

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Казаков Кирилл Александрович

**Теория сильнонелинейных эффектов
в газовых средах**

Специальность 1.3.3. Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА–2025

Диссертация подготовлена на кафедре теоретической физики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

**Официальные
оппоненты –**

Соколов Дмитрий Дмитриевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
профессор кафедры математики

Фурсенко Роман Викторович,
доктор физико-математических наук,
Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича Сибирского отделения РАН,
Заведующий лабораторией физико-математического
моделирования процессов горения

Веденяпин Виктор Валентинович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН, ведущий научный сотрудник

Защита диссертации состоится 12 февраля 2026 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.2 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, дом 1, строение 2, Физический факультет, Северная физическая аудитория.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3658>

Автореферат разослан 20 ноября 2025 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук
профессор

П.А. Поляков

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена аналитическому и численному исследованию сильнонелинейных режимов распространения тонких ламинарных пламён в газовых смесях.

Актуальность темы диссертации

Пламёна в газовых смесях находят многочисленные применения в науке и технике. На них основана работа двигателей внутреннего сгорания и ракетных двигателей [1]; бунзеновские пламёна используются в лабораторных исследованиях физико-химических свойств газов [2, 3]; распространение пламён в вертикальных трубах применяется для измерения предела воспламенности [4–6], являющегося важнейшим параметром смеси при обеспечении пожарной безопасности в быту и на предприятиях; свойства горения смесей углеводородов и угольной пыли с воздухом и условия его перехода в детонацию диктуют правила безопасной шахтной угледобычи; в астрофизике термоядерные пламёна лежат в основе одного из механизмов взрыва сверхновых [7].

Хотя локальный механизм распространения волн горения давно установлен и хорошо исследован, последовательное аналитическое описание их глобальной структуры в настоящее время имеется лишь для простейших конфигураций пламён. Например, для снижения нежелательных выбросов в атмосферу и повышения экономичности аппаратов, использующих горение, требуется развитие технологий воспламенения сильно обеднённых горючих смесей. Но несмотря на многолетние исследования пламён вблизи пределов воспламенения, механизм их затухания до сих пор остаётся предметом научной полемики [8–17]. Аналогично обстоит дело и с проблемой спонтанного ускорения пламён, прикладная важность которой связана с возможностью перехода медленного горения в детонацию [18–23]. На практике нетрудно вызвать ускорение пламени путём хаотизации течения горючей смеси [24–26]. Однако открытым остаётся вопрос о механизме ускорения в невозмущённой смеси в трубах с гладкими стенками. Основную трудность при этом составляет количественное описание начальной стадии ускорения, когда эффекты сжимаемости газа ещё пренебрежимо малы (медленное горение).

Это отставание теории от эксперимента объясняется исключительной сложностью математического описания глобальной эволюции пламени, которая в свою очередь обусловлена тремя обстоятельствами. Во-первых, задачи типа упомянутых выше характеризуются несколькими существенно раз-

личными масштабами расстояний – от ширины фронта, составляющей доли миллиметра, до размеров области горения, которые на практике часто достигают метров. Это сильно затрудняет не только аналитическое описание пламён, но и их прямое численное моделирование. Во-вторых, в результате развития различных неустойчивостей, присущих пламёнам, они быстро оказываются сильно искривлёнными независимо от начального состояния. Ввиду этого газодинамика течений газа, порождаемых пламёнами, оказывается существенно нелинейной. Наконец, эта нелинейность усугубляется наличием подвижной границы – фронта пламени – между течениями существенно различной плотности. Форма и скорость этой границы не могут быть заданы заранее и должны определяться согласованно с течениями газа по обе её стороны. В этом отношении математическое описание пламён тождественно с описанием волн конденсации в перенасыщенных парах жидкостей, фронтов лазерной абляции, а также волн разложения взрывчатых жидкостей [27, 28]. Поэтому значение его результатов выходит далеко за рамки теории горения.

Рост возможностей вычислительной техники в последние десятилетия позволил заметно продвинуться в моделировании таких сложных явлений, как распространение пламени. Однако даже мощности современных компьютеров оказывается недостаточно для прямого численного моделирования реальных пламён в описанных выше условиях их применения. Наиболее эффективными в настоящее время являются численно-аналитические методы исследования. С одной стороны, учёт точных аналитических следствий фундаментальных газодинамических уравнений позволяет оптимизировать численные алгоритмы, а приближённые аналитические решения могут использоваться как начальные значения при поиске численных решений. Эти численные решения, с другой стороны, дают дополнительную информацию об исходных приближениях, в частности, об устойчивости аналитических решений, то есть об их практической реализуемости.

Цель и задачи исследования

Диссертационная работа направлена на исследование тонких ламинарных пламён в газовых смесях в сильнолинейных режимах распространения, близких к стационарным, с целью выяснения механизмов нелинейной стабилизации, спонтанного ускорения и затухания тонких ламинарных пламён, а также предсказания новых режимов их распространения.

Для этого в работе поставлены следующие задачи:

- Доказать самосогласованность модели тонкого ламинарного пламени в рамках асимптотического разложения по ширине фронта пламени.

- Свести фундаментальные уравнения газодинамики к замкнутой системе уравнений для положения фронта тонкого ламинарного пламени и распределения на нём скорости газа.
- Произвести валидацию нового описания путём воспроизведения известных строгих результатов теории тонкого ламинарного пламени.
- Разработать численные и приближённые аналитические методы решения полученной системы уравнений в условиях сильной нелинейности тонкого ламинарного пламени.
- Найти все возможные режимы стационарного распространения тонких ламинарных пламён в трубах произвольного размера.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются тонкие ламинарные пламёна в углеводородо-воздушных смесях, свободно распространяющиеся или удерживаемые в трубах различных размеров и ориентаций. Предметом исследования являются механизмы стабилизации тонких ламинарных пламён под влиянием нелинейных газодинамических эффектов, процессов переноса во фронте и поля тяжести, режимы их стационарного распространения и спонтанного ускорения.

Методология исследования

В настоящем исследовании используются аналитические и численные методы. Аналитическая часть исследования состоит в преобразовании фундаментальных газодинамических уравнений методами функций Грина и теории функций комплексного переменного. Получающееся в результате нелинейное интегро-дифференциальное уравнение анализируется с помощью асимптотических методов и методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Численная часть состоит в разработке алгоритма численного решения полученного уравнения и использует как классические методы поиска решений (итерационные методы и метод пристрелки), так и современные методы оптимизации этого процесса (метод ускорения Андерсона и параллельные вычисления).

Научная новизна

- Решена проблема неоднозначности вкладов процессов переноса во фронте тонкого ламинарного пламени в его нормальную скорость и скачки скорости и давления газа на фронте.
- Сформулирован критерий корректности модели тонкого пламени и доказаны существование и единственность корректной модели в первом порядке асимптотического разложения по ширине фронта пламени.
- Получено точное нелинейное уравнение для положения фронта двумерного тонкого ламинарного пламени и распределения на нём скорости газа. На его основе впервые построено замкнутое описание двумерных тонких ламинарных пламён с произвольным скачком плотности газа.
- Разработан метод асимптотического анализа полученного уравнения в сильнонелинейных режимах распространения, с помощью которого дана классификация режимов стационарного распространения тонких ламинарных пламён в сильном поле тяжести.
- Впервые дано объяснение наблюдаемых различий в скорости стационарного распространения в горизонтальных трубах ламинарных метано-воздушных пламён с одинаковыми фазовыми параметрами.
- Теоретически предсказан режим стационарного распространения пламени, в котором часть фронта пламени вогнута относительно холодной смеси. Этот режим впоследствии реализован экспериментально.
- Получено уточнение уравнения Сивашинского–Клавена для стационарного тонкого ламинарного пламени и найдены его аналитические решения.
- Разработан метод численного решения точного интегро-дифференциального уравнения, с помощью которого впервые количественно исследовано влияние эффекта компрессии тонкого ламинарного пламени на его форму и скорость.
- Построена теория частичного распространения тонких ламинарных пламён в вертикальных трубах, впервые объяснившая всю совокупность наблюдаемых свойств распространения вверх ламинарных метано- и пропано-воздушных пламён вблизи пределов воспламенения.

- Произведён первый строгий анализ устойчивости сильнолинейного тонкого ламинарного пламени – V-пламени в трубе.
- Впервые дано количественное объяснение различия в наблюдаемой величине ускорения ламинарных метано-воздушных пламён при их распространении в гладких открытых горизонтальных трубах вблизи пределов воспламенения и в стехиометрических смесях.

Практическая и научная значимость

Замкнутое описание тонких ламинарных пламён, разработанное в настоящем исследовании, даёт возможность эффективно определять форму и скорость тонких ламинарных пламён без необходимости решать газодинамические уравнения явно. Это существенно снижает вычислительные затраты и позволяет моделировать реальные пламёна, изучаемые в лабораториях и встречающиеся в прикладных задачах. Доказанная корректность модели тонкого пламени устраняет неоднозначность в определении длин Маркштейна и открывает путь к устраниению существующих в литературе противоречий в методах и результатах их измерения. Предложенный подход непосредственно применим к описанию других поверхностей разрыва в существенно дозвуковых ламинарных течениях – волн конденсации в перенасыщенных парах жидкостей, фронтов лазерной абляции, волн термоядерного горения в недрах звёзд и др.

Тема диссертационного исследования и его результаты соответствуют пунктам 5 и 10 паспорта научной специальности 1.3.3. «Теоретическая физика»: 5. Теория конденсированного состояния. Изучение различных состояний вещества и физических явлений в них. Статистическая физика. Теория фазовых переходов. Физическая кинетика. 10. Теория неравновесных систем. Теория хаоса и турбулентности.

Положения, выносимые на защиту

1. В первом порядке асимптотического разложения по ширине фронта тонкого пламени существует единственная аппроксимация пламени поверхностью разрыва между течениями газа постоянной плотности.
2. Положение фронта тонкого ламинарного двумерного пламени и расположение на нём скорости газа связаны замкнутой системой уравнений, являющейся точным следствием уравнений газодинамики идеальной несжимаемой среды. Все известные приближённые уравнения для положения фронта тонкого пламени в несжимаемых газовых смесях являются слабонелинейными пределами этой системы.
3. Все конфигурации стационарного тонкого двумерного ламинарного пламени с фиксированной точкой поджига в быстром потоке газа образуют двухпараметрическое семейство решений обыкновенного дифференциального уравнения.
4. В сильном поле тяжести существует несколько устойчивых стационарных режимов распространения тонких ламинарных пламён в горизонтальных трубах. Среди них имеется режим с перегибом фронта пламени, который является решением полученной замкнутой системы уравнений и наблюдается экспериментально.
5. При распространении тонких ламинарных пламён в открытых горизонтальных трубах с гладкими стенками существует положительная обратная связь между ускорением пламени и его скоростью относительно холодной смеси. Ускорение пламени пропорционально квадрату скорости пламени относительно холодной смеси и зависит от режима распространения.
6. При распространении предельных тонких ламинарных пламён в вертикальных трубах существуют различные стационарные режимы распространения с близкими скоростями. Условием затухания метано- и пропано-воздушных пламён при распространении вверх является обращение в нуль скорости продуктов горения на оси трубы в режиме с наибольшей скоростью пламени.

