могут превышать 2, так как решетка замощения периодична по двум направлениям и оба периода равны двум.

Далее мы будем вести классификацию столов по количеству сторон Z, лежавших на ребрах квадратов K_i. Будем называть стороны K_i *ребрами замощения*.

Если все стороны Z лежат на ребрах замощения, то Z ввиду рассуждений выше представляет собой один из квадратов: K_1 или K_2. Этот случай соответствует в точности одному классу комбинаторной эквивалентности биллиардных столов (стол 6).

Если три стороны Z лежат на границах K_i, то возможны только два варианта: Z лежит в некотором квадрате замощения и только горизонтальная, либо вертикальная стенка Z лежит внутри этого квадрата. Оба случая снова неэквивалентны (столы $7-8$).

Если две стороны Z лежат на ребрах замощения, возникают два неэквивалентных случая: эти стороны смежные, либо противоположные. В первом случае Z не может выходить за рамки одного квадрата K_i, т.к. вершины замощения не могут лежать внутри ребер Z (стол 9). Второй случай разбивается на два неэквивалентных подслучая: пара сторон Z, лежащих не ребрах замощения, либо вертикальна, либо горизонтальна. Если такая пара вертикальна, то возможен только один вариант: Z целиком лежит в одном из K_i. Аналогично для горизонтальных ребер (столы $10-11$).

Пусть теперь только одна сторона Z лежит на ребрах замощения, тогда вершины замощения не могут попасть внутрь. Значит, возможны 4 неэквивалентных варианта: сторона Z на ребре замощения либо вертикальная, либо горизонтальная, а смежная ей сторона либо больше 1, либо меньше 1 (столы $12-15$).

Если ни одна из сторон Z не содержит участков ребер замощения, то возможны только следующие 6 вариантов: Z лежит внутри некоторого K_i (стол 16), Z содержит только одну вершину замощения и центрально симметричен относительно нее (стол 17), Z содержит ровно одну горизонтальную, либо вертикальную границу K_i (столы $18-19$), Z содержит в точности два горизонтальных, либо вертикальных участка сторон K_i (столы $20-21$).

В итоге мы получили 21 класс комбинаторно неэквивалентных биллиардных столов на эллипсоиде. Предложение доказано. □

Предложение 2.1.2. *На однополостном гиперболоиде существует в точности 21 класс комбинаторно неэквивалентных биллиардных столов. Все они перечислены в таблице пункта 2.3.3.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{Z}$ — биллиардный на однополостном гиперболоиде E. По своему определению $\mathcal{Z}$ является компактным подмножеством в $\mathbb{R}^3$. Следовательно, $\mathcal{Z}$ лежит внутри некоторого эллипсоида E', софокусного с E. Кроме того, этот эллипсоид можем считать общим для всех биллиардных столов на E. Действительно, с помощью первого элементарного преобразования (см. определение 2.1.1), мы всегда можем сдвинуть произвольный биллиардный стол в компактную область, ограниченную E'.

Обозначим через K компактную область на гиперболоиде E, ограниченную эллипсоидом E'. Граница множества K пересекается с плоскостью $y = 0$ в четырех точках. Занумеруем их, как показано на рисунке 2.3.

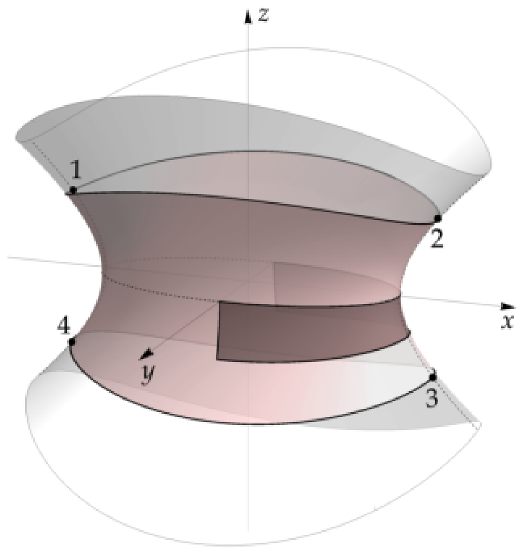


Рис. 2.3: Область на однополостном гиперболоиде, высекаемая софокусным эллипсоидом, а также биллиардный стол, лежащий внутри этой области.

Разрежем K плоскостью $y = 0$. Получим два замкнутых множества, гомеоморфных единичным квадратам K_1 (для полупространства $y \geqslant 0$) и K_2 (для полупространства $y \leqslant 0$). Как и в предыдущем предложении ввиду ортогональности эллиптических координат можем выбрать этот гомеоморфизм так, чтобы горизонтальные стороны квадратов представляли собой границу K, а вертикальные — границу разреза плоскостью $y = 0$. При этом, вершины квадратов будут соответствовать пронумерованным точкам, а отрезки, параллельные сторонам квадрата — сетке эллиптических координат на однополостном гиперболоиде.

Рассмотрим на плоскости решетку, построенную по единичным координатным векторам. Зафиксируем один из получившихся единичных квадратов и положим его равным K_1. Перенесем нумерацию его вершин с вершин K_1. Рассмотрим соседние с K правый и левый квадраты, объявим их равными K_2, и снова перенесем нумерацию вершин. Продолжим этот процесс по индукции влево и вправо. Получим полосу квадратов, с чередованием K_1 и K_2 (см. рис. 2.4.1). Обозначим эту полосу через Π.

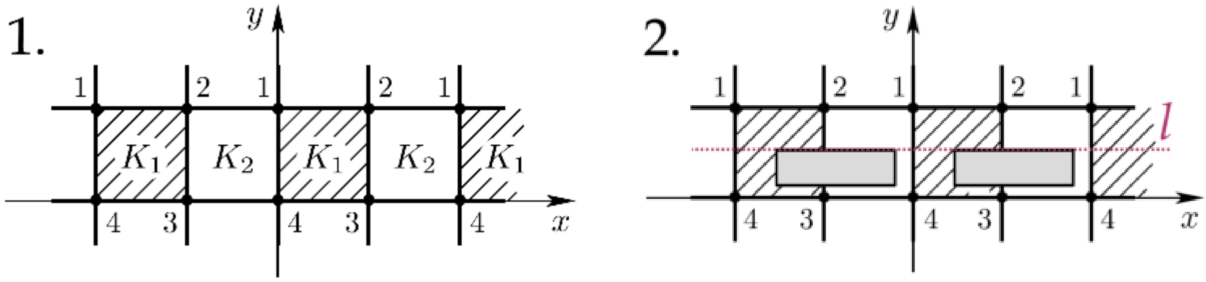


Рис. 2.4: 1. Прообраз отображения f фигуры K на полосу Π; 2. Прообраз биллиардного стола, изображенного на рисунке 2.3 при этом отображении.

Рассмотрим естественное отображение проекции $f : \Pi \to K$. Пусть $\mathcal{Z} \subseteq K$ — биллиардный стол, тогда очевидно, что $f^{-1}(\mathcal{Z})$ в Π будет либо бесконечной полосой, либо счетным набором прямоугольников (см. рис. 2.3, 2.4.2). Отметим в полосе Π прямую l, содержащую центры квадратов K_i. Опишем, как элементарные преобразования биллиардных столов действуют с $f^{-1}(\mathcal{Z})$ в полосе Π.

• Первое элементарное преобразование столов соответствует прямолинейным растяжениям вверх-вниз, влево-вправо в полосе Π участков границы $f^{-1}(\mathcal{Z})$ одновременно на всех квадратах K_i. Отметим, что при таком преобразовании участки границы $f^{-1}(\mathcal{Z})$ не должны соприкасаться с вертикальными границами квадратов K_1 и K_2, а также с прямой l, поскольку именно эти подмножества являются прообразами кривых $\lambda = b$, $\lambda = c$ при отображении f;

• Симметрия относительно плоскости $y = 0$ на гиперболоиде определяет сдвиг всех квадратов на 1 вправо в полосе Π (или на 1 влево, результат не изменится);

• Симметрия относительно плоскости $z = 0$ задает симметрию всех квадратов K_1 и K_2 относительно прямой l;

• Симметрия относительно плоскости $x = 0$ на гиперболоиде задает симметрию всех квадратов K_1, K_2 относительно оси, параллельной Oy и проходящей через их центр.

Классифицируем биллиардные столы в терминах их прообразов при отображении f. Возможны три различных случая расположения $f^{-1}(\mathcal{Z})$ относительно прямой l: $f^{-1}(\mathcal{Z})$ не пересекает l; $f^{-1}(\mathcal{Z})$ пересекает l только в граничных точках; внутри $f^{-1}(\mathcal{Z})$ есть точки, лежащие на l. Все эти три расположения определяют столы неэквивалентные друг другу. Для краткости мы рассмотрим последний случай. Оставшиеся варианты расположения $f^{-1}(\mathcal{Z})$ разбираются по аналогии.

Итак, пусть внутренность множества $f^{-1}(\mathcal{Z})$ имеет непустое пересечение с прямой l. Тогда если $f^{-1}(\mathcal{Z})$ — полоса, ей соответствует ровно один биллиардный стол (см. стол 1 в таблице пункта 2.3.3).

Если $f^{-1}(\mathcal{Z})$ состоит из счетного числа прямоугольников, выберем один из них и обозначим через Z. Возможны три варианта расположения вертикальных стенок Z: обе стенки попали на границы K_i, попала ровно одна стенка, ни одна из стенок не попала. В первом случае ввиду периодичности полосы Π прямоугольник Z обязан лежать ровно в одном из K_i (стол 2). Во втором случае возможны два варианта: Z лежит ровно в одном из квадратов замощения (стол 3), либо в двух (стол 4). Если же ни одна из стенок Z не лежит на ребрах квадратов замощения, возможны в точности три варианта: Z пересекает две вертикальные стенки K_i (стол 5); Z не пересекает только одну стенку K_i (стол 6); Z не пересекает стенок квадратов замощения (стол 7).

Абсолютно аналогично (рассуждения повторяются точь-в-точь) разбираются оставшиеся случаи расположения множества $f^{-1}(\mathcal{Z})$ относительно прямой l. В итоге получаем ровно 21 класс неэквивалентных биллиардных столов на однополостном гиперболоиде. Предложение доказано. $\square$

Предложение 2.1.3. 1. *На двуполостном гиперболоиде существует в точности* 13 *классов комбинаторно неэквивалентных биллиардных столов. Все они представлены в таблице пункта 2.3.4.*

2. *Существует взаимно однозначное соответствие между плоскими софокусными биллиардными столами и биллиардными столами на двуполостном гиперболоиде. Это соответствие сохраняет отношение комбинаторной эквивалентности столов.*

Доказательство. Начнем со второго пункта. Поскольку симметрия относительно плоскости $x = 0$ меняет местами компоненты связности E_+ (лежит в полупространстве $x > 0$) и E_- (лежит в полупространстве $x < 0$) двуполостного гиперболоида E, то без ограничения общности можем считать, что все биллиардные столы на E лежат в компоненте E_+. Построим диффеоморфизм $f : E_+ \to Oyz$, переводящий биллиардные столы на E_+ в плоские биллиардные столы.

Пусть λ_0 — параметр гиперболоида E в софокусном семействе и $P \in E_+$ — произвольная точка. Тогда эллиптические координаты P равны $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0)$. Пересечение квадрик параметров λ_1 и λ_2 диффеморфно окружности. Будем передвигать точку P по этой окружности в направлении увеличения третьей эллиптической координаты, пока эта координата не станет равной a. В результате мы получим точку на плоскости Oyz с эллиптическими координатами $(\lambda_1, \lambda_2, a)$. Обозначим ее $f(P)$. Построенное отображение f с учетом формул 1.2 можно переписать в виде системы (во избежание путаницы обозначим координаты на плоскости Oyz через y' и z')

$$\begin{cases} y' = \sqrt{\dfrac{a-b}{\lambda_0 - b}}y, \\ z' = \sqrt{\dfrac{a-c}{\lambda_0 - c}}z. \end{cases}$$

Отсюда становится ясным, что f — диффеоморфизм. При этом, f переводит эллиптические координаты на E_+ в плоские эллиптические координаты семейства софокусных квадрик

$\dfrac{y^2}{b-\lambda} + \dfrac{z^2}{c-\lambda} = 1$, а омбилические точки — в фокусы (см. рис. 2.5).

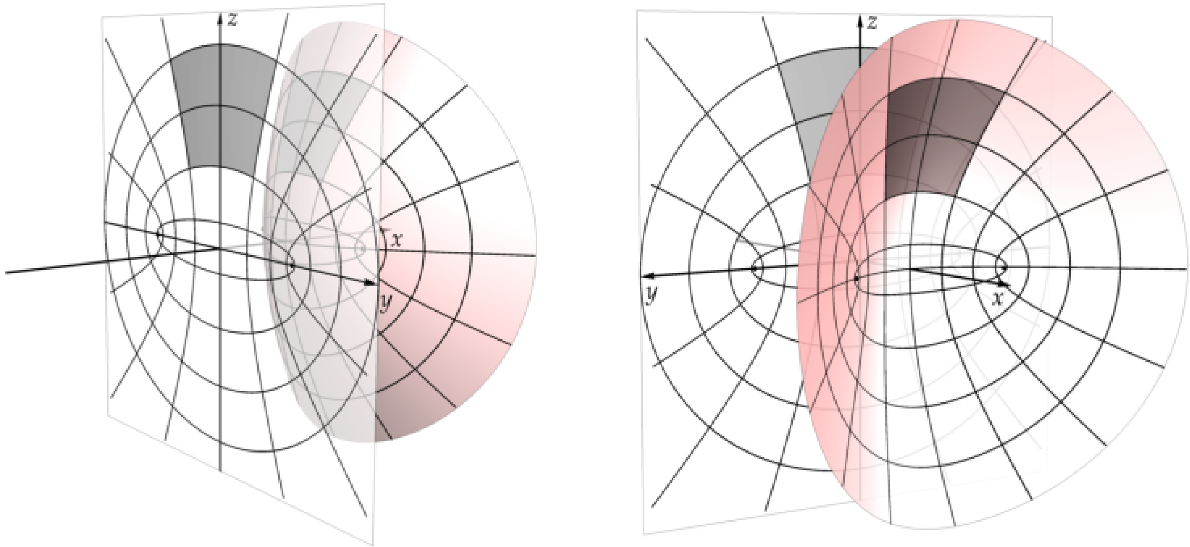


Рис. 2.5: Иллюстрация отображения f (с двух ракурсов), переводящего связную компоненту двуполостного гиперболоида в плоскость. При этом отображении сохраняются эллиптические координаты, а биллиардные столы на полости гиперболоида переходят в плоские биллиардные столы.

Более того, отношение эквивалентности столов на гиперболоиде E (вообще говоря, на E_+) переходит в комбинаторное отношение эквивалентности плоских столов, введенное В. В. Ведюшкиной в работе [7]. Остается воспользоваться результатом классификации Ведюшкиной, согласно которому, на плоскости существует в точности 13 типов комбинаторно неэквивалентных софокусных биллиардных столов. Таким образом, мы доказали не только второй пункт предложения, но и первый. Предложение полностью доказано. $\square$

Мы доказали все пункты теоремы 2.1.1 классификации биллиардных столов на квадриках. Поясним теперь, почему отношение эквивалентности биллиардных столов влечет лиувиллеву эквивалентность соответствующих биллиардов.

Все дело в том, что если при непрерывной деформации границы биллиардных столов в классе софокусных квадрик не выходить на вырожденные квадрики, то в Q^3 будет происходить непрерывное сжатие/растяжение всех торов Лиувилля и критических поверхностей интеграла Λ, а также самих Q^3 в целом. Такие преобразования, очевидно, никак не влияют на грубую молекулу. Однако и меченая молекула меняться не будет. Действительно, при непрерывной деформации торов Лиувилля матрицы склейки на ребрах молекулы обязаны меняться непрерывно. Однако все матрицы склейки целочислены. Следовательно, при их непрерывном изменении они обязаны оставаться постоянными. Остается заметить, что симметрия стола относительно координатных плоскостей определяет симметрию молекулы. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.1.2. *Биллиарды на комбинаторно эквивалентных являются столах лиувиллево эквивалентными.*

2.2 Классификация биллиардов на эллипсоиде

В первых двух пунктах настоящего параграфа мы вычислим инварианты Фоменко и Фоменко-Цишанга для биллиардов внутри столов трех видов (наиболее типичные случаи). Для всех оставшихся видов столов рассуждения при вычислении инвариантов будут аналогичными. Полная классификация софокусных биллиардов на эллипсоиде приведена в третьем пункте параграфа.

Все молекулы в этом параграфе расположены горизонтально. Движение слева направо по ребрам молекул соответствует росту интеграла Λ. Через E, как и ранее, обозначим эллипсоид, на котором рассматривается биллиард. Будем считать, что параметр этого эллипсоида равен нулю.

2.2.1 Построение грубых молекул

Предложение 2.2.1. *Биллиарду внутри стола 5-го типа (см. таблицу 2.2.3) соответствует грубая молекула 2.6.*

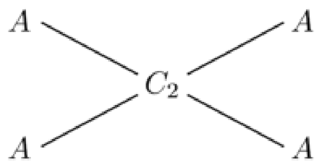


Рис. 2.6: Инвариант Фоменко биллиарда на столе 5-го типа на эллипсоиде.

Доказательство. В силу теоремы 2.1.2 можем считать, что биллиардный стол $\mathcal{Z}$ пятого типа ограничен в точности одним двуполостным гиперболоидом. Интеграл Λ изменяется на отрезке $[c, a]$. Выясним как устроены изоинтегральные подмножества $\Lambda = \text{const}$ в Q^3_h $(h > 0)$.

Пусть $\Lambda = c$. Тогда область возможного движения материальной точки состоит из двух дуг эллипса $\{z = 0\} \cap E$. В каждой внутренней точке этих дуг возникают по два вектора скорости, которые ввиду биллиардного отражения отождествляются на границе. Таким образом, в Q^3_h уравнение $\Lambda = c$ определяет две окружности, отвечающие движению по дугам эллипса $\{z = 0\} \cap E$.

Пусть $\Lambda = c + \delta$, где $0 < \delta < b - c$. В этом случае область возможного движения состоит из двух симметричных компонент связности D и D', лежащих в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$ соответственно. Следовательно, уровень $\Lambda = c + \delta$ в Q^3_h состоит из двух одинаковых компонент связности, отвечающих D и D'. Рассмотрим ту компоненту Q^3_h, что соответствует D. В каждой внутренней точке D расположено в точности 4 допустимых вектора скорости, на граничных дугах — по два, в углах — по одному. Заметим, что точка $P = (0, \sqrt{b}, 0)$ лежит внутри D. Введем нумерацию на допустимых векторах скорости в этой точке. Каждый из них однозначно определяется знаками своих первой и третьей компонент в декартовых координатах. Обозначим через v_1 вектор, у которого обе компоненты больше нуля, через v_2 — вектор, у которого первая координата меньше нуля, а третья больше нуля, через v_3 — вектор с отрицательными первой и третьей координатами. Оставшийся вектор объявим v_4. Поскольку при непрерывном изменении точки в D соответствующие четверки векторов скорости меняются непрерывно, обозначения векторов во всех точках D можно продолжить по непрерывности из обозначений в точке P.

Множество D ограничено четырьмя стенками, две их которых соответствуют граничному двуполостному гиперболоиду, а еще две — каустическому однополостному гиперболоиду, т.е. софокусной квадрике параметра Λ. Стенки первого вида будем называть вертикальными, стенки второго вида — горизонтальными. Ввиду касания каустики на горизонтальных стенках v_1 склеился с v_4, v_2 — с v_3, а в силу биллиардного отражения на горизонтальных стенках v_1 склеился с v_2, v_3 — с v_4.

Расслоим D на координатные линии сетки эллиптических координат, отвечающие двуполостным гиперболоидам. Ограничим уровень $\Lambda = c+\delta$ на слой этого расслоения, проходящий через точку P с приписанными к нему векторами v_1 и v_4. Очевидно, что полученное подмножество в Q^3_h будет гомеоморфно окружности. Будем перемещать точку P по дуге эллипса $\{z = 0\} \cap E$ вместе со слоем расслоения и векторами v_1 и v_4 вплоть до того, пока не упремся в вертикальную стенку D. На вертикальной стенке слой отражается, а вектора v_1, v_4 заменяются на v_2 и v_3. Продолжим движение точки P вместе со слоем расслоения в обратную сторону. Далее слой снова отражается, но уже от противоположной вертикальной стенки и, спустя некоторое время, точка P вместе с соответствующим слоем и векторами v_1, v_4 возвращается в исходное положение. Следовательно, в результате полного обхода точки P по дуге эллипса $\{y = 0\} \cap E$ вместе с векторами на соответствующем слое расслоения получим двумерный тор. Аналогично в области D' получаем тор. Итак, поверхность уровня $\Lambda = c + \delta$ в Q^3_h гомеоморфна несвязному объединению двух торов Лиувилля.

Более того, из нашей конструкции с расслоением становится ясным, что при $\Lambda \to c + 0$ торы Лиувилля сжимаются в две окружности на уровне $\Lambda = c$. Действительно, рассмотрим область D, расслоенную на дуги софокусных двуполостных гиперболоидов, на каждой такой дуге пары векторов v_1 и v_4, v_2 и v_3 заметают одну или две окружности. И при стремлении Λ к c эти окружности сжимаются в точку. Следовательно, уровню $\Lambda = c$ соответствуют два 3-атома A, в то время, как при $\Lambda \in (c, b)$ бифуркации торов Лиувилля не происходит. Аналогично можно показать, что уровню $\Lambda = a$ соответствуют два 3-атома A, а при $\Lambda \in (b, a)$ снова получаются два двумерных тора.

Остается выяснить, какая бифуркация соответствует уровню $\Lambda = b$. Абсолютно ясно, что на этом уровне происходит перестройка двух торов в два. Покажем, что эта бифуркация отвечает 3-атому C_2.

Поскольку весь биллиардный стол можно тривиально расслоить софокусными двуполостными гиперболоидами, ввиду сказано выше искомый 3-атом V^3 обладает тривиальным S^1-расслоением, т.е. $V^3 = V^2 \times S^1$, где V^2 получается ограничением V^3 на слой расслоения стола, отвечающий плоскости $x = 0$ и взятый вместе с векторами скорости, направленными по одну сторону от этой плоскости.

Как было показано выше, при $\Lambda \in (c, b)$ на этом слое расслоения возникают две окружности. Заметим, что при $\Lambda = b$ эти окружности склеиваются друг другом в двух точках, после чего они снова преобразуются в две окружности. Следовательно, V^2 не что иное, как 2-атом C_2 (см. рис. 1.1.3). Таким образом, искомый атом V^3 есть 3-атом C_2. Грубая молекула построена. Предложение доказано. □

Замечание 2.2.1. При доказательстве предложения выше мы активно пользовались тем, что сам стол обладает тривиальным расслоением софокусными квадриками. Благодаря этому свойству все 3-атомы биллиардов на таких столах обладают тривиальным S^1-расслоением Зейферта.

Предложение 2.2.2. *Биллиарду на столе* 1*-го типа (см.таблицу 2.2.3) соответствует следующая грубая молекула, представленная на рисунке 2.7.*

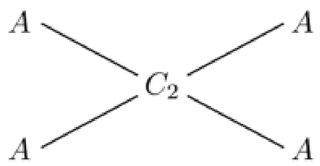


Рис. 2.7: Инвариант Фоменко биллиарда на столе 5-го типа на эллипсоиде.

Доказательство. Как в предыдущем предложении можно показать, что на каждом из уровней $\Lambda = c, a$ расположено две критические окружности, а при $\Lambda \in (c, b) \cup (b, a)$ — по два тора Лиувилля, которые при $\Lambda \to c + 0, a - 0$ стремятся к критическим окружностям. Значит, уровням $\Lambda = c, a$ соответствуют по два атома A.

Покажем, что на уровне $\Lambda = b$ происходит бифуркация, отвечающая атому C_2. При $\Lambda = b$ областью возможного движения является весь эллипсоид E. Рассмотрим в каждой точке E все вектора скорости, соответствующие рассматриваемому значению интеграла Λ. В омбилических точках получаем окружности из касательных векторов длины $\sqrt{2h}$, в точках, не лежащих в плоскости $y = 0$ — по 4 вектора скорости, а в оставшихся точках — по 2 вектора. Введем обозначения этих векторов в точках, лежащих вне плоскости $y = 0$. Для этого рассмотрим две точки $P = (0, \sqrt{b}, 0)$ и $P' = (0, -\sqrt{b}, 0)$. Обозначения векторов в точке P возьмем из предыдущего доказательства и по непрерывности продолжим их в полупространство $y > 0$. В точке P' нумерацию выберем так. Вектор v в P' обозначим через v_1, если $v = v_4$

в точке P. Аналогично обозначим v через v_2, если $v = v_3$ в P, через v_3, если $v = v_2$ в P, через v_4, если $v = v_1$ в P. А далее снова продолжим эти обозначения по непрерывности в полупространство $y < 0$.

Почему в полупространстве $y < 0$ выбрана именно такая нумерация? Если рассмотреть уровень $\Lambda = b - \varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$, то векторные поля v_i будут непрерывными внутри области возможного движения. При этом, один тор Лиувилля на этом уровне будет соответствовать векторным полям v_1 и v_4, а другой — v_2 и v_3. Действительно, для каждого фиксированного i на слоях $\Lambda = b - \varepsilon$ все пары вида (P, v_i) образуют множество множество гомеоморфное цилиндру. А ввиду касания каустики основания цилиндров для векторов v_1 и v_4, а также для v_2 и v_3 склеиваются, в результате чего получается два двумерных тора.

Заметим, что при $\Lambda = b$ цилиндры, соответствующие векторам v_i, не меняют свой класс гомеоморфности. Действительно, при $\Lambda = b$ склейка точек цилиндров может произойти только на их основаниях. Однако если проследить за динамикой их оснований при $\Lambda \to b - 0$, нетрудно убедится что эти основания-окружности в пределе не изменят свой класс гомеоморфности (см. рис.2.8). Окружность-основание цилиндра v_i, которая соответствовала движению вдоль каустики, преобразуется в окружность определенную следующим маршрутом. Сначала происходит движение от одной омбилической точке к другой (например, от точки с номером 1 в точку с номером 2, нумерацию точек см. на рис. 2.1.1). Далее касательный вектор совершает пол-оборота в касательном пространстве к омбилической точке и перемещается в начальную омбилическую точку, в которой затем снова совершает еще пол-оборота (в том же направлении) и возвращается в исходное положение (см. рис. 2.8).

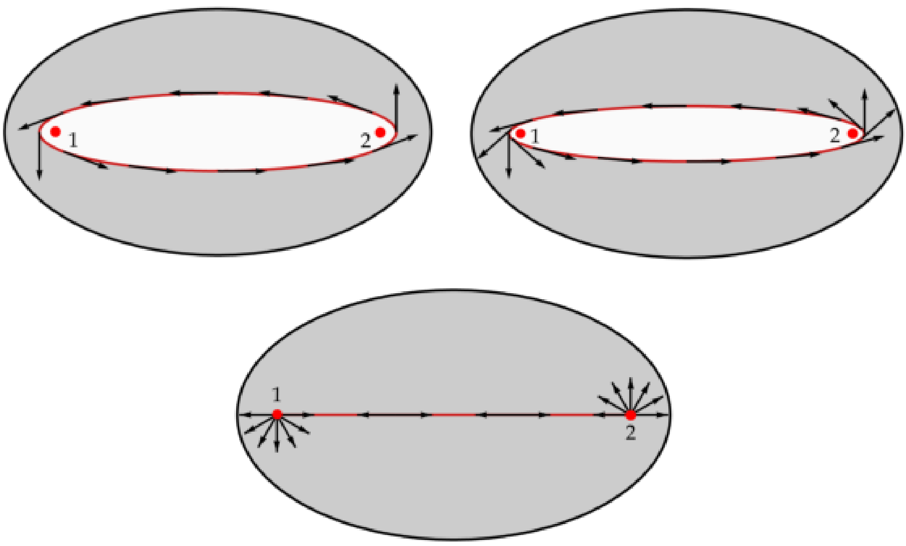


Рис. 2.8: Динамика изменения касательных векторов, ориентированных в одну сторону, на каустике при стремлении параметра каустики к b слева. Вид сверху.

Более того, на уровне $\Lambda = c$, помимо оснований точки цилиндров для v_1 и v_4, а также для v_2 и v_3 больше нигде не склеиваются. Это означает, что на уровне $\Lambda = b$ происходит склейка двух торов Лиувилля. Опишем ее.

Склейка торов Лиувилля происходит по двум критическим окружностям, которые соответствуют движению вдоль эллипса $\{y = 0\} \cap E$ (в обе стороны). Поскольку эти окружности не имеют самопересечений, каждая из них является базисной на каждом из торов. Склейка двух торов по двум гомологичным окружностям будет представлять собой критический слой 3-атома C_2. Итак, при стремлении Λ к b слева происходит склейка двух торов Лиувилля по двум гомологичным окружностям. Аналогичное справедливо, если мы устремим Λ к b справа (это так, потому что эллиптические координаты на эллипсоиде двойственны друг другу). Следовательно, атом, отвечающий уровню $\Lambda = b$ есть 3-атом C_2. Таким образом, грубая молекула биллиарда на столе 1-го типа построена. Предложение доказано. $\square$

Замечание 2.2.2. Стол 1-го типа — весь эллипсоид E и система биллиарда на нем — геодезический поток. Эта система является гладкой ввиду отсутствия стенок у стола. Ее меченая молекула хорошо известна (см., например, [18]). Более того, А. Т. Фоменко и А. В. Болсинов вычислили полный траекторный инвариант этой системы — меченую t-молекулу, с помощью которого они доказали траекторную эквивалентность задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде и случая Эйлера динамики твердого тела с нулевой константой площадей (см. [72]).

Предложение 2.2.3. *Биллиарду внутри стола* 6*-го типа (см.таблицу 2.2.3) соответствует грубая молекула* $A - A$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что рассматриваемый биллиардный стол лежит в полупространстве $y \geqslant 0$.

Как в предыдущих предложениях можно показать, что на каждом из уровней $\Lambda = a, c$ расположена в точности одна критическая окружность, а при $\Lambda \in (c, b) \cup (b, a)$ — по одному двумерному тору. При $\Lambda \to c + 0, a - 0$ эти торы переходят в критические окружности, в результате чего получаем по одному атому A на концах грубой молекулы. Покажем, что на уровне $\Lambda = b$ бифуркация не происходит.

Рассмотрим вектора скорости, соответствующие уровню интеграла $\Lambda = b - \varepsilon$ и введем на них такие же обозначения, как в доказательстве предложения 2.2.1. На горизонтальных стенках области возможного движения возникает склейка v_1 с v_4, v_2 с v_3. На вертикальных стенках склейка другая: v_1 с v_2, v_3 с v_4. При этом, все пары точка-вектор (P, v) на рассматриваемом уровне Λ, у которых v равен v_1 или v_2, образуют цилиндр. Аналогичное справедливо и для пар точка-вектор, у которых v равен v_3 или v_4. Эти цилиндры склеиваются между собой по основаниям, в результате чего получается двумерный тор.

Как и в доказательстве предыдущего утверждения эти цилиндры не изменят класс гомеоморфности при $\Lambda \to b - 0$ (поскольку динамика их оснований почти такая же, как на рисунке 2.8). Более того, эти цилиндры не могут нигде склеиться друг с другом кроме оснований. Таким образом, слой $\Lambda = b$ гомеоморфен двумерному тору, а поскольку при рассмотрении предела $\Lambda \to b - 0$ (аналогично при $\Lambda \to b + 0$ ввиду двойственности эллиптических координат на эллипсоиде) точки торов Лиувилля не склеивались между собой, слоение Лиувилля вблизи слоя $\Lambda = b$ тривиально. Таким образом, грубая молекула рассматриваемого биллиарда есть $A - A$. $\square$

Построение грубых молекул для оставшихся видов биллиардных столов проводится методами, описанными в доказательствах предложений 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3.

2.2.2 Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга

Вычислим инварианты Фоменко-Цишанга для биллиардов, грубые молекулы которых были построены в предыдущем пункте. Заметим, что седловые атомы (если таковые имеются) отвечают уровню $\Lambda = b$. Поэтому, если на уровне $\Lambda = b$ происходит бифуркация, ребра меченой молекулы, соответствующие $\Lambda \in (c, b)$, будем называть *ребрами первого типа*, а ребра, отвечающие $\Lambda \in (b, a)$ —2 *ребрами второго типа.*

Предложение 2.2.4. *Меченая молекула биллиарда на столе* 1*-го типа (весь эллипсоид) имеет следующий вид.*

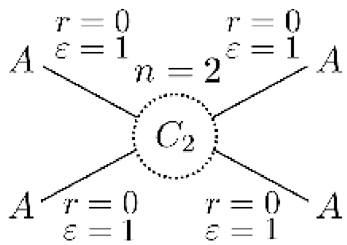


Рис. 2.9: Инвариант Фоменко-Цишанга биллиарда на столе 1-го типа на эллипсоиде.

Доказательство. Воспользуемся предложением 2.2.1. Сначала вычислим метки r и ε на ребрах первого типа. Поскольку оба ребра первого типа одинаковы по отношению к атому C_2, метки на них будут совпадать. Поэтому мы рассмотрим только одно из этих ребер.

Зафиксируем $\Lambda \in (c, b)$. Область возможного движения на этом уровне — кольцо. Циклы λ^- и μ^-, соответствующие атому A, выбираются очевидным образом (см. рис. 2.10.1). Ориентируем λ^- по направлению векторов скорости. В качестве λ^+ выберем цикл, который при проекции на стол касается верхней граничной кривой области возможного движения сзади и нижней граничной кривой — спереди (см. рис. 2.10.2), а в качестве μ^+ выберем λ^- (с точностью до ориентации). Заметим, что цикл λ^+ выбран корректно, так как при $\Lambda \to b - 0$, он переходит в критическую окружность. Ориентацию на циклах λ^+ и μ^- определяет направление критических окружностей. Остается определить ориентацию цикла μ^+. Матрица склейки имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$. Так как определить матрицы склейки должен быть равен -1, то $\mu^+ = \lambda^+$. Следовательно, на ребрах первого типа $r = 0$ и $\varepsilon = 1$.

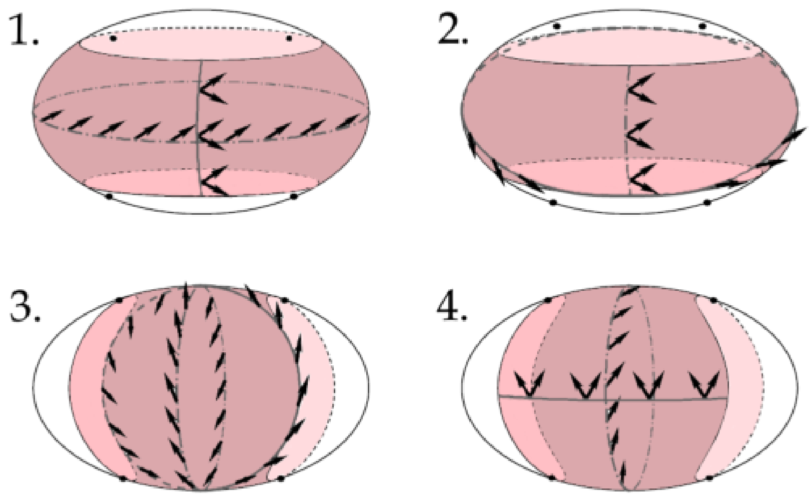


Рис. 2.10: На рисунках штрих-пунктиром обозначены μ-циклы, а сплошной линией — λ-циклы.

С ребрами второго типа поступаем аналогично. Ориентируем их от атома C_2 к атомам A. Вычислим метки на одном из этих ребер. На рисунках 2.10.3, 2.10.4 показан выбор базисов (λ^-, μ^-) и (λ^+, μ^+) соответственно. Матрица склейки имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, снова $r = 0$ и $\varepsilon = 1$.

Так как все ребра конечны, возникает ровно одна семья, состоящая из атома C_2. Поскольку ребра первого типа входящие, а ребра второго типа выходящие, метка n равна $0+0+1+1$, т.е. $n = 2$. $\square$

Предложение 2.2.5. *Биллиарду на столе 2-го типа (см. таблицу 2.2.3) соответствует молекула $A - A$ с метками $r = 0$, $\varepsilon = 1$.*

Доказательство. Выберем циклы на уровне $\Lambda = b$ как показано на рисунке 2.11a,b. Ориентируем μ^-, λ^-, μ^+ по направлению векторов скорости. Матрица склейки имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, откуда $r = 0$, $\varepsilon = 1$. $\square$

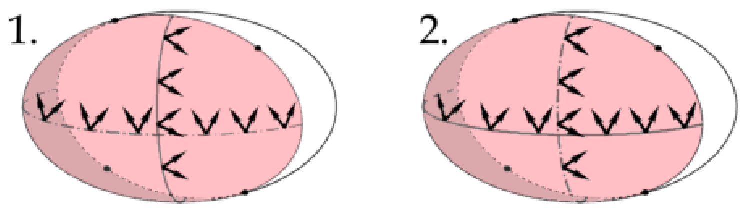


Рис. 2.11: На рисунках штрих-пунктиром обозначены μ-циклы, а сплошной линией — λ-циклы.

Предложение 2.2.6. *Меченая молекула биллиарда на столе* 5*-ого типа (см. таблицу 2.2.3) представлена на рисунке 2.12.*

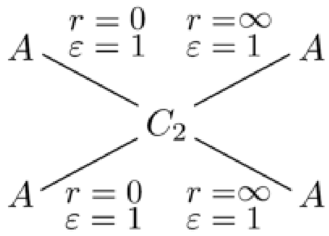


Рис. 2.12: Инвариант Фоменко-Цишанга биллиарда на столе 5-го типа на эллипсоиде.