Достоверность и апробация результатов

Основные уравнения разработанного в диссертационной работе подхода получены точными преобразованиями фундаментальных уравнений газодинамики с применением методов математического и функционального анализа. Для нахождения их приближённых численно-аналитических решений использовались хорошо известные методы теории дифференциальных уравнений и асимптотические методы с оценкой их точности. Все известные в литературе строгие результаты теории пламён были воспроизведены в диссертационной работе как частные случаи. При поиске численных решений применялись вполне обоснованные и многократно проверенные на практике численные методы, а точность решений контролировалась общепринятыми способами. При проведении экспериментов юстировка оборудования и подготовление исследуемых смесей производились сертифицированными специалистами Лаборатории горения и детонации (г. Пуатье, Франция) в соответствии с общепринятыми стандартами. Развитый в диссертационной работе подход и полученные с его помощью результаты обсуждались на семинарах в рамках международной программы Interactifs (университет Пуатье, Франция, 2012 г.), семинаре по горению под руководством проф. А.Н. Секундова (ЦИАМ, 2014 г.), семинаре «Современные проблемы атомной, молекулярной и химической физики» под руководством Н.П. Зарецкого (НИЦ Курчатовский институт, 2014 г.), «Семинаре по солнечно-земной физике» под руководством проф. Д.Д. Соколова (ИЗМИРАН, 2023 г.), семинаре кафедры теоретической физики Физического факультета под руководством проф. А.П. Исаева (МГУ им. М.В. Ломоносова, 2024 г.), семинаре «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их приложения» Механико-математического факультета под руководством проф. А.С. Шамаева и Доц. Н.А. Раутиан (МГУ им. М.В. Ломоносова, 2024 г.), семинаре Отдела Горения и Взрыва под руководством проф. С.М. Фролова (Институт Химической Физики РАН, 2024 г.), семинаре «Вычислительная математика и приложения» под руководством чл.-корр. РАН Ю.В. Василевского, проф. Ю.М. Нечепуренко и Акад. РАН Е.Е. Тыртышникова (Институт Вычислительно Математики им. Г.И. Марчука, 2024), семинаре «Новые методы решения задач прикладной математики» под руководством проф. В.Т. Жукова и Ю.Г. Рыкова (Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша, 2025). Материалы диссертации опубликованы в ведущих международных научных журналах.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 17 статьях в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих Положению о присуждении учёных степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова. Список этих статей приведён перед основным библиографическим списком.

Личный вклад автора

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично (статьи [A4,A5,A8,A11,A12,A14,A15,A16]). В остальные результаты, представленные в диссертационной работе и научных статьях, автор внёс определяющий вклад. В работах, опубликованных в соавторстве, его вклад был основополагающим. Соискатель принимал активное участие в постановке задач, разработке подходов к их решению, проведении общих доказательств, развитии численных методов, анализе и интерпретации решений. В работах [A1,A2,A3] соискателю принадлежит постановка задачи, проведение слабонелинейного анализа и получение аналитических решений. В работах [A6,A7] соискатель обобщил мастер-уравнение на нестационарные пламёна и получил его предельные формы, а вывод координатно-инвариантной формы мастер-уравнения (не использована в диссертации) дан его соавторами. В работе [A9] постановка задачи, вывод уравнения для положения фронта и построение его аналитического решения выполнены соискателем, а анимация решения (не использована в диссертации) произведена его соавторами. В работе [A10] идея вывода мастер-уравнения для пламени в кривом канале принадлежит Г.Жулену, а её реализация и проведение необходимых математических доказательств выполнены соискателем. В работе [A13] эксперименты проводились обоими авторами, их анализ – соискателем. В работе [A17] соискателю принадлежат постановка задачи и теоретические выкладки; численный код написан О.Г. Харлановым; анализ численных решений произведён авторами совместно. В названиях глав диссертации указаны номера статей, на которых основано их содержание.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, пятнадцати глав, заключения, списка литературы и четырёх приложений. Объём работы составляет 255 страниц, включая 69 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 210 наименований.

Содержание работы

Во **Введении** обсуждается актуальность диссертационной работы, её новизна, научное и практическое значение, ставится цель и задачи исследования, формулируются положения, выносимые на защиту, приводятся сведения о публикациях автора и структуре работы.

В **Главе 1** даётся краткий обзор развития теории горения газовых смесей, перечисляются принципиальные проблемы аналитического описания процесса распространения ламинарного пламени, формулируется понятие тонкого пламени, лежащее в основе современных моделей глобальной динамики искривлённых пламён, и проводится их критический анализ. Затем излагается основная идея нового подхода к описанию сильнонелинейных тонких ламинарных пламён и план её реализации.

Глава 2 посвящена решению проблемы неоднозначности модели тонкого пламени. Основные соотношения этой модели – условия скачков скорости и давления газа на фронте пламени и выражение для его нормальной скорости (уравнение эволюции) – зависят от расположения математической поверхности разрыва, которая заменяет физический фронт пламени конечной ширины. Для решения указанной проблемы сначала формулируется необходимое условие корректности модели тонкого пламени: *Положение элементов газа, достаточно удалённых от фронта пламени, должно оставаться неизменным при замене истинного фронта поверхностью разрыва.* Затем из него выводится условие на время движения элементов газа через фронт пламени:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left(\frac{1}{V^n} - \frac{1}{v^n} \right) = 0,$$

где V^n, v^n – нормальные к фронту компоненты истинного (\mathbf{V}) и модельного (\mathbf{v}) полей скорости газа, а интегрирование ведётся в направлении нормали. Далее показывается, что это условие однозначно фиксирует положение поверхности разрыва относительно физического фронта. Наконец, доказывается, что выполнение данного условия является также и достаточным для корректности модели в первом порядке асимптотического разложения по ширине фронта пламени.

В **Главе 3** формулируется вспомогательная процедура усреднения основных газодинамических уравнений и уравнения эволюции тонкого пламени при наличии у него мелкомасштабной структуры. Доказывается, что усреднённые поля скорости и давления газа подчиняются уравнениям Эйлера, а наличие мелкомасштабной структуры приводит к перенормировке

нормальной скорости пламени. Эти результаты дают возможность в дальнейшем применять разрабатываемый подход к тонким ламинарным пламёнам с мелкомасштабной ячеистой структурой фронта.

В Главе 4 выводится основное уравнение нового подхода – мастер-уравнение. Это нелинейное интегро-дифференциальное уравнение является точным следствием фундаментальных газодинамических уравнений и связывает форму фронта тонкого ламинарного пламени с распределением на нём скорости газа. В данной главе оно получается для простейшего случая стационарного распространения двумерного пламени в прямой трубе $\{x \in (-1, 1), y \in (-\infty, \infty)\}$. Суть вывода заключается в следующем. Во-первых, для того чтобы учесть граничные условия на стенках трубы ($x = \pm 1$), всё течение периодически продолжается вдоль оси x . Во-вторых, поле скорости продуктов горения $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) \equiv (w(x, y), u(x, y))$ представляется в виде суммы $\mathbf{v} = \mathbf{v}^p + \mathbf{v}^v$, где \mathbf{v}^v – вихревое поле, а \mathbf{v}^p – потенциальное поле, удовлетворяющее условиям: (a) $\operatorname{div} \mathbf{v}^p = 0$, (b) $\operatorname{rot} \mathbf{v}^p = 0$, (c) первые производные \mathbf{v}^p ограничены. Затем доказывается, что существует такое представление, в котором ограничение вихревой компоненты на фронт пламени выражается через распределение скорости газа вдоль фронта и его форму, задаваемую уравнением $y = f(x)$. Явный вид поля \mathbf{v}^p при этом остаётся неизвестным, но оно исключается с помощью соотношения дисперсионного типа для комплексной скорости $\omega^p = u^p + i w^p$, которое является следствием условий (a)–(c) и теоремы Коши:

$$(1 + i\hat{\mathcal{H}}) (\omega_+^p)' = 0.$$

Здесь индекс “+” (“–”) у поля, определённого в области продуктов горения (холодной смеси), означает его ограничение на фронт пламени: $\omega_+^p(x) \equiv \omega^p(x, f(x))$, штрих – дифференцирование по x , а оператор $\hat{\mathcal{H}}$ определён согласно

$$(\hat{\mathcal{H}} a)(x) = \frac{1 + i f'(x)}{2} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} a(\tilde{x}) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\}.$$

В результате исключения \mathbf{v}^p получается уравнение для распределения скорости на фронте (мастер-уравнение)

$$2(\omega_-)' + (1 + i\hat{\mathcal{H}}) \left\{ [\omega]' - \frac{M\omega_+}{v_+^2} + (1 + i f'(x)) \left\langle \frac{M\omega_+}{v_+^2} \right\rangle \right\} = 0,$$

где $M \equiv Nv_+^n\sigma_+$, $N \equiv \sqrt{1 + (f')^2}$, а угловые скобки означают усреднение по сечению трубы. Значения скачка $[\omega]$ комплексной скорости ω газа на фронте и завихрённости продуктов горения σ_+ являются известными функциями формы фронта и распределения на нём скорости холодного газа [2, 29, 30]. Поэтому полученное комплексное уравнение даёт два независимых уравнения для трёх функций $w_-(x)$, $u_-(x)$ и $f(x)$. Мастер-уравнение образует замкнутую систему для этих функций при учёте уравнения эволюции [29, 31, 32]

$$(u_- - f'w_-)/N = U_f - \mathcal{L}_s(v^\tau)'/N - \mathcal{L}_cU_f(f'/N)', \quad (1)$$

где U_f – скорость плоского пламени относительно холодной смеси, v^τ – тангенциальная скорость газа на фронте пламени, а $\mathcal{L}_{c,s}$ – параметры длины, характеризующие данную смесь (длины Маркштейна). Таким образом, оболочечное описание даёт возможность находить основные характеристики тонкого ламинарного пламени – его форму и скорость – не решая полностью задачу о течении газа, порождаемого таким пламенем. Этот результат обходит основную проблему аналитического описания искривлённых пламён – невозможность явного построения точного общего решения газодинамических уравнений. Именно ввиду этой невозможности классический подход [32–37] является принципиально слабонелинейным – его результаты справедливы лишь в предположении малого отклонения искомого решения от решения для плоского пламени. В частности, условие слабой нелинейности стационарного пламени выполняется лишь в случае пламён с малым тепловым расширением газа – отношение плотностей холодной смеси и продуктов горения, θ , должно мало отличаться от единицы: $(\theta - 1) \ll 1$. В отличие от классического, новый подход не накладывает никаких ограничений на степень нелинейности или на величину θ , и поэтому он применим к реальным пламёнам, исследуемым в лабораториях и применяемым в прикладных задачах ($\theta = 5 \div 10$).

В **Главе 5** даётся альтернативный вывод мастер-уравнения, использующий метод функций Грина. Его преимуществом является явный учёт граничных условий для течения газа на стенках трубы, что делает излишним периодическое продолжение течения вдоль оси x , исключая таким образом из рассмотрения несобственные интегрирования. Однако аналитические свойства вихревой компоненты поля скорости продуктов горения оказываются более сложными. Вследствие этого для приведения вихревой компоненты к виду, требуемому дисперсионным соотношением, необходим дополнительный анализ её структуры, в частности, проведение аналитического продолжения по параметру вязкости газа и суммирование бесконечного ряда, порождаемого вкладами точек ветвления функции Грина.

Глава 6 посвящена анализу мастер-уравнения в приближении слабого теплового расширения газа, $(\theta - 1) \ll 1$. Несмотря на то что на практике оно совершенно неприменимо, рассмотрение этого приближения имеет определённый теоретический интерес. Во-первых, это единственный случай, когда классический способ учёта нелинейных эффектов, основанный на явном решении газодинамических уравнений, был реализован корректно. Сравнение результатов, получаемых разложением мастер-уравнения, с классическими представляет весьма нетривиальную проверку оболочечного подхода. Во-вторых, получающиеся интегро-дифференциальные уравнения для положения фронта тонкого ламинарного пламени могут быть сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и потому допускают довольно глубокое аналитическое исследование. Прежде всего, доказывается общее утверждение о том, что уравнение для положения фронта стационарного пламени с произвольным θ не может быть слабонелинейным. Показывается, что случай $(\theta - 1) \ll 1$ является единственным, когда условия стационарности и слабой нелинейности могут выполняться одновременно; $(\theta - 1) \equiv \alpha$ становится при этом параметром слабонелинейного разложения. Установленные в этом доказательстве оценки порядков основных величин затем используются для разложения мастер-уравнения. В результате в низших порядках воспроизведены уравнения Сивашинского [36] (порядок α^2) и Сивашинского–Клавена [37] (порядок α^3). Далее, произведён учёт вкладов $O(\alpha^4)$ и получено следующее уравнение для положения фронта

$$\frac{2\theta^2 (f')^2}{(\theta + 1)^2} - \left(\theta W + \frac{W^2}{2} \right) = \frac{\theta - 1}{2} \left(-\hat{H} f' + \frac{\lambda_c}{2\pi} f'' \right),$$

где W есть относительное увеличение скорости пламени за счёт его искривления, λ_c – коротковолновая граница неустойчивых возмущений пламени, и $\hat{H} \equiv \hat{\mathcal{H}}|_{f=0}$ – оператор Гильберта. Наконец, полученное уравнение решено методом полюсного разложения [38]. В частности, для максимального относительного увеличения скорости тонкого ламинарного пламени найдено выражение

$$W_{\max} = -\theta + \sqrt{\theta^2 + \frac{(\theta^2 - 1)^2}{16\theta^2}},$$

которое сравнивается с результатами прямого численного моделирования в узких трубах и выражениями низших порядков на Рис. 1.

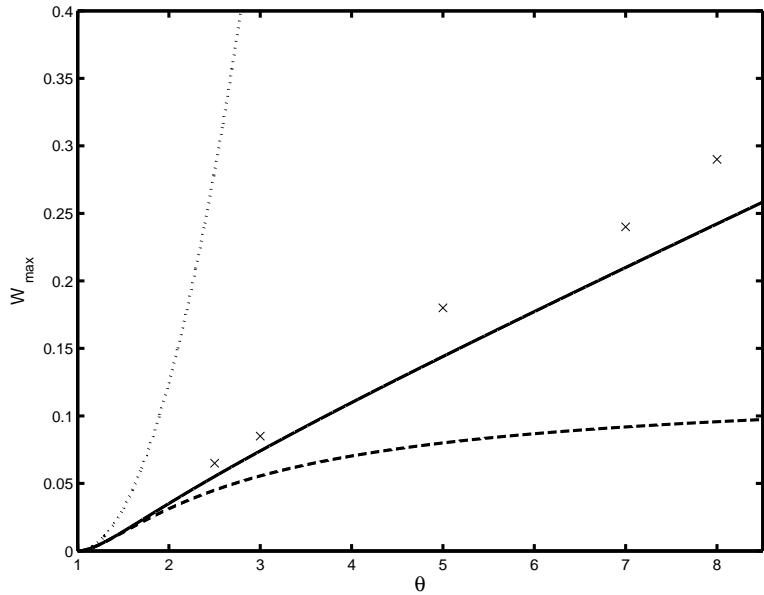


Рис. 1: Зависимость максимального увеличения скорости тонкого ламинарного пламени от коэффициента теплового расширения газа согласно уравнению Сивашинского (точечная линия) и его уточнениям – уравнению Сивашинского–Клавена (пунктирная линия) и уравнению четвёртого порядка (сплошная линия). Крестиками отмечены результаты прямого численного моделирования в трубах шириной $\sim \lambda_c$ [39, 40] (погрешность моделирования $\approx 10\%$).

В Главе 7 приводится альтернативный вывод уравнения четвёртого порядка. Этот вывод был дан до открытия мастер-уравнения и является более длинным. Он, однако, доставляет ещё одну независимую проверку нового подхода. Показывается, во-первых, что в четвёртом порядке по α поле давления продуктов горения связано с потенциальной компонентой скорости соотношением типа Бернулли, а также что одно из уравнений Эйлера является следствием другого и условий скачка скорости и давления на фронте. Затем система независимых уравнений приводится к трансверсальному виду – представлению, в котором координата y в направлении распространения пламени играет роль параметра. Наконец, демонстрируется, что в результате решения этой системы получается замкнутое уравнение для положения фронта, которое при разложении по степеням α в точности воспроизводит уравнение четвёртого порядка.

В следующих пяти главах мастер-уравнение применяется для аналитического исследования сильнонелинейных режимов горения. В Главе 8 рассматривается классическая задача о тонком ламинарном пламени, удерживаемом посредством стержня в быстром потоке газа (скорость натекающего

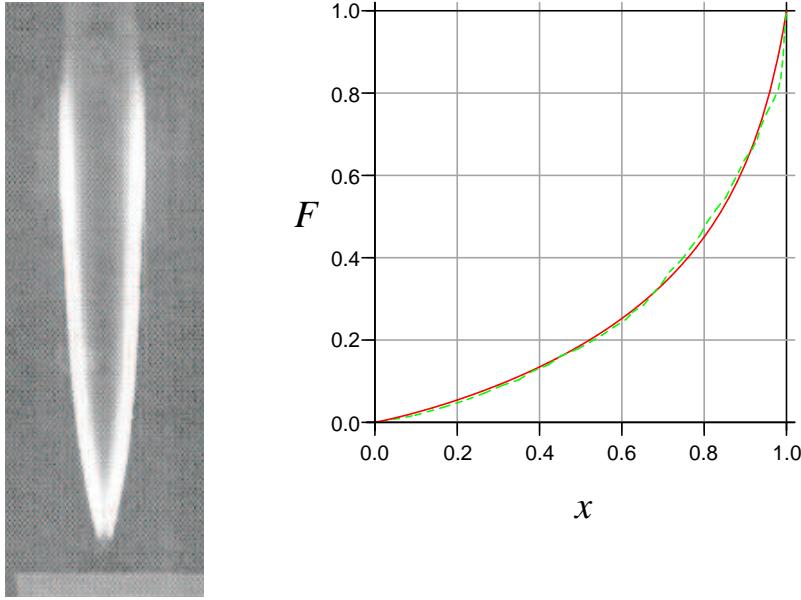


Рис. 2: Слева: фотография пропано-воздушного пламени (воспроизведена с рисунка 10 работы [44]). Справа: положение фронта пламени $F(x) = f(x)/f(1)$, определённое по фотографии слева (пунктирная линия) и найденное как решение оболочечных уравнений для $\theta = 7$, $U = 10$ (сплошная линия).

потока $U \gg U_f$). Решение строится без дополнительного предположения о постоянстве давления газа в каждом поперечном сечении трубы, которое вводилось ранее с целью замкнуть систему интегралов Бернулли для течений холодного газа и продуктов горения [41–43]. Для этого сначала мастер-уравнение обобщается на случай наличия стержня и с его помощью анализируется течение газа в окрестности стержня и его влияние на глобальную структуру пламени. Доказывается, что в ведущем порядке асимптотического разложения мастер-уравнения по обратной скорости натекающего потока наличие стержня сводится к заданию двух независимых граничных условий для распределения скорости газа на фронте пламени. Затем производится разложение мастер-уравнения по степеням $1/U$, в результате чего получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u'_-(x)}{f'(x)} (1 + \alpha|x|) \right] + \alpha \frac{u'_-(x)}{u_-(x)} [w_-(x) - \alpha] = 0, \quad w_-(|x|) = (1 - |x|) \frac{u'_-(x)}{f'(x)}.$$

Таким образом, в ведущем порядке разложения по $1/U$ структура тонкого ламинарного пламени оказывается локальной в том смысле, что поведение функций f' , w_- , u_- в окрестности любой точки полностью определяется их

значениями в этой же точке и не зависит от структуры удалённых участков пламени. Полученные уравнения решаются численно, выясняются общие свойства решений и проводится сравнение с экспериментом, Рис. 2.

В Главе 9 исследуется распространение тонких ламинарных пламён в горизонтальных трубах. Поле тяжести оказывает существенное влияние на структуру пламён, в особенности в случае углеводородо-воздушных смесей, потому что пламёна в них имеют сравнительно небольшие нормальные скорости распространения, от $6 \div 10$ см/с вблизи пределов воспламенения до $40 \div 50$ см/с для стехиометрических смесей [45, 46]. Поэтому число Фруда

$$Fr = \frac{gb}{U_f^2},$$

где g – ускорения поля тяжести, на практике велико. Например, уже в трубе шириной 10 см пламёна с $U_f \approx 20$ см/с имеют $Fr \approx 25$. Это значит, что глобальные свойства пламени полностью определяются действием поля тяжести. Прямое численное моделирование пламён в широких трубах требует огромных вычислительных ресурсов и недоступно даже для современных компьютеров. С другой стороны, в теоретических исследованиях часто применяются сильно упрощённые модели, такие как модель пузыря [47, 48], в которой фронт пламени рассматривается как непроницаемый раздел между исходной смесью и продуктами горения, или уравнение Франкеля [49], в котором течение газа предполагается потенциальным как перед фронтом, так и за ним. В обоих случаях, таким образом, полностью пренебрегается завихренностью продуктов горения, которая неизбежно порождается при прохождении газа через фронт пламени. Эта завихренность имеет два источника: неоднородность распределения скорости газа вдоль фронта, связанная с его искривлением, и бароклинный эффект – генерация завихрённости в потоке газа, градиент плотности которого не параллелен направлению поля тяжести [50–52]. Они описываются, соответственно, первым и вторым слагаемым в выражении для завихрённости газа на фронте

$$\sigma_+ = -\frac{\theta-1}{\theta N v_-^n} (v_-^\tau)' v_-^\tau - \frac{\theta-1}{\theta N v_-^n} \phi'_-,$$

где ϕ – потенциал поля тяжести. В настоящей работе демонстрируется, что именно баланс этих двух вкладов определяет структуру стационарного пламени.

Экспериментально установлено, что при стационарном распространении в горизонтальных трубах кругового сечения пламя сильно вытягивается



Рис. 3: Фотографии пламени в смеси 10% метана с воздухом, сделанные через одинаковые промежутки времени в стеклянной трубе диаметром 10 см сразу после поджига [53]. Пламя распространяется слева направо.

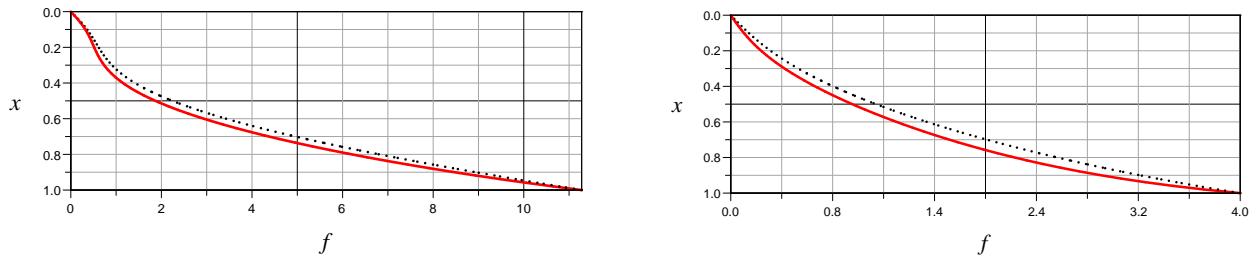


Рис. 4: Слева: Положение фронта тонкого ламинарного пламени типа I с $\theta = 5$ (сплошные линии) и $\theta = 4.5$ (точечные линии), распространяющегося влево в трубе шириной 40 см; нормальная скорость пламени $U_f = 10$ см/с. Справа: то же для тонкого ламинарного пламени типа II с $\theta = 7.5$ (сплошные линии) и $\theta = 5$ (точечные линии); ширина трубы 30 см, $U_f = 40$ см/с. Единицей длины в обоих случаях является ширина трубы.