Доказательство. Вычислим метки для ребер первого типа. Поскольку оба ребра одинаковы по отношению к атому C_2, метки на них будут совпадать. Поэтому можем выбрать одно из ребер. Зафиксируем $\Lambda \in (c, b)$. Выбор циклов λ^- и μ^-, соответствующих атому A, очевиден (см. рис.2.13.1). Ориентируем μ^- и λ^- по направлению векторов вдоль них. Выберем циклы λ^+ и μ^+, соответствующие атому C_2 как показано на рисунке 2.13.2. Таким образом, матрица склейки имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

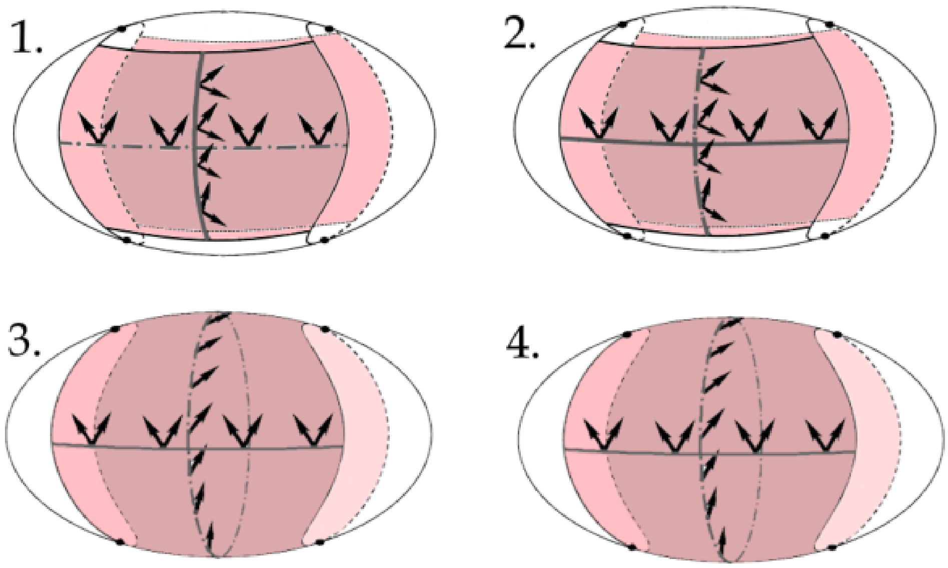


Рис. 2.13: На рисунках штрих-пунктиром обозначены μ-циклы, а сплошной линией — λ-циклы.

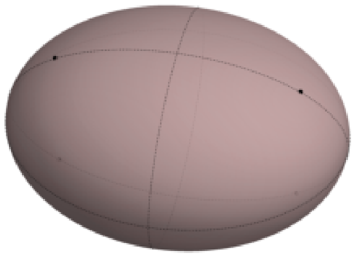
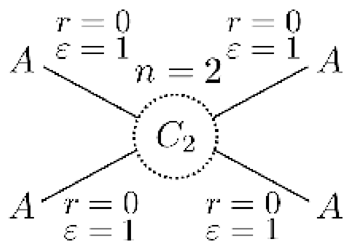
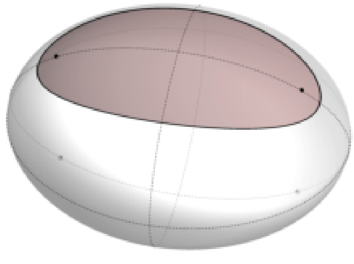
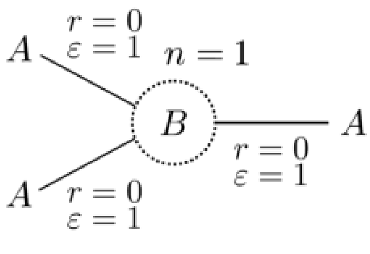
Теперь вычислим метки на ребрах второго типа. Зафиксируем значение интеграла $\Lambda =\in (b, a)$. Циклы λ^+, μ^+, отвечающие атому A, а также циклы λ^-, μ^-, отвечающие атому C_2 выберем так, как показано на рисунках 2.13.3, 2.13.2 соответственно. Ориентируем λ^- и μ^+ по направлению векторов скорости. Поскольку ориентация цикла μ^+ противоположна ориентации μ^- на ребрах первого типа, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, откуда $r = \infty$, $\varepsilon = 1$.

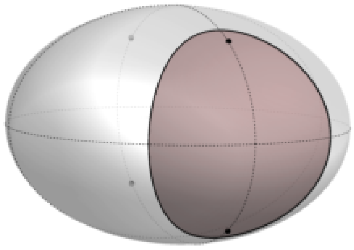
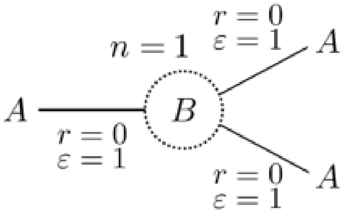
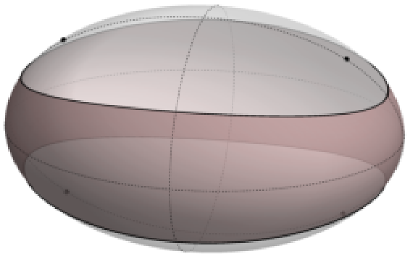
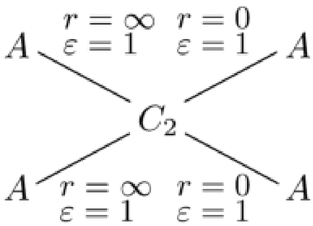
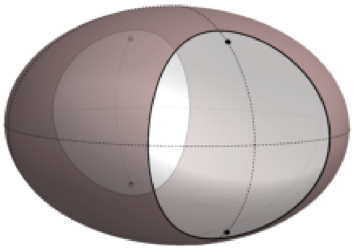
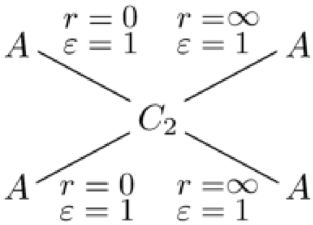
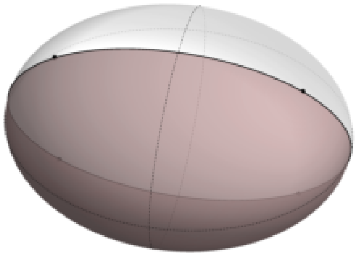
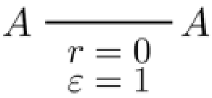
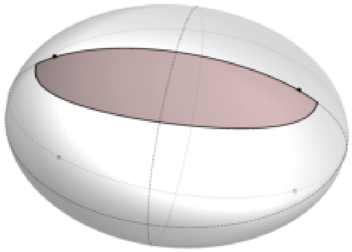
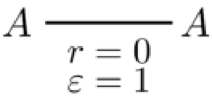
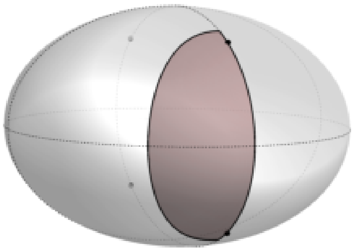
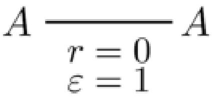
Разрезав молекулу по всем ребрам с конечными меткам r, обнаружим, что в каждой компоненте связности есть атом A. Таким образом, у этой молекулы нет семей. Предложение доказано. $\square$

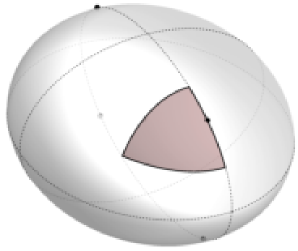
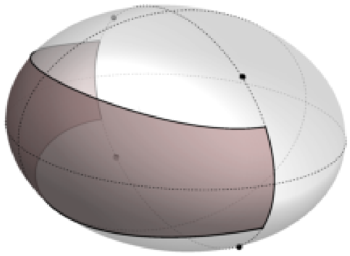
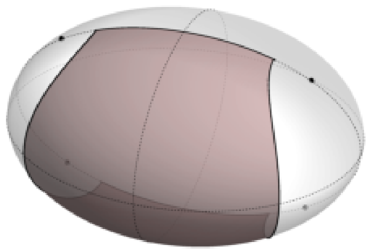
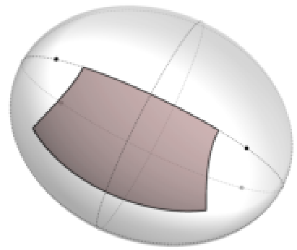
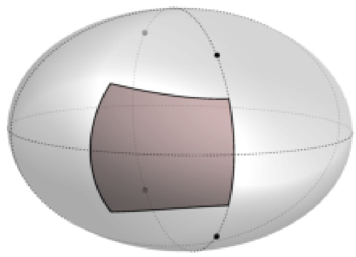
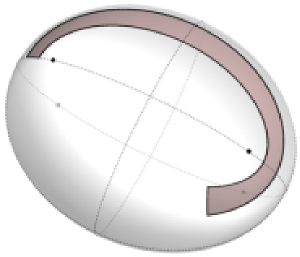
2.2.3 Лиувиллева классификация биллиардов на эллипсоиде

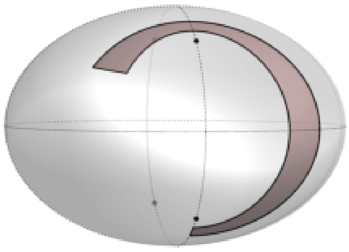
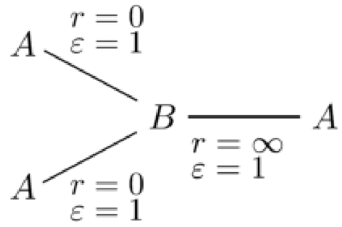
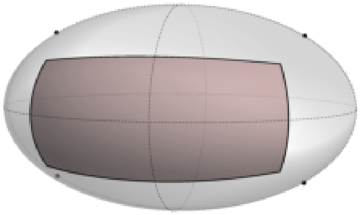
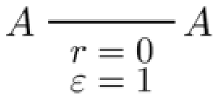
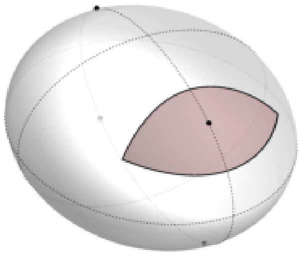
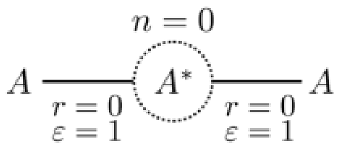
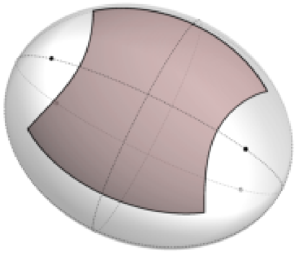
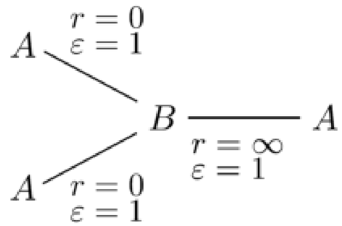
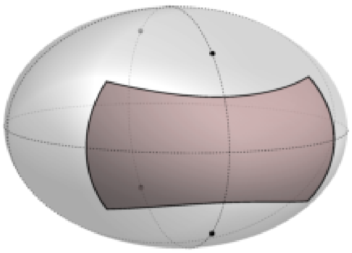
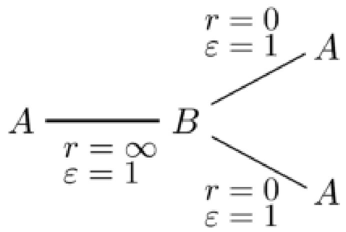
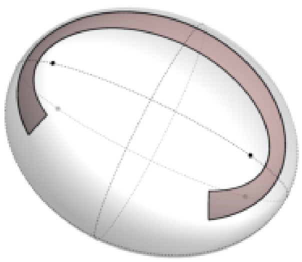
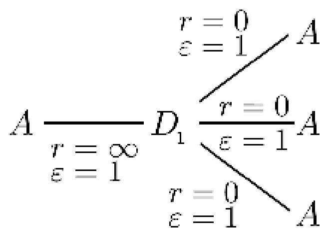
В этом пункте приведена таблица, в строках которой указаны все классы эквивалентности биллиардных столов на эллипсоиде. Для каждого класса эквивалентных столов вычислены инварианты Фоменко-Цишанга соответствующих биллиардов, а также определены классы гомеоморфности многообразия Q^3. Во втором столбце таблицы проиллюстрированы конкретные примеры биллиардных столов. Напомним, что биллиардный стол ограничен софокусными с эллипсоидом E квадриками. Сетка эллиптических координат на E изображена на рисунке 2.1. Горизонтальные координатные кривые на этом рисунке соответствуют однополостным гиперболоидам, вертикальные — двуполостным. На рисунках второго столбца таблицы жирным выделены омбилические точки, серо-красным — биллиардный стол, а пунктиром — линии пересечения конфигурационного эллипсоида с координатными плоскостями.

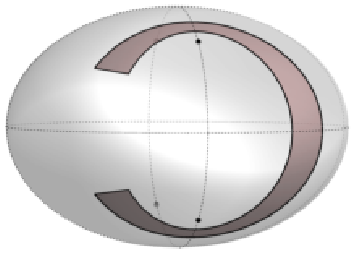
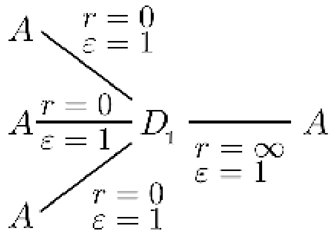
Таблица 1. Лиувиллева классификация софокусных геодезических биллиардов на эллипсоиде

<table>
<tr><th>Номер</th><th>Область</th><th>Меченая молекула биллиарда</th><th>тип Q^3</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>
</td><td>$\mathbb{R}P^3$</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>
</td><td>S^3</td></tr>
</table>

3			S^3
4			$S^2 \times S^1$
5			$S^2 \times S^1$
6			S^3
7			S^3
8			S^3

9		$A \underset{\substack{r=0 \\ \varepsilon=1}}{\overline{}} A$	S^3
10		$A \underset{\substack{r=0 \\ \varepsilon=1}}{\overline{}} A$	S^3
11		$A \underset{\substack{r=0 \\ \varepsilon=1}}{\overline{}} A$	S^3
12		$A \underset{\substack{r=0 \\ \varepsilon=1}}{\overline{}} A$	S^3
13		$A \underset{\substack{r=0 \\ \varepsilon=1}}{\overline{}} A$	S^3
14		$A \underset{\substack{r=\infty \\ \varepsilon=1}}{\overline{}} B$ $B \overset{\substack{r=0 \\ \varepsilon=1}}{\overline{}} A$ $B \underset{\substack{r=0 \\ \varepsilon=1}}{\overline{}} A$	S^3

15			S^3
16			S^3
17			S^3
18			S^3
19			S^3
20			S^3

21			S^3

2.3 Классификация биллиардов на гиперболоидах

2.3.1 Построение грубых молекул

В отличие от эллипсоида биллиард на однополостном гиперболоиде может иметь две седловые перестройки: на уровнях $\Lambda = b$ и $\Lambda = c$. Отметим, что на однополостном гиперболоиде нет омбилических точек и эллиптические координаты на нем отделены друг от друга. Это означает, что грубые молекулы биллиардов на однополостном гиперболоиде не содержат атомов со звездочками. Действительно, мы всегда можем тривиально расслоить биллиардный стол линиями уровня той эллиптической координаты, которая не соответствует никакой бифуркации, ограничить систему на эти слои и убедиться, что на каждом из них в окрестности бифуркационного слоя система устроена одинаково. Например, если бифуркация торов Лиувилля будет проходить на уровне $\Lambda = c$, мы можем расслоить биллиардный стол софокусными двуполостными гиперболоидами (т.е. линиями уровня эллиптической координаты λ_3), поскольку λ_3 не принимает значения c.

В данном пункте будут построены грубые инварианты для двух типов биллиардов. Построение грубых молекул для оставшихся типов столов проводится аналогичными методами.

Итак, пусть $\mathcal{Z}$ — биллиардный стол на однополостном гиперболоиде, тогда параметр каустики Λ изменяется не отрезке $[c-\delta, a]$, где $0 < \delta < +\infty$, при этом $\Lambda = c - \delta$ соответствует "наибольшему" софокусному эллипсоиду (т.е. эллипсоиду с наибольшими полуосями), ограничивающему стол $\mathcal{Z}$.

Как и ранее гиперболоид, на котором будут рассматриваться биллиарды обозначим через E. Параметр этого гиперболоида будем обозначать через λ_0.

Предложение 2.3.1. *Биллиарду на столе* 1*-го типа (см. таблицу пункта 2.3.3) отвечает грубая молекула, изображенная на рисунке 2.14.*

Доказательство. Пусть вся граница стола $\mathcal{Z}$ лежит на софокусном эллипсоиде параметра $\lambda = c - \delta$, где $0 < \delta < +\infty$. Тогда интеграл Λ меняется на отрезке $[c-\delta, a]$.

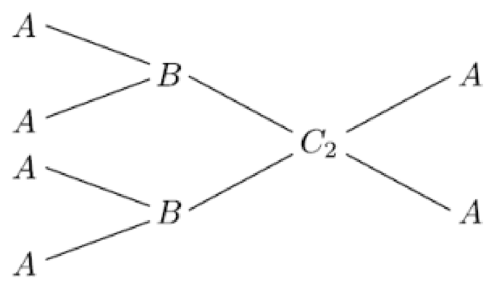


Рис. 2.14: Инвариант Фоменко биллиарда на столе 1-го типа на однополостном гиперболоиде.

Пусть $\Lambda = c - \delta$. В таком случае областью возможного движения материальной точки будут две граничные кривые стола $\mathcal{Z}$. Следовательно, в Q_h^3 мы получим в точности 4 окружности, отвечающие движению материальной точки по границе $\mathcal{Z}$ (на каждой из двух границ движение происходит в двух противоположных направлениях).

Пусть $\Lambda \in (c - \delta, c)$. В каждой точке области возможного движения рассмотрим все вектора скорости, отвечающие этому уровню интеграла. Получим два симметричных относительно плоскости $z = 0$ кольца, оснащенных внутри четырьмя, а на границе двумя векторами скорости. Рассмотрим точку $P \in \mathcal{Z} \cap \{z > 0\} \cap \{x = 0\}$, лежащую внутри одного из таких колец (мы будем рассматривать кольцо в полупространстве $z > 0$), и как в предложении 2.2.1 введем обозначение векторов в этой точке. Далее по непрерывности вводим обозначения в оставшихся точках кольца. На границах колец ввиду биллиардного отражения, а также касания каустики, вектора v_1 и v_4, а также v_2 и v_3 отождествляются. Расслоим $\mathcal{Z}$ на координатные линии сетки эллиптических координат, отвечающие двуполостным гиперболоидам, и припишем этим слоям вектора v_1 и v_4. Рассмотрим некоторую точку на нижней граничной кривой γ рассматриваемого кольца (эта кривая отвечает пересечению однополостного гиперболоида и каустической квадрики) с соответствующим слоем расслоения и векторами v_1, v_4. Очевидно, что этот слой гомеоморфен окружности. Передвигая точку P вдоль γ, будем получать окружности. Совершив полный оборот, мы возвратим слой вместе с векторами в исходное положение, в результате чего в Q_h^3 получим двумерный тор. Аналогично мы получим двумерный тор для рассматриваемого кольца и векторов v_2, v_3, а также два двумерных тора для кольца, лежащего в полупространстве $z < 0$. Таким образом, на уровне $\Lambda \in (c - \delta, c)$ получаем 4 двумерных тора, которые при $\Lambda \to c - \delta + 0$ переходят в критические окружности. Следовательно, уровню $\Lambda = c - \delta$ отвечают четыре 3-атома A.

Аналогичным образом можно показать, что уровню $\Lambda = a$ соответствуют два 3-атома A, а при $\Lambda \in (b, a)$ бифуркации не происходит.

Пусть теперь $\Lambda \in (c, b)$. В этом случае областью возможного движения является весь стол $\mathcal{Z}$. Снабдим все точки $\mathcal{Z}$ касательными направлениями к каустической квадрике. Получим по четыре вектора внутри $\mathcal{Z}$ и по два на границе. Введем обозначения этих векторов как в первом абзаце и рассмотрим такое же расслоение с приписанными к слоям векторами v_1 и v_4. Рассмотрим точку $P = (0, \sqrt{b-\lambda_0}, 0)$ с соответствующим ей слоем расслоения и векторами. Этот слой в Q^3_h гомеорморфен окружности. Сделав полный оборот этой вокруг эллипса $E \cap \{z = 0\}$, мы возвратим слой в исходное положение и в результате получим двумерный тор. Аналогично поступим с векторами v_2 и v_3. Таким образом, на фиксированном уровне $\Lambda \in (c, b)$ получим два тора Лиувилля.

Следовательно, на уровне $\Lambda = c$ происходит перестройка четырех торов Лиувилля в два, а на уровне $\Lambda = b$ — двух торов в два. Определим атомы, отвечающие этим бифуркациям.

Рассмотрим критический слой $\Lambda = c$. Снова снабдим все точки стола $\mathcal{Z}$ касательными направлениями, соответствующими этому значению интеграла Λ. Возьмем расслоение стола, точку P и обозначения векторов из предыдущего абзаца. Снабдим все дуги расслоения направлениями v_1 и v_4. На каждой такой дуге в Q^3 получим восьмерку. Совершив полный обход по эллипсу $E \cap \{z = 0\}$, эта восьмерка вернется в исходное положение, и в результате мы получим прямое произведение восьмерки на окружность. Торы, отвечающие векторам v_1, v_4 на уровнях интеграла $\Lambda \in (c - \delta, c)$, стремятся к этой критической поверхности при $\delta \to 0$, огибая ее изнутри. А торы, соответствующие уровню $\Lambda \in (c, b)$ с векторами v_1 и v_4, тоже стремятся к этой поверхности при $\Lambda \to c$ снаружи. Описанная перестройка соответствует 3-атому B (см. рис. 1.2.2). Аналогичные рассуждения справедливы и для другой пары векторов: v_2 и v_3. Итак, уровню $\Lambda = c$ отвечают два 3-атома B.

Аналогичным способом через расслоение области возможного движения софокусными эллипсоидами нетрудно показать, что уровню $\Lambda = b$ отвечает в точности один 3-атом C_2. Грубая молекула построена. Предложение доказано. $\square$

Предложение 2.3.2. *Биллиарду на столе 5-го типа (см. таблицу пункта 2.3.3) соответствует грубая молекула, представленная на рисунке 2.15.*

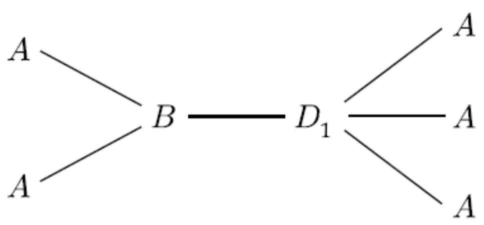


Рис. 2.15: Инвариант Фоменко биллиарда на столе 5-го типа на однополостном гиперболоиде.

Доказательство. Рассмотрим стол $\mathcal{Z}$ этой серии. Можем считать, что в полупространстве $y > 0$ этот стол не содержит стенок двуполостного гиперболоида (иначе отразим стол относительно плоскости $y = 0$).

Легко показать, что уровню $\Lambda = c - \delta$ соответствует в точности два атома A, а уровню $\Lambda = a$ — ровно три атома A. Также по аналогии с предыдущим предложением легко проверяется, что при $\Lambda \in (c-\delta, c) \cup (c, b) \cup (b, a)$ бифуркации не происходит и на уровне $\Lambda \in (c, b)$ лежит в точности один тор. Таким образом, при $\Lambda = c$ два тора перестраиваются в один, а при $\Lambda = b$ один тор перестраивается в три.

Пусть $\Lambda = c$. Расслоим стол $\mathcal{Z}$ на координатные линии сетки эллиптических координат, соответствующие двуполостным гиперболоидам, и введем обозначения допустимых векторов скорости в точках области возможного движения в точности так же, как и в предыдущем предложении. Рассмотрим слои этого расслоения, отвечающий точке $P = (0, \sqrt{b - \lambda_0}, 0)$ и припишем всем точками этого слоя векторы v_1 и v_4. Заметим, что ввиду отражения от границы стола, а также касания вырожденной квадрики параметра c вектора v_1 и v_4 склеиваются как в граничных точках слоя расслоения, так и в точке P. В результате, получаем, что слой расслоения в точке P с векторами v_1 и v_4 гомеоморфен восьмерке. Перемещая точку P по дуге эллипса $E \cap \{z = 0\}$ и отталкиваясь дважды от ее границы, в Q^3_h получим прямое произведение восьмерки на окружность. Таким образом, уровень $\Lambda = c$ определят в Q^3_h подмножество, гомеоморфное критическому слою 3-атома B. Более того, если проследить за "динамикой" векторов v_1 и v_4 на каждом из слоев расслоения софокусными двуполостными гиперболоидами при $\Lambda \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, нетрудно убедиться, что уровню $\Lambda = c$ отвечает 3-атом B. Аналогично можно показать, что уровню $\Lambda = b$ соответствует один атом D_1. Грубая молекула построена. Предложение доказано. $\square$

2.3.2 Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга.

В этой части мы вычислим инварианты Фоменко-Цишанга для биллиардов на столах типов 1 и 5 (см. таблицу пункта 2.3.3). Меченые молекулы остальных биллиардов строятся по аналогии. Вычисленные инварианты Фоменко-Цишанга представлены в таблице пункта 2.3.3. Пусть W — грубая молекула некоторого биллиарда. Если ребро этой молекулы отвечает параметру $\Lambda \in [c - \delta, c]$, то назовем его *ребром первого типа*, если $\Lambda \in [c, b]$, то — *ребром второго типа*, если $\Lambda \in [b, a]$, то — *ребром третьего типа.*

Все молекулы мы будем располагать горизонтально. Движение слева направо вдоль ребер молекул соответствует росту интеграла Λ.

Предложение 2.3.3. *Меченая молекула биллиарда на столе* 1*-го типа (см. таблицу пункта 2.3.3) изображена на рисунке 2.16.*

Доказательство. Выберем по одному ребру каждого типа и вычислим для них инварианты Фоменко-Цишанга. У ребер одного типа метки r, ε будут совпадать, и в этом нетрудно убедиться.

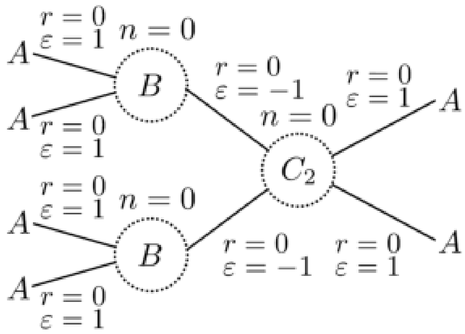


Рис. 2.16: Меченая молекула биллиарда на столе 1-го типа, лежащем на однополостном гиперболоиде.

Вычислим метки для ребра первого типа. Выберем циклы λ^-, μ^- , относящиеся к атому A, и циклы λ^+, μ^+, относящиеся к атому B, как показано на рисунках 2.17.1 и 2.17.2 соответственно. Ориентацию λ^+, μ^-, μ^+ выберем по направлению векторного поля. Тогда очевидно, что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\varepsilon = 1, r = 0$.

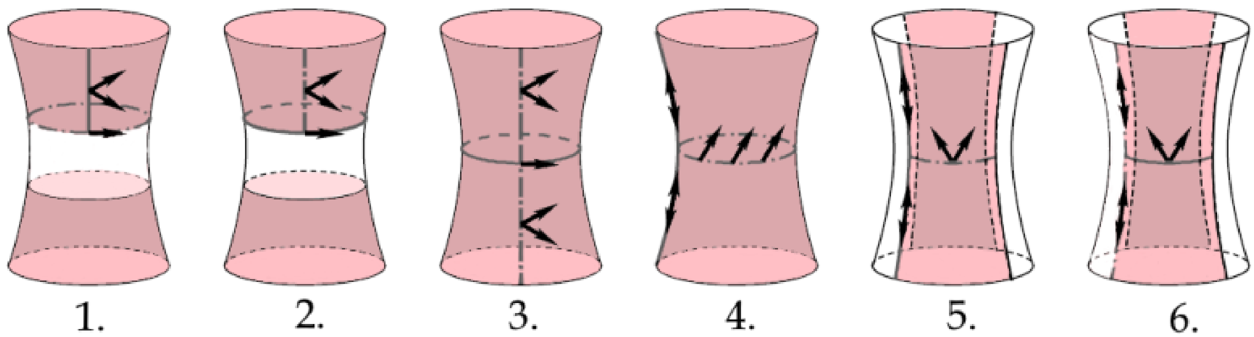


Рис. 2.17: На рисунках штрих-пунктиром обозначены μ-циклы, а сплошной линией — λ-циклы.

Найдем метки для ребра второго типа. Выберем циклы λ^+, μ^+, относящиеся к атому C_2, и циклы λ^-, μ^-, относящиеся к атому B, как показано на рисунках 2.17.3 и 2.17.4 соответственно. Ориентируем λ^+ по направлению векторного поля, а на μ^- выберем ориентацию противоположную направлению векторного поля. Так как определитель матрицы склейки равен -1, μ^+ ориентируем против направления векторного поля. Значит, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ откуда, $\varepsilon = -1, r = 0$.

Теперь вычислим метки для ребер третьего типа. Рассмотрим одно из таких ребер. Выберем циклы μ^+, λ^+, относящиеся к атому C_2, и μ^-, λ^-, относящиеся к атому A, как показано на рисунках 2.17.5 и 2.17.6 соответственно. Ориентируем μ^+, λ^+, μ^- по направлению векторного поля. Так как определитель матрицы склейки равен -1, то она имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а значит, $\varepsilon = 1, r = 0$.

Поскольку все ребра молекулы конечны, она обладает тремя семьями, каждая из которых соответствует седловому атому. Все матрицы склейки оказались антидиагональными (коэффициенты на главной диагонали равны нулю), а следовательно, все метки n равны нулю. □

Предложение 2.3.4. *Меченая молекула биллиарда на столе* 5*-го типа (см. таблицу пункта 2.3.3) изображена на рисунке 2.18.*

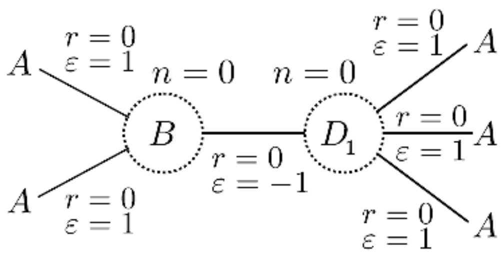


Рис. 2.18: Инвариант Фоменко-Цишанга биллиарда на столе 5-го типа

Доказательство. Вычислим метки на ребрах первого типа. Выберем циклы λ^-, μ^-, относящиеся к атому A, и циклы λ^+, μ^+ для атома B как показано на рисунках 2.19.1 и 2.19.2 соответственно. Ориентируем $\lambda^-, \mu^-, \lambda^+$ по направлению векторов. Тогда μ^+ направлен вдоль векторов и матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, откуда $\varepsilon = 1, r = 0$.

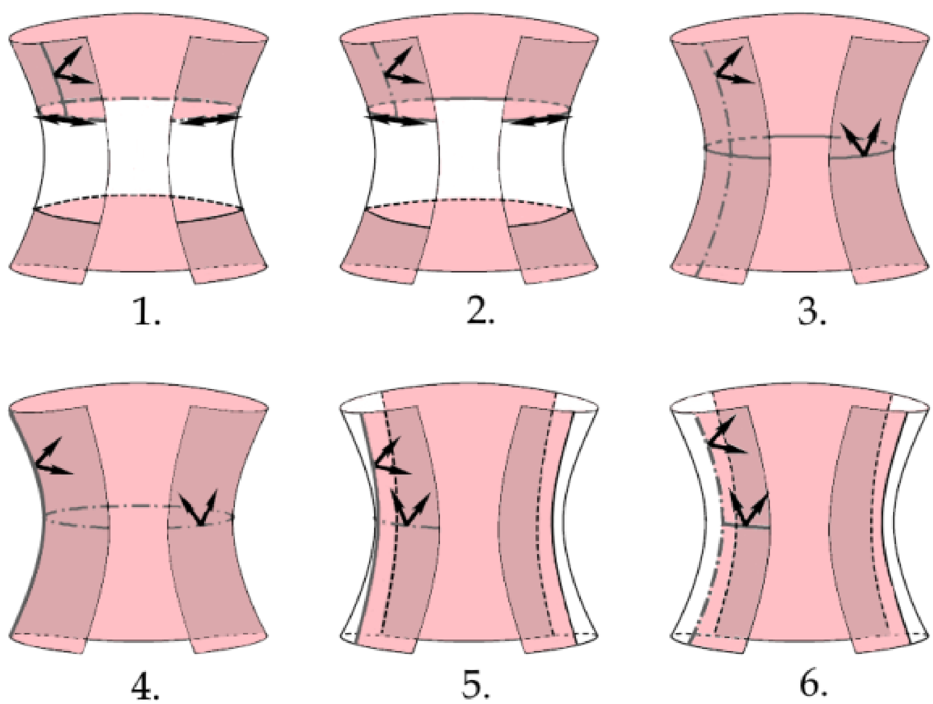


Рис. 2.19: На рисунках штрих-пунктиром обозначены μ-циклы, а сплошной линией — λ-циклы.

На ребрах второго типа выберем циклы λ^-, μ^- для атома B и циклы λ^+, μ^+ для атома D_1 как показано на рисунках 2.19.3 и 2.19.4 соответственно. Ориентируем λ^+, λ^- по направлению векторов, а цикл μ^- направим против. Значит, μ^+ направлен против векторов и матрица склейки имеет следующий вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, $\varepsilon = -1, r = 0$.

В случае ребра третьего типа выбираем циклы λ^-, μ^- для атома D_1 и циклы λ^+, μ^+ для атома A как показано на рисунках 2.19.5 и 2.19.6 соответственно. Ориентируем λ^+, μ^+, μ^- по направлению векторов. Значит, λ^+ направлен вдоль векторов и матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\varepsilon = 1, r = 0$.

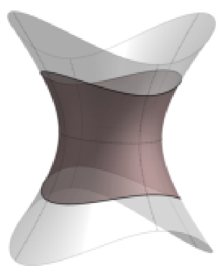
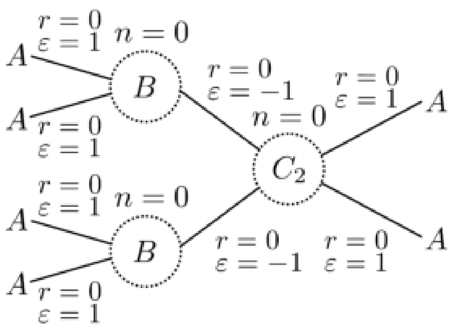
Поскольку все ребра молекулы конечны, она обладает двумя семьями, каждая из которых соответствует седловому атому. Все матрицы склейки оказались антидиагональными, а следовательно, все метки n равны нулю. $\square$

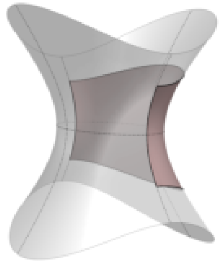
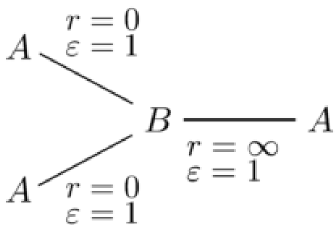
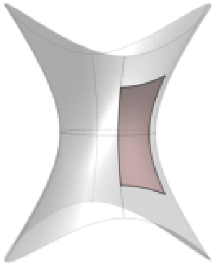
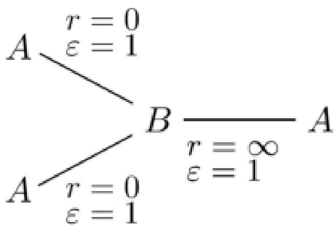
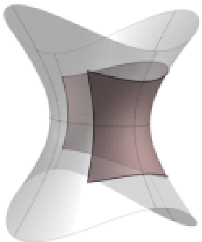
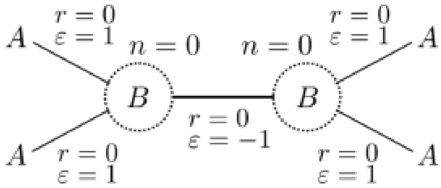
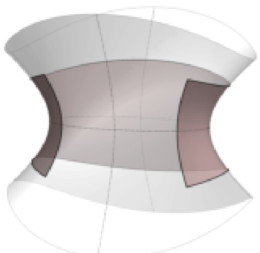
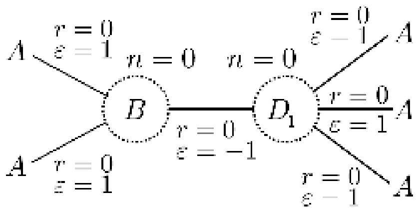
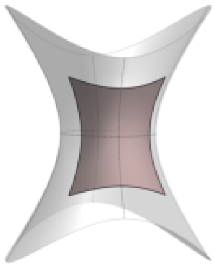
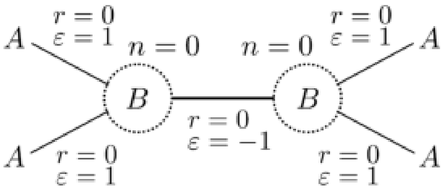
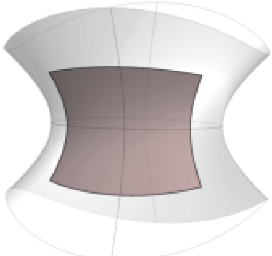
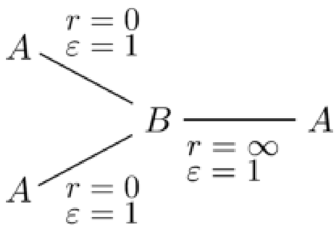
2.3.3 Лиувиллева классификация биллиардов на однополостном гиперболоиде

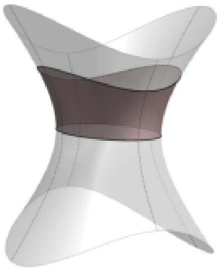
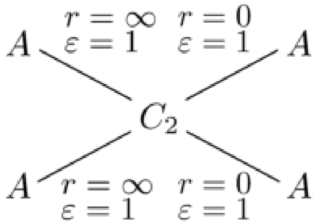
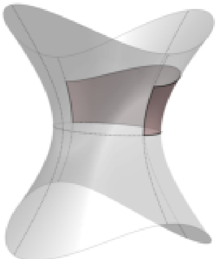
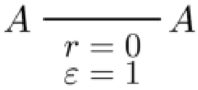
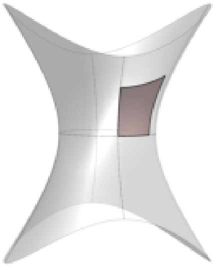
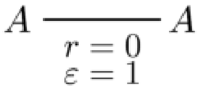
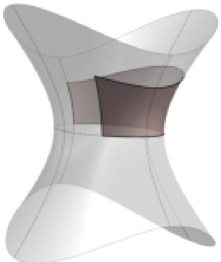
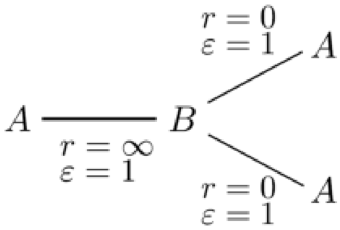
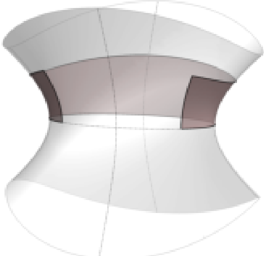
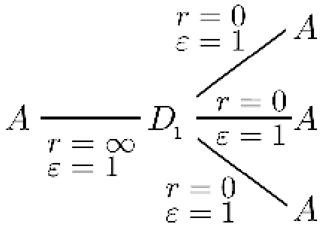
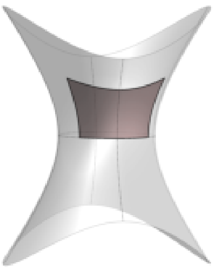
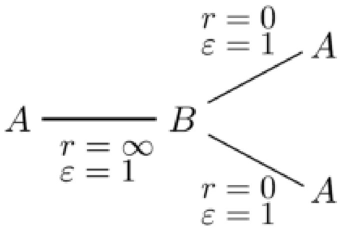
Ниже приведена таблица, в строках которой указаны все комбинаторно неэквивалентные биллиардные столы на однополостном гиперболоиде. Для каждого класса эквивалентности столов приведен инвариант Фоменко-Цишанга соответствующего биллиарда, а также класс гомеоморфности изоэнергетической поверхности. Напомним, что все стенки биллиардных столов целиком лежат на софокусных квадриках.