вдоль трубы и принимает двумерную форму, Рис. 3 [53]. Следовательно, этот режим распространения может быть адекватно описан с помощью мастер-уравнения для двумерного пламени в рамках разложения по $1/U$. Так же как и в случае пламени, удерживаемого в быстром потоке, это разложение приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для положения фронта и распределения на нём скорости газа. Численный анализ полученной системы показал, что для каждого набора параметров U_f, θ, g, b имеются решения двух типов (тип I и тип II), характеризующиеся существенно различными скоростями пламени и имеющие различные профили фронта. Пламёна типа I имеют меньшие скорости, чем решения типа II, а их фронт может иметь перегиб. Напротив, фронт пламени типа II всегда является выпуклым в сторону холодного газа, Рис. 4. С целью сравнения найденных решений с результатами наблюдений произведена оценка их точности и учтены тепловые потери в стенки трубы. Детальное сопоставление теории с экспериментальными данными по горению метано-воздушных сме-

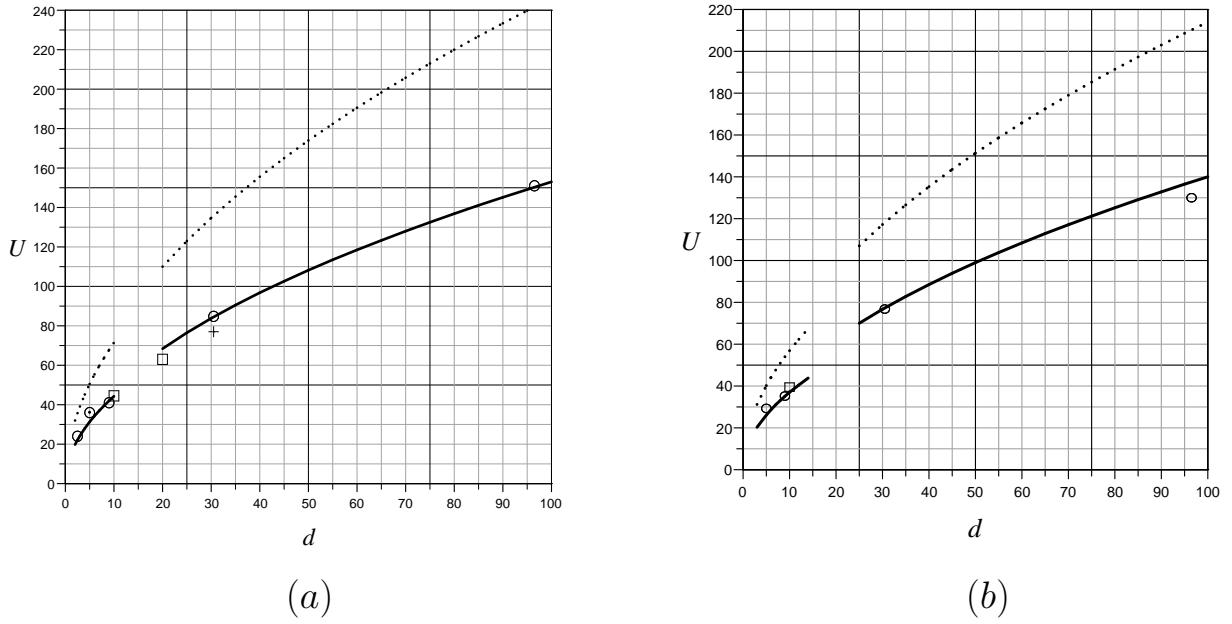


Рис. 5: Сравнение решений типа I (сплошные линии) и типа II (точечные линии) с экспериментальными данными [53] для скорости пламени в метано-воздушных смесях с концентрацией метана 6% (a) и 14% (b). Скорость пламени измеряется в см/с, диаметр трубы d – в см. Теоретическая погрешность составляет около 10% вблизи пределов воспламенения и около 20% вблизи стехиометрии.

сей показало, что на практике реализуются решения обоих типов. А именно, при нормальных начальных условиях метано-воздушные пламёна вблизи пределов воспламенения распространяются только в режиме типа I, Рис. 5, тогда как в смесях, близких к стехиометрической, – только в режиме типа II, Рис. 6. Смена режима происходит при промежуточных концентрациях.

Форма фронта пламени с фотографии на Рис. 3 сравнивается с теоретической на Рис. 7. При этом экспериментальное положение фронта отождествляется с точками наибольшей яркости, отмеченными на Рис. 7(a) крестиками, координаты которых автоматически определяются с помощью программы DigitizeIt [54]. На Рис. 7(b) полученный результат наложен на решение типа II, соответствующее наблюдаемой скорости пламени $U = 110$ см/с. Согласие, в пределах погрешности, теоретических предсказаний с экспериментальными данными подтверждает адекватность двумерной модели для описания стационарного распространения пламён в горизонтальных трубах.

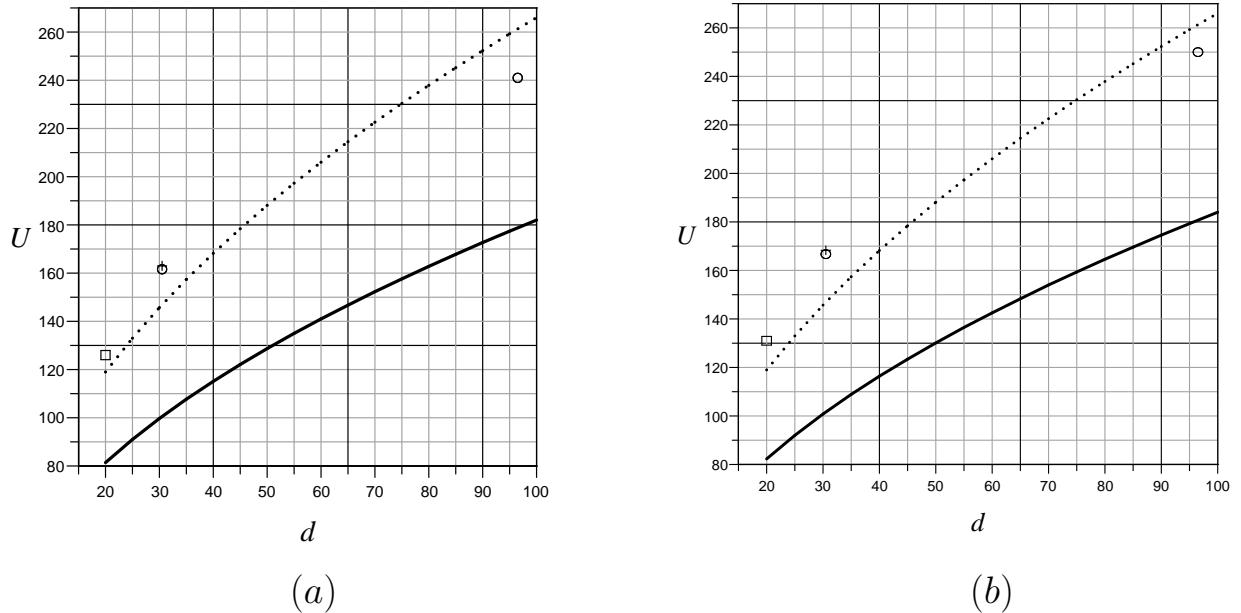


Рис. 6: То же для концентраций метана 9% (a) и 10% (b).

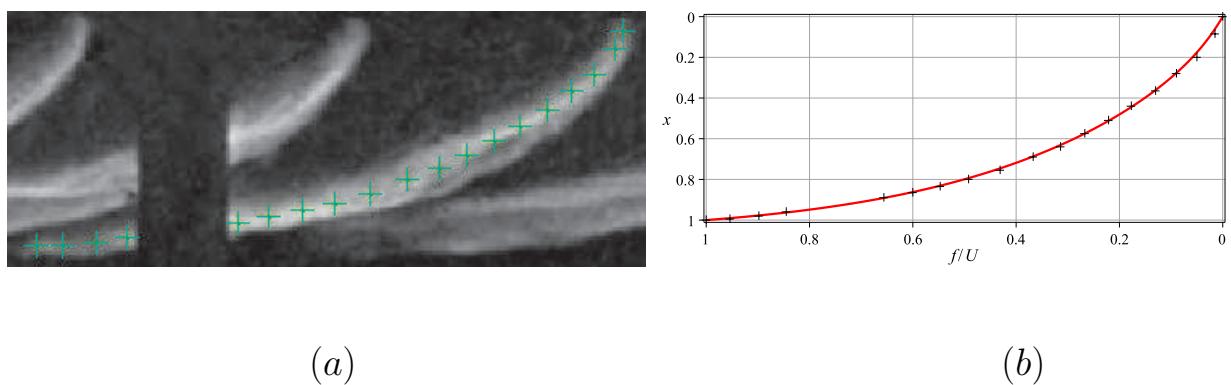
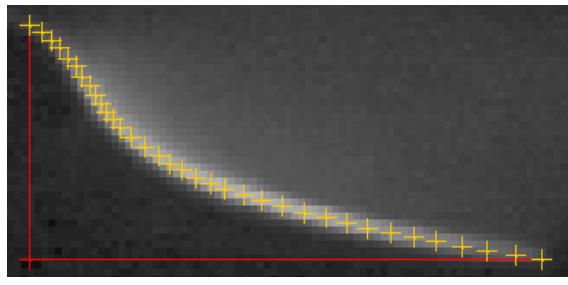


Рис. 7: Сопоставление профилей фронта двумерной модели тонкого ламинарного пламени и реального пламени. (a) Цифровая обработка центральной части фотографии с Рис. 3. (b) Наложение результата этой обработки (крестики) на решение типа II для $U = 110$ см/с (сплошная линия).

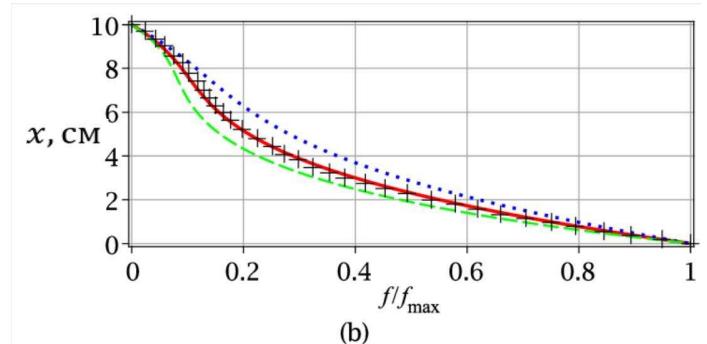


Рис. 8: Последовательные положения холодного пламени в смеси 2% н-бутана с воздухом в трубе. Пламя распространяется справа налево. Вертикальные затемнения на трубе – разметка для определения положения пламени.

Исследование решений с перегибом фронта и их сравнение с экспериментом проводится в **Главе 10**. Предварительный качественный анализ показывает, что наиболее благоприятные условия для наблюдения перегиба фронта имеются у холодных пламён (*cool flames*) с $\theta \approx 2$ в бедных смесях высших углеводородов с воздухом [55]. Поэтому в экспериментах использовались смеси этана и бутана с воздухом вблизи нижнего предела воспламенения. Эксперименты проводились в нормальных условиях (давление 1 атм, начальная температура смеси $300\text{ K} \pm 5\text{ K}$) в горизонтальной трубе диаметром 10 см и длиной 6 м, один конец которой был закрыт, а поджиг смеси производился у открытого конца. Исследуемые смеси готовились методом парциального давления, причём содержимого одного баллона было достаточно для трёхкратного заполнения трубы. Поджиг производился либо с помощью бытовой газовой зажигалки, медленно подносимой снаружи к открытому концу трубы, либо с помощью электрического разряда между двумя электродами, расположенными внутри трубы на расстоянии 5 см от её открытого конца. Относительная погрешность экспериментального определения положения пламени и его скорости составила 5%. Прямое измерение температуры пламени с помощью термопары, однако, оказалось значительно менее точным: в силу малости времени измерения погрешность в значениях температуры пламени $\approx 100^\circ\text{C}$. Как и ожидалось, режим холодного пламени возникает при использовании поджига с достаточно малым энерговыделением. Экспериментальные результаты вполне воспроизводимы. Для проверки воспроизводимости было проведено несколько серий измерений, в каждой из которых поджиг смеси производился газовой зажигалкой либо для первого и третьего заполнения трубы смесью из данного баллона, либо для второго. Во всех случаях поджиг с помощью электрического разряда приводил к обычному пламени с $\theta \approx 5$ без перегиба фронта, а при поджиге газовой зажигалкой возникало холодное пламя с перегибом фронта. Последовательность изображений на Рис. 8 показывает процесс формирования и распространения пламени с перегибом фронта в 2% смеси н-бутана с воздухом. Как видно, после короткой переходной стадии, следующей за поджигом, формируется вытянутое пламя без перегиба фронта. Но эта стадия также оказывается переходной, и вскоре



(a)



(b)

Рис. 9: (a) Обработка одного из изображений на Рис. 8 с помощью программы DigitizeIt. (b) Положение фронта тонкого ламинарного пламени типа I с $\theta = 2.2$ (сплошная линия), $\theta = 2.5$ (пунктир) и $\theta = 1.8$ (точки). Скорость пламени $U = 26.5$ см/с. Экспериментальные данные (крестики) перенесены из (a).