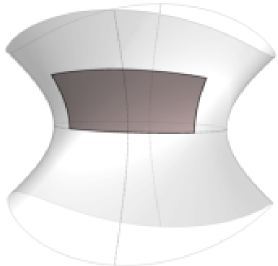
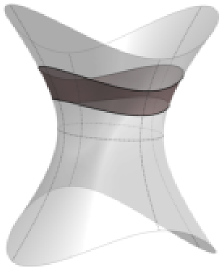
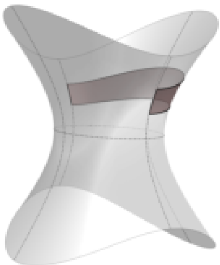
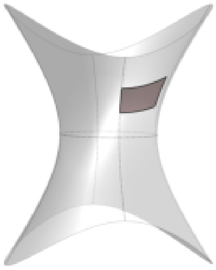
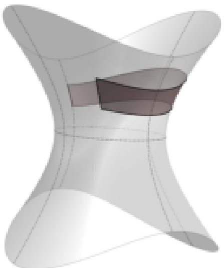
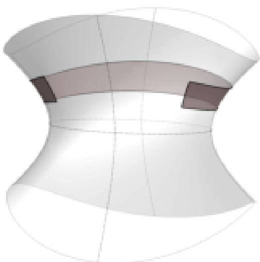
Горизонтальные стенки на рисунках таблицы отвечают софокусным эллипсоидам, а вертикальные — двуполостным гиперболоидам. Пунктиром выделены линии пересечения однополостного гиперболоида и координатных плоскостей.

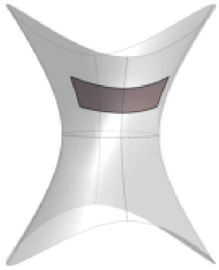
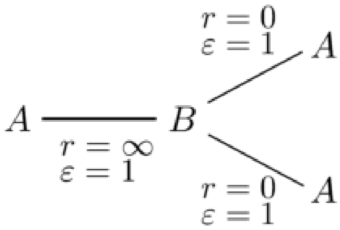
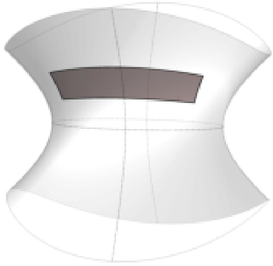
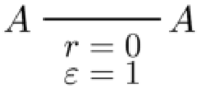
Таблица 2. Лиувиллева классификация софокусных геодезических биллиардов на однополостном гиперболоиде

Номер	Область	Меченая молекула биллиарда	тип Q^3
1			$S^1 \times S^2$

2			S^3
3			S^3
4			S^3
5			S^3
6			S^3
7			S^3

<table>
<tr><td>8</td><td></td><td>
</td><td>$S^1 \times S^2$</td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td>
</td><td>S^3</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td>
</td><td>S^3</td></tr>
<tr><td>11</td><td></td><td>
</td><td>S^3</td></tr>
<tr><td>12</td><td></td><td>
</td><td>S^3</td></tr>
<tr><td>13</td><td></td><td>
</td><td>S^3</td></tr>
</table>

14		$A \underset{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}{\frac{\qquad\qquad}{}} A$	S^3
15		$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dash, "{\substack{r=\infty\\ \varepsilon=1}}"] & & A \arrow[dl, dash, "{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}"'] \\ & C_2 & \\ A \arrow[ur, dash, "{\substack{r=\infty\\ \varepsilon=1}}"'] & & A \arrow[ul, dash, "{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}"] \end{tikzcd}$	$S^1 \times S^2$
16		$A \underset{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}{\frac{\qquad\qquad}{}} A$	S^3
17		$A \underset{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}{\frac{\qquad\qquad}{}} A$	S^3
18		$\begin{tikzcd} & & A \\ A \arrow[r, dash, "{\substack{r=\infty\\ \varepsilon=1}}"'] & B \arrow[ur, dash, "{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}"] \arrow[dr, dash, "{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}"'] & \\ & & A \end{tikzcd}$	S^3
19		$\begin{tikzcd} & & A \\ A \arrow[r, dash, "{\substack{r=\infty\\ \varepsilon=1}}"'] & D_1 \arrow[ur, dash, "{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}"] \arrow[r, dash, "{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}"] \arrow[dr, dash, "{\substack{r=0\\ \varepsilon=1}}"'] & A \\ & & A \end{tikzcd}$	S^3

20			S^3
21			S^3

2.3.4 Лиувиллева классификация биллиардов на двуполостном гиперболоиде

Согласно предложению 2.1.3 существует взаимно однозначное соответствие между софокусными геодезическими биллиардными столами на двуполостном гиперболоиде и плоскими областями, ограниченными софокусными квадриками. Однако справедливо более сильное утверждение.

Предложение 2.3.5. *Существует взаимно однозначное соответствие между софокусными геодезическими биллиардами на двуполостном гиперболоиде и плоскими биллиардами, ограниченными софокусными квадриками. Софокусному геодезическому биллиарду на двуполостном гиперболоиде отвечает лиувиллево эквивалентный биллиард в плоской области, ограниченной софокусными квадриками, и наоборот.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{Z}^2$ — биллиардный стол на двуполостном гиперболоиде параметра λ_0, а f — отображение, построенное в предложении 2.1.3. Согласно формулам 1.5 уравнения движения биллиарда внутри $\mathcal{Z}^2$ в эллиптических координатах λ_1, λ_2 на совместном уровне первых интегралов $H = h, \Lambda = \tilde{\lambda}$ записываются следующим образом.

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{h(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - a)}\sqrt{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)(\tilde{\lambda}-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_1)} \\ \dot{\lambda}_2 = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{h(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - a)}\sqrt{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(b-\lambda_2)(\tilde{\lambda}-\lambda_2)(\lambda_0-\lambda_2)} \end{cases} \tag{2.1}$$

Однако $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \lambda_0 < a$. Поэтому убрав из последней системы множители $\lambda_0 - \lambda_i$, $a - \lambda_i$

(они ненулевые), мы не изменим топологию слоения Лиувилля получившейся системы. В результате мы получим следующие уравнения.

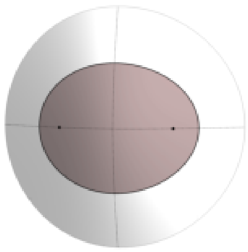
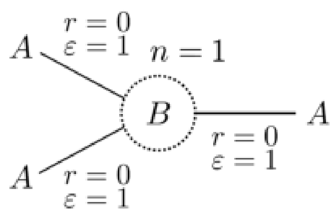
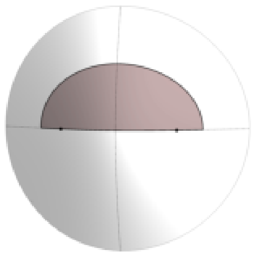
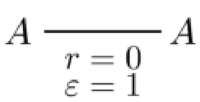
$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{h(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)(\tilde{\lambda}-\lambda_1)} \\ \dot{\lambda}_2 = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{h(b-\lambda_2)(b-\lambda_2)(\tilde{\lambda}-\lambda_2)} \end{cases} \tag{2.2}$$

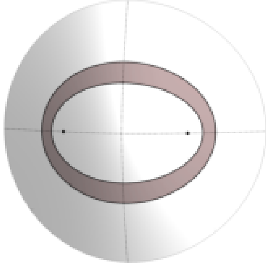
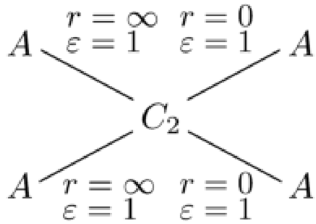
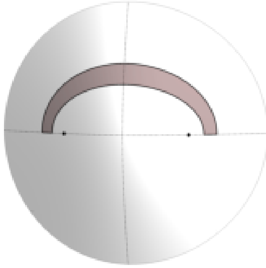
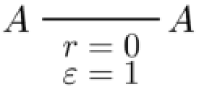
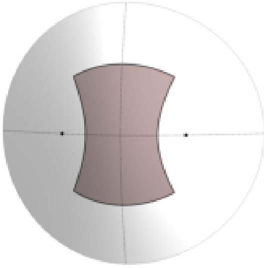
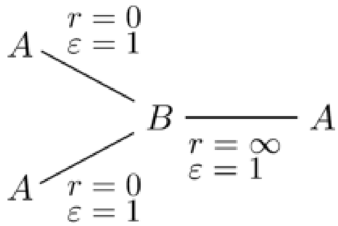
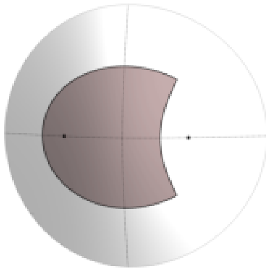
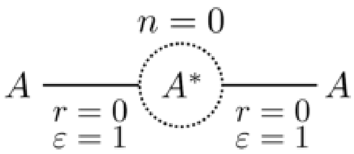
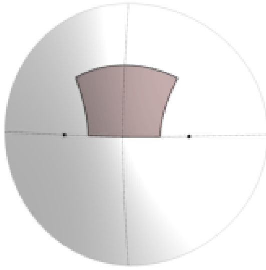
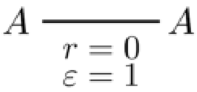
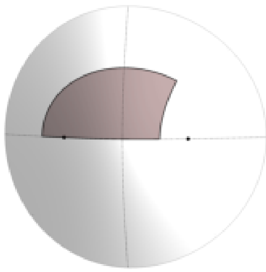
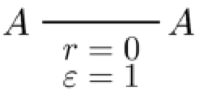
Однако именно так выглядит система в эллиптических координатах, описывающая геодезический поток на плоскости. Поскольку отображение f задает диффеоморфизм между столами $\mathcal{Z}$ и $f(\mathcal{Z})$, переход от системы 2.1 к системе 2.2 реализует послойный гомеоморфизм фазовых пространств (и изоэнергетических поверхностей) биллиардов внутри $\mathcal{Z}$ и $f(\mathcal{Z})$ с сохранением ориентации критических окружностей. Таким образом, биллиарды внутри $\mathcal{Z}$ и $f(\mathcal{Z})$ являются лиувиллево эквивалентными. $\square$

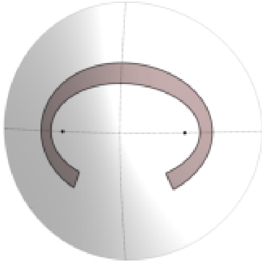
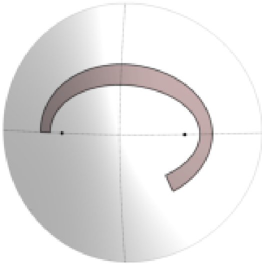
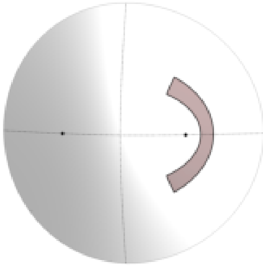
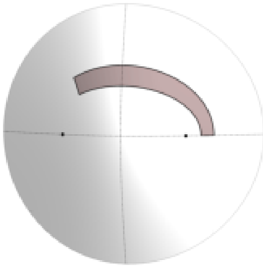
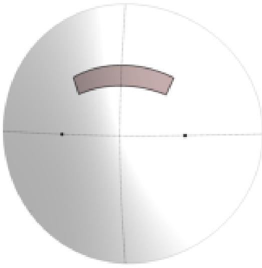
Таким образом, с точки зрения топологии слоений Лиувилля софокусные биллиарды на плоскости и на однополостном гиперболоиде устроены одинаково. Следовательно, мы можем применить результат В. В. Ведюшкиной [7] классификации плоских биллиардов, ограниченных софокусными квадриками.

Ниже приведена таблица, в строках которой указаны все комбинаторно неэквивалентные столы на двуполостном гиперболоиде, инварианты Фоменко-Цишанга соответствующих биллиардов, а также классы гомеоморфности изоэнергетических 3-поверхностей.

Таблица 3. Лиувиллева классификация софокусных геодезических биллиардов на двуполостном гиперболоиде

Номер	Область	Меченая молекула биллиарда	тип Q^3
1			S^3
2			S^3

3			$S^2 \times S^1$
4			S^3
5			S^3
6			S^3
7			S^3
8			S^3

9		$A \underset{\varepsilon=1}{\overset{}{\underline{\quad r=\infty \quad}}} D_1$; $D_1 \overset{r=0,\ \varepsilon=1}{\text{———}} A$; $D_1 \overset{r=0,\ \varepsilon=1}{\text{———}} A$; $D_1 \overset{r=0,\ \varepsilon=1}{\text{———}} A$	S^3
10		$A \overset{r=\infty,\ \varepsilon=1}{\text{———}} B$; $B \overset{r=0,\ \varepsilon=1}{\text{———}} A$; $B \overset{r=0,\ \varepsilon=1}{\text{———}} A$	S^3
11		$A \overset{r=\infty,\ \varepsilon=1}{\text{———}} B$; $B \overset{r=0,\ \varepsilon=1}{\text{———}} A$; $B \overset{r=0,\ \varepsilon=1}{\text{———}} A$	S^3
12		$A \overset{r=0,\ \varepsilon=1}{\text{———}} A$	S^3
13		$A \overset{r=0,\ \varepsilon=1}{\text{———}} A$	S^3

2.4 Общая теорема классификации

Теорема 2.4.1 (Классификация геодезических биллиардов). *Пусть E — невырожденная квадрика из софокусного семейства, тогда (с точностью до лиувиллевой эквивалентности):*

1. *Если E — эллипсоид, то на нем существуют ровно 7 неэквивалентных биллиардов(см. таблицу пункта 2.2.3);*

2. *Если E — однополостный гиперболоид, то на нем существуют ровно 7 неэквивалентных биллиардов (см. таблицу пункта 2.3.3);*

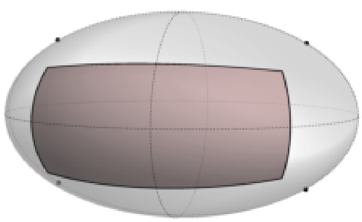
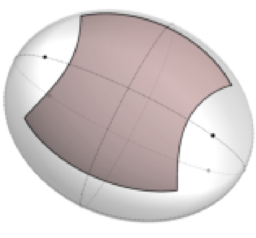
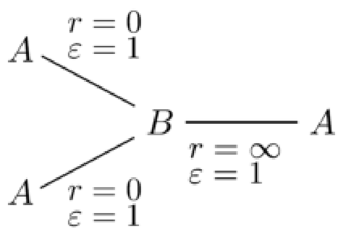
3. *Если E — двуполостный гиперболоид, то на нем существуют ровно 6 неэквивалентных биллиардов (см. таблицу пункта 2.3.4).*

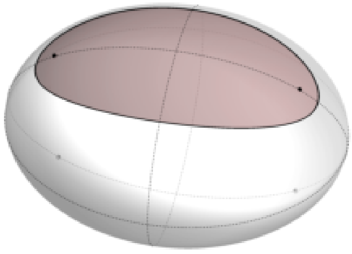
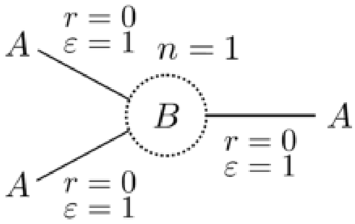
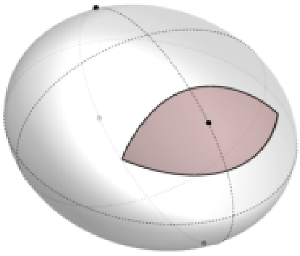
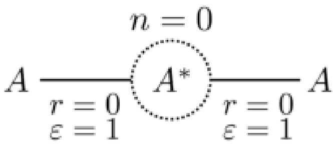
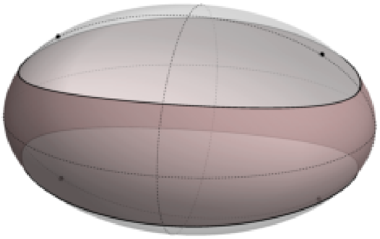
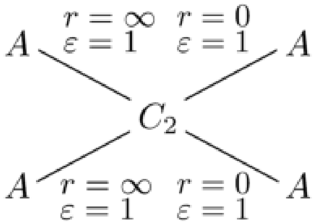
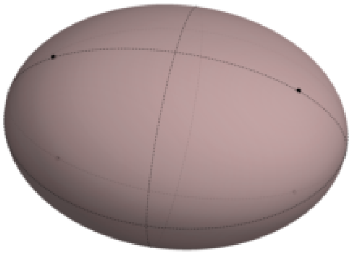
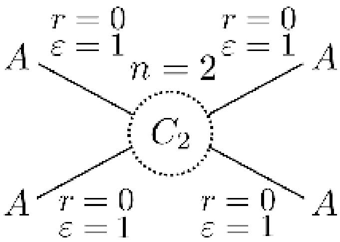
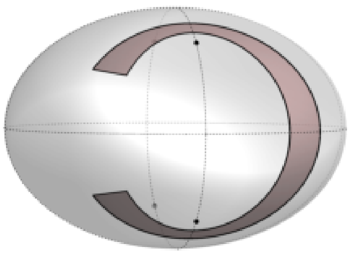
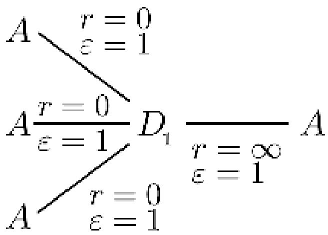
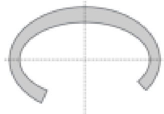
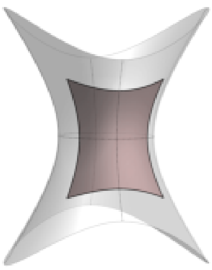
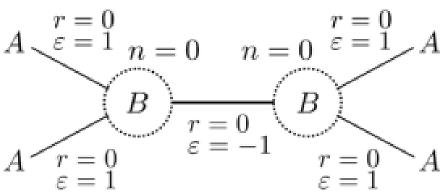
4. *Оказывается, что некоторые геодезические биллиарды, "живущие" на разных софокусных квадриках, являются лиувиллево эквивалентными. В итоге, на всех софокусных квадриках имеется ровно 10 лиувиллево не эквивалентных геодезических биллиардов.*

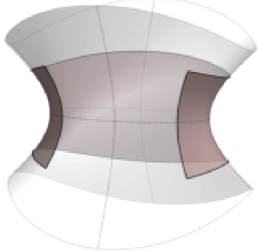
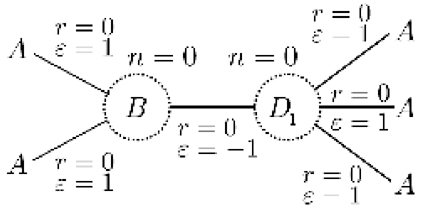
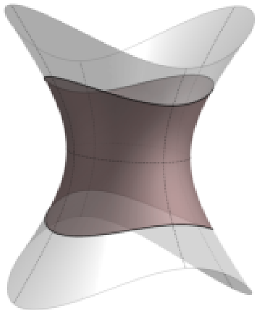
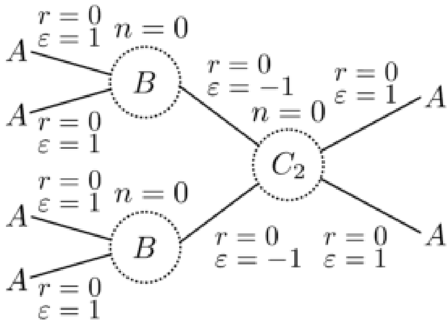
Найденные нами интегрируемые геодезические биллиарды на квадриках, лиувиллево эквививалентны некоторым другим известным системам из физики, механики и геометрии.

Теорема 2.4.2. *Следующие геодезические биллиарды на квадриках эквивалентны интегрируемым системам из физики, механики и геометрии:*

Таблица 4. Лиувиллева классификация софокусных геодезических биллиардов на квадриках

	Пример области	Меченая молекула биллиарда	Лиувиллево эквивалентная система
1		$A \underset{\substack{r=0 \\ \varepsilon=1}}{\text{———}} A$	Лагранж, Эйлер
2			Жуковский

3			Клебш, Соколов, Ковалевская - Яхья
4			Горячев - Чаплыгин - Сретенский
5			Эйлер, Клебш
6			Эйлер, Клебш, Соколов
7			Плоский софокусный биллиард на столе: 
8			Биллиард на эллипсоиде в простран- стве Минковского

9			Топологический биллиард с невыпуклыми склейками границ[1]
10			Топологический биллиард с невыпуклыми склейками границ

[1]Такие биллиарды описаны и исследованы В. В. Ведюшкиной в работе [10]

Глава 3

Трехмерные софокусные биллиарды

Настоящая глава посвящена изучению топологии слоений Лиувилля трехмерных софокусных биллиардов. Поскольку для ИГС с тремя и более степеней свободы не существует удобных (в плане вычислений и работы) классификационных инвариантов лиувиллевой эквивалентности, мы классифицируем все трехмерные софокусные биллиарды относительно грубой лиувиллевой эквивалентности. Для этого, снова следуя методу В. В. Ведюшкиной, на множестве трехмерных биллиардных столов мы введем отношение комбинаторной эквивалентности, сохраняющее грубую лиувиллеву эквивалентность соответствующих биллиардов. После чего докажем теорему классификации столов. А далее для каждого типа столов изучим слоение Лиувилля на изоэнергетических поверхностях соответствующих биллиардов. Как оказалось, существует тесная связь между трехмерными софокусными биллиардами, а также биллиардами на квадриках в поле упругой силы. Эта связь позволила описать слоение Лиувилля многих трехмерных биллиардов в окрестности слоя, содержащего особые точки типа седло-седло.

В этой главе через Λ_1 и Λ_2 мы будем обозначать параметры софокусных квадрик, которых касаются все звенья (или их продолжения) траектории-ломаной трехмерного софокусного биллиарда. Существование таких квадрик обеспечивает теорема 1.4.1. Мы будем предполагать, что $\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2$. Также будем считать, что все параметры семейства софокусных квадрик 1.2 положительны, иными словами, квадрика параметра 0 является эллипсоидом.

3.1 Комбинаторная эквивалентность трехмерных столов. Теорема классификации

По аналогии с предыдущей главой на множестве всех трехмерных биллиардных столов введем отношение комбинаторной эквивалентности. Для этого заметим, что тип каустики к траектории может измениться только в том случае, когда один из интегралов Λ_i примет значение b или c. В связи с этим определим отношение эквивалентности столов следующим образом.

Определение 3.1.1. Будем говорить, что трехмерные биллиардные столы $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ *комбинаторно эквивалентны*, если один из них может быть получен из другого последовательностью следующих преобразований:

- изменением сегмента границы путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик, при этом, значение изменяемого параметра λ при каждой деформации может равняться b или c только либо в начале, если объем стола уменьшается, либо в конце, если — увеличивается;

- симметрией относительно координатных плоскостей.

Теперь мы разрешаем стенкам биллиардных столов заходить на вырожденные квадрики в начале или конце деформации, если объем стола уменьшается или увеличивается соответственно. Такое преобразование не изменит топологию слоения Лиувилля соответствующего биллиарда. Действительно, если стенка границы стола лежит на вырожденной квадрике параметра c (или b), то, когда один из параметров каустик Λ_i примет значение c (или b), в точках этой стенки отражение заменится на касание. А это значит, что бифуркация, соответствующая уровню $\Lambda_i = c$ (или b), не изменит топологию слоения Лиувилля вблизи этой стенки. Иными словами, слоение Лиувилля такого биллиарда будет абсолютно таким же как у биллиарда внутри стола, полученного из данного отделением стенки (вместе с ее малой окрестностью) от вырожденной квадрики.

Теорема 3.1.1 (Классификация трехмерных биллиардных областей)**.** *Существует в точности* 35 *классов комбинаторно неэквивалентных трехмерных биллиардных столов. Все они представлены в таблице пункта 3.4*

Доказательство. Пусть $\mathcal{Z}$ — трехмерный биллиардный стол. Поскольку $\mathcal{Z}$ — компакт, он лежит внутри некоторого эллипсоида, входящего в состав его границы. В силу определения комбинаторного отношения эквивалентности без ограничения общности можем считать, что эллипсоид E, заданный уравнением $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} = 1$, является квадрикой наименьшего параметра, входящей в состав границы стола $\mathcal{Z}$. При этом, плоскости Oxy, Oxz (они же вырожденные квадрики параметров c и b) не содержат гладких граней границы $\mathcal{Z}$.

Разрежем компактную область, ограниченную эллипсоидом E, по эллиптическому кольцу $\left\{(x, y, 0) \middle| \dfrac{x^2}{a-c} + \dfrac{y^2}{b-c} > 1\right\}$. На рисунке 3.1.1 темно-серым цветом выделен участок разреза, а на 3.1.2 изображена фигура, полученная в результате.

Заметим, что в силу ортогональности эллиптических координат после разреза эллипсоид E перейдет в две поверхности, гомеоморфные основаниям некоторого цилиндра, а уча-

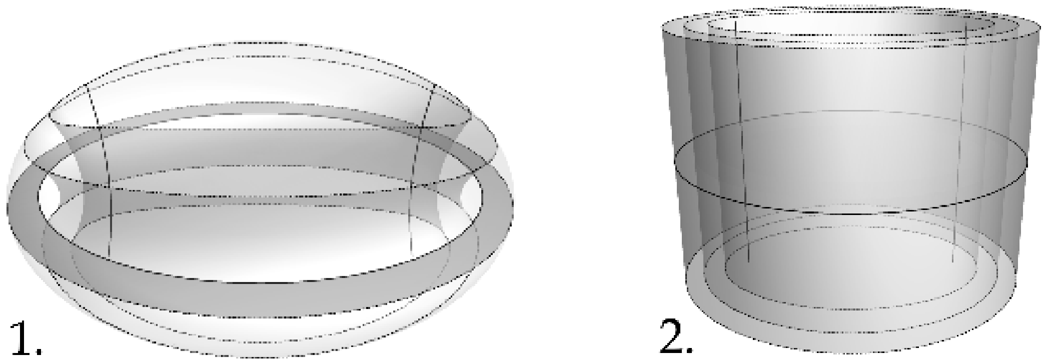


Рис. 3.1: 1. Эллипсоид, пересеченный софокусными однополостными гиперболоидами. Черными сплошными линиями выделены фокальные кривые $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$. Более темным серым цветом показан участок разреза; 2. Эллипсоид после разреза с соответствующими выделенными кривыми. Боковая поверхность цилиндра — участок разреза после разрезания.

сток разреза трансформируется в его боковую поверхность. Действительно, построим гомеоморфизм φ замкнутого множества, полученного в результате разреза, и замкнутой области, ограниченной цилиндром K.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ цилиндр K с боковой поверхностью

$$C_K = \left\{(x, y, z) \Big| \frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1, z \in [-1, 1]\right\}$$

и введем в замкнутой области, ограниченной им, координаты (μ_1, μ_2, z), где μ_1 и μ_2 — эллиптические координаты семейства $\widehat{Q}_\mu$ софокусных квадрик на плоскости Oxy, заданного уравнением $\dfrac{x^2}{a-\mu} + \dfrac{y^2}{b-\mu} = 1$. Произвольной точке P с эллиптическими координатами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, лежащей в полупространстве $z \geqslant 0$, но не принадлежащей участку разреза, сопоставим точку $\varphi(P)$ внутри цилиндра K с координатами $\mu_1 = \lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_3$, $z = 1 - \dfrac{\lambda_1}{c}$, при этом уточнив, что знаки декартовых координат (x, y, z) у точек P и $\varphi(P)$ должны совпадать. Если точка P, лежащая в полупространстве $z \leqslant 0$, не принадлежит участку разреза и имеет эллиптические координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, то сопоставим ей точку $\varphi(P)$ с координатами $\mu_1 = \lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_3$, $z = \dfrac{\lambda_1}{c} - 1$, сделав аналогичное уточнение про знаки эллиптических координат.

Точки множества разреза при разрезании удваиваются. Поэтому отображение φ можно корректно доопределить по непрерывности на эти удвоенные точки. Тем самым, мы построим гомеоморфизм φ между замкнутым множеством, полученным в результате разреза, и замкнутой областью, ограниченной цилиндром K. При этом, возникает естественное отображение f из замкнутой области внутри цилиндра K в замкнутую область внутри эллипсоида E, которое определяется так. Произвольной точке P цилиндра K сопоставляется точка $\varphi^{-1}(P)$, расположенная в "разрезанной" области, лежащей внутри эллипсоида E. Избавимся от разреза, применив обратную операцию — склейку. В результате точка $\varphi^{-1}(P)$ будет находиться внутри (или на границе) эллипсоида E. Эту точку мы и обозначим через $f(P)$.

Заметим, что выбранная система координат внутри цилиндра ортогональна и биллиардные столы перейдут в конечные дизъюнктные объединения прямых произведений плоских биллиардных столов, не заходящих на фокальную ось, и отрезков. Таким образом, мы выпрямили первую эллиптическую координату.

Далее можно сделать разрез цилиндра K по множеству $\{(x, 0, z) : |x| > \sqrt{a^2 - b^2}\}$ и показать, что с помощью такого преобразования координаты μ_1 и μ_2 выпрямляются, а получившееся в результате разреза множество будет гомеоморфно прямоугольному параллелепипеду. При этом, координаты (μ_1, μ_2, z) перейдут в декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, а биллиардные столы — в конечный набор непересекающихся прямоугольных параллелепипедов. А значит, можно классифицировать биллиардные столы, рассматривая их образы после двух разрезов. Однако такой способ является более трудным. Мы воспользуемся другим подходом.

Множество $f^{-1}(\mathcal{Z})$, где f — отображение, построенное выше, назовем *биллиардным столом внутри* K. Перенесем отношение эквивалентности с трехмерных биллиардных столов на столы внутри K и будем классифицировать эти столы относительно “перенесенной” эквивалентности.

Рассмотрим все биллиардные столы семейства $\widehat{Q}_\mu$, у которых наименьший параметр софокусной квадрики, входящей в состав границы, равен c. И выберем из них те, что не содержат граничных дуг на фокальной прямой. Посмотрим на взаимное расположение прямой $y = 0$ и участков границы стола, соответствующих квадрике $\dfrac{x^2}{a-c} + \dfrac{y^2}{b-c} = 1$. Как оказалось, существует в точности 5 таких различных расположений. Все они находятся простым перебором с использованием теоремы классификации плоских биллиардных столов, доказанной В. В. Ведюшкиной в работе [7], и изображены на рисунках 3.2. Заметим, что первой, четвертой и пятой картинкам соответствуют по два неэквивалентных стола, в то время как оставшимся двум — по одному. При этом, граница стола, отвечающего пятой картинке несвязна. И если допустить плоскому биллиардному столу быть несвязным, то картинка 3 дает еще два различных варианта расположения стола.

Теперь перейдем к перебору всех неэквивалентных биллиардных столов $f^{-1}(\mathcal{Z})$ внутри цилиндра K, используя рассуждения выше. Сначала предположим, что существует эллипсоид из заданного семейства софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$ такой, что стол $\mathcal{Z}$ не лежит внутри него. Этот случай разбивается на 2 неэквивалентных подслучая: $\mathcal{Z}$ лежит в обеих компонентах связности, разбиваемых плоскостью $z = 0$; $\mathcal{Z}$ лежит только в одной компоненте связности. Разберем подробно первый подслучай. В силу рассуждений выше нетрудно видеть, что $f^{-1}(\mathcal{Z})$ разбивается на 2 компоненты связности, при этом каждая из них — прямое произведение плоского биллиардного стола на отрезок. Боковые границы этих компонент симметричны относительно плоскости $z = 0$. А стало быть, первый вариант расположения границы плоского стола (см. рис 3.2) определяет три неэквивалентных трехмерных стола,

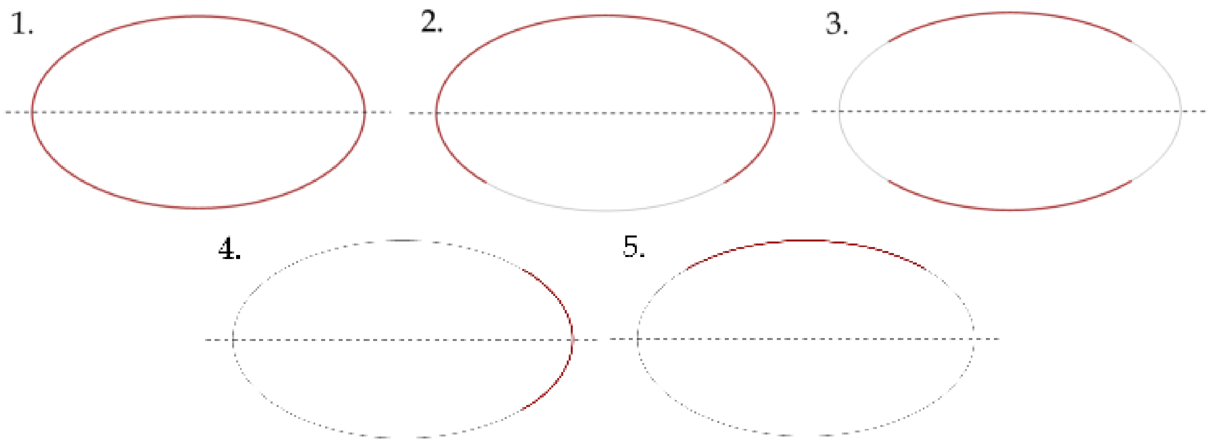


Рис. 3.2: Различные неэквивалентные положения внешней границы плоского биллиардного стола относительно фокальной прямой. Считаем, что граничные дуги стола не лежат на линии фокусов.

второй вариант — в точности один, третий — снова три ввиду связности стола, четвертый и пятый — снова по три. В итоге получаем 13 типов неэквивалентных столов. Во втором подслучае множество $f^{-1}(\mathcal{Z})$ лежит в одном из полупространств $z \geqslant 0$, $z \leqslant 0$ и представляет собой прямое произведение плоского биллиардного стола и отрезка. Поэтому первый вариант расположения границы плоского стола определяет два неэквивалентных трехмерных стола, второй и третий варианты — по одному, четвертый — снова два, пятый — два. Однако один из трехмерных столов, определяемых пятым вариантом, будет эквивалентен столу, наследуемому из третьего варианта расположения границы. Поэтому получаем 7 неэквивалентных биллиардных столов.

Пусть теперь стол $\mathcal{Z}$ лежит пересекается с любым софокусным эллипсоидом, лежащим внутри E. Тогда рассмотрим 2 подслучая: когда боковая граница лежит на границе K и когда она не лежит там. В обоих $f^{-1}(\mathcal{Z})$ будет прямым произведением плоского биллиардного стола и отрезка. Первый подслучай определяет 8 типов неэквивалентных столов, а второй — в точности 7. Суммарно получаем ровно 35 типов неэквивалентных биллиардных столов. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Из этой теоремы заключаем одно важное следствие, которое получается простым перебором неэквивалентных столов.

Следствие 3.1.1. *Всякий трехмерный софокусный биллиардный стол гомеоморфен либо замкнутому трехмерному диску, т.е. $\overline{D}^3$, либо прямому произведению окружности и замкнутого двумерного диска, т.е. $\overline{D}^2 \times S^1$, либо прямому произведению отрезка и двумерной сферы, т.е. $\overline{D}^1 \times S^2$.*

3.2 Бифуркационная диаграмма. Регулярные слои и 1-перестройки торов Лиувилля

Как было отмечено при доказательстве теоремы 3.1.1 любой трехмерный биллиардный стол, ограниченный софокусными квадриками, обязан лежать внутри некоторого софокусного эллипсоида. Мы снова будем предполагать, что наименьший параметр эллипсоида, входящего в состав границы биллиардного стола равен нулю.

Рассмотрим *изоэнергетическую поверхность* $Q_h^5 = \{(x, v) \in M^6 | H = h\}$, где $h > 0$. Заметим, что при различных $h > 0$ топология слоения Лиувилля на Q_h^5 будет одинаковой. Это так, поскольку при изменении энергии траектория частицы не меняется. Меняется лишь время движения вдоль траектории. На изоэнергетической поверхности рассмотрим отображение $\mathcal{F} : Q_h^5 \mapsto \mathbb{R}^2$, сопоставляющее точке x из Q_h^5 значения интегралов $\Lambda_1(x)$ и $\Lambda_2(x)$. Отображение $\mathcal{F}$ есть не что иное, как отображение момента. Опишем его образ.