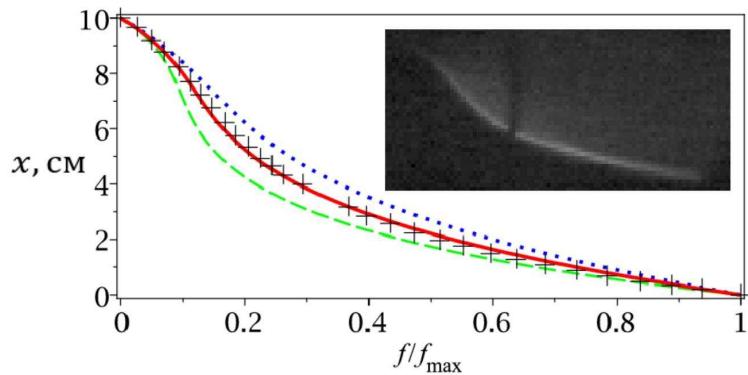


Рис. 10: Наблюдаемое положение фронта пламени в смеси 3.6% этана с воздухом (крестики) и вычисленное для тонкого ламинарного пламени типа I с $\theta = 1.8$ (сплошная линия), $\theta = 2.0$ (пунктир) и $\theta = 1.6$ (точки). Скорость пламени $U = 21.5$ см/с. Врезка: фотография пламени.

у пламени формируется перегиб, после чего оно распространяется стационарно. Наблюдаемая форма пламени сравнивается с теоретической на Рис. 9. Известно, что температура холодных пламён в смесях н-бутана с воздухом находится в интервале 200°C – 400°C [55]. Сплошная кривая на Рис. 9(b) получена как наилучшая аппроксимация при варьировании θ в ожидаемом интервале. При этом получено $\theta = 2.2$, что соответствует температуре пламени 360°C. Для иллюстрации вариаций формы фронта в зависимости от θ на том же рисунке показаны два решения с несколько отличными значениями θ . Эксперименты с этано-воздушными смесями дали совершенно аналогичные результаты. В качестве примера на Рис. 10 сравниваются наблюдаемая форма пламени в смеси 3.6% этана с воздухом с вычисленной для тонких ламинарных пламён типа I с $\theta = 1.6, 1.8, 2.0$.

В **Глaве 11** исследуется распространение ламинарных пламён в вертикальных трубах в метано-воздушных и пропано-воздушных смесях вблизи нижнего предела воспламенения. Эта задача занимает особое место среди классических проблем горения. Как наиболее простая и практически важная, рассматриваемая конфигурация служит для определения стандарта воспламенимости смесей [4, 5]. Смесь считается способной поддерживать распространение пламени (воспламенимой), если при поджиге у нижнего, открытого, конца трубы пламя проходит всю её длину. Для того чтобы о пределах воспламенения можно было говорить как о внутреннем свойстве смеси, они измеряются в достаточно широких трубах с целью сделать потери тепла в стенки трубы пренебрежимо малыми, и настолько длинных, чтобы можно было пренебречь начальным возмущением смеси при поджиге. Однако хорошо известно, что динамика практически всех лабораторных пламён зависит от поля тяжести, а вблизи пределов воспламенения гравитационный эффект выражен наиболее сильно ввиду малости нормальной скорости пламени. Результаты измерения пределов воспламенения оказываются, таким образом, зависящими от характера эволюции пламени под действием сильного поля тяжести, в частности, от диаметра трубы. Например, нижний предел воспламенения метано-воздушной смеси, который в трубе диаметром 9.5 см составляет 5.6% метана, уменьшается до 5.3% в трубе диаметром 5.1 см [6, 11], и далее до 4.9% в трубе диаметром 2.4 см [17]. Целью Главы 11 является объяснение всех основных наблюдаемых свойств распространения вверх предельных метано- и пропано-воздушных ламинарных пламён в рамках единой теории. Для этого строится $1/U$ -разложение мастер-уравнения с учётом бароклинного эффекта и эффекта растяжения тонкого ламинарного пламени (слагаемое с \mathcal{L}_s в уравнении (1)). Численный анализ полученной системы уравнений показывает, что как и в случае горизонтального распространения, при заданных $\theta, U_f, g, \mathcal{L}_s$ существуют решения двух типов, причём решения типа I образуют пары с близкими значениями U . Например, для пламени с $\theta = 5$, $U_f = 7.2$ см/с и $\mathcal{L}_s = -0.45$ мм в трубе диаметром 9.5 см такими значениями являются $U = 4.65U_f$ (решение типа Ia) и $U = 4.94U_f$ (решение типа Ib). Общим свойством решений в сильном поле тяжести ($Fr \gg 1$) является торможение продуктов горения вблизи оси трубы. Оказывается, что как следствие этого торможения, при достаточно малых U_f решения типа Ib являются сингулярными на выходе из области, занимаемой пламенем. Именно, по достижении U_f определённого критического значения (зависящего от θ), скорость элемента газа, пересекающего фронт пламени в центре трубы, обращается в нуль при $y = U$ (критические ламинарные пламёна в вертикальной трубе являются практически осесимметричными). Для ещё

меньших значений U_f корень x_0 функции $u(x, U)$ сдвигается от центра трубы к стенке, тогда как скорость $u(x, U)$ становится формально мнимой при $x < x_0$. Следовательно, данный стационарный режим распространения перестаёт существовать, поскольку продукты горения перестают отводиться из области $x < x_0$. В результате пламя должно либо перейти в какой-то другой режим, либо затухнуть.

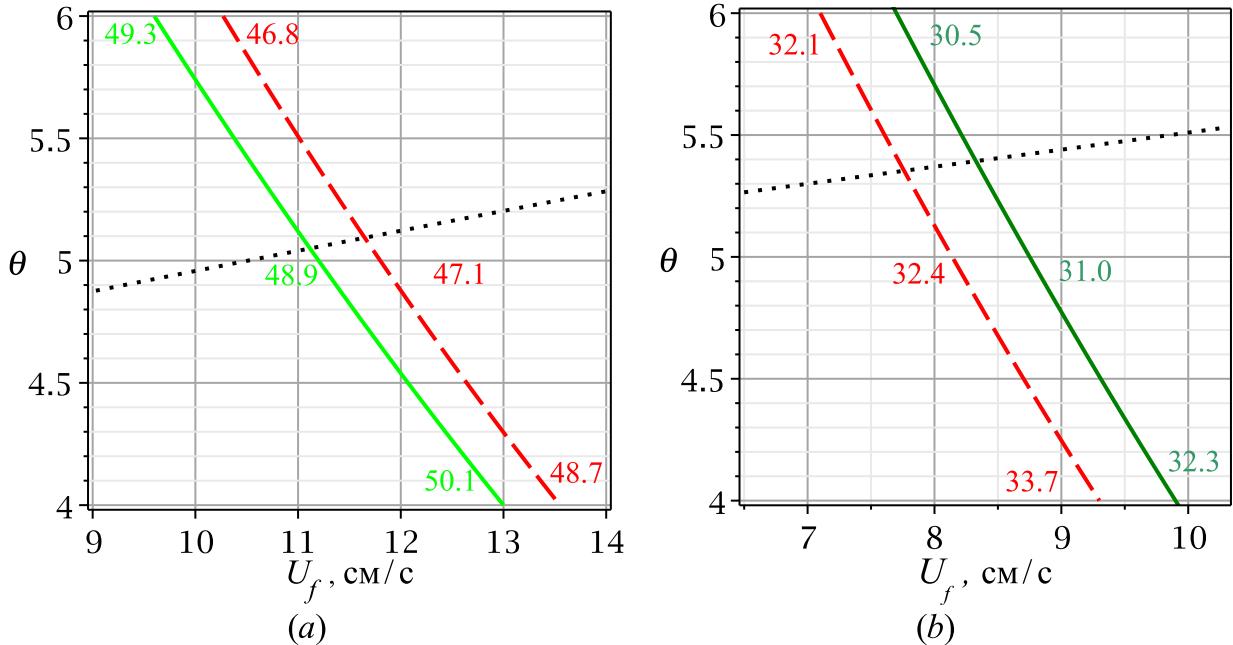


Рис. 11: (a) Критическая диаграмма для тонкого ламинарного метано-воздушного пламени в трубе диаметром 20 см. Пунктирная и сплошная линии представляют кривые $x_0 = 0$ для решений типа Ib с $\mathcal{L}_s = 0$ и $\mathcal{L}_s = -0.45$ мм, соответственно; числа у кривых указывают значения U_{Ib} в см/с при $\theta = 4, 5, 6$. Точечная линия есть фазовый локус для бедных ламинарных метано-воздушных пламён, построенный по данным [56]. (b) Критическая диаграмма для тонкого ламинарного пропано-воздушного пламени с $\mathcal{L}_s = 0.5$ мм в трубе диаметром 9.5 см. Фазовый локус бедных ламинарных пропано-воздушных пламён (точки) построен по данным [57].

Для нахождения значений параметров, при которых происходит затухание тонкого ламинарного пламени, в работе предложено использовать фазовые диаграммы на плоскости $U_f-\theta$. Рисунок 11 представляет собой такие диаграммы для тонких ламинарных метано-воздушных и пропано-воздушных пламён. Пунктирная и сплошная линии на этих диаграммах изображают приближения нулевого и первого порядка по ширине фронта, соответственно. Докритические (несингулярные) режимы типа Ib лежат справа от кри-

тической кривой, закритические – слева. U_f для предельных пламён трудно измерить достаточно точно, однако скорость распространения пламён типа Ib оказывается практически постоянной вдоль критических кривых, если её измерять в сантиметрах в секунду. Числа около каждой кривой указывают значения этой скорости для $\theta = 4, 5$ и 6 . В этом построении используется значение $\mathcal{L}_s = -0.45$ мм, соответствующее коэффициенту избытка горючего $\Phi \approx 0.6$ [56]. В единицах ширины трубы имеем $\mathcal{L}_s = -0.0045$, и тот факт, что столь малое относительное значение приводит к заметному сдвигу в скорости пламени указывает на чувствительность предельных тонких ламинарных пламён к эффекту растяжения. При изменении концентрации горючего меняются оба параметра U_f , θ , образуя траекторию на фазовой плоскости (локус). На Рис. 11(a) она изображена как линия из точек и построена согласно результатам [56]. Координаты предельного тонкого ламинарного пламени определяются пересечением локуса с критической кривой. Как следует из диаграммы, предельное пламя в трубе диаметром 20 см имеет скорость $U = 48.9$ см/с. При увеличении \mathcal{L}_s критические кривые смещаются вправо, а скорость распространения пламени уменьшается. Этот вывод согласуется с наблюдениями [6], согласно которым предельные пропано-воздушные пламёна распространяются несколько медленнее, чем метано-воздушные в трубах того же диаметра. Следует заметить, что прямо противоположная зависимость имела бы место, если бы за затухание пламени была ответственна сила выталкивания. Действительно, коэффициент теплового расширения у пропано-воздушных пламён больше, чем у метано-воздушных. Но чем больше θ , тем больше сила выталкивания, и поэтому скорость пламени должна была бы расти с увеличением θ . Аналогичные построения и сравнение с экспериментальными данными произведено для труб других диаметров. В качестве примера в Таблице 1 приводятся данные для труб диаметром 9.5 см.

Установленная структура решений даёт возможность описать механизм частичного распространения и затухания тонких ламинарных пламён. В результате поджига смеси посредством источника с малым энерговыделением распространение пламени устанавливается в режиме с наименьшей скоростью, то есть в режиме типа Ia. При достаточно близких значениях скорости распространения пламени более устойчивым является режим с большей скоростью [58], поэтому с течением времени пламя должно будет перейти в режим Ib, имеющий несколько большую скорость. Если тонкое ламинарное пламя является докритическим, оно продолжит распространение в этом режиме до верхнего конца трубы, то есть скоростью стационарного распространения пламени будет U_{Ib} . С другой стороны, в случае закритического пламени в момент достижения продуктами горения точки $(0, U)$ должно

смесь	θ	U_f (см/с)	$2\mathcal{L}_s/b$	U_{Ia} (см/с)	U_{Ib} (см/с)	U_{exp} (см/с)
пропан/воздух	5.4	8.3	0.005	28.2	31.1	31.7 ± 1.6 [6]
метан/воздух	4.75	7.5	-0.01	33.7	35.6	$\begin{cases} 33.1 \pm 2.3 & [6] \\ 33.5 \pm 1.5 & [12] \end{cases}$

Таблица 1: Параметры предельных метано-воздушных и пропано-воздушных пламён в трубе диаметром 9.5 см. U_{exp} есть измеренная скорость пламени [6, 12], U_{Ia} и U_{Ib} её значения, даваемые решениями типов Ia и Ib для тонкого ламинарного пламени. \pm обозначает стандартное отклонение.