Предложение 3.2.1. *Для трехмерного биллиардного стола образ отображения момента $\mathcal{F}$ есть пятиугольник, изображенный на рисунке 3.3. Величины ξ_1, ξ_2 и ξ_3 изменяются на полуинтервалах $[c, b)$, $(b, a]$ и $(c, b]$ соответственно и зависят от комбинаторного устройства трехмерного стола.*

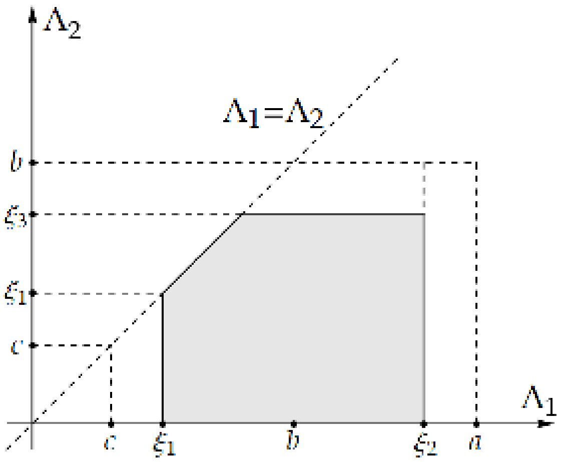


Рис. 3.3: Общий вид образа отображения момента $\mathcal{F} : Q_h^5 \mapsto \mathbb{R}^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$ (выделен серым цветом).

Доказательство. Обозначим через ξ_1 инфимум второй эллиптической координаты на столе, через ξ_2 — супремум третьей, а через ξ_3 — супремум второй. Теперь обратимся к формулам 1.5 (напомним, что $Hz^2 - F_1 z + F_2 = H(z - \Lambda_1)(z - \Lambda_2)$). Если $\Lambda_2 \in [0, c]$, то $\Lambda_1 \in [c, a]$ (см. следствие 1.4.3). Если $\Lambda_1 \in [c, b]$, то уравнения 1.5 задают движение в области, у которой вторая эллиптическая координата меняется на отрезке $[c, \Lambda_1]$. Поэтому если $\Lambda_1 < \xi_1$, то движение внутри и на границе стола $\mathcal{Z}$ невозможно. Аналогичная ситуация происходит, когда Λ_1 изменяется на отрезке $[b, a]$ и $\Lambda_1 > \xi_2$.

Пусть теперь $\Lambda_2 \in [c, b]$, тогда аналогично Λ_1 не может принадлежать полуинтервалам $[c, \xi_1)$ и $(\xi_2, a]$. Однако интеграл Λ_2 не может принимать значения из полуинтервала $(\xi_3, b]$, поскольку уравнения 1.5 задают область возможного движения, внутри которой вторая эллиптическая координата изменяется на отрезке $[\Lambda_2, \min\{b, \Lambda_1\}]$. А такая область не пересекается со столом $\mathcal{Z}$ ввиду его комбинаторного устройства. Предложение доказано. $\square$

Замечание 3.2.1. Точка с координатами (b, c) лежит внутри образа отображения момента $\mathcal{F}$ любого трехмерного софокусного биллиарда.

Следствие 3.2.1. *В случае общего положения область возможного движения биллиарда внутри эллипсоида имеет один из четырех видов, изображенных на рисунке 3.4. Для того чтобы описать области возможного движения биллиарда внутри произвольного трехмерного софокусного стола $\mathcal{Z}$, необходимо пересечь $\mathcal{Z}$ с областями возможного движения биллиарда внутри эллипсоида, полуоси которого являются наибольшими среди всех софокусных эллипсоидов, входящих состав границы стола $\mathcal{Z}$.*

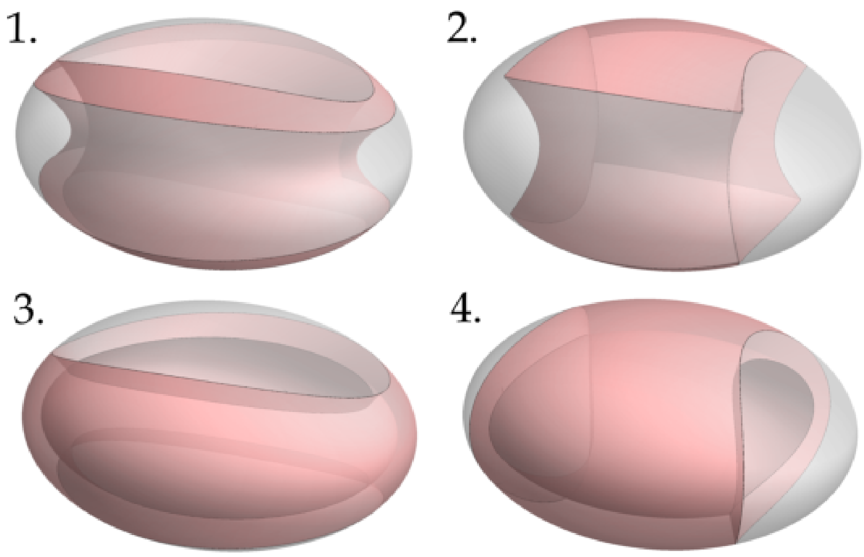


Рис. 3.4: Области возможного движения общего положения биллиарда внутри эллипсоида.

Поскольку система биллиарда, вообще говоря, является кусочно-гладкой, а не гладкой, мы не можем полноценно пользоваться стандартным определением бифуркационной диаграммы. Поэтому мы вынуждены самостоятельно ввести ее определение для трехмерных биллиардов. Сделаем несколько предварительных замечаний.

1. *Если биллиардный стол лежит в одном из полупространств $z \leqslant 0$, $z \geqslant 0$, то смена типа каустики параметра Λ_2 с эллипсоида на однополостный гиперболоид никак не должна повлиять на топологию слоения Лиувилля. Действительно, согласно формулам 1.5 в плоскости $z = 0$ происходит склейка нескольких касательных векторов. Однако система,* *вообще говоря, “не почувствует” ее, поскольку такой биллиардный стол либо не содержит участков этой плоскости, либо содержит, но в качестве гладких граней границы, отражение от которых при $\Lambda_2 = c$ меняется на касание.*

2. *Аналогично, если биллиардный стол лежит в одном из полупространств $y \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, смена типа каустики параметра Λ_1 с однополостного гиперболоида на двуполостный никак не должна повлиять на топологию слоения Лиувилля.*

3. *Непустые слои в системе могут появиться или исчезнуть лишь на тех уровнях, где одна из каустик-квадрик входит в состав границы стола. Пусть стенка биллиардного стола лежит на невырожденной квадрике параметра $\lambda \neq 0$. Эта стенка входит в состав границы стола вместе со своей малой односторонней окрестностью, точки которой лежат на софокусных квадриках с параметрами либо строго большими λ, либо строго меньшими. Обозначим через σ знак этого неравенства: $+$, если больше, и $-$, если меньше. Условие появления нового слоя, отвечающего рассматриваемой стенке, эквивалентно тому, что найдется достаточно малое число $\varepsilon > 0$, такое, что отрезок $[\lambda, \lambda + \sigma\varepsilon]$ пересекал бы множество решений неравенства $V(z) = (a - z)(b - z)(z - \Lambda_1)(z - \Lambda_2)$ при некоторых H, Λ_1, Λ_2 только в точке λ. Это, действительно, так, поскольку многочлен $V(z)$ (с точностью до положительной константы) располагается под корнем в формуле уравнений движения 1.2, и промежутки, на которых $V(z) \geqslant 0$, определяют область возможного движения материальной точки. Следующее предложение является критерием возникновения (или исчезновения) слоев на стенке стола, отвечающей невырожденной квадрике.*

Предложение 3.2.2. *Пусть $\lambda \in (0, c) \cup (c, b) \cup (b, a)$, $\sigma = \pm 1$. Тогда для пары (Λ_1, Λ_2) из пятиугольника с вершинами $(c, 0)$, (c, c), (b, b), (a, b), $(a, 0)$ найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$, такое, что множество решений неравенства $V(z) \geqslant 0$, где $V(z) = (a - z)(b - z)(z - \Lambda_1)(z - \Lambda_2)$, пересекает отрезок $[\lambda, \lambda + \sigma\varepsilon]$ лишь в точке λ, в том и только том случае, когда выполнено одно из следующих условий.*

- $\Lambda_2 = \lambda \in (0, c)$, $\sigma = 1$
- $\Lambda_1 = \lambda \in (c, b)$, $\sigma = 1$
- $\Lambda_2 = \lambda \in (c, b)$, $\sigma = -1$
- $\Lambda_1 = \lambda \in (b, a)$, $\sigma = -1$

Доказательство. Решением неравенства $V(z) \geqslant 0$ является объединение нескольких отрезков, концы которых — корни $V(z)$, т.е. числа $a, b, c, \Lambda_1, \Lambda_2$. Значит, если отрезок $[\lambda, \lambda + \sigma\varepsilon]$ пересекает множество решений неравенства $V(z) \geqslant 0$ только в точке λ и при этом $\lambda \neq a, b, c$, то либо $\lambda = \Lambda_1$, либо $\lambda = \Lambda_2$. Далее, пробегаясь по всем возможным расположениям Λ_1 и Λ_2 относительно констант a, b, c, простым перебором всех возможных конфигураций отрезка $[\lambda, \lambda + \sigma\varepsilon]$ получаем искомый список вариантов. $\square$

С учетом оговорок **1 – 3** определим бифуркационную диаграмму трехмерного софокусного биллиарда.

Пусть Σ' — граница образа отображения момента $\mathcal{F}$ трехмерного софокусного биллиарда внутри стола $\mathcal{Z}$. Добавим к этому множеству отрезки $[(b,0),(b,\xi_3)]$, если стол $\mathcal{Z}$ не лежит ни в одном из полупространств $y \leqslant 0,\ y \geqslant 0$, и $[(\xi_1,c),(\xi_2,c)]$, если стол $\mathcal{Z}$ не лежит ни в одном из полупространств $z \leqslant 0,\ z \geqslant 0$. Далее для каждой грани границы $\mathcal{Z}$, лежащей на невырожденной софокусной квадрике параметра $\lambda \neq 0$, вычислим знак σ, как описано в пункте **3**. Если $\lambda \in (0,c)$ и $\sigma = -1$ или $\lambda \in (b,a)$ и $\sigma = 1$, то к множеству Σ' ничего добавлять не будем, поскольку на соответствующей стенке стола не будут появляться новые слои. Если λ и σ не удовлетворяют этим условиям, то воспользуемся результатом предложения 3.2.2 и найдем отвечающее этой паре i, такое, что на рассматриваемой стенке при $\Lambda_i = \lambda$ появляется новый слой. Тогда добавим к Σ' отрезок прямой $\Lambda_i = \lambda$, попавший в образ отображения момента. Полученное в результате множество обозначим через Σ и назовем *бифуркационной диаграммой*.

Бифуркационная диаграмма естественным образом определяет стратификацию образа отображения момента на двумерные страты (их принято называть *камерами*), одномерные страты — дуги диаграммы и нульмерные страты — ее вершины.

Одномерные и нульмерные страты будем называть *граничными*, если они лежат на границе образа отображения момента. В противном случае такие страты будем называть *внутренними*. Ниже в рамках настоящего параграфа мы опишем топологию слоения Лиувилля в окрестности слоев, отвечающих точкам двумерных и одномерных стратов. Описанию топологии слоения Лиувилля в окрестности слоев, отвечающих вершинам диаграммы, будет посвящен следующий параграф. Отметим, что во внутренних точках диаграммы седловые перестройки возможны в точке (b,c) или на 1-стратах, примыкающих к этой точке. Поэтому далее страты, лежащие на горизонтальных и вертикальных отрезках, проходящих через точку (b,c) мы будем называть *седловыми*. Во всех оставшихся внутренних точках бифуркационной диаграммы слои системы могут лишь появляться или исчезать. Поэтому точка (b,c) представляет для нас особый интерес.

Замечание 3.2.2. Если убрать отражение в системе, то получим геодезический поток в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, что функции H,Λ_1,Λ_2 останутся первыми интегралами этой системы, а бифуркационная диаграмма системы на неособой изоэнергетической поверхности будет иметь вид, представленный на рисунке 3.5. Заметим, что точка (b,c) входит в состав диаграммы. На самом деле, она отвечает особенности ранга 1 типа седло-седло.

Бифуркационная диаграмма, вообще говоря, не является инвариантом комбинаторной эквивалентности столов. К примеру, если биллиардный стол ограничен двумя эллипсоидами и двумя стенками однополостного гиперболоида, то малая деформация одной из гиперболи-

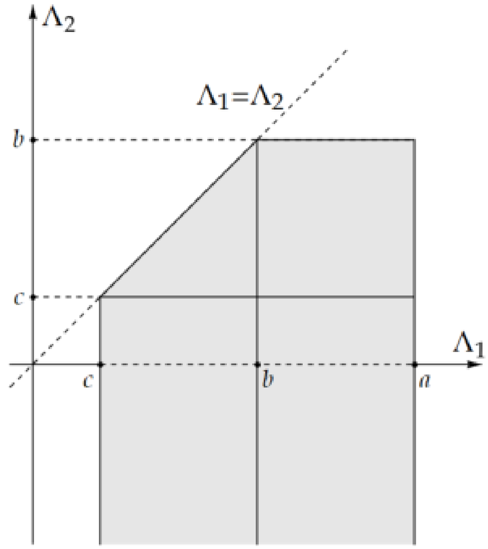


Рис. 3.5: Бифуркационная диаграмма геодезического потока в $\mathbb{R}^3$ на неособом уровне энергии для первых интегралов Λ_1 и Λ_2.

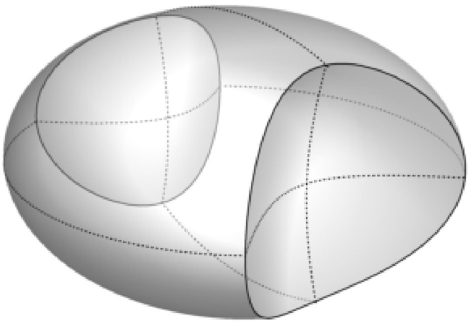
ческих стенок не изменит комбинаторный тип биллиардного стола, тем не менее, к бифуркационной диаграмме добавится еще одна стенка. Для того чтобы инвариантность сохранялась нужно перейти от образа отображения момента и бифуркационной диаграммы к базе слоения Лиувилля на Q_h^5 и бифуркационному комплексу, введенному А. Т. Фоменко в работе [14]. Однако нам будет удобнее работать с бифуркационными диаграммами.

Теорема 3.2.1. *Прообраз точки двумерного страта при отображении момента произвольного трехмерного софокусного биллиарда гомеоморфен одному или несвязному объединению нескольких трехмерных торов. Слоение Лиувилля в малой окрестности каждого такого тора тривиально.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему для одной серии биллиардных столов. Рассуждения для остальных столов будут аналогичными.

Рассмотрим стол типа 23 из классификационной таблицы пункта 3.4. Будем считать, что его границу образуют участки в точности двух софокусных квадрик: эллипсоид и двуполостный гиперболоид. На рисунке 3.6.1 изображен пример стола 23-го типа, а на картинке 3.6.2 серым выделена область значений отображения момента биллиарда внутри рассматриваемого стола, черными сплошными линиями на ней — бифуркационная диаграмма Σ.

Пусть точка L с координатами (μ_1, μ_2) принадлежит страту $(c, b) \times (0, c)$. Прообраз этой точки в Q_h^5 (относительно отображения момента $\mathcal{F}$) составляют все пары $(P, v) \in Q_h^5$, такие, что прямая с направляющим вектором v, проходящая через точку P, касается квадрик параметров μ_1 и μ_2. В рассматриваемом случае квадрика с параметром μ_1 — однополостный гиперболоид, а с параметром μ_2 — эллипсоид. Область возможного движения (далее ОВД), соответствующая точке L, состоит из двух компонент связности, симметричных друг другу



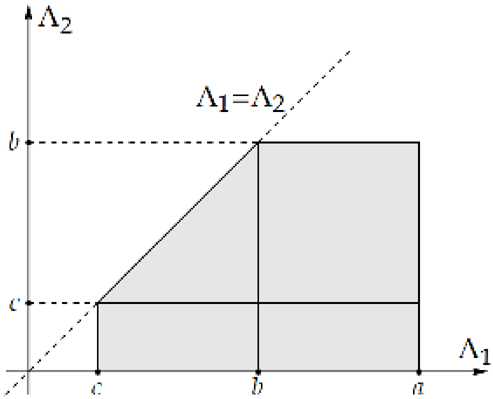


Рис. 3.6: 1. Биллиардный стол 23-го типа; 2. Серым цветом выделена область значений отображения момента $\mathcal{F} : Q^5_h \mapsto \mathbb{R}^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Черными сплошными линиями выделена бифуркационная диаграмма

относительно плоскости Oxz. Следовательно, прообраз точки L (при отображении момента $\mathcal{F}$) также состоит из двух компонент связности гомеоморфных друг другу ввиду очевидной симметрии системы и стола относительно плоскости $y = 0$. Обозначим через T_L ту компоненту связности, что отвечает участку ОВД, лежащему в полупространстве $y > 0$. А сам участок ОВД из полупространства $y > 0$ обозначим через D. Опишем расположение векторов скорости в точках множества D.

Каждой внутренней точке из области D отвечают 8 векторов скорости. Действительно, рассмотрим систему уравнений движения, записанную в эллиптических координатах (см. 1.1). Если P — внутренняя точка D с эллиптическими координатами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, не лежащая в координатных плоскостях, то $\lambda_1 \in (0, c)$, $\lambda_2 \in (c, b)$, $\lambda_3 \in (b, a)$ и согласно уравнениям 1.1 в точке P возникает 8 векторов скорости.

Пусть теперь P — внутренняя точка области D, расположенная в плоскости $x = 0$, но не лежащая в плоскости $z = 0$. Поскольку плоскость $x = 0$ в эллиптических координатах задается уравнением $\lambda_3 = a$, в точке P вырождается третья эллиптическая координата. При этом, остальные эллиптические координаты не вырождаются и соответствующие значения $\left|\dot{\lambda}_1\right|$ и $\left|\dot{\lambda}_2\right|$ отличны от нуля. Пара координат (λ_1, λ_2) в плоскости $x = 0$ при $y, z \neq 0$ является гладкой локальной системой координат. Следовательно, если мы спроектируем векторы скорости в рассматриваемых точках на касательные плоскости $T_{(0,y,z)}Oyz$, то в проекции получим по 4 вектора в каждой точке. Теперь покажем, что $|\dot{x}| \neq 0$. Для этого отметим, что в области невырожденности эллиптических координат справедливо равенство:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\dot{\lambda}_1 + \frac{\partial x}{\partial \lambda_2}\dot{\lambda}_2 + \frac{\partial x}{\partial \lambda_3}\dot{\lambda}_3.$$

При этом, если λ_3 устремить к a, выражения $\dfrac{\partial x}{\partial \lambda_1}\dot{\lambda}_1$ и $\dfrac{\partial x}{\partial \lambda_2}\dot{\lambda}_2$ будут стремиться к нулю. Значит, справедлива формула $\dot{x}^2 = \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{\partial x}{\partial \lambda_3}\dot{\lambda}_3\right)^2$. Воспользовавшись уравнениями движения и формулами перехода к эллиптическим координатам, получим:

$$\dot{x}^2 = \frac{2h\,(a-\mu_1)\,(a-\mu_2)}{(a-\lambda_1)\,(a-\lambda_2)}.$$

Поскольку в нашем случае $a > \mu_i$, заключаем, что $|\dot{x}| \neq 0$. А значит, точке P отвечают 8 векторов скорости. Оставшиеся случаи расположения точки P внутри области D рассматриваются по аналогии.

Теперь разберемся с точками на границе области D. Заметим, что в нашем случае граница D состоит из участков двух эллипсоидов, однополостного и двуполостного гиперболоидов. Каждой граничной точке, не являющейся точкой излома, в силу биллиардного отражения или касания интегральной квадрики отвечают в точности 4 пары неэквивалентных векторов. Точкам, где пересекаются две квадрики границы, отвечают 2 четверки неэквивалентных векторов, угловым точкам — 1 восьмерка.

Применим знания о расположении векторов скорости в D для описания топологии слоя T_L. Для этого введем обозначения векторов скорости во внутренних точках области D, не лежащих в плоскостях $x = 0$, $z = 0$. Эти плоскости разбивают D на 4 части. Рассмотрим произвольную точку P любой из этих 4 частей. Каждому вектору скорости в P (на заданном уровне первых интегралов) можно взаимно однозначно сопоставить тройку знаков его компонент в эллиптических координатах: $\left(\operatorname{sign}\dot{\lambda}_1, \operatorname{sign}\dot{\lambda}_2, \operatorname{sign}\dot{\lambda}_3\right)$. Используя эту кодировку векторов скорости, заполним таблицу обозначений.

	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$
$x>0$ $z>0$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
$x<0$ $z>0$	v_5	v_6	v_7	v_8	v_1	v_2	v_3	v_4
$x>0$ $z<0$	v_2	v_1	v_4	v_3	v_6	v_5	v_8	v_7
$x<0$ $z<0$	v_6	v_5	v_8	v_7	v_2	v_1	v_4	v_3

Отметим, что одному и тому же набору знаков в разных случаях соответствуют разные обозначения векторов. Поясним, почему выбрана именно такая нумерация. Пусть векторное поле v_i задавалось в полупространстве $x > 0$ набором знаков $(\pm,\pm,\pm)$, тогда при непрерывном переходе через плоскость $x = 0$ третья эллиптическая координата этого векторного поля поменяет свой знак. Следовательно, непрерывное продолжение векторного поля v_i в полупространство $x < 0$ будет задаваться набором знаков $(\pm,\pm,\mp)$. Таким образом определенные векторные поля v_i могут быть продолжены до непрерывных внутри области D.

Векторные поля $v_1, \dots, v_8$ разбивают слой T_L на 8 компонент связности, каждая из которых гомеоморфна замкнутой области D. Обозначим эти компоненты через $D_1, \dots, D_8$ соответственно. В силу биллиардного отражения, а также устройства D заключаем, что D_1 и D_2, D_3 и D_4, D_5 и D_6, D_7 и D_8 отождествляются на эллиптических границах, D_1 и D_4, D_2 и D_3, D_5 и D_7, D_6 и D_8 — на границах, отвечающих однополостным гиперболоидам, D_1 и D_5, D_2 и D_6, D_3 и D_7, D_4 и D_8 — на границах, отвечающих двуполостным гиперболоидам. При склейке D_{2k-1} с D_{2k} $(k = 1, \dots, 4)$ по эллиптическим границам получим четыре области гомеоморфных прямому произведению окружности и двумерного диска. При склейке полученных областей по граничным участкам двуполостных гиперболоидов получим два множества, гомеоморфных прямому произведению двумерного тора и отрезка. Склеив эти области по оставшимся участкам границ, получим один трехмерный тор. Таким образом, слой T_L гомеоморфен трехмерному тору. А поскольку все рассуждения мы проводили для одной из двух симметричных компонент области возможного движения, прообраз точки L при отображении $\mathcal{F}$ гомеоморфен несвязному объединению двух трехмерных торов. Таким образом, первую часть утверждения мы доказали.

Осталось отметить, что при малом непрерывном изменении точки L область возможного движения, отвечающая ей, не изменит свой тип, а векторные поля v_i будут непрерывно меняться. Значит, вблизи T_L слоение Лиувилля будет тривиальным.

Рассуждения в случае точек других двумерных стратов и оставшихся типов столов абсолютно аналогичны. Что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 3.2.3. Опишем еще одну идею доказательства теоремы выше. Заметим, что связная компонента области возможного движения, отвечающая небифуркационному значению интегралов, как правило, отделена от вырожденных софокусных квадрик. Это означает, что область возможного движения можно расслоить квадриками всех трех типов, и на слоях соответствующих расслоений расположение векторов скорости будет одинаковым. Эти три расслоения ОВД порождают три тривиальных расслоения соответствующего слоя системы над окружностью. Каждая из этих окружностей соответствует ограничению слоя системы на линии уровня эллиптических координат. Следовательно, слой есть прямое произведение трех окружностей, то есть трехмерный тор.

Теперь опишем топологию слоения Лиувилля в окрестности слоев, отвечающих одномерным стратам. Напомним, что через $\overline{D}^n$ мы обозначаем замкнутый n-мерный диск.

Теорема 3.2.2. *Пусть L — точка одномерного страта образа отображения момента произвольного трехмерного биллиарда, тогда*

1. *Если L — внутренняя точка, то малая окрестность отвечающего ей слоя послойно гомеоморфна прямому произведению вида $V^{(3)} \times S^1 \times \overline{D}^1$ или $T^3 \times \overline{D}^2$, где $V^{(3)}$ — один*

из следующих 3-атомов: A^*, B, C_2, D_1 — если точка L является седловой, и A — если неседловой.

2. *Если L — граничная точка, то малая окрестность отвечающего ей слоя послойно гомеоморфна прямому произведению вида $A^{(3)} \times S^1 \times \overline{D}^1$.*

Доказательство. Мы снова докажем теорему для биллиардного стола типа 23. Для столов других типов доказательство аналогичное.

Начнем с первого пункта теоремы. Пусть $L = (\mu_1, c)$, где $\mu_1 \in (c, b)$. Согласно предложению 1.4.4 прообраз точки L при отображении $\mathcal{F}$ составляют все пары (P, v), такие, что прямая, проходящая через точку P параллельно вектору v, касается однополостного гиперболоида параметра μ_1 и проходит через фокальный эллипс $\mathfrak{F}_1$.

Покажем, что поверхность уровня T_L, отвечающая точке L, представляет собой несвязное объединение двух комплексов $K \times S^1$, где K — особый слой 3-атома A^* (этот атом изображен на рисунке 1.2.3).

Область возможного движения материальной точки, отвечающая уровню L, состоит из двух компонент связности симметричных друг другу относительно плоскости Oxz. Рассмотрим ту, что расположена в полупространстве $y > 0$, и обозначим ее через D. Согласно формулам 1.2 в каждой внутренней точке множества D за исключением участка плоскости Oxy возникают 8 различных векторов скорости, на эллипсе $\mathfrak{F}_1$ — по 2 окружности таких векторов, в плоскости Oxy за исключением кривой $\mathfrak{F}_1$ — по 4 вектора, лежащих в этой плоскости. В силу отражения или касания интегральной квадрики на граничных поверхностях (за исключением участка плоскости $z = 0$) расположено по 4 вектора скорости, на граничных кривых — по 2, а в угловых точках — по одному.

Зная расположение векторов скорости, опишем топологию связной компоненты слоя T_L, отвечающей множеству D. Расслоим D на софокусные двуполостные гиперболоиды. Рассмотрим слой этого расслоения, соответствующий плоскости Oyz, с векторами, имеющими положительную координату $\dot{x}$. Такой слой в Q^5_h гомеоморфен особому слою 3-атома A^* (его проекция на плоскость $x = 0$ изображена на рисунке 3.7.2). Доказательство этого факта проводится в точности так же, как в теории плоских софокусных биллиардов (см, например, работу [7]).

Далее будем непрерывно перемещать этот слой с векторами вплоть до того, пока не сделаем полный оборот по всем слоям расслоения с соответствующими векторами. Поскольку на каждом таком слое с векторами система "устроена" одинаково, различные слои не пересекаются между собой и после полного обхода все точки и вектора возвращаются в исходное положение, прообраз точки L при отображении момента $\mathcal{F}$ гомеоморфен несвязному объединению двух комплексов $K \times S^1$, где K — особый слой 3-атома A^*.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ выбрано так, что отрезок $U_\varepsilon(L) = \mu_1 \times [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ пересекает бифуркационную диаграмму только при $\varepsilon = 0$. Рассмотрим прообраз этого отрезка при отображении момента $\mathcal{F}$. Благодаря тому, что рассматриваемый биллиардный стол можно расслоить на софокусные двуполостные гиперболоиды, прообраз интервала $U(L)$ при отображении $\mathcal{F}$ можно тривиально расслоить над окружностью, т.е. $\mathcal{F}^{-1}(U(L))$ представляется в виде несвязного объединения двух прямых произведений $V^3 \times S^1$, где V^3 — 3-комплекс. Более того, V^3 есть ограничение $\mathcal{F}^{-1}(U(L))$ на полуплоскость $x = 0, y > 0$ с векторами скорости, у которых $\dot{x} > 0$.

Пусть $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. При каждом t рассмотрим прообраз точки $(\mu_1, c+t)$, ограниченный на полуплоскость $x = 0, y > 0$ с касательными векторами, у которых $\dot{x} > 0$, спроектируем эти векторы на плоскость $x = 0$ в соответствующих точках и посмотрим на эволюцию расположения этих проекций при изменении параметра t (см. 3.7).

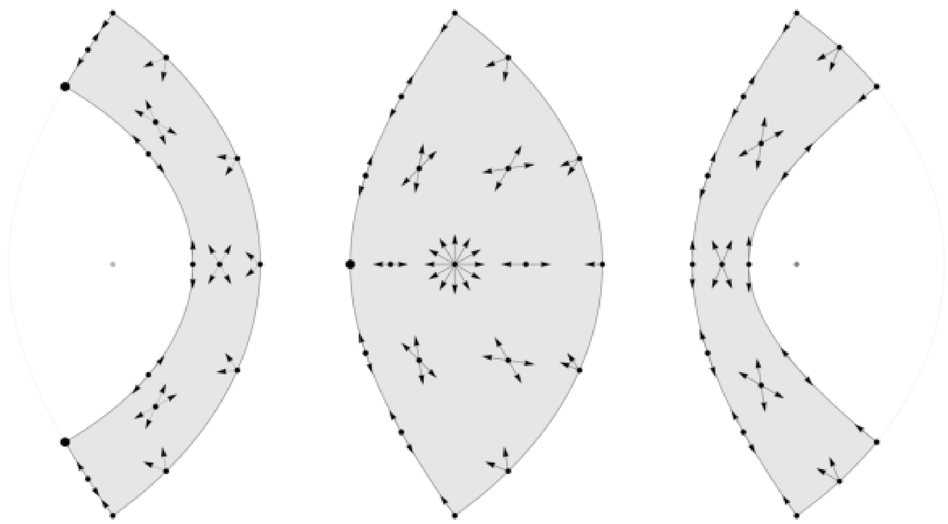


Рис. 3.7: Проекции векторов скорости на слое $x = 0$ при $t < 0$, $t = 0$, $t > 0$ (слева-направо).

Видим, что это изменение совпадает с эволюцией расположения касательных векторов для биллиарда внутри плоской области типа A_1 из работы В. В. Ведюшкиной [7], когда параметр Λ софокусной квадрики переходит через критическое значение. Действительно, покажем это аналитически.

Ограничим уравнения движения 1.2 на полуплоскость $x = 0, y > 0$ с условием $\dot{x} > 0$. В этой плоскости “живут” первая и вторая эллиптические координаты, в то время как третья равна a. Следовательно, уравнения движения примут вид

$$\dot{\lambda}_1 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-a)}\sqrt{h(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)(\lambda_1-\Lambda_1)(\lambda_1-\Lambda_2)},$$
$$\dot{\lambda}_2 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-a)}\sqrt{h(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)(\lambda_2-\Lambda_1)(\lambda_2-\Lambda_2)}.$$

Семейство софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$ индуцирует софокусные семейства в координатных плоскостях. В плоскости Oyz оно задается уравнением $\dfrac{y^2}{b-\lambda}+\dfrac{z^2}{c-\lambda}=1$. Координаты λ_1 и λ_2 являются эллиптическими для этого семейства.

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 \leqslant b < a$, мы можем избавиться в уравнениях выше от множителей $(a-\lambda_i)$, потому что растяжение координат вектора скорости не влияет на топологию слоения Лиувилля. Так как $\Lambda_1 \in (c, b)$, от сомножителя $\lambda_1 - \Lambda_1$ мы можем избавиться по аналогичной причине.

Заметим, что λ_2 меняется от c до $\Lambda_1 = \mu_1$. Мы можем убрать сомножитель $\lambda_2 - \Lambda_1$ предварительно указав, что движение будет происходить в области, расположенной в полуплоскости $y > 0$ и ограниченной эллипсом параметра 0, а также гиперболой параметра μ_1. Действительно, в таком случае касание гиперболической стенки заменяется на отражение от нее, а это преобразование не влияет на топологию слоения Лиувилля.

Итак, уравнения движения принимают вид

$$\dot{\lambda}_1 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{h(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)(\Lambda_2-\lambda_1)},$$
$$\dot{\lambda}_2 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{h(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)(\Lambda_2-\lambda_2)}.$$

Само движение происходит в плоской области, определяемой неравенством $y > 0$ и ограниченной эллипсом параметра 0, а также гиперболой параметра μ_1. Заметим, что система выше не что иное, как уравнения свободного движения материальной точки на плоскости, а Λ_2 есть параметр каустики. А поскольку движение происходит в области типа A_1 (см. работу В. В. Ведюшкиной [7]), комплекс V^3, действительно, гомеоморфен 3-атому A^*.

Непрерывно меняя координату μ_1 точки L так, чтобы $\mu_1 \times [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ не пересекал бы на другие стенки бифуркационной диаграммы, в прообразе отрезка $\mu_1 \times [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ в Q^5_h при отображении $\mathcal{F}$ будем получать прямые произведения вида $A^* \times S^1$. А поскольку любое расслоение над замкнутым диском является тривиальным, прообраз малой окрестности точки L (при отображении момента) гомеоморфен двум прямым произведениям $A^* \times S^1 \times \overline{D}^1$.

Для оставшихся внутренних точек одномерных стратов рассматриваемого биллиардного стола, а также для других типов столов рассуждения аналогичные. Таким образом, первый пункт теоремы полностью доказан.

Докажем второй пункт. Снова рассмотрим стол 23-го типа и точку $L = (\mu_1, 0)$ бифуркационной диаграммы, где $\mu_1 \in (b, c)$. Областью возможного движения, соответствующей этой точке, является несвязное объединение двух симметричных относительно плоскости $y = 0$ областей на эллипсоиде границы стола, каждая из которых ограничена двуполостным гиперболоидом (из границы стола) и однополостным гиперболоидом параметра μ_1. Ясно, что поверхность уровня T_L представляет собой несвязное объединение двух гомеоморфных друг другу двумерных комплексов. Покажем, что этим комплексом является двумерный тор T^2.

Рассмотрим компоненту связности области возможного движения, лежащую в полупространстве $y > 0$, и опишем расположение векторов скорости в точках этой компоненты. В каждой внутренней точке расположено ровно четыре вектора скорости, на граничных дугах в силу отражения, либо касания возникает два вектора скорости, в угловых точках — по одному вектору.

Расслоим рассматриваемую компоненту связности области возможного движения на софокусные двуполостные гиперболоиды. И рассмотрим слой этого расслоения, соответствующий плоскости $x = 0$, с векторами скорости, у которых $\dot{x} > 0$. Очевидно, что этот слой с векторами будет гомеоморфен окружности. Совершив полный обход по слоям расслоения (такой же обход как и в предыдущем пункте), мы вернемся в исходное положение: все точки и векторы скорости в них вернутся на свое место. Более того, на каждом слое при таком обходе мы будем получать окружность S^1. Таким образом, ограничение T_ξ на рассматриваемую компоненту области возможного движения гомеоморфно двумерному тору T^2. Следовательно, поверхность T_L гомеоморфна несвязному объединению двух торов.

Теперь покажем, что малая окрестность T_L гомеоморфна несвязному объединению двух прямых произведениям вида $A^{(3)} \times S^1 \times \overline{D}^2$, где $A^{(3)}$ — 3-атом A, а $\overline{D}^2$ — двумерный диск.

Выберем $\varepsilon > 0$, такое, что окрестность $U_\varepsilon(\mu_1, 0) = [\mu_1 - \varepsilon, \mu_1 + \varepsilon] \times [0, \varepsilon]$ пересекалась бы с бифуркационной диаграммой только по одной стенке. Зафиксируем $\mu_1' \in [\mu_1 - \varepsilon; \mu_1 + \varepsilon]$. Отрезок, соединяющий точки $(\mu_1', 0)$ и (μ_1', ε), запараметризуем так: (μ_1', t), где $t \in [0; \varepsilon]$. Поскольку рассматриваемый биллиардный стол обладает тривиальным расслоением на софокусные двуполостные гиперболоиды, чтобы найти прообраз этого отрезка при отображении момента $\mathcal{F}$, нам достаточно прямо умножить окружность S^1 на ограничение прообраза этого отрезка на слой $x = 0$ с векторами скорости, у которых $\dot{x} > 0$. Поскольку при всех t область возможного движения будет состоять из двух компонент связности, симметричных друг другу относительно плоскости $y = 0$, нам достаточно рассмотреть ту из них, что находится в полупространстве $y > 0$. Посмотрим на эволюцию этих векторов при изменении параметра t. Для этого мы снова спроектируем эти векторы на плоскость $x = 0$. Схематично изобразим эволюцию этих проекций (см. рис. 3.8).

Видим, что эта эволюция совпадает с эволюцией векторов скорости плоского биллиарда, внутри стола ограниченного эллипсом и одной ветвью софокусной с ним гиперболы, когда

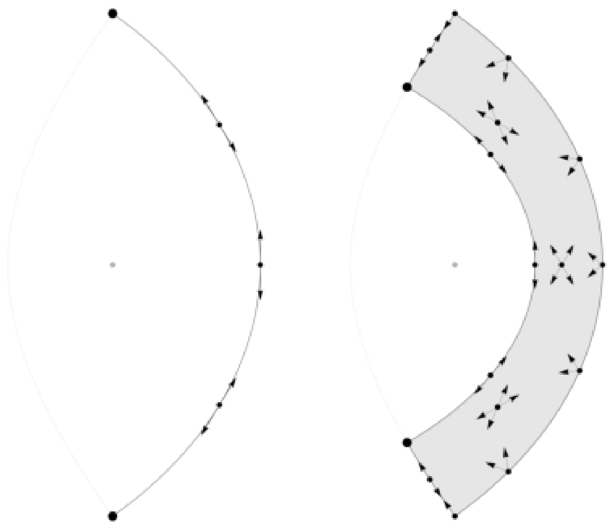


Рис. 3.8: Эволюция расположения проекций векторов скорости на слое $x = 0$. Слева изображен случай $t = 0$, справа — $t > 0$.

значение дополнительного интеграла принимает наименьшее значение. Согласно результатам работы В. В. Ведюшкиной [7] прообраз отрезка (μ_1, t), где $t \in [0; \varepsilon]$, ограниченного на слой $x = 0$ с векторами скорости, у которых $\dot{x} > 0$, гомеоморфен 3-атому A. Следовательно, прообраз самого отрезка гомеоморфен прямому произведению 3-атома A и окружности S^1. Поскольку области возможного движения состоят из двух компонент связности, а параметр μ_1 пробегает множество, гомеоморфное отрезку, прообраз окрестности $U_\varepsilon(\mu_1, 0)$ в Q^5_h при отображении момента $\mathcal{F}$ гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений вида $A^{(3)} \times S^1 \times \overline{D}^1$.