произойти затухание пламени вблизи его центра. После этого либо затухание продолжит распространяться от центра к стенкам трубы, либо пламя перейдёт в другой режим распространения, который будет существенно нестационарным, поскольку других близких по скорости стационарных режимов не существует. При уменьшении диаметра трубы нижний предел воспламенения уменьшается, и энерговыделение в предельном пламени падает, что облегчает затухание. Поэтому первый сценарий более вероятен в узких трубах, и как показывает эксперимент [6, 12], он реализуется в трубах диаметром $\lesssim 10$ см. В более широких трубах, с другой стороны, горение может продолжаться за счёт образования нестационарной ячеистой структуры. В этой картине даётся полное качественное и количественное объяснение наблюдаемых закономерностей в поведении ламинарных пламён вблизи пределов воспламенения.

В Главе 12 система оболочечных уравнений решается численно в самом общем случае произвольной нелинейности тонкого ламинарного пламени с учётом всех трёх эффектов конечной ширины пламени первого порядка – растяжения, кривизны и компрессии пламени. Численная схема строится как итерационная процедура, в которой сначала фиксируется профиль фронта и мастер-уравнение решается относительно распределения скорости газа на фронте, а затем найденное решение подставляется в уравнение эволюции, рассматриваемое как уравнение для положения фронта. Решение этого уравнения с заданными граничными условиями даёт уточнённое положение фронта. Для достижения сходимости и оптимизации этой процедуры используется метод ускорения Андерсона [59]. Одним из преимуществ использования мастер-уравнения является возможность исследовать по-отдельности каждый эффект, влияющий на структуру пламени. В частности, сравнение решений при различных θ позволяет установить применимости сл-

бонелинейной теории. Как видно из Рис. 12, практическая применимость слабонелинейного подхода ограничена $\theta \lesssim 1.5$ (в соответствии с выводом главы 6) и достаточно узкими трубами. Анализ нарушения приближения слабой нелинейности показывает, что оно проявляется в образовании узких переходных слоёв вблизи стенок трубы, характеризующихся большими градиентами скорости газа. Несмотря на гладкую форму фронта, завихрённость имеет вблизи стенок пики, высота которых быстро растёт с увеличением θ и ширины трубы, а вклады эффектов конечной ширины фронта в его нормальную скорость оказываются сравнимыми со скоростью плоского пламени.

В отличие от поправок конечной ширины в нормальную скорость, эффект компрессии пламени остаётся в литературе практически неисследованным. Это связано с тем, что нормальная скорость пламени, в принципе, непосредственно измерима и длины Маркштейна $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_s$ могут быть найдены прямым сравнением выражения (1) с результатами эксперимента. Напротив, эффект компрессии проявляет себя через скачок на фронте давления газа, и следовательно, непосредственно влияет на величину завихрённости газа, а не скорости фронта. Вклад эффекта компрессии пламени в завихрённость продуктов горения на фронте имеет вид [30]:

$$\Delta\sigma_+ = -2\mathcal{L}_\sigma (f'/N)''/N,$$

где \mathcal{L}_σ – третья независимая длина Маркштейна. В слабонелинейной теории завихрённость, а следовательно, и компрессия пламени считается малой. Однако как показывают численные решения, эффект компрессии существенно влияет на структуру тонкого ламинарного пламени, и в частности, качественно меняет зависимость скорости его распространения от ширины трубы, Рис. 13. В работе также анализируется роль шума и показывается, что резкий рост скорости тонкого ламинарного пламени, наблюдаемый при увеличении ширины трубы выше определённого порогового значения, не связан с реальным или численным шумом, а является стационарным явлением.

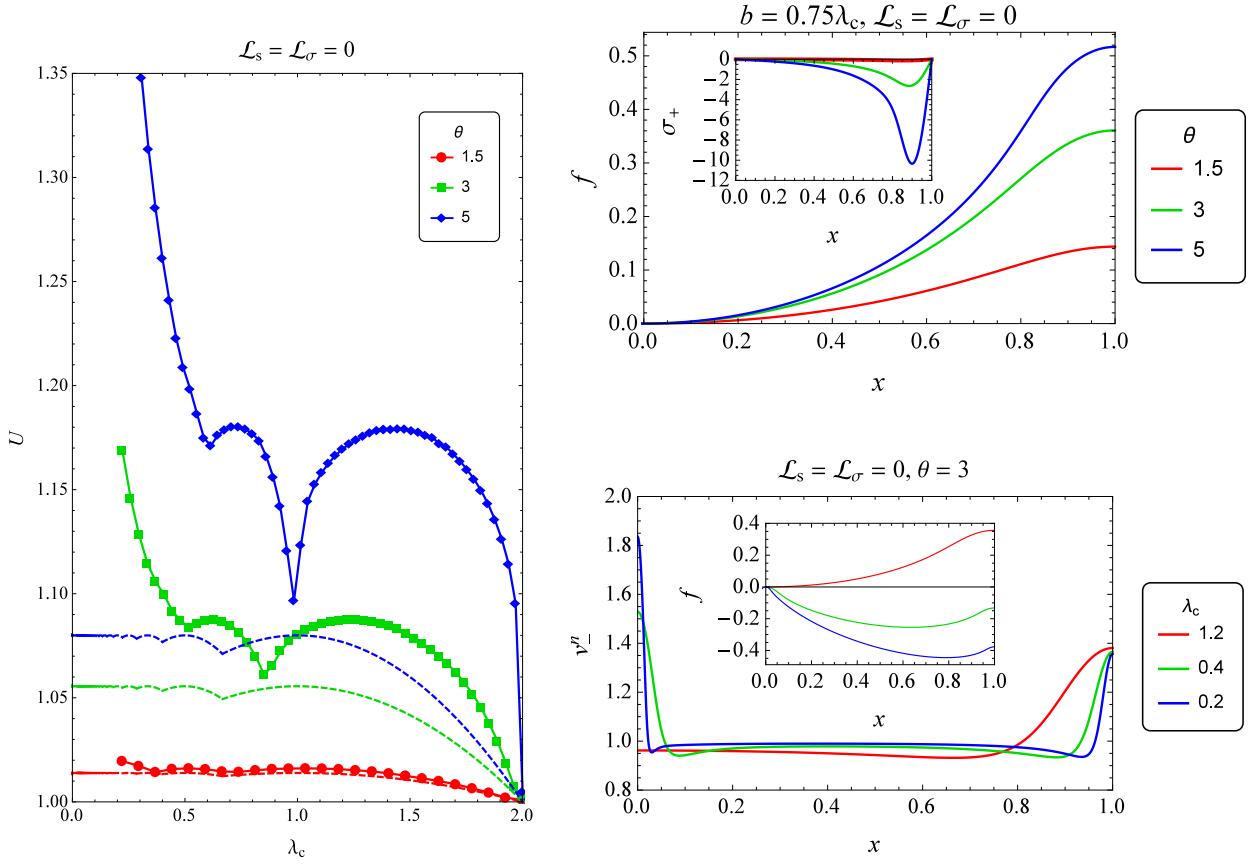


Рис. 12: Слева: Зависимость скорости тонкого ламинарного пламени от длины волны обрезания для пламён с $\theta = 1.5, 3, 5$. $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_\sigma = 0$. Результаты слабонелинейной теории (решения уравнения Сивашинского–Клавена) показаны пунктирными линиями. Справа вверху: Положение фронта и завихрённость продуктов горения на нём (врезка) для тонких ламинарных пламён с различными θ в трубе шириной $0.75\lambda_c$. Справа внизу: Нормальная скорость тонкого ламинарного пламени с $\lambda_c = 1.2$ ($\mathcal{L}_c = 0.064$, красная линия), $\lambda_c = 0.4$ ($\mathcal{L}_c = 0.021$, зелёная линия), и $\lambda_c = 0.2$ ($\mathcal{L}_c = 0.011$, синяя линия). Соответствующие положения фронта пламени показаны на врезке.

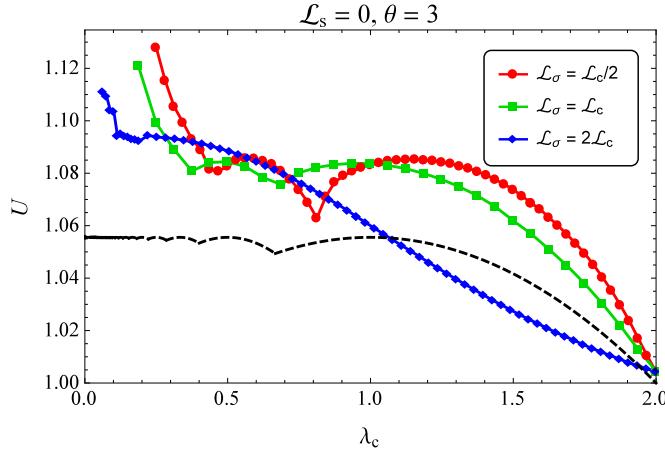


Рис. 13: Зависимость скорости тонкого ламинарного пламени от отношения длины волны обрезания к ширине трубы для $\theta = 3$ и различных значений отношения $\mathcal{L}_\sigma/\mathcal{L}_c$. Красные, зелёные и синие кривые соответствуют $\mathcal{L}_\sigma/\mathcal{L}_c = 0.5, 1$ и 2 . Пунктирные кривые представляют решения уравнения Сивашинского–Клавена.

В Главе 13 оболочечное описание распространяется на нестационарные тонкие ламинарные пламёна, а также двумерные турбулентные течения газа постоянной плотности. Обобщение вывода Главы 4 приводит к мастер-уравнению

$$2(\omega_-)' + \left(1 + i\hat{\mathcal{H}}\right) \left\{ [\omega] - \frac{i}{4} e_k \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu r} \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau M(\tilde{x}, t - \tau) \right\}'_{\mu=0+} = 0,$$

где $r = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - f(\tilde{x}, t))^2}$, $e_k = \varepsilon_{2k} + i\varepsilon_{1k}$, $\tau_{\pm} = \tau_1 + i\tau_2$,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{\hat{v}_+^2(\tilde{x}, t)} [w_+(\tilde{x}, t)(x - \tilde{x}) + \hat{u}_+(\tilde{x}, t)(y - f(\tilde{x}, t))], \\ \tau_2 &= \frac{1}{\hat{v}_+^2(\tilde{x}, t)} |\hat{u}_+(\tilde{x}, t)(x - \tilde{x}) - w_+(\tilde{x}, t)(y - f(\tilde{x}, t))|, \quad \hat{v}_+^2 = w_+^2 + \hat{u}_+^2, \end{aligned}$$

крышечка над u_+ означает скорость газа относительно фронта, а регуляризующий фактор $e^{-\mu r}$ требуется для того, чтобы корректно определить несобственный интеграл по \tilde{x} . Таким образом, вся зависимость структуры тонкого ламинарного пламени от его предыдущей эволюции содержится в функции $M \equiv N v_+^n \sigma_+$. Далее показывается, что все известные строгие результаты теории нестационарного слабонелинейного тонкого ламинарного пламени являются простыми частными случаями оболочечных уравнений. А именно, линеаризация мастер-уравнения в точности воспроизводит соотношение

Ландау–Дарье для инкремента роста возмущения [33–35] и уравнение Маркштейна для пламени в переменном поле тяжести [32], а его разложение по $(\theta - 1)$ приводит к нестационарному уравнению Сивашинского–Клавена [37].

В **Главе 14** нестационарное мастер-уравнение применяется для исследования устойчивости тонкого ламинарного V-пламени в трубе. Для этого оно линеаризуется в окрестности решения $f(x) = s|x|$, $u_-(x) = U$, $w_-(x) = 0$, описывающего тонкое ламинарное V-пламя, фронт которого является прямолинейным по обе стороны от удерживающего его стержня. Возмущение пламени записывается в виде

$$\delta f(x, t) = \tilde{f}(x)e^{\nu t}, \quad \delta w_-(x, t) = \tilde{w}(x)e^{\nu t}, \quad \delta u_-(x, t) = \tilde{u}(x)e^{\nu t},$$

где ν есть инкремент возмущения, и показывается, что из системы линеаризованных оболочечных уравнений следует уравнение для функции $\tilde{u}(x)$. Проверяется, что при $s = 0$ это уравнение воспроизводит соотношение Ландау–Дарье для ν , а затем исследуется случай сильнонелинейного V-пламени: $s \gg 1$. Разложение по степеням $1/s$ приводит к следующему уравнению для функции $g(x) = e^{\nu|x|}\tilde{u}(x)$:

$$(1 + \alpha|x|)g' - (\alpha^2 + \alpha\nu|x| + \nu)g\chi(x) + \alpha(\alpha + 1)\nu\chi(x) \int_0^{|x|} d\eta g(\eta) = \alpha^2 x g(0),$$

где $\alpha = \theta - 1$, $\chi(x) = x/|x|$. Решение этого уравнения имеет вид

$$g(x) = \frac{g(0)}{\nu} + \gamma \left(x + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha \int_{\beta/\alpha}^{x+1/\alpha} dy y^{-\alpha-1} e^{\nu y},$$

причём постоянная амплитуда γ произвольна, а постоянная β связана с ν уравнением

$$\alpha e^{\nu/\alpha} = \frac{\nu^2 - 2\nu - \alpha^2}{\nu - 1} \int_{\beta}^1 dy y^{-\alpha-1} e^{\nu y/\alpha}.$$

Комплексное число β является параметром решения. Численное решение данного уравнения показывает, что при любом $\theta > 1$ имеются решения с $\operatorname{Re} \nu > 0$. А именно, при вещественном $\beta > 1$ значения ν также вещественны и положительны ($\beta = 1$ соответствует тривиальному решению $\tilde{u} = \tilde{f} \equiv 0$), а

при $\beta < 1$ у ν появляется мнимая часть. Таким образом, при горении смеси в трубе конфигурация тонкого ламинарного V-пламени, в которой фронт является плоским по обе стороны от удерживающей точки, оказывается неустойчивой, в полном согласии с экспериментом [44, 60].

В заключительной Главе 15 оболочечный подход применяется для описания спонтанного ускорения тонких ламинарных пламён в горизонтальных трубах. В отличие от вынужденного ускорения, вызываемого шероховатостью стенок трубы или различными препятствиями, спонтанное ускорение имеет место в открытых трубах с гладкими стенками. При этом пламёна в процессе ускорения остаются ламинарным, и поэтому эксперименты дают для них вполне воспроизводимые результаты. Уже в трубах такого сравнительно небольшого диаметра, как 5 см, скорость распространения пламени в результате ускорения многократно превосходит нормальную скорость. Например, пламя в смеси 7.1% метана имеет $U_f = 22$ см/с, тогда как скорость его распространения в трубе длиной 5 м возрастает от значения 50 см/с до 350 см/с [61]. Это означает, что процесс спонтанного ускорения является сильнолинейным. Как показывают наблюдения, в процессе движения пламени по достаточно длинной трубе (длина трубы $L \gtrsim 50b$) форма пламени меняется медленно, за исключением короткого периода иррегулярности, соответствующего прохождению пламенем определённой точки трубы (положение которой зависит от состава смеси), в течение которого пламя выглядит возмущённым [18, 61]. Медленность изменения формы пламени позволяет рассматривать спонтанное ускорение как квазистационарный процесс. В работе даётся точное определение условия квазистационарности, на его основе выводится выражение для ускорения тонкого ламинарного пламени и даётся оценка точности квазистационарного приближения. В частности, устанавливается существование положительной обратной связи между ускорением пламени и его скоростью относительно холодной смеси. Оболочечные уравнения для ускоряющегося тонкого ламинарного пламени в связанной с ним системе отсчёта легко получаются из уравнений Глав 9, 11 добавлением эквивалентного поля тяжести. Как там было установлено, при нормальных начальных условиях ламинарные метано-воздушные пламёна вблизи пределов воспламенения распространяются в режиме типа I, который характеризуется сравнительно низкой скоростью, тогда как в смесях, близких к стехиометрической, они распространяются в высокоскоростном режиме типа II. Численный анализ уравнений для ускоряющегося тонкого ламинарного пламени показывает, что эти два режима также существенно различны в отношении величины ускорения: в режиме типа II значения ускорения в 3 – 10 раз больше, чем в режиме типа I. Оказывается, далее, что квазистационар-

ный режим типа II существует лишь ограниченное время. Точное расстояние, которое проходит тонкое ламинарное пламя до момента, когда исчезают решения этого типа, зависит от состава смеси. Сам момент окончания решений типа II характеризуется резким возрастанием ускорения пламени.

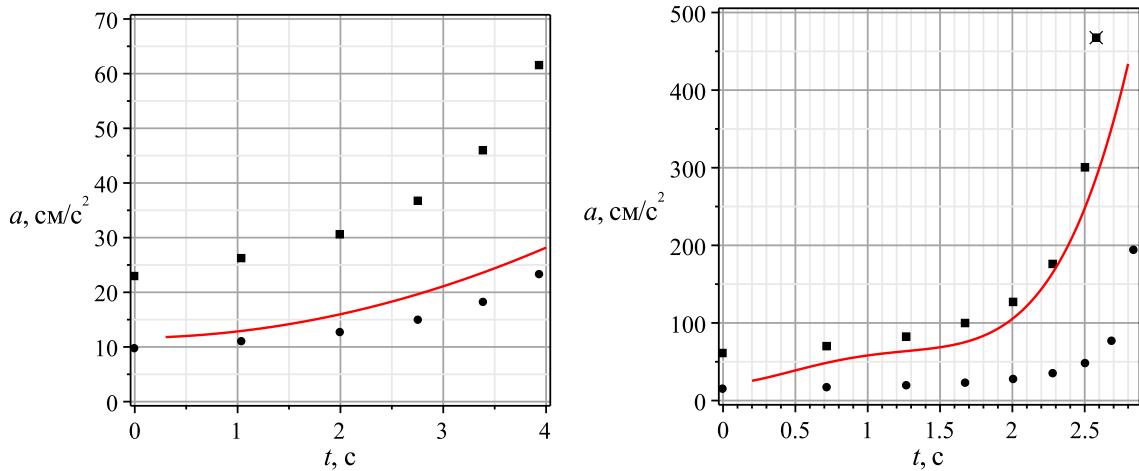


Рис. 14: Зависимость ускорения пламени от времени в смеси 6.2% метана с воздухом (слева) и 7.1% метана с воздухом (справа). Сплошные кривые являются результатом обработки экспериментальных данных [61], теоретические значения для тонкого ламинарного пламени отмечены кружками (решения типа I) и квадратами (решения типа II). Крест указывает точку исчезновения решений типа II.

На основе найденных численных решений дано качественное и количественное объяснение наблюдаемой динамики ламинарных метано-воздушных пламён в гладких горизонтальных трубах. Показано, в частности, что ускорение ламинарных пламён в бедных смесях протекает в режиме типа I на всём протяжении трубы, тогда как более энергичные пламёна претерпевают переход в режим типа II, Рис. 14. Из полученных результатов сделан вывод, что наблюдаемое на эксперименте значительное увеличение скорости ламинарного пламени связано главным образом с ускорением газа, заполняющего трубу, как целого; увеличение скорости пламени относительно холодного газа, связанное с ускорением газа посредством указанной выше положительной обратной связи, даёт относительный вклад в наблюдаемую скорость пламени порядка 20%. Значительное отличие в наблюдаемой величине ускорения у ламинарных метано-воздушных пламён при одинаковых (нормальных) начальных условиях вблизи пределов воспламенения и вблизи стехиометрии объясняется тем, что эти пламёна распространяются в различных режимах.

В **Заключении** диссертационной работы сделаны основные выводы,

подведены итоги диссертационного исследования, указаны место и роль его результатов в науке о горении. В конце имеется список цитированной литературы и четыре **Приложения**, в которых приводятся вспомогательные сведения о математических свойствах оператора $\hat{\mathcal{H}}$ и классификация сценариев развития неустойчивости течений продуктов горения тонких ламинарных пламён типа Ia.

Основные результаты диссертационной работы

В диссертационной работе разработан принципиально новый аналитический метод решения задач о распространении тонких ламинарных пламён в газовых смесях. В отличие от уже существующих, этот метод позволяет теоретически исследовать сильнонелинейные конфигурации тонких ламинарных пламён и последовательно учитывать влияние поля тяжести и процессов переноса во фронте на крупномасштабную структуру пламени. Полученные результаты решают основную проблему классического подхода – невозможность построения общего решения уравнений газодинамики в явном виде. Они дают возможность относительно просто вычислять основные характеристики нелинейных тонких ламинарных пламён в газовых смесях, а также ламинарных поверхностей разрыва с произвольным скачком плотности в других средах. Использование уравнений нового метода вместо фундаментальных уравнений газодинамики существенно снижает вычислительные затраты и позволяет адекватно моделировать реальные пламёна, изучаемые в лабораториях и встречающиеся в прикладных задачах. С помощью нового метода дано объяснение наблюдаемых свойств конкретных пламён и вычислены их основные характеристики, а также предсказано существование новых режимов горения.

1. С целью построения оболочечного описания тонких ламинарных пламён доказана самосогласованность модели тонкого пламени в первом порядке разложения по ширине фронта. Для этого сформулирован критерий корректности модели тонкого пламени и доказаны существование и единственность модели в первом порядке по ширине фронта. Как следствие этого результата решена основная техническая проблема теории тонкого пламени – неоднозначность положения математической поверхности разрыва относительно физического фронта пламени. Доказано, что при выполнении условия корректности положение поверхности разрыва определено однозначно, а вместе с ним однозначными являются вклады процессов переноса во фронте пламени в его нормальную скорость. Далее, для эффективного учёта мелкомасштабной ячеистой структуры тонкого ламинарного пламени сформулирова-

на процедура усреднения полей скорости и давления газа и условий их скачка на поверхности разрыва. С её помощью доказано, что в ведущем порядке разложения по размеру ячеек эффект мелкомасштабной структуры сводится к мультиплексивной перенормировке нормальной скорости пламени.

2. В рамках модели тонкого ламинарного пламени получено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для положения фронта двумерного тонкого ламинарного пламени и распределения на нём скорости газа (мастер-уравнение). Доказано, что это уравнение является точным следствием уравнений идеальной газодинамики. На его основе впервые построено замкнутое описание тонких ламинарных пламён с произвольным коэффициентом расширения газа. Проверено, что все известные слабонелинейные уравнения теории искривлённых тонких ламинарных пламён в точности воспроизводятся как частные случаи мастер-уравнения. С его помощью получено уточнение уравнения Сивашинского–Клавена для стационарного тонкого ламинарного пламени с малым коэффициентом расширения и найдены его аналитические решения. Эти результаты демонстрируют удобство оболочечного описания по сравнению с классическим подходом, требующим нахождения явных решений для течений холодной смеси и продуктов горения в каждом порядке слабонелинейного разложения.

3. Для анализа сильнонелинейных режимов распространения тонких ламинарных пламён разработано асимптотическое разложение мастер-уравнения по обратной скорости пламени. С его помощью установлен важный факт локальности структуры сильновытянутого тонкого ламинарного пламени, а именно показано, что в случае, когда скорость распространения тонкого ламинарного пламени существенно превосходит его нормальную скорость, оболочечные уравнения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Их анализ привёл к следующим результатам:

- В случае тонкого ламинарного пламени, удерживаемого тонким стержнем в быстром потоке газа, все решения образуют двухпараметрическое семейство. При этом влияние стержня на глобальную структуру тонкого ламинарного пламени описывается заданием одного числа, значение которого определяется течением газа вблизи стержня.
- Получена классификация режимов стационарного распространения тонких ламинарных пламён в сильном поле тяжести. На её основе дано объяснение наблюдаемых различий в скорости стационарного распространения метано-воздушных пламён с одинаковыми фазовыми параметрами, а также предсказан новый стационарный режим распространения тонкого ламинарного пламени, в котором его фронт имеет перегиб. Этот режим

наблюдается экспериментально.