Для оставшихся внешних точек одномерных стратов рассматриваемого биллиардного стола, а также для других типов столов рассуждения будут аналогичными. Таким образом, теорема полностью доказана. □

В завершение параграфа заметим, что в точке (b, c) образа отображения момента $\mathcal{F}$ произвольного трехмерного софокусного биллиарда возникает круговая молекула — топологический инвариант особенности, соответствующей точке пересечения двух седловых отрезков (он нетривиален, если оба отрезка входят в бифуркационную диаграмму). Напомним, что *круговой молекулой* точки в образе отображения момента для системы с 2 степенями свободы называют молекулу (инвариант Фоменко) слоения Лиувилля на 3-границе инвариантной 4-окрестности прообраза этой точки. В нашем случае система имеет 3 степени свободы, но гамильтониан $H = h$ фиксирован. Тем самым, *круговой молекулой точки* (b, c) естественно считать инвариант слоения на 4-границе 5-окрестности прообраза этой точки. Поскольку каждая перестройка на такой границе оказывается гомеоморфна 3-атому, прямо умноженному на окружность, то круговую молекулу можно изобразить привычным образом.

В частности, круговая молекула точки (b, c) биллиарда внутри стола 23-го типа имеет вид, представленный на рисунке 3.9.

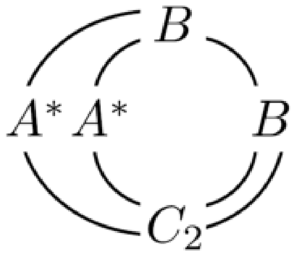


Рис. 3.9: Круговая молекула точки (b, c) для стола 23-го типа.

3.3 Нульмерные страты бифуркационной диаграммы и соответствующие 2-перестройки торов Лиувилля

Настоящий параграф посвящен описанию топологии слоения Лиувилля в окрестности тех слоев, которые соответствуют нульмерным стратам бифуркационной диаграммы. Ранее было отмечено, что наибольший интерес для нас представляет точка (b, c), если она является нульмерным стратом. Напомним, что седловые бифуркации в системе могут происходить только в слоях, отвечающих горизонтальному и вертикальному отрезкам, проходящим через точку (b, c). Остальные точки диаграммы соответствуют возникновению (исчезанию) слоев системы.

Часть информации о топологии слоения Лиувилля в окрестности слоя точки (b, c) (мы будем называть ее *точкой креста*) можно узнать из круговой молекулы в этой точке. Тем не менее, этой информации, как правило, недостаточно, для того чтобы полностью восстановить структуру слоения Лиувилля в окрестности соответствующего (b, c) слоя.

В первой части этого параграфа мы опишем способ, с помощью которого можно описать топологию слоения Лиувилля в окрестности слоя точки креста. Далее, во второй части мы опишем полулокальное устройство особенностей, отвечающих оставшимся 0-стратам бифуркационной диаграммы. Часть этих особенностей будет вырожденными. Вырожденные особенности соответствуют точкам (b, b) и (c, c).

3.3.1 Метод понижения степени свободы как основной инструмент исследования топологии слоения Лиувилля трехмерных биллиардов

При описании 1-перестроек торов Лиувилля мы пользовались следующим соображением. В случае, когда хотя бы один из параметров каустик Λ_i отличен от критического значения (т.е. от a, b или c), область возможного движения частицы (точнее говоря, любая связная компонента ОВД) обладает тривиальным расслоением невырожденными квадриками одного типа, т.е. внутри ОВД хотя бы одна из эллиптических координат отделена от критического значения. Далее, мы ограничивали систему на слои этого расслоения и убеждались, что на каждом таком слое система устроена "одинаково". В таком случае изучаемый слой представляется в виде прямого произведения окружности и некоторого двумерного комплекса, который связан с ограничением системы на слой расслоения.

Таким образом мы переходили к другой интегрируемой системе, но уже с меньшим числом степеней свободы. Однако система-ограничение может "физически" отличаться от исходной, например от трехмерного биллиарда мы можем перейти к геодезическому потоку на квадрике с потенциалом Гука. Оказывается, этот метод работает не только с регулярными слоями и 1-перестройками торов Лиувилля, но также со слоями, содержащими особые точки меньшего ранга. Будем называть такой прием *методом понижения степени свободы*. В следующем пункте мы покажем этот метод в работе.

3.3.2 Топология слоения Лиувилля в окрестности слоя точки (b, c)

Пусть бифуркационная диаграмма биллиарда внутри стола $\mathcal{Z}^3$ включает отрезки прямых $\Lambda_1 = b$, $\Lambda_2 = c$.

Можем ли мы применить метод понижения степени свободы, чтобы описать топологию слоения Лиувилля в окрестности точки креста? Областью возможного движения материальной точки, отвечающей точке (b, c), является весь биллиардный стол $\mathcal{Z}^3$. Поэтому если хотя бы одна эллиптическая координата на столе отделена от критического значения, то описанный метод сработает, иначе — нам придется модернизировать его. Следовательно, нам стоит разбить все биллиардные столы на следующие два класса.

Определение 3.3.1. Биллиардный стол D будем называть *отделимым*, если существует эквивалентный ему биллиардный стол D', на котором выполнено хотя бы одно из следующих неравенств: $\lambda_1 < c$, $\lambda_2 > c$, $\lambda_2 < b$, $\lambda_3 > b$. В противном случае стол будем называть *неотделимым*.

Замечание 3.3.1. Отделимость (неотделимость) корректно определена на классах эквивалентности столов.

Предложение 3.3.1. *Существует в точности два класса неэквивалентных неотделимых биллиардных стола: тип* 21 *и тип* 22 *из таблицы пункта 3.4. Представители этих классов изображены на рисунке 3.10.*

Доказательство. Это предложение доказать с помощью теоремы классификации столов 3.1.1 простым перебором по всем классам эквивалентности. □

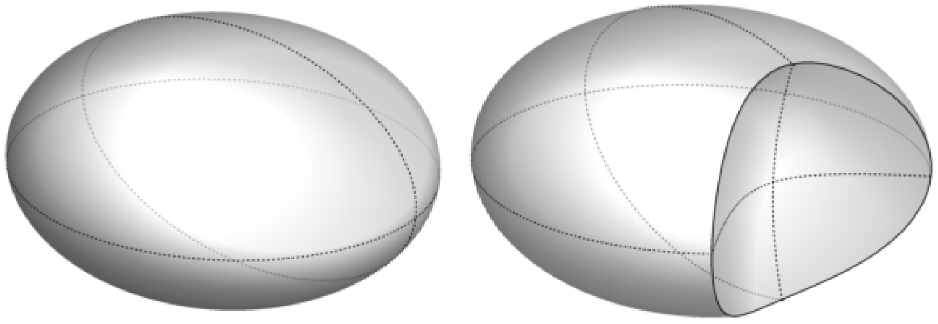


Рис. 3.10: Два неотделимых неэквивалентных биллиардных стола

Сначала мы опишем топологию слоения Лиувилля в окрестности слоя точки креста для отделимых столов. В силу определения комбинаторной эквивалентности можем считать, что $\partial\mathcal{Z}$ не содержит участков плоскостей Oxy и Oxz.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mathcal{Z}^3$ — отделимый трехмерный биллиардный стол. Пусть также бифуркационная диаграмма биллиарда внутри этого стола содержит точку (b, c). Если эллиптические координаты точек стола $\mathcal{Z}$ удовлетворяют ограничению*

1. *$\lambda_3 > b$, то малая окрестность слоя, отвечающего точке (b, c), послойно гомеоморфна прямому произведению вида $K^4 \times S^1$, где K^4 — малая окрестность слоя слоения Лиувилля, соответствующего точке креста, биллиарда с отталкивающим потенциалом Гука внутри двумерной стенки $\mathcal{Z}$, лежащей на софокусном двуполостном гиперболоиде.*

2. *$\lambda_1 < c$, то малая окрестность слоя, отвечающего точке (b, c), послойно гомеоморфна прямому произведению вида $K^4 \times S^1$, где K^4 — малая окрестность слоя слоения Лиувилля, соответствующего точке креста, биллиарда с отталкивающим потенциалом Гука внутри двумерной стенки $\mathcal{Z}$, лежащей на софокусном эллипсоиде.*

3. *$\lambda_2 > c$ или $\lambda_2 < b$, то малая окрестность слоя, отвечающая точке (b, c), послойно гомеоморфна прямому произведению вида $V^3 \times W^2$, где V^3 — один из седловых 3-атомов: $B^{(3)}$, $D_1^{(3)}$, $C_2^{(3)}$ или A^*, а W^2 — один из седловых 2-атомов: $B^{(2)}$, $D_1^{(2)}$ или $C_2^{(2)}$.*

Доказательство. Докажем *первый пункт* теоремы для биллиардного стола типа 23. По аналогии разбираются оставшиеся случаи, удовлетворяющие условиям первого и второго пунктов теоремы. Как и в предыдущем параграфе мы будем рассматривать стол, границу которого составляют эллипсоид и две “чашечки” двуполостного гиперболоида.

При описании топологии слоения Лиувилля биллиарда внутри стола 23 мы неоднократно пользовались тривиальным расслоением этого стола софокусными двуполостными гиперболоидами. Такое расслоение возникает ввиду того, что третья эллиптическая координата на столе отделена от значения b. Благодаря наличию такого расслоения прообраз малой окрестности точки (b,c) в Q_h^5 при отображении момента $\mathcal{F}$ будет гомеоморфен прямому произведению вида $K^4 \times S^1$. Здесь K^4 — 4-комплекс, получаемый ограничением малой окрестности слоя, отвечающего точке (b,c), на плоскость $x=0$ с векторами скорости, у которых $\dot{x}>0$. Остается определить класс гомеоморфности комплекса K^4.

Поскольку плоскость Oyz в эллиптических координатах задается уравнением $\lambda_3 = a$, первые два уравнения движения на слое $\lambda_3 = a$ принимают следующий вид.

$$\dot{\lambda}_1 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-a)}\sqrt{h(\lambda_1-\Lambda_1)(\lambda_1-\Lambda_2)(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}$$
$$\dot{\lambda}_2 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-a)}\sqrt{h(\lambda_2-\Lambda_1)(\lambda_2-\Lambda_2)(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}$$

Заметим, что $a-\lambda_{1,2}>0$. Поэтому множители $a-\lambda_{1,2}$, $\sqrt{a-\lambda_{1,2}}$ существенно не влияют на расположение касательных векторов. Следовательно, топология K^4 не изменится, если мы избавимся от них и перейдем к уравнениям

$$\dot{\lambda}_1 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{h(\lambda_1-\Lambda_1)(\lambda_1-\Lambda_2)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)},$$
$$\dot{\lambda}_2 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{h(\lambda_2-\Lambda_1)(\lambda_2-\Lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}.$$

Поскольку h зафиксировано, полученные уравнения совпадают с уравнениями движения биллиарда внутри эллипса $\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$ с потенциалом Гука коэффициента k, где $k=-2h$. Заметим, что в нашем случае $k<0$, то есть потенциал отталкивающий. А точка $\Lambda_1=b$, $\Lambda_2=c$ является точкой креста бифуркационной диаграммы такого биллиарда. Таким образом, 1-й и 2-й пункты теоремы доказаны.

В работе [45] А. Т. Фоменко и В. А. Кибкало показали, что малая окрестность слоя особенности типа седло-седло биллиарда с отталкивающим потенциалом Гука внутри эллипса гомеоморфна полупрямому произведению вида $\left(B^{(2)}\times C_2^{(2)}\right)/\mathbb{Z}_2$, где группа $\mathbb{Z}_2$ действует центральной симметрией на каждом из сомножителей (2-атомы B и C_2, изображенные на рисунках 1.1.2-3, действительно, являются центрально симметричными). Следовательно, прообраз малой окрестности слоя в Q_h^5, отвечающего точке (b,c), биллиарда внутри стола 23-го типа гомеоморфен произведению: $\left(B^{(2)}\times C_2^{(2)}\right)/\mathbb{Z}_2\times S^1$.

Теперь докажем третий пункт теоремы. Рассмотрим биллиардный стол $\mathcal{Z}$ типа 27 (см. таблицу классификации параграфа 3.4). Этот стол ограничен эллипсоидом и однополостным гиперболоидом. При этом, он не пересекает фокальную гиперболу. Расслоим $\mathcal{Z}$ на софокусные двуполостные гиперболоиды (и плоскости Oxz, Ozy). Рассмотрим уравнения движения материальной точки внутри $\mathcal{Z}$ в окрестности уровня $\Lambda_1=b$, $\Lambda_2=c$. Из уравнения движения на $\dot{\lambda}_1$ мы можем исключить множители $\lambda_1 - \lambda_3$, $\lambda_1 - \Lambda_1$, $a - \lambda_1$, поскольку такие изменения не повлияют на топологию слоения Лиувилля. Далее, поскольку $\lambda_2 < b$ из уравнения на $\dot{\lambda}_2$ мы можем убрать множители $\lambda_2 - \lambda_3$, $\lambda_2 - \Lambda_1$, $a - \lambda_2$. Из уравнения на $\dot{\lambda}_3$ мы можем убрать множители $\lambda_3 - \lambda_1$, $\lambda_3 - \lambda_2$, $c - \lambda_3$, поскольку $\lambda_3 \geqslant b$ и $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < b$, а также избавиться от $\lambda_3 - \Lambda_2$. В итоге, система уравнений движения приобрела следующий вид.

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= \pm\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\sqrt{h\left(\Lambda_1 - \lambda_1\right)\left(b - \lambda_1\right)\left(c - \lambda_1\right)} \\
\dot{\lambda}_2 &= \pm\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_2 - \lambda_1}\sqrt{h\left(\Lambda_1 - \lambda_1\right)\left(b - \lambda_2\right)\left(c - \lambda_2\right)} \\
\dot{\lambda}_3 &= \pm 2\sqrt{2}\sqrt{h\left(\Lambda_2 - \lambda_3\right)\left(b - \lambda_3\right)\left(a - \lambda_3\right)}
\end{aligned}$$

Мы видим, что уравнения движения разделились на две подсистемы: для λ_1, λ_2, а также для λ_3. Более того, сам биллиардный стол можно представить в виде прямого произведения двумерного стола типа A_1 (см. работу [7]) по переменным λ_1 и λ_2, а также эллипса по λ_3. Система уравнений на λ_1 и λ_2 описывает плоский биллиард в окрестности седлового критического слоя. Особенность, отвечающая этому слою для стола типа A_1 есть трехмерный атом A^*. Третье уравнение последней системы описывает на эллипсе динамику материальной точки в поле силы Гука ненулевого коэффициента k в окрестности критического слоя. Окрестность критического слоя такой системы гомеоморфна двумерному атому C_2. Следовательно, для рассматриваемого стола малая окрестность слоя в Q^5_h, отвечающего точке (b, c), гомеоморфна прямому произведению 3-атома A^* и 2-атома C_2, т.е. $A^* \times C_2^{(2)}$. Аналогичные рассуждения справедливы для всех биллиардных столов, удовлетворяющих ограничениям третьего пункта теоремы. Таким образом, теорема полностью доказана. □

Критические окружности на слое, отвечающем точке (b, c), расположены на оси Ox. Однако есть несколько классов биллиардных столов таких, что бифуркационная диаграмма соответствующих им биллиардов содержит точку (b, c), а ось Ox их не пересекает. Такие столы одновременно удовлетворяют первому и второму пунктам теоремы 3.3.1 и соответствуют классам $9-13$ из классификационной таблицы параграфа 3.4. Малая окрестность слоя точки (b, c) гомеоморфна прямому произведению $K^3 \times T^2$, где K^3 — 3-комплекс, не представимый в виде почти прямого произведения 2-атомов и окружностей.

Теперь перейдем к неотделимым столам. Однако перед этим сделаем еще одно важное замечание о симметриях 2-атома C_2. На рисунке 1.1 приведены примеры 2-атомов A, B, C_2, D_1. Заметим, что атом B является центрально симметричным. Этой инволюцией исчерпывается все нетривиальные симметрии B. Атом C_2 на этой картинке тоже изображен центрально симметричным. Однако список его симметрий куда больше. Для того чтобы их увидеть, рассмотрим реализацию C_2 на двумерной сфере (см. рис. 3.11). Очевидно, что у нее есть две *вращательные симметрии* на угол π. Обозначим их α и β соответственно. Композиция

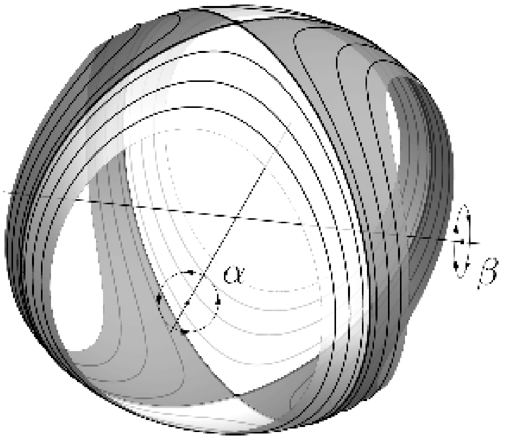


Рис. 3.11: Сферическая реализация 2-атома C_2. Две вращательные симметрии на C_2.

этих симметрий также является симметрией (вращение на π вокруг оси, проходящей через критические точки). Инволюции α и β равноценны, однако иногда нам придется использовать их вместе. Поэтому одну из них (не важно какую) мы объявим *первой вращательной симметрией*, а другую — *второй* (или *дополнительной*) *вращательной симметрией.*

Теорема 3.3.2.

1. *Малая окрестность слоя слоения Лиувилля, отвечающего точке* (b, c), *в* Q_h^5 *биллиарда внутри трехосного эллипсоида (трехмерного стола типа* 21*) послойно гомеоморфна почти прямому произведению* $\left(B^{(2)} \times C_2^{(2)}\right)/\mathbb{Z}_2(\alpha) \times S^1$, *где инволюция* α *действует центральной симметрией на атоме* B *и вращательной на* C_2.

2. *Малая окрестность слоя слоения Лиувилля, отвечающего точке* (b, c), *в* Q_h^5 *биллиарда внутри трехмерного биллиардного стола типа* 22 *(см. таблицу пункта 3.4) послойно гомеоморфна почти прямому произведению* $\left(B^{(2)} \times C_2^{(2)} \times S^1\right)/\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)$, *где инволюция* α *действует центральной симметрией на атоме* B *и вращательной на* C_2 *(на* S^1 *действует тривиально), а инволюция* β *— дополнительной вращательной симметрией на атоме* C_2 *и центральной на окружности (на* B *действует тривиально).*

Доказательство. *Докажем сначала первый пункт теоремы.* Рассмотрим биллиард внутри эллипсоида параметра 0. Пусть $L = (b, c)$. Обозначим через T_L прообраз точки L при отображении момента $\mathcal{F}$. Точке L отвечает критическая окружность $\gamma(L)$, возникающая при движении частицы вдоль оси Ox. Оказывается, на близких к T_L торах Лиувилля $T_{L'}$ можно выбрать цикл $\gamma(L')$, гомологичный $\gamma(L)$, который при стремлении L' к L перейдет в $\gamma(L)$. Это наглядно показано на рисунке 3.12 для всех четырех видов торов Лиувилля, отвечающих камерам бифуркационной диаграммы, соседним с L.

Система биллиарда внутри эллипсоида сглаживаема, а формы $\alpha = p_1 d\lambda_1 + p_2 d\lambda_2 + p_3 d\lambda_3$ и $\omega = dp_1 \wedge d\lambda_1 + dp_2 \wedge d\lambda_2 + dp_3 \wedge d\lambda_3$ корректно определены на фазовом пространстве такой

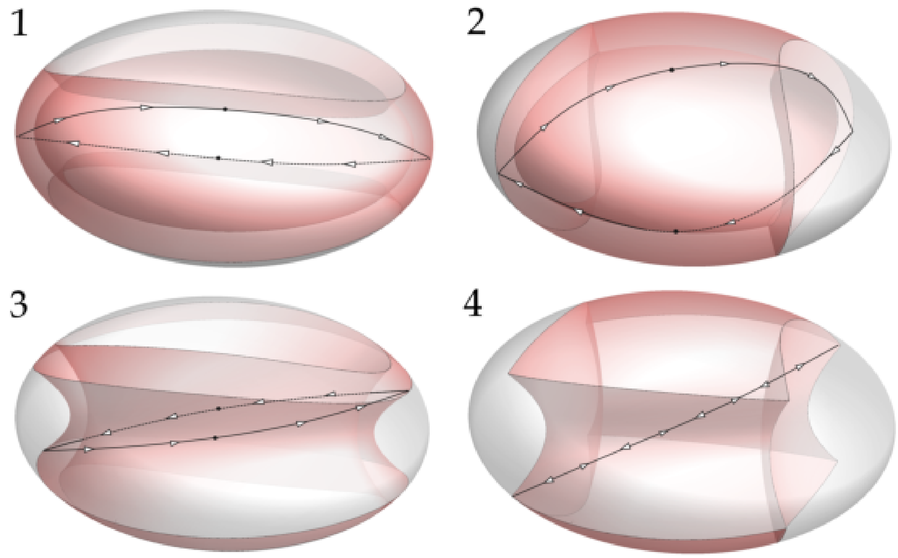


Рис. 3.12: Цикл γ на торах Лиувилля, близких к изоинтегральной поверхности $\mathcal{F}^{-1}(b,c)$. Выделенные точки есть точки касания цикла с внутренним эллипсоидом (рисунки 1, 2) и внутренним однополостным гиперболоидом (рисунок 3).

системы. Это следует из результатов В. Лазуткина [69] и Е. А. Кудрявцевой [70]. Определим в малой окрестности слоя T_L на регулярных участках слоения Лиувилля функцию

$$s(L') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma(L')} \alpha.$$

Найдем явный вид функции $s(L')$. Согласно формулам разделения переменных справедливы равенства

$$p_i^2 = \frac{h}{2} \frac{(\lambda_i - \Lambda_1)(\lambda_i - \Lambda_2)}{(a-\lambda_i)(b-\lambda_i)(c-\lambda_i)} \quad \forall i = 1,2,3.$$

Цикл γ обходит каждую эллиптическую координату в точности четыре раза. Следовательно,

$$s(H,\Lambda_1,\Lambda_2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\Lambda_2 \wedge c} \sqrt{2h \frac{(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}{(a-t)(b-t)(c-t)}} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{c \vee \Lambda_2}^{\Lambda_1 \wedge b} \sqrt{2h \frac{(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}{(a-t)(b-t)(c-t)}} dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Lambda_1 \vee b}^{a} \sqrt{2h \frac{(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}{(a-t)(b-t)(c-t)}} dt.$$

В последней формуле выражение $P \wedge Q$ означает минимум между P и Q, а $P \vee Q$ — максимум.

Лемма 3.3.1. *Функция $s(H,\Lambda_1,\Lambda_2)$ является аналитической в малой окрестности точки L.*

Доказательство леммы 1. Пусть $\Lambda_1 \neq b$, $\Lambda_2 \neq c$. Рассмотрим на комплексной плоскости контур C, изображенный на рисунке 3.13. Он состоит из дуги Γ верхней полуокружности, соединяющей точки 0 и a, четырех полуокружностей Γ_ε радиусов ε с центрами в точках $c, b, \Lambda_1, \Lambda_2$ и пяти отрезков. Выберем на контуре положительное направление обхода. Пусть

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2h\frac{(z-\Lambda_1)(z-\Lambda_2)}{(a-z)(b-z)(c-z)}}.$$

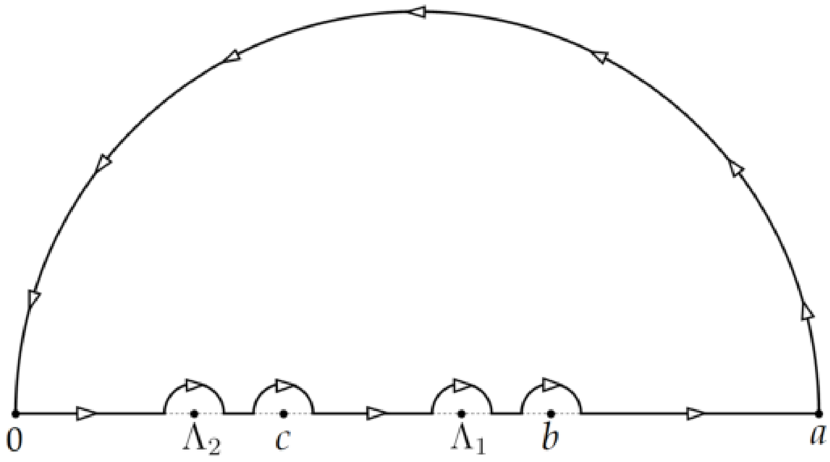


Рис. 3.13: Контур интегрирования. Большáя полуокружность — дуга Г.

Согласно теореме Коши об интеграле по замкнутому контуру

$$0 = \oint\limits_{C^+} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz + I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon),$$

где

$$I_1(\varepsilon) = \int\limits_{0}^{\Lambda_2-\varepsilon\wedge c-\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{c+\varepsilon\vee\Lambda_2+\varepsilon}^{\Lambda_1-\varepsilon\wedge b-\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{b+\varepsilon\vee\Lambda_1+\varepsilon}^{a} f(z)dz,$$

$$I_2(\varepsilon) = \int\limits_{\Lambda_2+\varepsilon\wedge c+\varepsilon}^{\Lambda_2-\varepsilon\vee c-\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{b+\varepsilon\wedge\Lambda_1+\varepsilon}^{\Lambda_1-\varepsilon\vee b-\varepsilon} f(z)dz$$

$$I_3(\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(\Lambda_1)} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(\Lambda_2)} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(c)} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(b)} f(z)dz.$$

Заметим, что $s = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_1(\varepsilon)$, при этом, $I_2(\varepsilon)$ является чисто мнимым числом. В то же время $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_3(\varepsilon) = 0$. Действительно, последний факт следует из стандартного неравенства:

$$\left|\oint\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leqslant \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|.$$

Таким образом,

$$s = \frac{1}{\pi}\mathsf{Re}\int\limits_{\Gamma^-}\sqrt{2h\frac{(z-\Lambda_1)(z-\Lambda_2)}{(a-z)(b-z)(c-z)}}dz. \tag{3.1}$$

В виду отсутствия на контуре Γ особых точек $c, b, \Lambda_1, \Lambda_2$ функция s корректно определена и является аналитической в малой окрестности точки $L = (b, c)$. $\square$

Функция s есть не что иное, как переменная действия. Более того, согласно формуле 3.1 эта функция является гладкой в малой окрестности слоя T_L в M^6. С помощью формулы 3.1 и разложения $v = \operatorname{sgrad} s$ в линейную комбинацию косых градиентов первых интегралов H, Λ_1, Λ_2 можно показать, что векторное поле v не обращается в ноль в окрестности слоя T_L.

Согласно классическим результатам, траектории поля v замкнуты, а его интегральные кривые являются 2π-периодическими. Более того, траектории v, “живущие” на слое $T_{L'}$ (близком к T_L), гомологичны циклам $\gamma(L')$, которые по своему определению гомологичны $\gamma(L)$. Теперь, используя поток векторного поля v, покажем, что малая окрестность $U(L)$ слоя L в Q^5_h обладает тривиальным S^1-расслоением.

Рассмотрим ту часть $U(L)$, что задается условиями: $x = 0$, $\dot{x} > 0$. Обозначим ее через $\widehat{M}$. Ясно, что $\widehat{M}$ является подмногообразием (с краем). Оказывается, векторное поле v трансверсально $\widehat{M}$. Этот факт очевиден в малой окрестности точки P в $\widehat{M}$, координаты которой удовлетворяют равенствам $y = z = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Действительно, в точке P векторы $\operatorname{sgrad}\Lambda_1$ и $\operatorname{sgrad}\Lambda_2$ линейно выражаются через $\operatorname{sgrad} H$. Следовательно, вектор $\operatorname{sgrad} s(P)$ пропорционален $\operatorname{sgrad} H(P)$. А поскольку $\operatorname{sgrad} s(P) \neq 0$, а проекция $\operatorname{sgrad} H(P)$ на биллиардный стол перпендикулярна плоскости $x = 0$, векторное поле $\operatorname{sgrad} s$ в малой окрестности точки P трансверсально $\widehat{M}$. Для того чтобы проверить трансверсальность $\operatorname{sgrad} s$ в произвольной точке из $\widehat{M}$, необходимо снова воспользоваться формулой 3.1 и разложением $\operatorname{sgrad} s$ в линейную комбинацию $\operatorname{sgrad} H$, $\operatorname{sgrad}\Lambda_1$ и $\operatorname{sgrad}\Lambda_2$.

Рассмотрим задачу Коши векторного поля v с начальными точками на подмногообразии $\widehat{M}$. Получим поток g_t, под действием которого многообразие $\widehat{M}$ “деформируется” в Q^5_h. Однако заметим, что $g_{2\pi} = g_0 = \mathrm{id}$. Иными словами, за время $t = 2\pi$ многообразие $\widehat{M}$ возвращается в исходное положение. Таким образом, мы получаем отображение $G : \widehat{M} \times S^1 \to U(L)$, задаваемое формулой $G(x, t) = g_t(x)$. Следующая лемма устанавливает ключевое свойство отображения G.

Лемма 3.3.2. *Отображение G является гомеоморфизмом между $\widehat{M} \times S^1$ и $U(L)$.*

Доказательство леммы 2. Отображение G непрерывно. Этот факт следует из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.

Теперь покажем, что G биективно. Многообразие $\widehat{M}$ пересекает каждый тор Лиувилля $T_{L'}$ близкий к слою T_L по двумерному тору $\widehat{T}_{L'}$. Заметим, что траектории поля $v = \operatorname{sgrad} s$ — базисные циклы, дополняющие любой базис на 2-торе $\widehat{T}_{L'}$ до базиса на 3-торе $T_{L'}$. В этом нетрудно убедиться. Действительно, пусть μ_i — базисные циклы на торе $T_{L'}$, отвечающие движению вдоль i-ой эллиптической координаты. Тогда (μ_1, μ_2, μ_3) — базис на T_L, а (μ_1, μ_2) — базис на $\widehat{T}_{L'}$. Траектории v гомологичны $\nu = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \mu_3$ для некоторых целых k_1 и k_2. Следовательно, тройка (μ_1, μ_2, ν) является базисом на $T_{L'}$.

Траектории системы v, выпущенные из разных точек $\widehat{T}_{L'}$, не могут пересекаться. Действительно, выберем на торе Лиувилля угловые переменные $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_\nu)$, отвечающие циклам μ_1, μ_2 и ν соответственно. В таком случае векторное поле v совпадет с $\dfrac{\partial}{\partial\varphi_\nu}$. Так как координатные линии φ_1 и φ_2 гомологичны циклам μ_1 и μ_2, которые в свою очередь являются базисными на торе $\widehat{T}_{L'}$, этот двумерный тор можно представить в $\mathbb{R}^3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_\nu)$ в виде пленки, натянутой на боковую границу цилиндра с основанием в виде квадрата $(\varphi_1, \varphi_2) \in [0, 2\pi]^2$. А поскольку поле v трансверсально $\widehat{M}$ в каждой точке, поверхность $\widehat{M}$ локально задается в виде графика функции $\varphi_\nu = f(\varphi_1, \varphi_2)$. Исходя из последних двух фактов, заключаем, что тор $\widehat{T}_{L'}$ есть график 2π — периодической функции по координатам φ_1, φ_2 в $\mathbb{R}^3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_\nu)$. Так как любая прямая параллельная оси $O\varphi_\nu$ пересекает этот график в единственной точке, траектории поля v, выпущенные из разных точек $\widehat{T}_{L'}$, не могут пересечься. Отсюда получаем инъективность и сюръективность G на каждом торе Лиувилля. Следовательно, образ отображения G всюду плотен в $U(L)$. Поскольку $\widehat{M} \times S^1$ компактно, а непрерывный образ компакта — компакт, образ отображения G замкнут. Значит, образ отображения G есть вся окрестность $U(L)$. Таким образом, сюръективность G доказана.

Покажем инъективность. При малых значениях параметра t инъективность G очевидна (векторное поле v трансверсально $\widehat{M}$). Выберем ε так, чтобы ограничение G на $Q' = \widehat{M} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ было бы инъективным. Тогда ввиду компактности Q', отображение G устанавливает гомеоморфизм между Q' и $G(Q')$. При этом, $\operatorname{Int} Q'$ и Q^5 являются топологическими многообразиями. Следовательно, для любой точки $(x, 0) \in Q'$ найдется малая окрестность U такая, что $G(U)$ будет открыто в Q^5.

Предположим теперь, что $G(x_1, t_1) = G(x_2, t_2)$. Ввиду группового свойства потока g_t имеем $G(x_1, 0) = G(x_2, t_2 - t_1)$. Выберем непересекающиеся окрестности U и V точек $(x_1, 0)$ и $(x_2, t_2 - t_1)$ так, чтобы $G(U)$ было открыто в Q^5. Тогда множество $V \cap G^{-1}(G(U))$ является окрестностью точки $(x_2, t_2 - t_1)$. При этом, V содержит открытое всюду плотное подмножество, состоящее из пар (x, t), где x лежит на торах $\widehat{T}_{L'}$. Однако это подмножество должно инъективно отображаться в $G(U)$ благодаря инъективности G на торах Лиувилля, но ограничение G на U является гомеоморфизмом. Поэтому U и V обязаны пересечься. Противоречие. Таким образом, G инъективно.

Поскольку $\widehat{M}$ и S^1 компактны, а отображение G — непрерывная биекция, G — гомеоморфизм. Таким образом, лемма 2 полностью доказана. $\square$

Ограничим слоение Лиувилля с Q^5 на $\widehat{M}$. Домножив каждый слой на окружность, получим слоение на многообразии $\widehat{M} \times S^1$. На самом деле, лемма 3.3.2 утверждает большее:

окрестность U и $\widehat{M} \times S^1$ послойно гомеоморфны. Поэтому для завершения доказательства первого пункта остается описание топологию индуцированного слоения Лиувилля на $\widehat{M}$.

Согласно рассуждениям при доказательстве первого пункта теоремы 3.3.1 множество $\widehat{M}$ гомеоморфно малой окрестности слоя слоения Лиувилля, отвечающего особенности типа седло-седло, биллиарда внутри эллипса с отталкивающим потенциалом Гука, т.е. $\left(B^{(2)} \times C_2^{(2)}\right)/\mathbb{Z}_2(\alpha)$, где инволюция α действует центральной симметрией на атоме B и вращательной на атоме C_2. А поскольку окрестность $U(L)$ представима в виде прямого произведения $\widehat{M}$ и окружности S^1, получаем искомый полулокальный вид особенности, отвечающей точке (b, c), биллиарда внутри эллипсоида. Таким образом, первый пункт теоремы доказан.

Перейдем ко второму пункту. Рассмотрим стол $\mathcal{Z}^3$, ограниченный эллипсоидом параметра 0 и плоскостью $x = 0$. Будем считать, что он расположен в полупространстве $x \geqslant 0$. Для того чтобы описать топологию слоения Лиувилля в малой окрестности $U'(L)$ слоя, отвечающего точке $L = (b, c)$, мы возвратимся к конструкции с переменной действия из первого пункта доказательства.

Заметим, что g_π переводит $\widehat{M}$ в ограничение окрестности $U(L)$ на плоскость $x = 0$ с условием на вектора скорости $\dot{x} < 0$. Ввиду симметрии эллипсоида относительно координатных плоскостей точка из $\widehat{M}$ с декартовыми координатами $(0, y, z)$ и вектором скорости v за время $t = \pi$ перейдет в точку с координатами $(0, -y, -z)$ и вектором скорости $-v$.

Если мы рассматриваем биллиард внутри стола $\mathcal{Z}$, то на стенке $x = 0$ должно произойти отражение. За время $t \in [0, \pi)$ поверхности $g_t(\widehat{M})$ обойдут всю окрестность $U'(L)$, а при $t = \pi$ множество $\widehat{M}$ вернется в исходное положение но с “подкруткой”. Опишем, как она устроена.

Почти прямое произведение $\left(B^{(2)} \times C_2^{(2)}\right)/\mathbb{Z}_2(\alpha)$ из пункта выше обладает естественной центральной симметрией. Действительно, согласно работе [45] это произведение реализуется в виде малой окрестности слоя типа седло-седло биллиарда с отталкивающим потенциалом Гука внутри эллипса. Однако в такой системе есть абсолютно естественная симметрия τ, отображающая пару точка-вектор (P, v) в пару $(-P, -v)$.

Ввиду устройства отображения g_π на $\widehat{M}$ и отражения от стенки $x = 0$ заключаем, что окрестность $U'(L)$ гомеоморфна почти прямому произведению окружности S^1 и произведения $\left(B^{(2)} \times C_2^{(2)}\right)/\mathbb{Z}_2(\alpha)$, факторизованному по инволюции τ, действующей на S^1 и $\left(B^{(2)} \times C_2^{(2)}\right)/\mathbb{Z}_2(\alpha)$ центральной симметрией.

Остается заметить, что дополнительная вращательная симметрия β, действующая на 2-атоме C_2, реализует симметрию τ на почти прямом произведении $\left(B^{(2)} \times C_2^{(2)}\right)/\mathbb{Z}_2(\alpha)$. А значит, малая окрестность $U'(L)$ послойно гомеоморфна почти прямому произведению

$$\frac{B^{(2)} \times C_2^{(2)} \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)},$$

где инволюция α действует центральной симметрией на B и вращательной на C_2 (на окружности действие тривиальное), а β действует дополнительной вращательной симметрией на C_2 и центральной на окружности (на B действие тривиальное). Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

3.3.3 Топология слоения Лиувилля в окрестности слоев, отвечающих нульмерным стратам отличным от точки (b, c)

В этом пункте мы опишем топологию слоения Лиувилля в окрестности слоев нульмерных стратов, отличных от точки (b, c). Все такие страты мы разобьем на три класса. Первый класс — внутренние, второй класс — граничные, отличные от (c, c) и (b, b), третий — точки (c, c) и (b, b). Точки (c, c) и (b, b) мы выделили среди остальных, поскольку только в них могут смыкаться три различных отрезка бифуркационной диаграммы.

Ниже мы приводим три теоремы, описывающие слоение Лиувилля в окрестности слоев нульмерных страт. Доказательство первых двух мы не даем, поскольку оно осуществляется тем же методами, что и в теореме 3.2.2.

Теорема 3.3.3. *Пусть $L \neq (b, c)$ — точка, отвечающая внутреннему нульмерному страту бифуркационной диаграммы трехмерного софокусного биллиарда. Тогда малая окрестность слоя, соответствующего точке L, послойно гомеоморфна прямому произведению вида $V^{(3)} \times A^{(2)}$, либо $T^3 \times \overline{D}^2$, где $V^{(3)}$ — один из следующих седловых 3-атомов: $B^{(3)}$, $C_2^{(2)}$, $D_1^{(3)}$, A^*.*

Теорема 3.3.4. *Пусть $L \neq (c, c), (b, b)$ — точка, отвечающая граничному нульмерному страту бифуркационной диаграммы трехмерного софокусного биллиарда. Тогда малая окрестность слоя, соответствующего точке L, послойно гомеоморфна прямому произведению вида $V^{(3)} \times A^{(2)}$, где $V^{(3)}$ — один из следующих 3-атомов: $A^{(3)}$, $B^{(3)}$, $C_2^{(3)}$, $D_1^{(3)}$, A^*.*

Перед тем, как сформулировать следующую теорему напомним определение двух важных вырожденных особенностей, довольно часто встречающихся в интегрируемых системах с двумя степенями свободы. Для этого рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3(x, y, z) \times S^1(\varphi)$ две функции: $H = z$, $F = x^2 + y^4 - zy^2$. Множество критических точек системы этих двух функций при фиксированном значении φ представляют собой “трезубец” — объединение параболы и ее оси (см. рис. 3.14).

Функции H и F задают слоение $\mathbb{R}^3(x, y, z) \times S^1(\varphi)$ на связные компоненты их совместного уровня (аналог слоения Лиувилля). В окрестности критических точек, это слоение выглядит так, как показано на рисунке 3.14. Пусть $X > 0$. Рассмотрим ту часть, слоения в окрестности множества критических точек, что попадает в полосу $|z| \leqslant X$. Эта окрестность, расслоенная на линии уровня функций H и F, называется *ориентируемой эллиптической вилкой.*

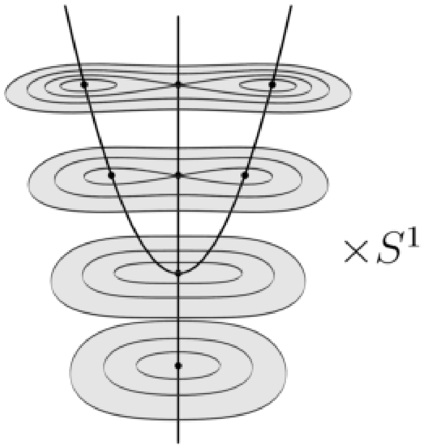


Рис. 3.14: Эллиптическая вилка.

Отметим, что на ориентируемой эллиптической вилке действует группа $\mathbb{Z}_2$ центральной симметрией. Фактор по этому действию называется *неориентируемой эллиптической вилкой.*

Такие вырожденные особенности (и многие другие) возникали в работе [25] при исследовании топологии слоения Лиувилля волчка Ковалевской.

Теорема 3.3.5. *Пусть $L = (c, c), (b, b)$. Тогда малая окрестность слоя, отвечающего точке L, послойно гомеоморфна прямому произведению вида $K^4 \times S^1$, где K^4 — либо ориентируемая эллиптическая вилка, либо неориентируемая эллиптическая вилка, либо прямое произведение $A^{(3)} \times \overline{D}^1$.*

Доказательство. Мы снова рассмотрим биллиардный стол типа 23 симметричный относительно координатной плоскости Oyz (см. рис 3.6.1) и опишем топологию слоения Лиувилля в окрестности слоя T_L, отвечающего точке $L = (b, b)$. Доказательство для точки (c, c), а также для других типов столов осуществляется по аналогии.

Пусть L' близка к L, тогда область возможного движения, отвечающая этой точке, отделена по второй эллиптической координате от значения c. Значит, такую область можно тривиально расслоить софокусными эллипсоидами (и плоскостью Oxy). В силу устройства границы стола, ОВД можно также тривиально расслоить софокусными двуполостными гиперболоидами (и плоскостью Oyz). Следовательно, малая окрестность слоя, отвечающего точке L, представима в виде $K^3 \times S^1 \times S^1$, где K^3 — 3-комплекс, получаемый ограничением малой окрестности слоя T_L, на эллипс, лежащий в плоскости $x = 0$ и задаваемый уравнением $\dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} = 1$, взятый вместе с касательными векторами, у которых $\dot{x} > 0$. Опишем, как устроено слоение Лиувилля на K^3 и найдем класс гомеоморфности этого комплекса.

Расслоим малую окрестность точки L однопараметрическим семейством дуг $l(t)$, $t \in [0, 1]$, как показано на рисунке 3.15.1.

Согласно теоремам 3.2.1, 3.2.2 ограничение дуги $l(t)$ при $t > 0$ гомеоморфно 2-атому B.

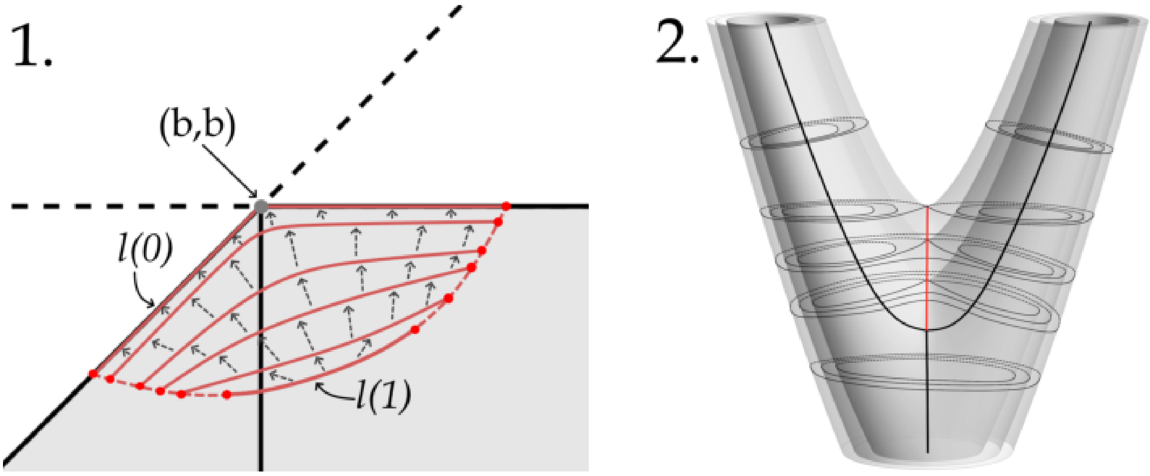


Рис. 3.15: 1. Расслоение малой окрестности точки (b, b) бифуркационной диаграммы однопараметрическим семейством дуг $l(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$. 2. Стягивание 2-атома B в его базу расслоения. Красным выделена линия критических точек атомов B.

При $t = 0$ это ограничение гомеоморфно букве Y. Следовательно, комплекс K^3 представляет собой стягивание 2-атома B в его базу (см. рис. 3.15.2). Если мы выделим линию критических точек атомов B, отвечающим дугам $l(t), t > 0$, то получим комплекс, изображенный слева на рисунке 3.14. Таким образом, малая окрестность слоя T_L послойно гомеоморфна прямому произведению ориентируемой эллиптической вилки и окружности. Теорема доказана. $\square$

В заключение пункта отметим, что (ориентируемая или неориентируемая) эллиптическая вилка в точке (b, b) может возникнуть в том и только том случае, когда биллиардный стол $\mathcal{Z}$ не лежит ни в одном из полупространств $y \leqslant 0, y \geqslant 0$ и содержит участок множества, расположенного в плоскости Oxz между дугами фокальной гиперболы $\mathfrak{F}_2$. Аналогично, эллиптическая вилка в точке (c, c) может возникнуть в том и только том случае, когда биллиардный стол $\mathcal{Z}$ не лежит ни в одном из полупространств $z \leqslant 0, z \geqslant 0$ и содержит участок множества, расположенного в плоскости Oxy вне фокального эллипса $\mathfrak{F}_1$.

3.4 Теоремы классификации трехмерных биллиардов

Заметим, что при доказательстве теорем двух предыдущих параграфов мы использовали лишь комбинаторное устройство биллиардных столов. При этом, теоремы 3.2.1-3.3.5 полностью описывают структуру слоения Лиувилля трехмерного софокусного биллиарда вблизи любого слоя. Определив перестройки торов Лиувилля для каждого класса эквивалентных столов, докажем следующую теорему.

Теорема 3.4.1.

1. *Трехмерные софокусные биллиарды на комбинаторно эквивалентных столах грубо лиувиллево эквивалентны.*

2. *Относительно грубой лиувиллевой эквивалентности существует в точности* 24 *класса трехмерных софокусных биллиардов в* $\mathbb{R}^3$. *Следующие классы комбинаторно эквивалентных столов задают грубо лиувиллево эквивалентные системы (нумерацию столов см. ниже в таблице* 5*):*

$$5 \sim 29 \sim 31, \quad 6 \sim 21 \sim 23, \quad 7 \sim 28, \quad 8 \sim 14 \sim 16,$$

$$9 \sim 13, \quad 15 \sim 24, \quad 19 \sim 32, \quad 26 \sim 30.$$

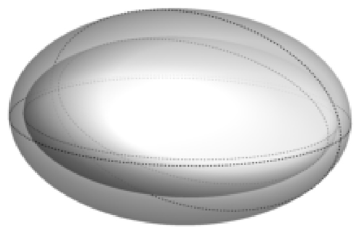
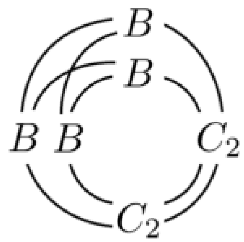
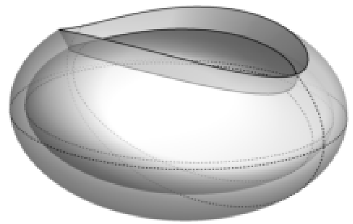
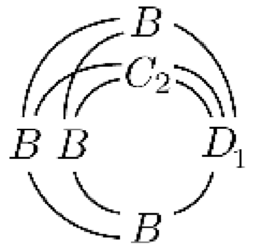
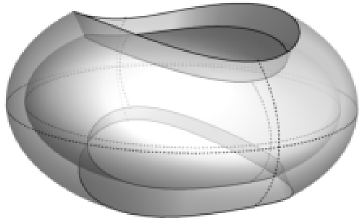
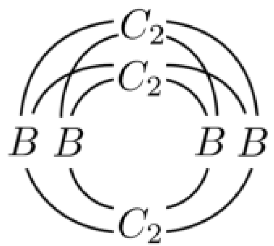
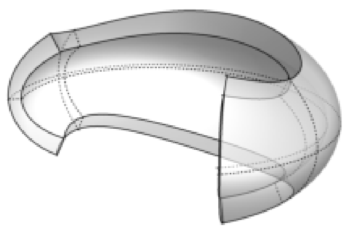
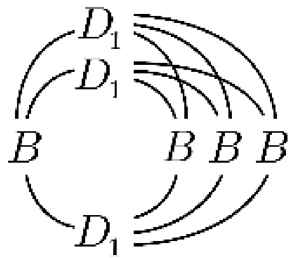
Ниже (начиная со следующей страницы) мы приводим таблицу, в которой для каждого класса комбинаторно эквивалентных столов вычислена круговая молекула точки (b, c), а также описаны прообразы малых окрестностей особых уровней (b, b), (c, c) и (b, c) при отображении момента $\mathcal{F}$. Все атомы в молекулах трехмерные и умножены на окружность.

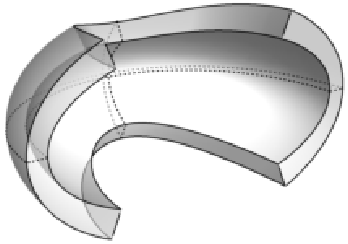
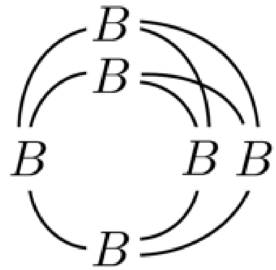
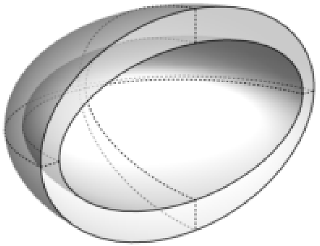
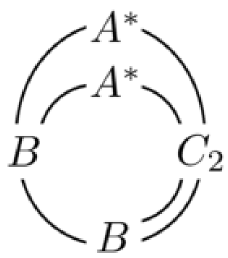
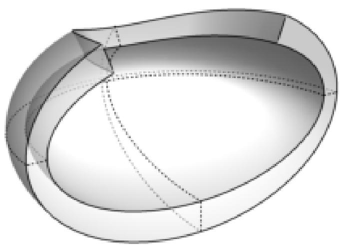
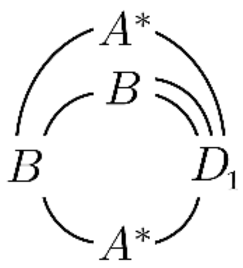
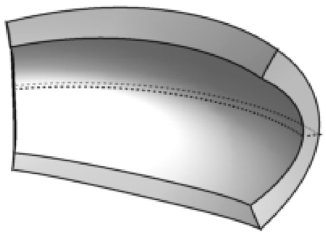
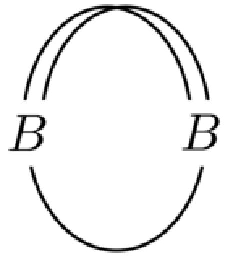
В пятом столбце через PF_o обозначена ориентируемая эллиптическая вилка, а через PF_{no} — неориентируемая. У биллиардов внутри столов $9-13$ малую окрестность слоя, отвечающего точке (b, c), нельзя представить в виде почти прямого произведения атомов и окружностей. Особенность, отвечающая паре (b, c), у этих биллиардов является топологически неустойчивой. Описание топологии слоения Лиувилля в окрестности слоя, отвечающего точке (b, c), для столов $9-13$ мы приводить не будем.

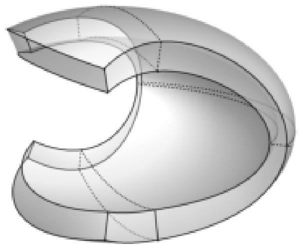
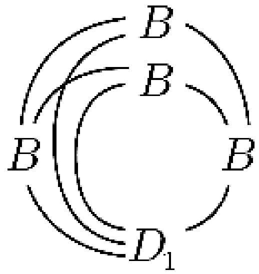
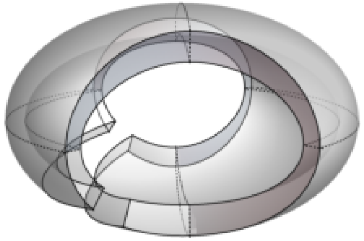
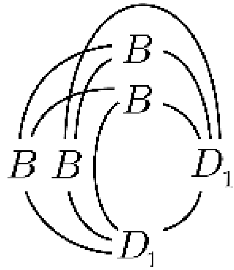
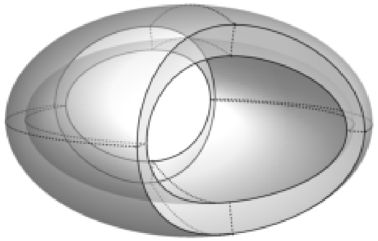
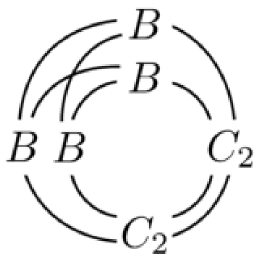
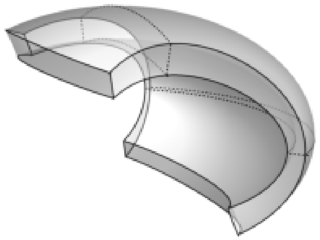
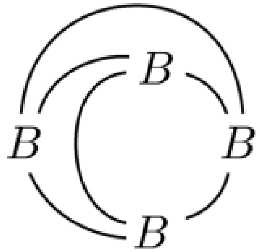
Для единообразия в пятой колонке таблицы будем использовать только 2-атомы. Напомним, что атом A^* есть почти прямое произведение 2-атома B и окружности S^1, факторизованное по инволюции, действующей центральной симметрией на обоих сомножителях.

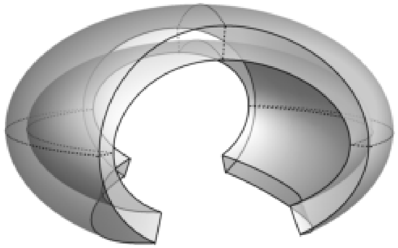
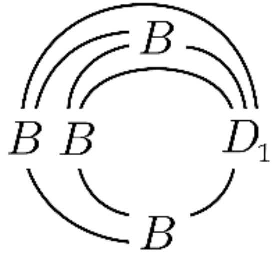
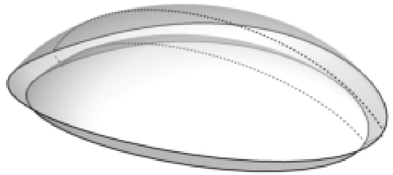
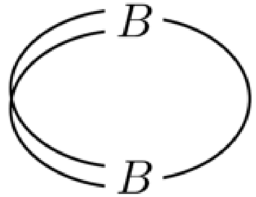
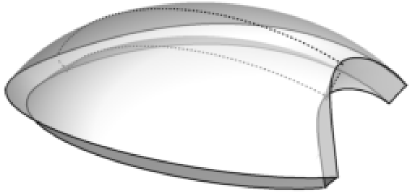
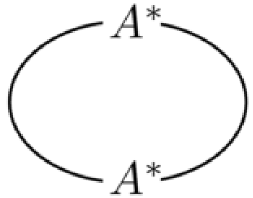
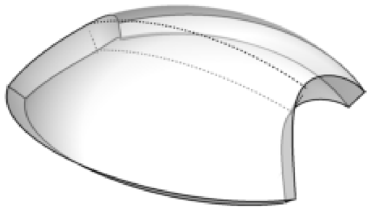
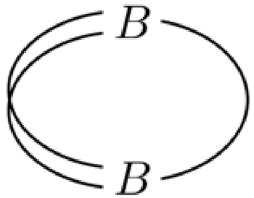
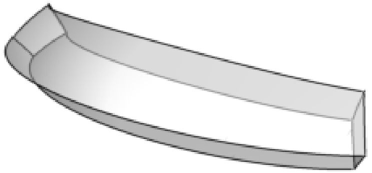
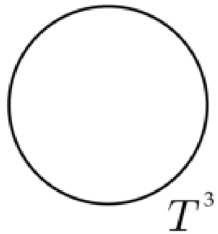
На рисунках в первой колонке черными пунктирными линиями выделены кривые пересечения границ биллиардных столов с координатными плоскостями. Во второй колонке дано краткое описание самих границ. Под центральной симметрией на атоме C_2 подразумевается вращательная симметрия. Симметриям 2-атома C_2 посвящен абзац перед теоремой 3.3.2.

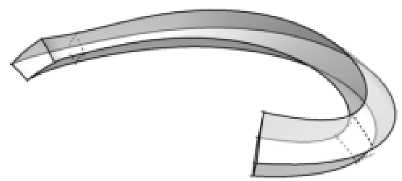
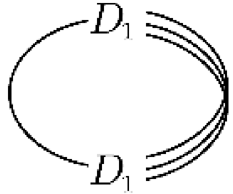
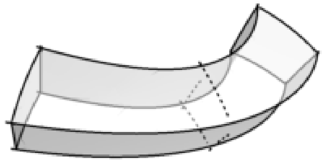
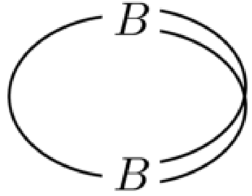
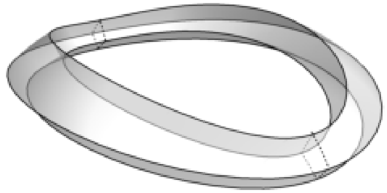
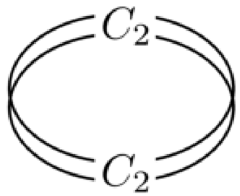
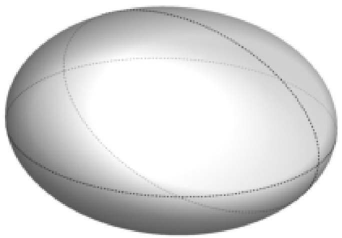
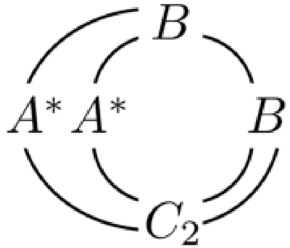
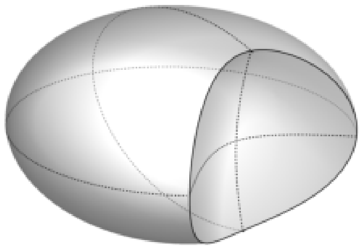
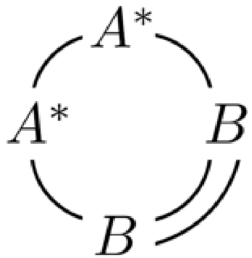
Таблица 5. Описание слоений Лиувилля трехмерных софокусных биллиардов

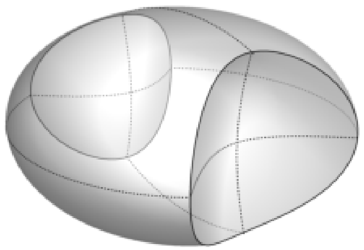
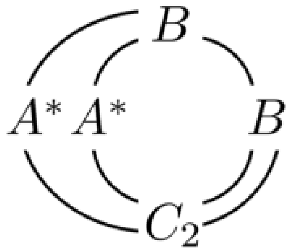
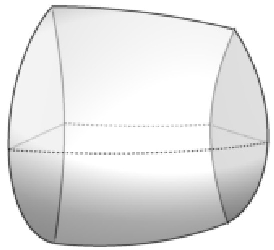
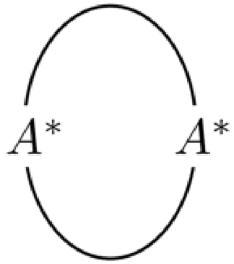
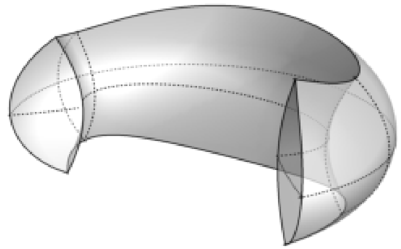
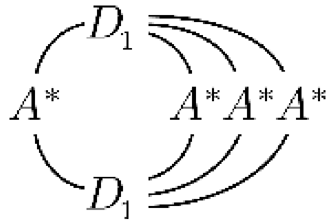
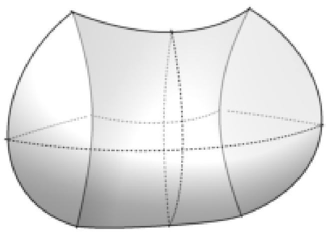
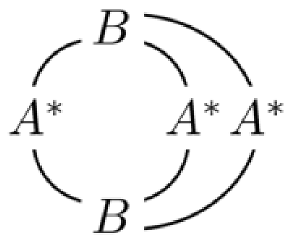
Номер	Трехмерный стол	Описание границы	Круговая молекула точки (b,c)	Особенность, отвечающая точке **1.** (b,c) **2.** (b,b) **3.** (c,c)
1		*Два эллипсоида*		**1.** $\dfrac{C_2^{(2)} \times C_2^{(2)}}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $2\,PF_o \times S^1$ **3.** $2\,PF_o \times S^1$
2		*Две области на эллипсоидах, одно кольцо однополостного гиперболоида*		**1.** $\dfrac{C_2^{(2)} \times D_1^{(2)}}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $PF_o \times S^1$ **3.** $2\,PF_o \times S^1$
3		*Две кольцевые области на эллипсоидах, две кольцевые области на однополостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times C_2^{(2)} \times S^1$ **2.** $\varnothing$ **3.** $2\,PF_o \times S^1$
4		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times D_1^{(2)} \times S^1$ **2.** $\varnothing$ **3.** $PF_o \times S^1$

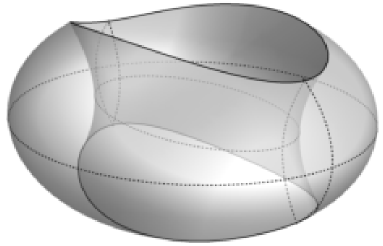
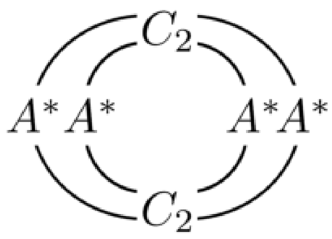
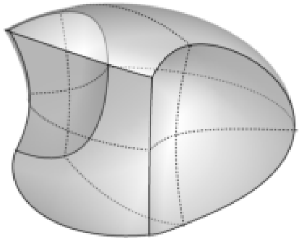
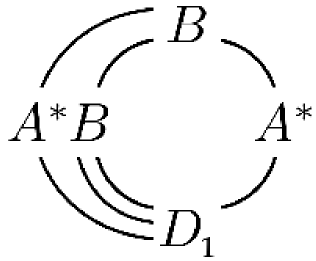
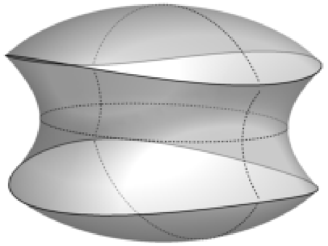
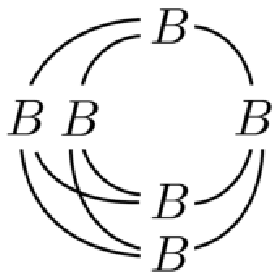
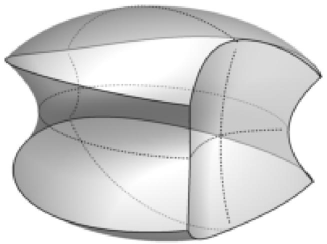
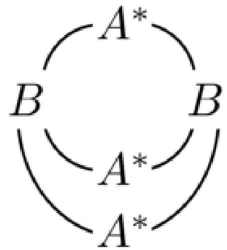
5		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times B^{(2)} \times S^1$ **2.** $\varnothing$ **3.** $PF_o \times S^1$
6		*Две области на эллипсоидах, одна кольцевая область на двуполостном гиперболоиде*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)} \times C_2^{(2)}}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $2\,PF_{no} \times S^1$ **3.** $PF_o \times S^1$
7		*Две области на эллипсоидах, по одной на однополостном и двуполостном гиперболоидах*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)} \times D_1^{(2)}}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $PF_{no} \times S^1$ **3.** $PF_o \times S^1$
8		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ **2.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$ **3.** $PF_o \times S^1$

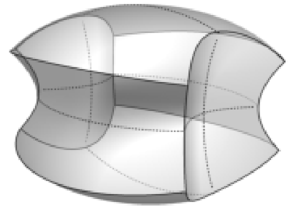
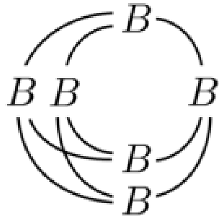
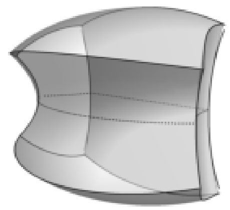
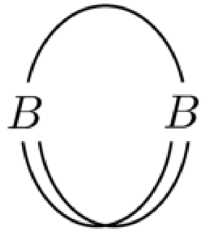
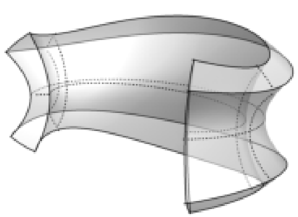
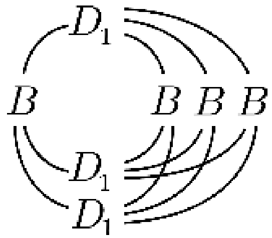
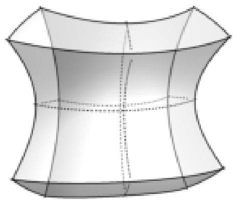
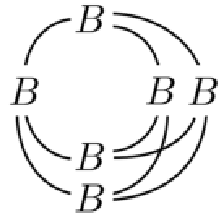
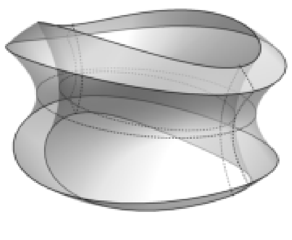
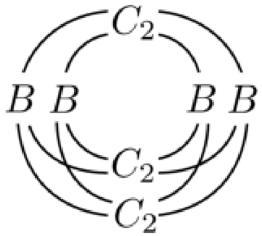
9		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $K^3 \times T^2$, где K^3 отвечает топологически неустойчивой особенности **2.** $2\,PF_o \times S^1$ **3.** $PF_o \times S^1$
10		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $K^3 \times T^2$, где K^3 отвечает топологически неустойчивой особенности **2.** $2\,PF_o \times S^1$ **3.** $2\,PF_o \times S^1$
11		*Две кольцевые области на эллипсоидах, две кольцевые области на двуполостных гиперболоидах*		**1.** $K^3 \times T^2$, где K^3 отвечает топологически неустойчивой особенности **2.** $2\,PF_o \times S^1$ **3.** $2\,PF_o \times S^1$
12		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $K^3 \times T^2$, где K^3 отвечает топологически неустойчивой особенности **2.** $PF_o \times S^1$ **3.** $PF_o \times S^1$

13		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $K^3 \times T^2$, где K^3 отвечает топологически неустойчивой особенности **2.** $PF_o \times S^1$ **3.** $2\,PF_o \times S^1$
14		*Две области на эллипсоидах, одно кольцо однополостного гиперболоида*		**1.** $B^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ **2.** $PF_o \times S^1$ **3.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$
15		*Две области на эллипсоидах, по одной на однополостном и двуполостном гиперболоидах*		**1.** $\dfrac{B^{(2)} \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1 \times \overline{D}^1$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $PF_{no} \times S^1$ **3.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$
16		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ **2.** $PF_o \times S^1$ **3.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$
17		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $T^3 \times \overline{D}^2$ **2.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$ **3.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$

18		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $D_1^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ **2.** $\varnothing$ **3.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$
19		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ **2.** $\varnothing$ **3.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$
20		*Две кольцевые области на эллипсоидах, две кольцевые области на однополостных гиперболоидах*		**1.** $C_2^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ **2.** $\varnothing$ **3.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$
21		*Эллипсоид*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)} \times C_2^{(2)}}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $PF_o \times S^1$ **3.** $2\,PF_{no} \times S^1$
22		*Область на эллипсоиде, область на двуполостном гиперболоиде*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)} \times C_2^{(2)} \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)}$, α — центр. сим. на B, вращ. на C_2, β — доп. вращ. на C_2 и центр. S^1 **2.** $PF_{no} \times S^1$ **3.** $PF_{no} \times S^1$

23		*Кольцевая область на эллипсоиде, две области на двуполостных гиперболоидах*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)} \times C_2^{(2)}}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $PF_o \times S^1$ **3.** $2\,PF_{no} \times S^1$
24		*По одной области на эллипсоиде и однополостном гиперболоиде, две области на двуполостных*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)} \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1 \times \overline{D}^1$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$ **3.** $PF_{no} \times S^1$
25		*По одной области на эллипсоиде и однополостном гиперболоиде, две области на двуполостных*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)} \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times D_1^{(2)}$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $\varnothing$ **3.** $PF_{no} \times S^1$
26		*По одной области на эллипсоиде и однополостном гиперболоиде, две области на двуполостных*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)} \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times B^{(2)}$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $\varnothing$ **3.** $PF_{no} \times S^1$

27		*По одной кольцевой области на эллипсоиде и однополостном гиперболоиде*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)}\times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}\times C_2^{(2)}$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $\varnothing$ **3.** $2\,PF_{no}\times S^1$
28		*По одной области на эллипсоиде и однополостном гиперболоиде, две области на двуполостных*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)}\times D_1^{(2)}}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}\times S^1$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $PF_o\times S^1$ **3.** $PF_{no}\times S^1$
29		*Две области на эллипсоиде, одна кольцевая область на однополостном гиперболоиде*		**1.** $B^{(2)}\times B^{(2)}\times S^1$ **2.** $PF_o\times S^1$ **3.** $\varnothing$
30		*Две области на эллипсоиде, по одной области на однополостном и двуполостном гиперболоидах*		**1.** $\dfrac{B_2^{(2)}\times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}\times B^{(2)}$, α — инволюция центральной симметрии **2.** $PF_{no}\times S^1$ **3.** $\varnothing$

31		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times B^{(2)} \times S^1$ **2.** $PF_o \times S^1$ **3.** $\varnothing$
32		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ **2.** $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\varnothing$ **3.** $\varnothing$
33		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times D_1^{(2)} \times S^1$ **2.** $\varnothing$ **3.** $\varnothing$
34		*По две области на эллипсоидах, однополостных и двуполостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times B^{(2)} \times S^1$ **2.** $\varnothing$ **3.** $\varnothing$
35		*Две кольцевые области на эллипсоидах, две кольцевые области на однополостных гиперболоидах*		**1.** $B^{(2)} \times C_2^{(2)} \times S^1$ **2.** $\varnothing$ **3.** $\varnothing$

Глава 4

Топология изоэнергетических поверхностей трехмерных биллиардов

4.1 Типы Q^5 трехмерных софокусных биллиардов

Согласно следствию 3.1.1, всякий трехмерный биллиардный стол гомеоморфен либо трехмерному замкнутому диску, либо прямому произведению окружности и двумерного замкунтого диска, либо прямому произведению двумерной сферы и отрезка. Оказывается, этой информации достаточно, чтобы описать класс гомеоморфности изоэнергетической поверхности соответствующего биллиарда.

Теорема 4.1.1. *Пусть трехмерный софокусный биллиардный стол $\mathcal{Z}$ гомеоморфен трехмерному замкнутому диску $\overline{D}^3$, или сферическому слою $\overline{D}^1 \times S^2$, или полноторию $\overline{D}^2 \times S^1$. Тогда изоэнергетическая поверхность Q^5 соответствующего биллиарда гомеоморфна сфере S^5, произведению $S^2 \times S^3$ или произведению $S^1 \times S^4$ соответственно.*

Докажем эту теорему цепочкой нескольких лемм. Начнем с тех случаев, когда граница стола является гладкой. Оказывается, если предположить гладкость границы стола, то теорема 4.1.1 будет справедлива для произвольных трехмерных биллиардных столов, а не только для софокусных. Иными словами, интегрируемость не влияет на топологический тип изоэнергетической поверхности Q^5. Поэтому для гладких границ мы докажем теорему 4.1.1 в максимально общей формулировке. Отметим, что фазовое пространство и изоэнергетические поверхности биллиарда в произвольной области $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей определяются в точности также как для софокусных областей.

Лемма 4.1.1. *Пусть гладкая замкнутая двумерная поверхность P^2, вложенная в $\mathbb{R}^3$, диффеоморфна сфере S^2. Пусть также P^2 ограничивает область диффеоморфную трехмерному диску. Тогда изоэнергетическая поверхность трехмерного биллиарда внутри P^2 гомеоморфна изоэнергетической поверхности биллиарда внутри стандартной единичной сферы S^2.*

Доказательство. Обозначим через G^3 область, ограниченную поверхностью P^2, а через D^3 — единичный шар с центром в нуле. Пусть Q^5 и $\widetilde{Q}^5$ — поверхности постоянной энергии биллиардов внутри шара D^3 и области G^3 соответственно, отвечающие векторам скорости единичной длины. Согласно условию существует диффеоморфизм $F : \overline{D}^3 \to \overline{G}^3$. Покажем, что это отображение порождает гомеоморфизм между Q^5 и $\widetilde{Q}^5$.

Сначала заметим, что диффеоморфизм F определяет гомеоморфизм f между касательными расслоениями к $\mathbb{R}^3$, ограниченными на $\overline{G}^3$ и $\overline{D}^3$, по формуле $f(x, v) = (F(x), dF|_x v)$ (здесь $x \in \overline{D}^3, v \in T_x\mathbb{R}^3$). Однако f, вообще говоря, не переводит Q^5 в $\widetilde{Q}^5$. Действительно, во-первых, дифференциал F не обязан сохранять длину касательных векторов, а во-вторых, если $x \in \partial D^3$ и $v_1 \in T_x\mathbb{R}^3$ получается из $v_2 \in T_x\mathbb{R}^3$ отражением от границы шара D^3, то $dF|_x v_1$, вообще говоря, не получается из $dF|_x v_2$ отражением от P^2. Если первая проблема решается нормировкой вектора $dF_x v$, то для решения второй нужно немного видоизменить линейное отображение $dF|_x v$. Для этого построим вспомогательное линейное отображение.

Пусть V — двумерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^2$ ортогональное единичному вектору n. Пусть также задан вектор n' такой, что угол между n' и n острый. Представим произвольный вектор $v \in \mathbb{R}^3$ в следующем виде $v = w + \alpha n'$. Сопоставим вектору v вектор $A_{n',n} v = w + \alpha n$. Заметим, что V является инвариантным подпространством оператора A. При этом, справедлива следующая формула.

$$A_{n',n} v = v - \frac{(v, n)}{(n', n)}(n' - n)$$

Более того, семейство преобразований $A_{n',n,t} = tA_{n',n} + (1 - t)Id$ состоит из невырожденных операторов, действующих тождественно на V.

Заметим, что если x лежит на границе шара $\overline{D}^3$, то радиус-вектор этой точки является внешней нормалью к P^2 в ней. Тогда положим $n' = dF|_x x$, а через n обозначим единичный вектор внешней нормали к границе шара $\overline{D}^3$ в точке $F(x)$. В таком случае, композиция $A_{n',n} \circ dF|_x$ переводит касательное пространство к $\mathbb{R}^3$ в точке x в касательное пространство к $\mathbb{R}^3$ в точке $F(x)$. На касательном пространстве к поверхности P^2 этот линейный оператор тождественный. Помимо этого, он согласован с отражением. Действительно, пусть $v \in T_x\mathbb{R}^3$ и $v = u + \alpha x$ — его разложение на касательную и нормальную составляющие к поверхности P^2, тогда отраженный вектор v' равен $u - \alpha n$ и справедливо следующее равенство.

$$A_{n',n} \circ dF|_x(u \pm \alpha x) = A_{n',n} \circ dF|_x(u) \pm \alpha A_{n',n} \circ dF|_x(x) = A_{n',n} \circ dF|_x(u) \pm \alpha n$$

Однако по построению вектор $A_{n',n} \circ dF|_x(u)$ является касательным к поверхности P^2 в точке $F(x)$, а вектор n ортогонален P^2. Значит, $A_{n',n} \circ dF|_x(v')$ получается из $A_{n',n} \circ dF|_x(v)$ отражением от касательной плоскости к P^2. Таким образом, оператор $A_{n',n}$ “подкручивает”

$dF|_x$ так, что отраженные векторы переходят в отраженные. Однако вся эта конструкция определена только в одной точке. Чтобы глобально “исправить” $dF|_x$, поступим следующим образом.

Для произвольной точки $x \neq 0$ обозначим через $n(x)$ единичный вектор внешней нормали в точке $F(x)$ к образу сферы S^2 радиуса $\|x\|$, центр которой расположен в начале координат. Через $n'(x)$ обозначим $dF|_x x$. Определим отображение $\varphi : Q^5 \to \widetilde{Q}^5$ следующей формулой.

$$\varphi(x,v) = \left(F(x), \frac{(\|x\| \cdot A_{n'(x),n(x)} + (1-\|x\|)Id) \circ dF|_x v}{\|(\|x\| \cdot A_{n'(x),n(x)} + (1-\|x\|)Id) \circ dF|_x v\|} \right)$$

Иными словами, в нуле мы всего лишь нормируем вектор $dF_0 v$, а чем дальше от нуля отходим, тем больше “подкручиваем” вектор $dF_0 v$ оператором $A_{n'(x),n(x)}$. Еще раз отметим, что в силу определения оператора $A_{n',n}$ отображение φ переводит отраженный вектор в отраженный, а следовательно, φ корректно определено на Q^5. Непрерывность и биективность φ следует из построения.

Поскольку Q^5 компактно, а φ — непрерывная биекция, отображение φ является гомеоморфизмом. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, при малой деформации границы стола топология поверхности постоянной энергии не меняется. Аналогичным свойством обладают столы, диффеоморфные полноторию или сферическому слою.

Лемма 4.1.2. *Пусть гладкая замкнутая двумерная поверхность P^2, вложенная в $\mathbb{R}^3$, диффеоморфна сфере S^2. Пусть также P^2 ограничивает область диффеоморфную трехмерному диску. Тогда изоэнергетическая поверхность трехмерного биллиарда внутри P^2 гомеоморфна сфере S^5.*

Доказательство. Согласно лемме 4.1.1 можем считать, что P^2 — двумерная сфера, вложенная в $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ и задаваемая уравнением $x^2+y^2+z^2=1$.

Областью возможного движения материальной точки будет шар единичного радиуса с центром в нуле. Обозначим его через D. Также будем предполагать, что $h=1$, то есть длины всех векторов скорости равны 1. Построим гомеоморфизм φ изоэнергетической поверхности Q^5 и сферы S^5, вложенной в $\mathbb{R}^6(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$ и заданной уравнением $\|r_1\|^2+\|r_2\|^2=1$, где $\|r_i\| = \sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$.

Рассмотрим сферу радиуса $1/2$ с центром в точке 0. Она разбивает D на две компоненты: шар радиуса $1/2$ и сферическое кольцо между сферами радиусов $1/2$ и 1. Обозначим их через D' и D'' соответственно. При таком разбиении возникает естественное разбиение изоэнергетической поверхности на две части: Q' и Q''. Будем считать, что Q' соответствует компоненте D'. Мы построим отображение φ отдельно на Q' и Q'', а затем покажем, что оно непрерывно в точках их склейки.

Пусть $e \in \mathbb{R}^3$ — произвольный единичный вектор, $\alpha \in [0, 1/2]$, а v – произвольный единичный вектор из $T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$. Тогда положим $\varphi(\alpha e, v) = \big(\alpha e, \sqrt{1-\alpha^2}v\big)$. Тем самым мы построили отображение φ на Q'. Чтобы доопределить отображение φ на Q'', для всякого единичного вектора e построим отображение f_e, которое сопоставляет точке $(\alpha e, v) \in Q^5$, где $\alpha \in [1/2, 1]$, $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$, точку замкнутого единичного диска $\overline{D}^3$.

Зафиксируем единичный вектор $e \in \mathbb{R}^3$. Заметим, что для всякого $\alpha \in [0, 1)$ пары $(\alpha e, v) \in Q^5$, где $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$, образуют единичную сферу. Однако при $\alpha = 1$ в силу биллиардного отражения эти пары образуют замкнутый двумерный диск. Рассмотрим единичные векторы, лежащие в $T_e S^2$. Они представляют собой окружность. Рассмотрим декартову систему координат $Ox'y'z'$ такую, что ось Oz' сонаправлена с e. В этой системе координат рассмотрим вырожденное семейство софокусных квадрик, заданное уравнением $\dfrac{x'^2}{1-\mu} + \dfrac{y'^2}{1-\mu} + \dfrac{z'^2}{1/2-\mu} = 1$. Это семейство порождает вырожденные эллиптические координаты (μ_1, μ_2, ξ), где μ_1 и μ_2 — параметры эллипсоида и однополостного гиперболоида этого семейства, которые содержат данную точку, а ξ — угол между плоскостью, проходящей через данную точку параллельно оси Oz', и осью Ox'. На рисунке 4.1 проиллюстрировано вырожденное семейство софокусных квадрик, а также соответствующие вырожденные эллиптические координаты. Заметим, что при $\mu \in (-\infty, 1/2)$ квадрики этого семейства — эллипсоиды, которые при $\mu \to 1/2$ сжимаются в круг, а не в компоненту ограниченную эллипсом с различными полуосями (как происходит с эллипсоидами в обычном семействе софокусных квадрик).

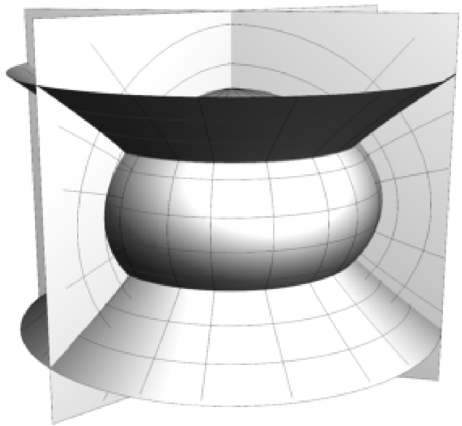


Рис. 4.1: Вырожденное семейство софокусных квадрик и порождаемая им система вырожденных эллиптических координат.

Сделаем аффинное растяжение этого семейства вдоль оси Oz' такое, что эллипсоид с параметром $\mu = 0$ перешел бы в единичную сферу. Теперь рассмотрим произвольное $\alpha \in [1/2, 1]$ и единичный вектор $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$. Поскольку v — единичный вектор, то его конец является точкой на единичной сфере, которая имеет вырожденные эллиптические координаты

$(0, \mu_2(\alpha, v), \xi(\alpha, v))$. Рассмотрим координатную линию первой координаты, проходящую через эту точку. Будем непрерывно двигать эту точку вдоль выбранной координатной линии до тех пор, пока ее первая координата не станет равной $-\alpha + 3/2$. Число $-\alpha + 3/2$ выбрано потому, что отображение $g(\alpha) = -\alpha + 3/2$ переводит отрезок $[1, 1/2]$ в отрезок $[1/2, 1]$. Полученную таким образом точку объявим $f_e(\alpha, v)$. Поскольку вырожденные эллиптические координаты не меняются при отражении относительно плоскости $Ox'y'$, отображение f_e корректно определено в точке границы. Нетрудно видеть, что f_e — непрерывное биективное отображение. Более того, есть непрерывная зависимость отображений f_e от единичного вектора e. В этом нетрудно убедиться, проанализировав построение отображений f_e.

Теперь рассмотрим в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$ единичную сферу с центром в начале координат и стереографическую проекцию $\pi : S^3 \backslash S \to \mathbb{R}^3(x, y, z)$, где $S = (0, 0, 0, -1)$. Для произвольного единичного вектора e, $\alpha \in [1/2, 1]$, и единичного вектора $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$ применим отображение $f_e(\alpha, v)/\sqrt{3}$ и возьмем прообраз этой точки при стереографической проекции. Полученную точку обозначим P. Сопоставим точке $(\alpha e, v)$ точку на S^5, первые три координаты которой равны $w(P)e$, а оставшиеся $(x(P), y(P), z(P))$, то есть положим $\varphi(\alpha e, v) = (w\left(P\right)e, x\left(P\right), y\left(P\right), z\left(P\right))$, где $P = \pi^{-1}\left(f_e(\alpha, v)\sqrt{3}\right)$ Таким образом, мы определили отображение φ на компоненте Q''. В силу непрерывности стереографической проекции и отображений f_e, а также за счет непрерывной зависимости отображений f_e от единичного вектора e отображение φ непрерывно на Q''.

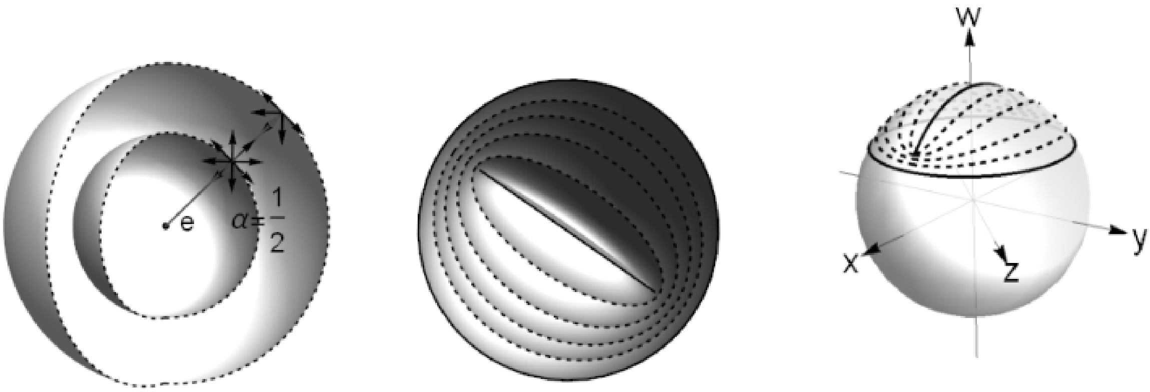


Рис. 4.2: Иллюстрация построения гомеоморфизма φ: 1. Биллиардный стол разбивается сферой меньшего радиуса; для каждого из кусков строится φ; выбран единичный вектор e и касательные вектора v в точках $e/2$ и e. 2. Построение f_e; внешней сфере соответствуют вектора в точке $e/2$ на рисунке а, диску — вектора в точке e. 3. прообраз стереографической проекции отображения $f_e/\sqrt{3}$.

Покажем, что отображение φ согласовано в точках склейки Q' и Q'', то есть при $\alpha = 1/2$. Пусть e и v — единичные векторы и $v \in T_{\frac{1}{2}e}\mathbb{R}^2$, тогда согласно определению φ на Q' имеем $\varphi\left(e/2, v\right) = \left(e/2, \sqrt{3}v/2\right)$. Теперь вычислим $\varphi\left(e/2, v\right)$, используя определение φ на Q''. Согласно определению отображения f_e имеем: $f_e\left(1/2, v\right) = v$. Заметим, что

$\pi^{-1}\left(v/\sqrt{3}\right) = \left(1/2, \sqrt{3}v/2\right)$. Следовательно, $\varphi\left(e/2, v\right) = \left(e/2, \sqrt{3}v/2\right)$. Таким образом, отображение φ корректно определено на Q^5 и непрерывно.

Теперь докажем, что φ — биекция. Инъективность этого отображения следует из построения. Покажем сюръективность. Рассмотрим точку $P = (r_1, r_2) \in S^5$. Положим $e = \dfrac{r_1}{\|r_1\|}$, если $\|r_1\| \neq 0$, и $e = 0$ иначе. Если $\|r_1\| \leqslant \dfrac{1}{2}$, то $\varphi\left(r_1, \dfrac{r_2}{\|r_2\|}\right) = P$. Если $\|r_1\| > \dfrac{1}{2}$, то в силу биективности отображений π, f_e найдется $M \in Q^5$, что $\varphi(M) = P$.

Поскольку Q^5 — компакт, а φ — непрерывная биекция, следовательно φ — гомеоморфизм. Лемма доказана. □

Замечание 4.1.1. Эту лемму можно распространить на случай произвольной размерности. Если гладкая $(n-1)$-мерная поверхность P^{n-1}, вложенная в $\mathbb{R}^n$, диффеоморфна сфере S^{n-1}, то изоэнергетическая поверхность биллиарда внутри P^n гомеоморфна сфере S^{2n-1}. Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему. Необходимо отметить, что интегрируемости самого биллиарда мы не требуем.

Лемма 4.1.3. *Пусть гладкая поверхность P^2 ограничивает область $\mathcal{Z}^3$ диффеоморфную сферическому слою. Тогда изоэнергетическая поверхность трехмерного биллиарда внутри P^2 гомеоморфна прямому произведению $S^2 \times S^3$.*

Доказательство. Как утверждалось выше, справедлив полный аналог леммы 4.1.1 для биллиардных столов диффеоморфных сферическому слою. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $\partial\mathcal{Z}$ состоит из двух сфер с общим центром в нуле радиусов 1 и 1/2. Пусть также $h = 1$. Построим гомеморфизм φ между Q^5 и $S^2 \times S^3$. Для этого нам понадобятся вспомогательные отображения $f_e(\alpha, v)$, построенные при доказательстве леммы 4.1.5.

Рассмотрим сферу с центром в точке 0 радиуса $\sqrt{1/2}$. Она разбивает $\mathcal{Z}$ на 2 части: $\mathcal{Z}'$ и $\mathcal{Z}''$. Будем считать, что объем $\mathcal{Z}'$ меньше объема $\mathcal{Z}''$. Разбиение $\mathcal{Z}$ на $\mathcal{Z}'$ и $\mathcal{Z}''$ порождает разбиение Q^5 на Q' и Q'' соответственно. Определим отображение φ на каждой из этих частей.

Начнем с Q''. Пусть e — единичный вектор, $\alpha \in \left[\sqrt{1/2}, 1\right]$ и $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^2$ — единичный вектор. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$ единичную сферу с центром в начале координат и стереографическую проекцию $\pi : S^3 \backslash S \to \mathbb{R}^3(x, y, z)$, где $S = (0, 0, 0, -1)$. Пусть $P = f_e\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}, v\right)$. Положим $\varphi(\alpha e, v) = (e, \pi^{-1}(P))$. Отметим, что согласно построению отображение φ непрерывно и инъективно на Q''.

Теперь доопределим φ на Q'. Пусть e — единичный вектор, $\alpha \in \left[1/2, \sqrt{1/2}\right]$ и $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^2$ — единичный вектор. Пусть l — аффинное преобразование, переводящее отрезок $\left[1/2, \sqrt{1/2}\right]$ в отрезок $\left[\sqrt{1/2}, 1\right]$, и $l\left(1/2\right) = 1$, $l\left(\sqrt{1/2}\right) = \sqrt{1/2}$. Рассмотрим отражение U в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$ относительно плоскости $Oxyz$ и положим $\varphi(\alpha e, v) = \left(e, U\left(\pi^{-1}\left(f_e\left(\dfrac{l(\alpha)}{\sqrt{2}}, v\right)\right)\right)\right)$. Построенное отображение непрерывно и инъективно на Q'.

Покажем, что отображение φ согласовано в точках склейки $\mathcal{Z}'$ и $\mathcal{Z}''$, то есть при $\alpha = \sqrt{1/2}$. Пусть e — единичный вектор и $v \in T_{\sqrt{\frac{1}{2}}e}\mathbb{R}^2$ — единичный вектор. Определим образ пары $\left(\sqrt{1/2}e, v\right)$ как точки из Q''. Поскольку $\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} = 1/2$, имеем: $f_e\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}, v\right) = v$. Так как $\|v\| = 1$, то $\pi^{-1}v = v$. Следовательно, $\varphi(\alpha e, v) = (e, v)$. Теперь найдем $\varphi(\alpha e, v)$ как образ точки из Q'. Так как $l\left(\sqrt{1/2}\right) = \sqrt{1/2}$ и $U(v) = v$, то в силу рассуждений выше $\varphi(\alpha e, v) = (e, v)$. Таким образом, φ — корректно определенное непрерывное отражение из Q^5 в $S^3 \times S^2$.

Нетрудно показать, что φ — биекция. Поскольку Q^5 — компакт, а φ — непрерывная биекция из Q^5 в S^5, φ — гомеоморфизм. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.1.4. *Пусть гладкая поверхность P^2, вложенная в $\mathbb{R}^3$, диффеоморфна тору T^2 и область, ограниченная этой поверхностью, диффеоморфна полноторию. Тогда изоэнергетическая поверхность трехмерного биллиарда внутри этой области гомеоморфна прямому произведению $S^1 \times S^4$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что P^2 — тор T^2, являющийся результатом вращения окружности $(x-2)^2 + z^2 = 1, y = 0$ вокруг оси Oz. Построим гомеоморфизм $\varphi : Q^5 \to S^1 \times S^4$.

Рассмотрим образующую окружность тора, расположенную под углом ψ к оси Ox. Будем считать, что отсчет этого угла ведется в положительном направлении обхода относительно плоскости Oxy. Выберем декартову систему координат $O'x'z$ в плоскости образующей так, что O' — центр образующей окружности, а координатный вектор $e_{x'}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{OO'}$. Дополним $O'x'z$ направлением $O'y'$ так, что система $O'x'y'z$ была бы правосторонней декартовой. Рассмотрим произвольный единичный радиус-вектор e в плоскости $O'x'z$, $\alpha \in [0, 1/2]$ и единичный вектор $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$. Положим $\varphi(\alpha e, v) = (\psi, \alpha e, \sqrt{1-\alpha^2}v)$, где координаты v записаны в базисе $e_z, e_{x'}, e_{y'}$.

Теперь доопределим это отображение в оставшихся точках Q^5. Для этого, как в лемме 4.1.2 для всякого единичного вектора $e \in O'x'z$ построим отображение f_e, которое сопоставляет каждой паре $(\alpha e, v) \in Q^5$, где $\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$, а $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$, точку из замкнутого диска $\overline{D}^3$. Это отображение строится абсолютно также, однако оно задается в координатах $O'x'y'z$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4(x', y', z, w)$ единичную сферу с центром в начале координат и стереографическую проекцию $\pi : S^3 \backslash S \to \mathbb{R}^3(x', y', z)$, где $S = (0, 0, 0, -1)$. Для произвольного единичного вектора e в $O'x'y'z$, $\alpha \in [1/2, 1]$, и единичного вектора $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$ положим $\varphi(\alpha e, v) = (\psi, w(P)e, x(P), y(P), z(P))$, где $P = f_e(\alpha, v)/\sqrt{3}$. Заметим, что это отображение согласовано при $\alpha = 1/2$. Нетрудно видеть, что при каждом фиксированном ψ возникает гомеоморфизм поверхности Q^5, ограниченной на диск с образующей, и сферы S^4.

Рассмотрим произвольную точку M внутри или на границе полнотория и вектор $v \in T_M\mathbb{R}^3$. Будем вращать плоскость вертикальной образующей, содержащей точку M, вокруг оси Oz. При таком преобразовании вектор v вращается вместе с точкой M. Пусть эти точка и вектор движутся по законам $M(t), v(t)$ соответственно. Заметим, что мы определили φ так, что $\varphi(M(t), v(t)) = (\psi(t), x)$, где x — точка на S^4, не зависящая от t. Поэтому, сделав полный оборот, точка M и вектор v вернутся в исходные положения. А значит, отображение φ, действительно, является гомеоморфизмом между Q^5 и $S^1 \times S^4$. Лемма доказана. $\square$

Теперь обобщим результаты, полученные в леммах 4.1.2 – 4.1.4, на кусочно-гладкие софокусные биллиардные столы. Поскольку любой софокусный биллиардный стол, гомеоморфный сферическому слою, обладает гладкой границей, остается доказать кусочно-гладкие аналоги лемм 4.1.2 и 4.1.4.

Лемма 4.1.5. *Если трехмерный софокусный биллиардный стол $\mathcal{Z}^3$ гомеоморфен трехмерному замкнутому диску $\overline{D}^3$, то изоэнергетическая поверхность трехмерного биллиарда внутри этого стола гомеоморфна сфере S^5.*

Доказательство. Есть несколько способов доказательства этой леммы. Например, можно сколь угодно точно приблизить биллиардный стол с углами $\mathcal{Z}$ гладким столом, после чего воспользоваться леммой 4.1.2 и показать, что в пределе таких аппроксимаций топология изоэнергетической поверхности биллиарда не изменится. Однако такой способ довольно трудный. Поэтому мы опишем идею более простого (наглядного) варианта доказательства этой леммы, который с легкостью обобщается на произвольную размерность.

Шаг 1. Сначала нужно доказать, что Q^5 является топологическим многообразием, т.е. показать, что у любой точки $x \in Q^5$ существует окрестность гомеоморфная пятимерному диску. Аналогичное утверждение для двумерных биллиардных книжек было доказано И. С. Харчевой в работе [59]. Идея доказательства этого факта для трехмерных биллиардных столов (и даже для многомерных) абсолютно такая же.

Шаг 2. Необходимо задать триангуляцию границы стола $\mathcal{Z}$ со следующими свойствами. Во-первых, ребра излома границы $\mathcal{Z}$ должны лежать на ребрах и вершинах триангуляции. Во-вторых, вершины излома должны содержаться в множестве вершин триангуляции. Заметим, что ограничение Q^5 на произвольную вершину триангуляции представляет собой замкнутый диск размерности 2.

Шаг 3. Пусть $\overline{D}^k$ — замкнутый диск, вложенный в многообразие M^n, и $k < n$. Тогда если отождествить все точки этого диска, в результате получится топологическое многообразие, гомеоморфное M^n. Этот факт очевиден и его можно наглядно проиллюстрировать в случае плоскости и отрезка на ней (см. рис. 4.3). Тем не менее, он нуждается в аккуратном доказательстве.

Теперь стянем двумерные диски, отвечающие вершинам триангуляции, в точку. В результате такого преобразования класс гомеоморфности Q^5 не изменится. В Q^5 этот процесс можно представить так. В вершинах триангуляции мы устремляем длины всех векторов к

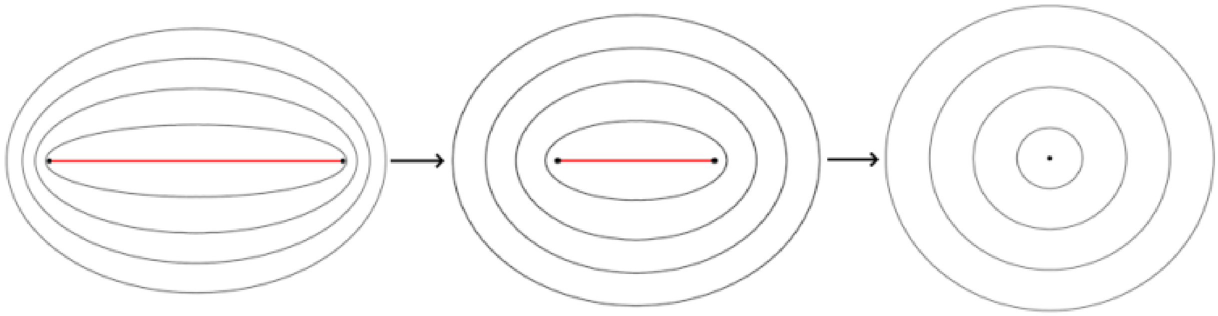


Рис. 4.3: Стягивание отрезка в плоскости не меняет ее класс гомеоморфности.

нулю, а в точках, расположенных неподалеку от вершин, "укорачиваем" касательные вектора так, чтобы они нигде между собой не склеились и оставались бы ненулевыми.

Теперь рассмотрим ребро e триангуляции. Каждой внутренней точке ребра отвечает замкнутый двумерный диск допустимых направлений, а граничным точкам e — в точности один вектор скорости (нулевой). На ребре e имеем однопараметическое семейство 2-дисков, которые стягиваются в точку при стремлении к вершинам ребра e. Следовательно, ребру e отвечает замкнутый трехмерный диск $\overline{D}^3$. Снова применим операцию стяжки и сделаем так, чтобы в каждой точке ребра e располагался в точности один нулевой вектор. Произведя аналогичную процедуру со всеми ребрами триангуляции, сделаем так, что в каждой точке ребер будет расположено по одному нулевому вектору в Q^5. Класс гомеоморфности Q^5 мы снова оставили без изменения.

Далее перейдем к граням триангуляции и сделаем аналогичные стяжки. В итоге, в каждой граничной точке стола будет расположено ровно по одному нулевому вектору в Q^5. При этом, в каждой внутренней точке будет находиться ровно одна двумерная сфера касательных направлений.

Шаг 4. Теперь выберем произвольный гомеоморфизм F между трехмерным столом и замкнутым диском в $\mathbb{R}^3$. Поскольку теперь на границе $\mathcal{Z}$ расположено ровно по одному вектору скорости, можно построить (с помощью отображения F) гомеоморфизм "измененного" Q^5 и пятимерной поверхности S, которая определяется так. Топологическое пространство $S \subset T\mathbb{R}^3$ есть совокупность всех пар точка-вектор (x, v), где: 1) x лежит на трехмерном замкнутом единичном шаре; 2) если x принадлежит границе этого шара, то $v = 0$, иначе в точке x возникает двумерная сфера направлений векторов скорости. Ясно, что поверхность S гомеоморфна пятимерной поверхности постоянной энергии системы, описывающий динамику материальной точки в поле притягивающего потенциала Гука, на уровне энергии $H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{k}{2}$. Последнее уравнение определяет в $\mathbb{R}^6(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ квадрику, гомеоморфную пятимерной сфере S^5. Таким образом, $Q^5 \cong S^5$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.1.6. *Если биллиардный стол $\mathcal{Z}^3$ гомеоморфен $\overline{D}^2 \times S^1$, то изоэнергетическая поверхность соответствующего трехмерного биллиарда гомеоморфна $S^1 \times S^4$.*

Доказательство этого утверждения в точности повторяет доказательство леммы 4.1.5.

4.2 Типы неособых Q^5 трехмерного биллиарда внутри эллипсоида с потенциалом Гука

4.2.1 Описание системы

Рассмотрим движение частицы в поле потенциала Гука внутри биллиардного стола $\mathcal{Z}$, ограниченного эллипсоидом $E \subset \mathbb{R}^3$:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \qquad \text{где} \quad 0 < c < b < a.$$

Биллиардом с потенциалом Гука назовем следующую динамическую систему. Пусть материальная точка единичной массы движется внутри эллипсоида E под действием упругой силы коэффициента k, чей центр совпадает с центром эллипсоида. Указанную силу и соответствующий гуковский потенциал назовем *отталкивающим* или *притягивающим* в случаях $k < 0$ и $k > 0$ соответственно. Стол, ограниченный эллипсоидом E, будем обозначать, как и ранее, через $\mathcal{Z}$.

Фазовое пространство системы $M^6 = T\,\mathcal{Z}/\sim$ задается склейкой границ, соответствующей закону отражения частицы от E:

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \qquad x_1 = x_2 = x, \quad \|v_1\| = \|v_2\|, \qquad v_1 - v_2 \perp T_xE \subset T_x\mathcal{Z}.$$

Иными словами, склеиваются пары "точка-вектор" (x, v_1), (x, v_2), у которых вектор v_1 получен из v_2 упругим отражением относительно касательной плоскости T_xE с равенством углов падения и отражения. Фазовое пространство, является лишь кусочно-гладким многообразием: имеются склейки "далеких" точек.

Полная механическая энергия материальной точки имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Заметим, что эта функция является первым интегралом биллиарда. Действительно, полная механическая энергия — первый интеграл задачи без отражения, а поскольку отражение от E абсолютно упругое (в частности, сохраняется длина вектора скорости), то H является первым интегралом рассматриваемой системы. Рассматриваемый нами биллиард является кусочно-гладкой интегрируемой гамильтоновой системой. В пункте 4.2.2 настоящего параграфа мы обсудим биллиард внутри n-осного эллипсоида в n-мерном пространстве и приведем явный вид первых интегралов.

Непустое множество $Q^5_h = \{(x, v) \in M^6 | H(x, v) = h\}$ назовем *изоэнергетической поверхностью*, а соответствующее ему значение h *допустимым значением* энергии. Заметим, что при $k > 0$ множество допустимых значений энергии — это промежуток $[0; +\infty)$, а при $k < 0$ — промежуток $[ka/2; +\infty)$.

Рассмотрим проекцию $\pi : M^6 \to D$ из фазового пространства на конфигурационное. Она определена корректно, т.к. пары "точка-вектор" с $x_1 \neq x_2$ не склеиваются друг с другом. *Областью возможного движения*, соответствующей значению h, назовем образ Q_h под действием π, т.е. проекцию изоэнергетической поверхности на биллиардный стол.

Заметим, что при $k > 0$ область возможного движения есть шар радиуса $\sqrt{2h/k}$, пересеченный с бильярдным столом. При $k < 0$ область возможного движения — либо внешность шара радиуса $\sqrt{2h/k}$, пересеченного с бильярдным столом (при $h \leqslant 0$), либо весь биллиардный стол (при $h > 0$). При $hk > 0$ сферу радиуса $\sqrt{2h/k}$ будем называть *граничной сферой*. Действительно, эта сфера входит в состав границы области возможного движения, при этом векторы из Q^5_h в точках граничной сферы — нулевые.

Определение 4.2.1. Значение (уровень) энергии h будем называть *бифуркационным*, если либо $h = 0$, либо соответствующая граничная сфера касается эллипсоида E. Иначе уровень энергии назовем *небифуркационным*.

Заметим, что граничная сфера касается эллипсоида E в том и только том случае, когда одна из его полуосей совпадает с радиусом граничного шара. Таким образом, особыми уровнями энергии являются: $h = 0$, $h = ka/2$, $h = kb/2$ и $h = kc/2$.

Замечание 4.2.1. Если мы рассмотрим задачу без отражения, то $dH|_{(x,\dot{x})=(x_0,\dot{x}_0)} = 0$ тогда и только тогда, когда $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$. Следовательно, в задаче без отражения только $h = 0$ является особым уровнем энергии. В задаче с отражением, помимо $h = 0$, мы объявили бифуркационными (особыми) уровни $h = ka/2, kb/2, kc/2$, потому что вид области возможного движения различается для значений энергии из левой и правой окрестности таких значений.

Оказывается, если h — небифуркационный уровень энергии, то соответствующая ему изоэнергетическая поверхность гомеоморфна либо несвязному объединению сфер S^5, либо $S^1 \times S^4$, либо $S^2 \times S^3$. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 4.2.1. *Пусть h — небифуркационное значение энергии H биллиарда внутри эллипсоида с потенциалом Гука коэффициента k, тогда:*

1. *если $k > 0$, то изоэнергетическая поверхность Q^5_h гомеоморфна сфере S^5,*

2. *если $k < 0$, то изоэнергетическая поверхность Q_h^5 гомеоморфна*

   - *несвязному объединению двух пятимерных сфер S^5 при $h \in \left(\frac{ka}{2}, \frac{kb}{2}\right)$;*
   - *прямому произведению окружности и четырехмерной сферы $S^1 \times S^4$ при $h \in \left(\frac{kb}{2}, \frac{kc}{2}\right)$;*
   - *прямому произведению двумерной и трехмерной сфер $S^2 \times S^3$ при $h \in \left(\frac{kc}{2}, 0\right)$;*
   - *пятимерной сфере S^5 при $h \in (0, +\infty)$.*

Следовательно, если $a = b = c$, то в случае $k > 0$ изоэнергетическая поверхность Q_h неособого уровня энергии гомеоморфна сфере S^5, при $k < 0$ и $h \in \Big(ka/2, 0\Big)$ — прямому произведению сфер $S^2 \times S^3$. В случае $k < 0$ и $h > 0$ — сфере S^5.

Доказательству этой теоремы посвящен третий пункт параграфа.

В сформулированной и доказанной ниже основной теореме мы не используем явно интегрируемость биллиарда. Класс гомеоморфности Q_h^5 полностью определяется классом гомеоморфности *области возможного движения*, т.е. проекции изоэнергетической поверхности Q_h^5 на стол — на конфигурационное пространство системы. Такой эффект уже встречался ранее.

- Если стол плоского компактного биллиарда гомеоморфен диску, то Q_h^3 биллиарда гомеоморфна сфере S^3 для любого конечного числа точек негладкости границы.

- Для трехмерных биллиардов без потенциала (в случае $k = 0$ и $h > 0$ можно) класс гомеоморфности Q_h^5 определялся только классом гомеоморфности стола (совпадающего с областью возможного движения) и не зависит от выбора $h > 0$ (см. предыдущий параграф).

Из теоремы и несложной проверки следует, что биллиард с притягивающим потенциалом Гука внутри эллипсоида имеет некритические значения $H = h_i$, являющиеся бифуркационными. По разные стороны от них класс гомеоморфности Q^5 не различается. Заметим, что при этих значениях не меняется класс гомеоморфности *области возможного движения*, т.е. проекции изоэнергетической поверхности Q_h^5 на стол (конфигурационное пространство).

Напомним, что схожая ситуация имеет место в более простой системе. Класс гомеоморфности Q_h^3 системы биллиарда внутри эллипса $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ с потенциалом Гука $\frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ не зависит от выбора $h > 0$ в случае притягивающего потенциала, т.е. если $k > 0$. В то же время, в случае $k < 0$ этот класс меняется при переходе энергии через каждое из трех значений: $ka/2 < kb/2 < 0$.

Данный факт имеет следующее объяснение. При предельном переходе (путем устремления малой полуоси к нулю) от геодезического потока на эллипсоиде к биллиарду мы “теряем” половину фазового пространства, соответствовавшую верхней или нижней половине эллипсоида. До перехода к пределу класс гомеоморфности области возможного движения для системы потока на эллипсоиде $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$, где $0<c<b<a$, в поле притягивающего потенциала Гука $\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)$ меняется при достижении $h=\frac{kb}{2}$. При этом две компоненты связности, лежащие на верхней и нижней половинах эллипсоида, пересекаются по двум точкам — концам средней полуоси. После предельного перехода ситуация меняется: указанная область для плоского биллиарда гомеоморфна диску при каждом $h>0$. Биллиард с отталкивающим потенциалом отличается: в нем при $h=kb/2$ и $h=ka/2$ тип этой области меняется.

Иными словами, двумерный и трехмерный биллиарды ведут себя схожим образом: в случае $k>0$ тип Q_h^5 не зависит от $h>0$, а в случае $k<0$ класс гомеоморфности области возможного движения меняется. Бифуркационными значениями трехмерного биллиарда оказываются $h=0, ka/2, kb/2, kc/2$. Отметим также, что указанным значениям энергии потока на граничном эллипсоиде E соответствуют положения равновесия — точки, где $dH=0$.

4.2.2 Интегрируемость биллиарда с потенциалом Гука

К. Якоби в работе [67] указал $n-1$ первый интеграл геодезического потока на поверхности $n-1$-мерного эллипсоида. А именно, он доказал, что касательные, проведенные к каждой точке геодезической на эллипсоиде, касаются $n-2$ квадрик, софокусных с данным эллипсоидом. Интегралами являются параметры этих квадрик и энергия частицы. Они функционально независимы [73] и находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона, что несложно проверить. Иными словами, данная система является вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой с $n-1$ степенью.

В той же работе [67] Якоби проинтегрировал и более общую задачу, когда движение по эллипсоиду происходит под действием центральной упругой силы, центр которой совпадает с центром эллипсоида.

Рассмотрим эту задачу для n-мерного эллипсоида в $(n+1)$-мерном пространстве и выполним переход от нее к биллиарду. Устремив меньшую полуось к нулю, получим биллиард внутри $(n-1)$-мерного эллипсоида в n-мерном пространстве. Интегрируемость этой кусочно-гладкой гамильтоновой системы следует из результата Якоби [67].

Следуя методу В. В. Козлова, укажем явный вид ее интегралов. Сначала мы приведем первые интегралы I_k задачи без потенциала, то есть при $k=0$, а затем вычислим первые интегралы F_k нашей задачи, считая, что $F_k=I_k+f_k$, где функции f_k зависят только от пространственных переменных.

Рассмотрим биллиард с потенциалом Гука внутри эллипсоида, заданного уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1, \qquad a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0.$$

Пусть сначала $k = 0$. В этом случае найдутся $n-1$ софокусных с эллипсоидом квадрик, которых одновременно касаются все прямые, содержащие звенья произвольной выбранной траектории бильярдного шара. Приведем неявное выражение параметров этих квадрик через координаты точек и направляющих векторов. Будем считать, что параметр λ у эллипсоида $\frac{x_1^2}{a_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1$ равен нулю. Рассмотрим прямую, проходящую через точку $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в направлении вектора $v = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$. Эта прямая касается софокусной с эллипсоидом квадрики параметра λ в том и только том случае, когда дискриминант квадратного относительно τ уравнения

$$\frac{(x_1+\tau\dot{x}_1)^2}{a_1-\lambda} + \frac{(x_2+\tau\dot{x}_2)^2}{a_2-\lambda} + \cdots + \frac{(x_n+\tau\dot{x}_n)^2}{a_n-\lambda} = 1$$

равен нулю. Это равносильно тому, что:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{x}_i^2}{a_i-\lambda} - \sum_{i<j} \frac{(x_i\dot{x}_j - x_j\dot{x}_i)^2}{(a-\lambda_i)(a-\lambda_j)} = 0.$$

Пусть $K_{ij} = x_i\dot{x}_j - x_j\dot{x}_i$. Перепишем последнее уравнение, домножив его на $(a_1 - \lambda)\ldots(a_n-\lambda)$.

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 \prod_{j\neq i}(a_j-\lambda) - \sum_{i<j} K_{ij}^2 \prod_{m\neq i,j}(a_m-\lambda) = 0$$

Заметим, что все корни этого уравнения вещественные и являются первыми интегралами. Также заметим, что коэффициент при старшей степени этого уравнения пропорционален энергии, то есть является первым интегралом. Следовательно, по теореме Виета коэффициенты при всех степенях многочлена слева являются первыми интегралами. Поскольку по теореме Абеля уравнение степени 5 и выше, вообще говоря, не разрешимо в радикалах, то вместо параметров квадрик и энергии рассмотрим в качестве первых интегралов коэффициенты при всех степенях этого многочлена.

Обозначим через σ_m^{ij} элементарный симметрический многочлен степени m от переменных $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$, а через σ_m^i — элементарный симметрический многочлен степени m от переменных $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$. Положим $\sigma_0^{ij} = \sigma_0^i = 1$, а $\sigma_{-1}^{ij} = 0$. Напишем коэффициенты многочлена выше с точностью до константы.

$$I_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_m^i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i<j}\sigma_{m-1}^{ij}K_{ij}^2, \text{где } k = 0, \dots, n-1$$

Заметим, что $I_0 = H$.

Несложно убедиться, что эти первые интегралы функционально независимы и попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.

Теперь приведем дополнительные первые интегралы F_i, $i = 1, \dots, n-1$ при $k \neq 0$. Мы будем искать их в виде $F_i = I_i + f_i(x, y, z)$, где f_i — неизвестная гладкая функция, зависящая только от пространственных переменных. Пусть мы нашли f_i такую, что F_i первый интеграл задачи без отражения. Поскольку f_i зависит только от пространственных переменных, I_i — первые интегралы задачи с отражением, а при отражении меняется только направление вектора скорости, то F_i будет первым интегралом задачи с отражением. Следовательно, f_i можно искать, рассматривая F_i в качестве первого интеграла задачи без отражения. Заметим, что K_{ij} — первые интегралы задачи без отражения. Поэтому,

$$0 = \dot{F}_j = \sum_{i=1}^{n}(\dot{x}_i\ddot{x}_i\sigma_j^i + \partial_{x_i}f_j\dot{x}_i) = \sum_{i=1}^{n}(-k\dot{x}_i x_i\sigma_j^i + \partial_{x_i}f_j\dot{x}_i) = \sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i(-kx_i\sigma_j^i + \partial_{x_i}f_j)$$

В этом уравнении все переменные разделяются, и мы легко получаем частное решение $f_j = \frac{k}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_j^i x_i^2$. Обозначив энергию через F_0, получаем систему функционально независимых первых интегралов

$$F_l = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_l^i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i<j}\sigma_{l-1}^{ij}K_{ij}^2 + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_l^i x_i^2, \text{ где } l = 0, \dots, n-1$$

Можно показать, что найденные первые интегралы $F_0, \dots, F_{n-1}$ попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.

4.2.3 Классы гомеоморфности неособых Q^5 эллиптического биллиарда с потенциалом Гука

Докажем несколько лемм, из которых будет следовать утверждение теоремы 4.2.1.

Лемма 4.2.1. *Пусть $k > 0$ и h — небифуркационный уровень энергии, тогда изоэнергетическая поверхность Q_h^5 гомеоморфна сфере S^5.*

Доказательство. Пусть h зафиксировано. Как уже было отмечено, область возможного движения есть пересечение биллиардного стола и шара, ограниченного граничной сферой. Рассмотрим сферу радиуса $R < \min\{1, \sqrt{c}, \sqrt{2h/k}\}$. Она разбивает область возможного движения на две компоненты, одна из которых гомеоморфна замкнутому диску D^3, а другая —

прямому произведению сферы S^2 и отрезка. Изоэнергетическая поверхность Q_h в этом случае также разбивается на две компоненты $Q_{h,1}$, $Q_{h,2}$. Будем считать, что $Q_{h,1}$ соответствует компоненте области возможного движения, гомеоморфной шару. Мы определим отображение $\varphi : Q_h \to S^5$ отдельно на каждой из компонент $Q_{h,1}$, $Q_{h,2}$, а далее покажем, что оно согласовано в точках склейки $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$ и является гомеомофизмом. Будем предполагать, что сфера S^5 стандартно вложена в $\mathbb{R}^6$.

Пусть $e \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$ — единичный вектор. Тогда для любого фиксированного $\alpha \in [0, R]$ пары $(\alpha e, v) \in Q_{h,1}$ образуют сферу S^2, при этом квадраты длин всех таких векторов v равны $2h - k\alpha^2$. Положим $\varphi(\alpha e, v) = \left(\alpha e, \sqrt{\dfrac{1-\alpha^2}{2h - k\alpha^2}} v\right)$. Заметим, что $\|\varphi(\alpha e, v)\| = 1$. Таким образом, мы определили отображение φ на $Q_{h,1}$. Отметим, что построенное отображение непрерывно на $Q_{h,1}$ и инъективно.

Теперь продолжим φ на $Q_{h,2}$. Для произвольного единичного вектора e определим число $g(e) > 0$ такое, что луч Oe пересекает эллипсоид E в точке $g(e)e$. Для этого рассмотрим линейный оператор $A(x, y, z) = (x/a, y/b, z/c)$ и соответствующую ему векторную норму $\|e\|_A = \sqrt{\langle Ae, e\rangle}$. Луч Oe пересекает эллипсоид E в точке $g(e)e$ тогда и только тогда, когда $1 = \langle Ag(e)e, g(e)e\rangle = g^2(e)\|e\|_A^2$, то есть $g(e) = 1/\|e\|_A$.

Возможны два случая: луч Oe пересекает границу области возможного движения либо в точке эллипсоида E, то есть $2h - k/\|e\|_A^2 \geq 0$, либо в точке граничной сферы, то есть $2h - k/\|e\|_A^2 \leq 0$. Для обоих случаев построим вспомогательный гомеоморфизм f_e, который сопоставляет каждой точке ограничения множества $Q_{h,2}$ на луч Oe точку трехмерного диска D^3.

Пусть сначала $2h - k/\|e\|_A^2 \leq 0$. В таком случае параметр α изменяется на отрезке $[R, \sqrt{2h/k}]$. Сопоставим точке $(\alpha e, v) \in Q_{h,2}$ точку $f_e(\alpha, v) = \dfrac{1}{\sqrt{2h - kR^2}} v \in D^3$. Заметим, что это отображение при фиксированном $\alpha \neq \dfrac{2h}{k}$ переводит сферу направлений в точке αe в сферу радиуса $\sqrt{\dfrac{2h - k\alpha^2}{2h - kR^2}}$ в $\mathbb{R}^3$. При этом f_e биективно и, очевидно, непрерывно в обе стороны. Следовательно, f_e — гомеоморфизм.

Пусть теперь $2h - k/\|e\|_A^2 > 0$, то есть луч Oe пересекает границу области возможного движения в точке эллипсоида E. Следовательно, параметр α изменяется на отрезке $[R, 1/\|e\|_A]$. Отметим, что при $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A)$ в точке αe возникает сфера направлений радиуса $\sqrt{2h - k\alpha^2}$, а при $\alpha = 1/\|e\|_A$ — полусфера направлений радиуса $\sqrt{2h - k/\|e\|_A^2}$. Для построения отображения f_e нам понадобятся вырожденные эллиптические координаты. Рассмотрим семейство квадрик, заданное уравнением

$$\frac{x^2}{p-\mu} + \frac{y^2}{p-\mu} + \frac{z^2}{q-\mu} = 1,$$

где $p > q > 0$. Добавим к этому семейству все плоскости, проходящие через ось Oz. Полученное множество поверхностей второго порядка — вырожденное семейство софокусных квадрик (см. рис 4.1). Можно показать, что через каждую точку, лежащую внутри координатного октанта, проходит ровно три квадрики этого семейства, причем одна из них — эллипсоид, другая — однополостный гиперболоид, а третья — плоскость. Это семейство квадрик порождает вырожденные эллиптические координаты (μ_1, μ_2, ψ), где μ_1 — параметр эллипсоида данного семейства, проходящего через данную точку, μ_2 — параметр однополостного гиперболоида, ψ — угол между плоскостью, проходящей через данную точку и ось Oz, и осью Ox.

Вернемся к построению отображения f_e. Положим $p(e) = 2h - kR^2$, $q(e) = -kR^2 + k/\|e\|_A^2$. Рассмотрим новую декартову систему координат $O'x'y'z'$, такую, что $O' = e/\|e\|_A$, то есть O' — точка пересечения оси Oe и эллипсоида E, а ось $O'z'$ сонаправлена с e. В этой системе координат рассмотрим вырожденное семейство софокусных квадрик, заданных уравнением:

$$\frac{x'^2}{p(e) - \mu} + \frac{y'^2}{p(e) - \mu} + \frac{z'^2}{q(e) - \mu} = 1$$

Растянем сначала это семейство квадрик по оси $O'z'$ так, что эллипсоид с параметром $\mu = 0$ стал бы сферой, то есть растянем в $\sqrt{q(e)/p(e)}$ раз. А затем сожмем это семейство в $\sqrt{2h - kR^2}$ раз по всем осям. Считаем, что при этих трансформациях вырожденные эллиптические координаты были "вморожены" в это семейство квадрик. Теперь построим отображение f_e. Пусть $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A]$ и $(\alpha e, v) \in Q_{h,2}$. Перепишем v в координатах $(x', y,' z')$. Как уже отмечалось ранее, $\|v\|^2 = 2h - k\alpha^2$. Нормируем этот вектор. Пусть $(0, \mu_2, \psi)$ — вырожденные эллиптические координаты конца полученного вектора. Рассмотрим сдвиг этой точки вдоль координатной линии первой координаты в точку с вырожденными эллиптическими координатами $(-kR^2 + k\alpha^2, \mu_2, \psi)$. Считаем, что сдвиг происходит с увеличением первой эллиптической координаты. Координаты полученной точки в системе координат $O'xyz$ обозначим как $f_e(\alpha, v)$. Заметим, что сфера направлений в точке αe при $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A)$ гомеоморфно отображается на эллипсоид с параметром $\mu = -kR^2 + k\alpha^2$, а полусфера направлений в точке $e/\|e\|_A$ — в круг с параметром $\mu = q(e)$. Таким образом, отображение f_e биективно отображает множество $Q_{h,2}$, ограниченное на луч Oe, на замкнутый диск D^3, при этом оно является непрерывным в обе стороны, то есть f_e — гомеоморфизм.

Теперь доопределим отображение φ на $Q_{h,2}$. Рассмотрим стереографическую проекцию π сферы S^3, стандартно вложенной в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$, из точки с $(0; 0; 0; -1)$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Пусть $(\alpha e, v) \in Q_{2,h}$, рассмотрим точку $f_e(\alpha, v) \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$. Сожмем все координаты этой точки в $\sqrt{\dfrac{1+R}{1-R}}$ раз и рассмотрим прообраз P стереографической проекции этой точки на сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4(x, y, z, w)$. Тогда положим $\varphi(\alpha e, v) = (w(P)e, x(P), y(P), z(P))$.

Заметим, что построенное нами отображение φ корректно определено в точках склейки

$Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$. Действительно, по определению $f_e(R,v) = \dfrac{v}{\sqrt{2h-kR^2}}$. Следовательно, по определению φ на множестве $Q_{h,2}$ имеем $\varphi(Re,v) = \left(Re, \sqrt{\dfrac{1-R^2}{2h-kR^2}}v\right)$, что совпадает со значением $\varphi(Re,v)$ по определению φ на множестве $Q_{h,1}$. Заметим также, что по построению отображение φ инъективно. Проверим, что оно сюръективно. Действительно, пусть $(v_1,v_2) \in S^5$, где $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Если $\|v_1\| \le R$, то рассмотрим $\alpha = \|v_1\|$, $e = v_1/\|v_1\|$ и $v = \sqrt{\dfrac{2h-k\alpha^2}{1-\alpha^2}}v_2$. Тогда $(\alpha e, v) \in Q_{h,1}$ и по построению $\varphi(\alpha e, v) = (v_1, v_2)$. Если же $\|v_1\| > R$, то сюръективность следует из сюръективности стереографической проекции и сюръективности отображений f_e.

Осталось доказать, что отображение φ непрерывно. По построению, непрерывность может нарушаться только в точках вида αe, где e единичный вектор такой, что Oe пересекает границу области возможного движения в точке пересечения эллипсоида E и граничной сферы, а $\alpha \in [R, \sqrt{2h/k}]$. Убедимся, что в этих точках отображение φ непрерывно.

Рассмотрим последовательность единичных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что лучи Oe_n пересекают границу области возможного движения строго по эллипсоиду E, то есть $2h - k/\|e_n\|_A^2 > 0$. Пусть существует предел этой последовательности, равный вектору e, и пусть луч Oe пересекает границу области возможного движения в точке пересечения эллипсоида E и граничной сферы, то есть $2h - 1/\|e\|_A^2 = 0$. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} p(e_n) - q(e_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 2h - k/\|e_n\|_A^2 = 2h - 1/\|e\|_A^2 = 0$, а $p(e_n) = p(e) = 2h - kR^2$ для любого n. Значит, при $n \to \infty$ эллипсоиды вырожденного семейства софокусных квадрик трансформируются в сферы, однополостные гиперболоиды — в конусы, а вырожденные эллиптические координаты — в сферические координаты. При этом, эллипсоид с параметром μ станет шаром радиуса $\sqrt{p(e)-\mu}$. Поскольку отображение f_{e_n} переводит сферу направлений в точке αe_n в эллипсоид параметра $\mu = -kR^2 + k\alpha^2$, то при $n \to \infty$ эти эллипсоиды перейдут в шары радиуса $\sqrt{2h-k\alpha^2}$. Однако, учитывая то, что мы растягивали наши квадрики в $\sqrt{p(e_n)/q(e_n)}$ раз по оси $O'_n e_n$ и сжимали в $\sqrt{2h-kR^2}$ раз по всем направлениям, предел эллипсоидов $f_{e_n}(\alpha, v)$ при фиксированном α равен сфере радиуса $\sqrt{\dfrac{2h-k\alpha^2}{2h-kR^2}}$, которая получается по определению $f_e(\alpha e, v)$ при фиксированном α. Заметим также, что при $n \to \infty$ круги параметра $\mu = q(e)$ сжимаются в точку, поскольку их радиус $\sqrt{p(e_n) - q(e_n)}$ стремится к нулю. Таким образом, отображение φ непрерывное.

Поскольку $\varphi : Q_h \to S^5$ — непрерывная биекция, а Q_h — компактное подмножество, то φ является гомеоморфизмом. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, случай $k > 0$ нами полностью разобран. Перейдем к случаю $k < 0$.

Лемма 4.2.2. *Пусть $k < 0$ и $h \in \left(\dfrac{kb}{2}, \dfrac{kc}{2}\right)$, тогда соответствующая изоэнергетическая поверхность гомеоморфна прямому произведению сфер $S^1 \times S^4$.*

Доказательство. В данном случае область возможного движения гомеоморфна полноторию и заключена между эллипсоидом E и граничной сферой, радиус которой больше $\sqrt{c}$, но меньше $\sqrt{b}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ цилиндрические координаты (r, ψ, z). Доказательство этой леммы разобьем на две части. Сначала мы покажем, что прообраз полуплоскости $\psi = const$ при проекции $\pi : Q^5 \to D$, построенной в первом пункте, гомеоморфен сфере S^4, построив гомеоморфизм $\varphi_\psi(x) : Q_{h,\psi} \to S^4$. А затем покажем, что отображение $\Phi(x, v) : Q_h \to S^1 \times S^4$, которое сопоставляет каждой паре (x, v) пару $(\psi, \varphi_\psi(x, v))$, где ψ — угловая цилиндрическая координата точки x, взятая по модулю 2π, является гомеоморфизмом.

Рассмотрим эллипс F вида $\dfrac{x^2}{a_1} + \dfrac{y^2}{a_2} = 1, z = 0$, лежащий строго внутри области возможного движения. Выберем положительное $\varepsilon < 1$ такое, что замыкание ε-окрестности этого эллипса лежало бы строго внутри области возможного движения. В каждой полуплоскости $\psi = const$ рассмотрим окружность радиуса ε с центром в точке O, лежащей на эллипсе F. Такие окружности образуют гладкую поверхность, гомеоморфную тору. Обозначим через K' область возможного движения шара без полнотория, ограниченного этой поверхностью.

Теперь рассмотрим тор вращения в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, заданный уравнениями:

$$\begin{cases} x = (R + \rho\cos\chi)\cos\theta \\ y = (R + \rho\cos\chi)\sin\theta \\ z = \rho\sin\chi \end{cases}$$

где $R > \rho > 0$ — константы, $\chi, \theta \in [0, 2\pi]$. Пусть K — замкнутая область ограниченная торами с $R = 2$ и $\rho = 1$, $\rho = \varepsilon$. Рассмотрим гомеоморфизм $\beta : K \to K'$ такой, что:

1) для любого $\psi_0 \in [0, 2\pi]$ отображение β гомеоморфно отображает $K \cap \{\psi = \psi_0\}$ на $K' \cap \{\psi = \psi_0\}$;

2) прообраз граничной сферы лежит на торе с $R = 2$, $\rho = 1$;

3) для любого $\psi_0 \in [0, 2\pi]$ и для любой точки P на торе с $R = 2$ и $\rho = \varepsilon$, лежащей в полуплоскости $\psi = \psi_0$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'\beta(P)}$, где O' — точка пересечения эллипса F и полуплоскости $\psi = \psi_0$, а O — точка пересечения тора с $R = 2$, $\rho = 0$(это окружность) и полуплоскости $\psi = \psi_0$.

Это отображение проиллюстрировано на рисунке 4.4.

Теперь зафиксируем полуплоскость $\psi = \psi_0$. Обозначим прообраз полуплоскости $\psi = \psi_0$ при отображении $\pi : Q^5 \to D$ через Q_{h,ψ_0}, а пересечение стола D и этой полуплоскости — через D_{ψ_0}. Пусть O' — точка пересечения рассматриваемой полуплоскости и эллипса F. Рассмотрим в полуплоскости $\psi = \psi_0$ окружность радиуса ε. Она разбивает D_{ψ_0} на две компоненты $D_{\psi_0,1}$ и $D_{\psi_0,2}$. Будем считать, что $D_{\psi_0,1}$ — часть D_{ψ_0}, лежащая внутри окружности. В таком случае Q_{h,ψ_0} также разбивается на два куска $Q_{h,\psi_0,1}$ и $Q_{h,\psi_0,2}$. Будем считать, что кусок $Q_{h,\psi_0,1}$ соответствует компоненте $D_{\psi_0,1}$.

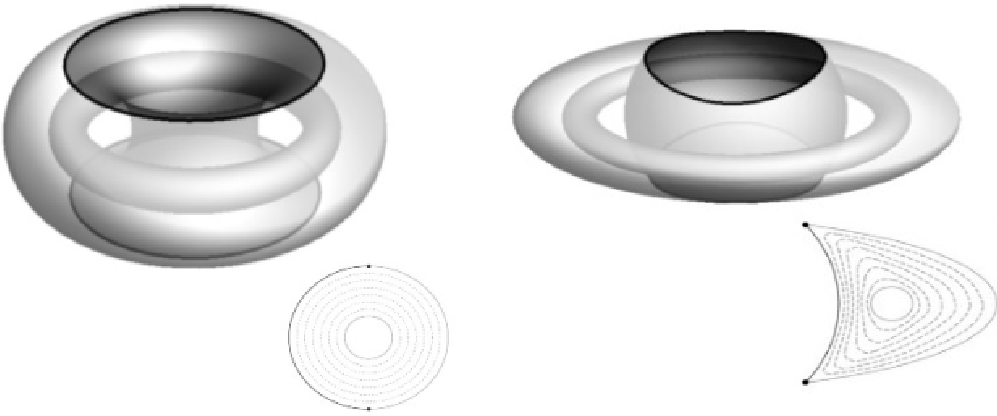


Рис. 4.4: Иллюстрация отображения β. Темно-серым справа выделены участки граничной сферы, а слева — её прообраз. Снизу слева выделено пересечение фигуры K и полуплоскости $\psi = \psi_0$, а снизу справа — его образ при гомеоморфизме β.

Сначала построим гомеоморфизм $\varphi(\psi_0, x)$ компоненты Q_{h,ψ_0} и сферы S^4. Как и в лемме 1, мы определим это отображение на каждом из кусков $Q_{h,\psi_0,i}$, проверим корректность, биективность и непрерывность. Перейдем в систему координат $O'rz$. Пусть e — произвольный единичный радиус-вектор в этой системе координат. Тогда для произвольного $\alpha \in [0, \varepsilon]$ и вектора v такого, что $(\alpha e, v) \in Q_{h,\psi_0,1}$ положим $\varphi(\alpha e, v) = \Big(\alpha e, \dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\|v\|} v\Big)$, где координаты v записаны в отнормированном базисе e_r, e_ψ, e_z. Таким образом, мы определили φ на $Q_{h,\psi_0,1}$. Заметим, что на множестве $Q_{h,\psi_0,1}$ отображение φ непрерывно и инъективно.

Теперь определим φ на множестве $Q_{h,\psi_0,2}$. Для любого единичного радиус-вектора e необходимо построить вспомогательное отображение f_e, которое гомеоморфно отображает прообраз кривой $\beta(\alpha e)$, $\alpha \in [\varepsilon; 1]$, при проекции π на замкнутый единичный диск D^3. Построение таких отображений происходит почти как в лемме 1, однако с некоторыми различиями. Рассмотрим отрезок $[\varepsilon e; e]$ и применим к нему гомеоморфизм β. Далее мы рассмотрим два случая: $\beta(e)$ лежит на граничной сфере, $\beta(e)$ не лежит на граничной сфере. Для краткости рассмотрим первый случай. Положим $f_e(\alpha, v) = \sqrt{\dfrac{1-\alpha^2}{(1-\varepsilon^2)(2h - k\beta^2(\alpha e))}} v$, где $\alpha \in [\varepsilon; 1]$. Во втором случае нам опять понадобится система вырожденных эллиптических координат.

Теперь рассмотрим стереографическую проекцию π сферы S^3, стандартно вложенной в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$, из южного полюса на гиперплоскость $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Пусть $\alpha \in [\varepsilon; 1]$, рассмотрим точку $f_e(\alpha, v) \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$. Сожмем все координаты этой точки в $\sqrt{(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)}$ раз и рассмотрим прообраз P стереографической проекции этой точки на сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4(x, y, z, w)$. Тогда положим $\varphi(\beta(\alpha e), v) = (w(P)e, x(P), y(P), z(P))$.

Корректность, биективность и непрерывность доказывается так же, как в лемме 1. Поскольку Q_{h,ψ_0} — компактное подмножество, то отображение φ является гомеоморфизмом. Теперь рассмотрим отображение $\Phi(x, v) = (\psi(x), \varphi_\psi(x, v))$, где $\psi(x)$ — угловая цилиндрическая координата точки x, взятая по модулю 2π. Это отображение, очевидно, биективно. Заметим, что φ непрерывно относительно ψ, взятого по модулю 2π. Действительно, отображения f_e, которые мы используем для построения φ, непрерывно зависят от цилиндрических координат. Функция $\varphi(\alpha e, v) = \left(\alpha e, \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\|v\|} v\right)$ также непрерывно зависит от цилиндрических координат. Следовательно, отображение Φ — непрерывная биекция, а поскольку множество Q_h является компактным, то Φ — гомеоморфизм Q_h и $S^1 \times S^4$. $\square$

Лемма 4.2.3. *Пусть $k < 0$ и $h \in \left(\frac{kc}{2}, 0\right)$, тогда соответствующая изоэнергетическая поверхность гомеоморфна прямому произведению сфер $S^2 \times S^3$.*

Доказательство. Заметим, что область возможного движения ограничена эллипсоидом E и граничной сферой, радиус которой меньше $\sqrt{c}$. Следовательно, граничная сфера лежит внутри эллипсоида. Пусть $\sqrt{2h/k} < R < \sqrt{c}$. Рассмотрим сферу радиуса R. Она разбивает область возможного движения на две компоненты. Изоэнергетическая поверхность тоже разбивается на два куска $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$. Будем считать, что $Q_{h,1}$ соответствует компоненте области возможного движения, ограниченной граничной сферой и сферой радиуса R. Как и в лемме 1, мы построим гомеоморфизм $\varphi : Q_h^5 \to S^2 \times S^3$ отдельно на каждой из компонент $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$, а далее покажем, что оно согласовано в точках склейки $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$ и является гомеомофизмом. Мы будем предполагать, что S^2 и S^3 стандартно вложены в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ соответственно.

Сначала определим φ на $Q_{h,1}$. Пусть e — единичный вектор и $\alpha \in [\sqrt{2h/k}, R]$. Рассмотрим вектор $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$ такой, что $(\alpha e, v) \in Q_h^5$. Положим $\varphi(\alpha e, v) = \left(e, \left(\frac{\alpha}{2h - kR^2} v, \sqrt{\frac{k(\alpha^2 - R^2)}{2h - kR^2}}\right)\right)$, где первая координата соответствует сфере S^2, стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, а оставшаяся пара координат — сфере S^3, стандартно вложенной в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$, причем первая координата пары — тройка (x, y, z), а вторая — w. Отметим, что построенное отображение непрерывно и инъективно на $Q_{h,1}$.

Теперь доопределим отображение φ на $Q_{h,2}$. Для этого мы воспользуемся вспомогательными отображениями $f_e(\alpha)$, построенными в лемме 1. Рассмотрим стереографическую проекцию π сферы S^3, стандартно вложенной в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$, из точки с $(0; 0; 0; 1)$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Пусть точка P — прообраз точки $f_e(\alpha)$ при отображении π. Тогда положим $\varphi(\alpha e, v) = (e, P)$. Заметим, что построенное отображение непрерывно и инъективно на $Q_{h,2}$.

Покажем, что φ корректно определено в точках склейки $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$. Согласно определению φ, на множестве $Q_{h,2}$ $\varphi(Re, v) = (e, P(v))$. Однако $f_e(R) \in S^3$, поэтому $P(v) = (f_e(R), 0) = (\frac{v}{\sqrt{2h - kR^2}}, 0)$. Следовательно, $\varphi(Re, v) = \left(Re, \left(\frac{v}{\sqrt{2h - kR^2}}, 0\right)\right)$, что совпадает с определением φ на множестве $Q_{h,1}$. Таким образом, φ — непрерывное и корректно определенное отображение.

Нетрудно доказать биективность отображения φ. Поскольку φ является непрерывным биективным отображением компактного пространства, то φ — гомеоморфизм. $\square$

Лемма 4.2.4. *Пусть $k < 0$. Тогда если:*

1. $h \in \left(\dfrac{ka}{2}, \dfrac{kb}{2}\right)$, *то изоэнергетическая поверхность Q_h^5 гомеоморфна несвязному объединению двух сфер S^5;*

2. $h > 0$, *то изоэнергетическая поверхность Q_h^5 гомеоморфна сфере S^5.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 4.2.1.

Заключение

В диссертации получена комбинаторная классификация софокусных биллиардных столов на квадриках (эллипсоид, пара гиперболоидов) в трехмерном евклидовом пространстве, а также лиувиллева классификация соответствующих биллиардов. Все такие системы оказались лиувиллево эквивалентны другим известным ИГС из физики, механики и геометрии на подходящих уровнях энергии.

Также в работе проведена классификация трехмерных софокусных биллиардных столов. Для биддиардов внутри таких областей изучено локальное устройство слоения Лиувилля (т.е. вблизи каждого слоя), в результате чего получена полная классификация трехмерных софокусных биллиардов относительно грубой лиувиллевой эквивалентности на поверхностях постоянной энергии. Для описания полулокального устройства особенностей таких систем был описан и использован метод понижения степени свободы. Оказалось, что трехмерные софокусные биллиарды тесно связаны с геодезическими биллиардами на квадриках в поле силы Гука.

Для трехмерных софокусных биллиардов, а также биллиарда внутри эллипсоида в поле силы Гука определены классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии. Оказалось, что связная компонента такой поверхности гомеоморфна либо сфере S^5, либо $S^4 \times S^1$, либо $S^3 \times S^2$. Метод, используемый при доказательстве этого факта, никак не использовал интегрируемость систем.

Отметим некоторые дальнейшие направления этой работы.

1. Метод понижения степени свободы показывает, что биллиард внутри трехмерного софокусного стола связан с софокусным геодезическим биллиардом с потенциалом Гука в некоторой области на квадрике. Это соображение будет справедливо в произвольной размерности. Возникающая индуктивная связь поможет описать полулокальное устройство особенностей биллиарда внутри софокусного стола произвольной размерности.

2. Метод понижения степени свободы можно применить не только к софокусным биллиардам, но и к другим ИГС, в которых уравнения разделяющихся переменных записываются подобно уравнениям движения биллиардов в эллиптических координатах.

3. Идея стягивания дисков в точку, используемая для нахождения топологического типа поверхности Q^5 трехмерных биллиардов, сработает и в произвольной размерности. Поэтому стоит ожидать, что поверхность постоянной энергии биллиарда в произвольной софокусной области гомеоморфна прямому произведению сфер.

Литература

[1] Биркгоф Дж.Д. Динамические системы // Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск. – 1999.

[2] Козлов В.В., Трещев Д.В. Генетическое введение в динамику систем с ударами // Издательство МГУ, Москва. – 1991.

[3] Табачников С. Геометрия и биллиарды // Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, Москва – Ижевск. – 2011.

[4] Dragovich V., Radnovich M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regular and Chaotic Dynamics. – 2009. – Vol. 14, No. 4-5. – p. 479 – 494.

[5] Драгович В., Раднович М. Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе // Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», Москва – Ижевск. – 2010.

[6] Фокичева В.В. Описание особенностей системы «биллиард в эллипсе» // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2012. – №5. – С. 31 – 34.

[7] Фокичева В.В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2014. – №4. – С. 18 – 27.

[8] Фокичева В.В. Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Математический сборник. – 2015. – Т. 206, №10. – 127-176.

[9] Ведюшкина В.В. Слоение Лиувилля невыпуклых топологических биллиардов // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2018. – Т. 478, №1. – С. 7 – 11.

[10] Ведюшкина В.В. Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов // Математический сборник. – 2019. – Т. 210, №3. – С. 17 – 74.

[11] Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы // Известия РАН. Серия математическая. – 2017. – Т. 81, № 4. – С. 20 – 67.

[12] Zung N.T. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. II: Topological Classification // Compositio Mathematica. – 2003. – Vol. 138. p. 125 – 156.

[13] Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функциональный анализ и его приложения. – 1988. – Т. 22, №4. – С. 38 – 51.

[14] Fomenko A.T., The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom // Topological classification of integrable systems / Advances in Soviet Mathematics, American Mathematical Society – 1991. – Vol. 6. – p. 1 – 36.

[15] Фоменко А.Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1991. – Т. 55, №4. – С. 747 – 779.

[16] Харламов М.П., Рябов П.Е. Топологический атлас волчка Ковалевской в двойном поле // Фундаментальная и прикладная математика. – 2015. – Т. 20, №2. – С. 185 – 230.

[17] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1990. – Т. 54, №3. – С. 546 – 575.

[18] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2 (Монография) // Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск. – 1999.

[19] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Fomenko A.T. Two-dimensional Riemannian metrics with integrable geodesic flows. Local and global geometry // Sbornik: Mathematics. – 1998. – Vol. 189, No. 10. – p. 1441 – 1466.

[20] Selivanova E.N. Classification of geodesic flows of Liouville metrics on the two-dimensional torus up to topological equivalence // Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics. – 1993. – Vol. 75, No. 2. – p. 491 – 505.

[21] Kalashnikov V.V. Topological classification of quadratic-integrable geodesic flows on a twodimensional torus // Russian Mathematical Surveys. – 1995. – Vol. 50, №1. p. 200 – 201.

[22] Кантонистова О.Е. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле // Математический сборник. – 2016. – Т. 207, №3. – С. 47 – 92.

[23] Тимонина Д.С. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на торе вращения в потенциальном поле // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2017. – №3. – С. 35 – 43.

[24] Oshemkov A.A. Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations // Advances in Soviet Mathematics. – 1991. – Vol. 6. – p. 67 – 146.

[25] Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Математический сборник. – 2000. – Т. 191, №2. – С. 3 – 42.

[26] Морозов П.В. Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша // Математический сборник. – 2002. – Т. 193, №10. – С. 113 – 138.

[27] Морозов П.В. Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа // Математический сборник. – 2004. – Т. 195, №3. – С. 69 – 114.

[28] Морозов П.В. Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской-Яхьи // Математический сборник. – 2007. – Т. 198, №8. – С. 59 – 82.

[29] Славина Н.С. Топологическая классификация систем типа Ковалевской-Яхьи // Математический сборник. – 2014. – Т. 205, №1. –С. 105 – 160.

[30] Кудрявцева Е.А., Ошемков А.А. Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения // Чебышевский сборник. – 2020. – Т. 21, №2. – С. 244 – 265.

[31] Козлов И.К. Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ // Математический сборник. – 2014. – Т. 205, №4. – С. 79 – 120.

[32] Кибкало В.А. Топология аналога случая интегрируемости Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ при нулевой постоянной площадей // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2020. – №3. – С. 46 – 50.

[33] Kibkalo V.A. Topological analysis of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, No.9. – p. 1396 – 1399.

[34] Кибкало В.А. Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ // Математический сборник. – 2019. – Т. 210, №5. – С. 3 – 40.

[35] Kibkalo V.A. Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(3,1)$ // Topology and its Applications. – 2020. – Vol. 275. – pp. 13.

[36] Фокичева В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2015. – Т. 465, №2. – С. 1 – 4.

[37] Ведюшкина В.В. Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева-Чаплыгина // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2020. – №1. – С. 64 – 68.

[38] Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Харчева И.С. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2018. – Т. 479, №6. – С. 607 – 610.

[39] Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, №12. – С. 17 – 56.

[40] Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем // Математический сборник. – 2021. – Т. 212, №8. – С. 89 – 150.

[41] Ведюшкина В.В., Кибкало В.А., Фоменко А.Т. Топологическое моделирование интегрируемых систем биллиардами: реализация числовых инвариантов // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2020. – Т. 493. – С. 9 – 12.

[42] Ведюшкина В.В. Кибкало В.А. Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2020. – №4. – С. 22 – 28.

[43] Ведюшкина В.В. Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2021. – №2. – С. 28 – 32.

[44] Kibkalo V.A. Billiards with potential model four-dimensional singularities of integrable systems // International scientific conference «Contemporary problems of mathematics and mechanics» dedicated to the 80th anniversary of academician V.A. Sadovnichii. Moscow. Books of abstracts. – 2019. – Vol. 2. – p. 563 – 566.

[45] Fomenko A.T., Kibkalo V.A. Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms // Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics, Understanding Complex Systems / editors: V.A. Sadovnichiy, M.Z. Zgurovsky, Springer, Cham. – 2021. p. 1 – 24.

[46] Ведюшкина В.В. Интегрируемые биллиарды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе // Математический сборник. – 2020. – Т. 211, №2. – С. 46 – 73.

[47] Kibkalo V.A., Fomenko A.T., Kharcheva I.S. Realizing integrable Hamiltonian systems by means of billiard books // Transactions of the Moscow Mathematical Society. – 2021. – p. 37 – 64.

[48] Кобцев И.Ф. Эллиптический биллиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ // Математический сборник. – 2020. – Т. 211, №7. – С. 93 – 120.

[49] Пустовойтов С.Е. Топологический анализ биллиарда в эллиптическом кольце в потенциальном поле // Фундаментальная и прикладная математика. – 2019. – Т. 22, №6. – С. 201 – 225.

[50] Пустовойтов С.Е. Топологический анализ биллиарда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле // Математический сборник. – 2021. – Т. 212, №2. – С. 81 – 105.

[51] Fomenko A.T., Vedyushkina V.V., Zav'yalov V.N. Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2021. – Vol. 28. – p. 37 – 55.

[52] Каргинова Е.Е. Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского // Математический сборник. – 2020. – Vol. 211, №1. – С. 3 – 31.

[53] Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Силовые эволюционные биллиарды и биллиардная эквивалентность случая Эйлера и случая Лагранжа // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2021. – Т. 496, №1. – С. 5 – 9.

[54] Глуцюк А.А. О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2018. Т. 481, №6. – С. 594 – 598.

[55] Bialy M., Mironov A.E. Angular billiard and algebraic Birkhoff conjecture // Advances in Mathematics. – 2017. – Vol. 313. – p. 102 – 126.

[56] Бялый М., Миронов А.Е. Полиномиальная неинтегрируемость магнитных бильярдов на сфере и гиперболической плоскости // Успехи математических наук. – 2019. – Т. 74, №2. – С. 3 – 26.

[57] Avila A., Simoi J.D., Kaloshin V. An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse // Annals of Mathematics. – 2016. – Vol. 184, No. 2. – p. 527 – 558.

[58] Kaloshin V., Sorrentino A. On the local Birkhoff conjecture for convex billiards // Annals of Mathematics. – 2018. – Vol. 188, No. 1. – p. 315 – 380.

[59] Харчева И.С. Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2020. – №4. – С. 12 – 22.

[60] Milnor J. Morse theory // Princeton University Press, Princeton, New Jersey. – 1963.

[61] Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии // Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения, второе издание, Наука, Москва. – 1998. – С.302.

[62] Fomenko A.T. The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems // Russian Mathematical Surveys. – 1989. – Vol. 44, No.1. – p. 181 – 219.

[63] Фоменко А.Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1988. – Т. 52, №2. – С. 378 – 407.

[64] Williamson J. On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems // American Journal of Mathematics. – 1936. – Vol. 58, No.1. – p. 141 – 163.

[65] Nguen T.Z. Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems // Letters in Mathematical Physics. – 1995. – Vol. 33. – p. 187 – 193.

[66] Nguen T.Z. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold–Liouville with singularities // Compositio Mathematica. – 1996. – Vol. 101. – p. 179 – 215.

[67] Якоби К. Лекции по динамике // Москва, Гостехиздат. – 1936.

[68] Chasles M. Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1846. – Vol. 11. 1846 – p. 5 – 20.

[69] Lazutkin V. KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions // Berlin, SpringerVerlag. – 1993.

[70] Кудрявцева Е.А. Интегрируемые по Лиувиллю обобщенные биллиардные потоки и теоремы типа Понселе // Фундаментальная и прикладная математика. – 2015. – Т. 20, №3. – С. 113 – 152.

[71] Фокичева В.В. Классификация биллиардных движений в областях, ограниченных софокусными параболами // Математический сборник. – 2014. – Т. 205, №8. – С. 139 – 160.

[72] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 1994. – Т. 339, №3. – С. 293 – 296.

[73] Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[74] Белозеров Г.В. Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве // Математический сборник. – 2020. – Т. 211, №11. – С. 3–40.

[75] Белозеров Г.В. Топологическая классификация биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками // Математический сборник. – 2022. – Т. 213, №2. – С. 3–36.

[76] Белозеров Г.В. Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2022. – №6 – С. 21–31.