- Построена теория частичного распространения тонких ламинарных пламён в вертикальных трубах, впервые объяснившая всю совокупность наблюдаемых свойств ламинарных пламён вблизи пределов воспламенения.
- Произведён первый строгий анализ устойчивости сильнонелинейного тонкого ламинарного пламени – V-пламени в трубе.
- Построена количественная теория спонтанного ускорения тонких ламинарных пламён в открытых трубах с гладкими стенками. В её рамках дано объяснение различий в наблюдаемой величине ускорения ламинарных метано-воздушных пламён в смесях вблизи пределов воспламенения и в стехиометрических смесях.

Эти результаты демонстрируют эффективность оболочечного описания сильнонелинейных тонких ламинарных пламён. Оно позволяет находить возможные режимы распространения тонких ламинарных пламён и вычислять их основные количественные характеристики в ситуациях, когда это оказывается затруднительным для обычного экспериментального наблюдения и недоступно для прямого численного моделирования.

4. В отличие от реального эксперимента или прямого численного моделирования оболочечное описание позволяет изучать влияние различных эффектов на структуру тонкого ламинарного пламени по-отдельности. Другим важным преимуществом использования мастер-уравнения является его свобода от фиктивной нестационарности, порождаемой числовым шумом. Для исследования общего случая произвольной нелинейности тонкого ламинарного пламени разработан метод численного решения точных оболочечных уравнений. Анализ численных решений позволил установить фактическую область применимости слабонелинейного приближения, а также впервые качественно и количественно исследовать эффект компрессии пламени. Он показал, что

- учёт эффекта компрессии существенно меняет зависимость скорости распространения тонкого ламинарного пламени от ширины трубы,
- резкий рост скорости ламинарного пламени, наблюдаемый при увеличении ширины трубы выше определённого порогового значения, не связан с реальным или численным шумом и является стационарным явлением.

Таким образом, оболочечное описание оказывается незаменимым средством исследования тонких ламинарных пламён даже в тех случаях, когда они доступны прямому численному моделированию.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в рецензируемых научных журналах,
удовлетворяющих Положению о присуждении учёных степеней
в МГУ имени М.В. Ломоносова:

A1. *Kazakov K. A., Liberman M. A. Nonlinear equation for curved stationary flames // Physics of Fluids – 2002. – Vol. 14., N. 3. – Pp. 1166–1181.*

EDN: LHOXNL. Импакт-фактор 4,3 (JIF). Объём статьи 2.2 п.л., вклад докторанта 2.1 п.л.

A2. *Kazakov K. A., Liberman M. A. Effect of vorticity production on the structure and velocity of curved flames // Physical Review Letters – 2002. – Vol. 88, N. 6. – P. 064502.*

EDN: LNMESB. Импакт-фактор 9,0 (JIF). Объём статьи 0.7 п.л., вклад докторанта 0.6 п.л.

A3. *Kazakov K. A., Liberman M. A. Nonlinear theory of flame front instability // Combustion Science and Technology – 2002. – Vol. 174, N. 7. – Pp. 129–151.*

EDN: LHDBQB. Импакт-фактор 1,5 (JIF). Объём статьи 1.9 п.л., вклад докторанта 1.8 п.л.

A4. *Kazakov K. A. Exact equation for curved stationary flames with arbitrary gas expansion // Physical Review Letters – 2005. – Vol. 94, N. 9. – P. 094501.*

EDN: LJBWZV. Импакт-фактор 9,0 (JIF).

A5. *Kazakov K. A. On-shell description of stationary flames // Physics of Fluids – 2005. – Vol. 17, N. 3. – P. 032107.*

EDN: LJKEJL. Импакт-фактор 4,3 (JIF).

A6. *Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. A. On-shell description of unsteady flames // Journal of Fluid Mechanics – 2008. – Vol. 608. – Pp. 217–242.*

EDN: LLJVEX. Импакт-фактор 3,9 (JIF). Объём статьи 2.5 п.л., вклад диссертанта 2.0 п.л.

A7. *Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. A.* Nonperturbative approach to the nonlinear dynamics of two-dimensional premixed flames // *Physical Review Letters* – 2008. – Vol. 100, N. 17. – P. 174501.

EDN: LLCUUZ. Импакт-фактор 9,0 (JIF). Объём статьи 0.7 п.л., вклад диссертанта 0.5 п.л.

A8. *Kazakov K. A.* Analytical treatment of 2D steady flames anchored in high-velocity streams // *Physica D: Nonlinear Phenomena* – 2010. – Vol. 239, N. 10. – Pp. 600–612.

EDN: MXGUZD. Импакт-фактор 2,9 (JIF).

A9. *Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. A.* Stability analysis of confined V-shaped flames in high-velocity streams // *Physical Review E* – 2010. – Vol. 81., N. 6. – P. 066312.

EDN: MXNPDD. Импакт-фактор 2,4 (JIF). Объём статьи 2.1 п.л., вклад диссертанта 2.0 п.л.

A10. *Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. A.* Premixed flame propagation in channels of varying width // *SIAM Journal on Applied Mathematics* – 2010. – Vol. 70, N. 8. – Pp. 3287–3318.

EDN: OHPSSZ. Импакт-фактор 2,1 (JIF). Объём статьи 2.6 п.л., вклад диссертанта 1.8 п.л.

A11. *Kazakov K. A.* Analytical study in the mechanism of flame movement in horizontal tubes // *Physics of Fluids* – 2012. – Vol. 24, N. 2. – P. 022108.

EDN: PDLGAT. Импакт-фактор 4,3 (JIF).

A12. *Kazakov K. A.* Analytical study in the mechanism of flame movement in horizontal tubes. II. Flame acceleration in smooth open tubes // *Physics of Fluids* – 2013. – Vol. 25, N. 8. – P. 082107.

EDN: RFQPZL. Импакт-фактор 4,3 (JIF).

A13. *El-Rabii H., Kazakov K. A.* Effect of vorticity flip-over on the premixed flame structure: First experimental observation of type I inflection flames // *Physical Review E* – 2015. – Vol. 92, N. 6. – P. 063004.

EDN: WONBXB. Импакт-фактор 2,4 (JIF). Объём статьи 0.7 п.л., вклад диссертанта 0.35 п.л.

A14. *Kazakov K. A.* Mechanism of partial flame propagation and extinction in a strong gravitational field // *Physical Review Letters* – 2015. – Vol. 115, N. 26. – P. 264501.

EDN: WRHLTX. Импакт-фактор 9,0 (JIF).

A15. *Kazakov K. A.* Premixed flame propagation in vertical tubes // *Physics of Fluids* – 2016. – Vol. 28, N. 4. – P. 042103.

EDN: WTBFMF. Импакт-фактор 4,3 (JIF).

A16. *Kazakov K. A.* The mean velocity profile of near-wall turbulent flow: is there anything in between the logarithmic and power laws? // *Journal of Turbulence*. – 2016. – Vol. 17, N. 11. – Pp. 1015–1047.

EDN: YUUSMZ. Импакт-фактор 1,6 (JIF).

A17. *Kazakov K. A., Kharlanov O. G.* Numerical study of strongly-nonlinear regimes of steady premixed flame propagation. The effect of thermal gas expansion and finite-front-thickness effects // *Combustion Theory and Modelling* – 2018. – Vol. 22, N. 5. – Pp. 835–861.

EDN: RGGPAS. Импакт-фактор 1,6 (JIF). Объём статьи 2.3 п.л., вклад диссертанта 1.1 п.л.

Список литературы

1. *Ferguson C., Kirkpatrick A.* Internal Combustion Engines. – New York: John Wiley & Sons, 2001.
2. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либронич В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. – Москва: Наука, 1980.
3. *Clavin P., Searby G.* Combustion waves and fronts in flows. – Cambridge University Press, 2016.
4. *Coward H. F., Jones G. W.* Limits of flammability of gases and vapors // *U.S. Bur. Mines Bull.* – 1952. – Technical Report No., BM-BUMLL-503.
5. *Zabetakis M. G., Cooper J., Furno A. L.* Flammability in Air of Solvent Mixtures Containing Methyl Ethyl Ketone and Tetrahydrofuran // *U.S. Bureau of Mines.* – 1962. – RI 6048.
6. *Levy A.* An optical study of flammability limits // *Proc. R. Soc. A.* – 1965. – Vol. 283. – P. 134.
7. *Hillebrandt W., Niemeyer J. C.* Type Ia supernova explosion models // *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* – 2000. – Vol. 38. – P. 191.
8. *Lovachev L. A.* The theory of limits on flame propagation in gases // *Combust. Flame.* – 1971. – Vol. 17. – P. 275.
9. *Bregeon B., Gordon A. S., Williams F. A.* Near-limit downward propagation of hydrogen and methane flames in oxygen-nitrogen mixtures // *Combust. Flame.* – 1978. – Vol. 33. – Pp. 33–45.
10. *Buckmaster J., Mikolaitis D.* A flammability-limit model for upward propagation through lean methane/air mixtures in a standard flammability tube // *Combust. Flame.* – 1982. – Vol. 45. – P. 109.
11. *Jarosinski J., Strehlow R. A., Azarbarzin A.* The mechanisms of lean limit extinguishment of an upward and downward propagating flame in a standard flammability tube // 19th Symposium on Combustion (The Combustion Institute). – 1982. – P. 1549.
12. *von Lavante E., Strehlow R. A.* The mechanism of lean limit flame extinction // *Combust. Flame.* – 1983. – Vol. 49. – P. 123.

13. *Shoshin Y. L., de Goey L. P. H.* Experimental study of lean flammability limits of methane/hydrogen/air mixtures in tubes of different diameters // *Exp. Thermal Fluid Sci.* – 2010. – Vol. 34. – Pp. 373–380.
14. *Wang T., Liang H., Luo Z., Su B., Liu L., Su Y.* Near flammability limits behavior of methane-air mixtures with influence of flammable gases and nitrogen: An experimental and numerical research // *Fuel.* – 2021. – Vol. 294. – P. 120550.
15. *Liaw H.-J., Chen K.-Y.* A model for predicting temperature effect on flammability limits // *Fuel.* – 2016. – Vol. 178. – Pp. 179–187.
16. *Bertolino A., Stagni A., Cuoci A., Faravelli T., Parente A., Frassoldati A.* Prediction of flammable range for pure fuels and mixtures using detailed kinetics // *Combust. Flame.* – 2019. – Vol. 207. – Pp. 120–133.
17. *Shoshin Y., Tecce L., Jarosinski J.* Experimental and computational study of lean limit methane-air flame propagating upward in a 24 mm diameter tube / *Combust. Sci. Technol.* – 2008. – Vol. 180. – Pp. 1812–1828.
18. *Dixon H. B.* On the movements of the flame in the explosion of gases // *Phil. Trans. A.* – 1903. – Vol. 200. – P. 315.
19. *Payman W.* The detonation-wave in gaseous mixtures and the pre-detonation period // *Proc. Roy. Soc. A (London)*. – 1928. – Vol. 120. – P. 90.
20. *Щёлкин К. И.* К теории возникновения детонации в газовых смесях в трубах // *ДАН СССР*. – 1939. – Т. 23. – С. 636.
21. *Peraldi O., Knystautas R., Lee J.H.* Criteria for transition to detonation in tubes // Proc. 21st Int. Symposium on Combustion. – 1986. – Pp. 1629–1637.
22. *Dorofeev S. B., Kuznetsov M. S., Alekseev V. I., Efimenko A. A., Breitung W.* Evaluation of limits for effective flame acceleration in hydrogen mixtures // *J. Loss Prev. Process. Ind.* – 2001. – Vol. 14. – Pp. 583–589.
23. *Kuznetsov M., Alekseev V., Matsukov I., Dorofeev S.* DDT in a smooth tube filled with a hydrogen-oxygen mixture // *Shock Waves*. – 2005. – Vol. 14, no. 3. – Pp. 205–215.

24. Chapman W. R., Wheeler R. V. The propagation of flame in mixtures of methane and air. Part IV. The effect of restrictions in the path of the flame // *J. Chem. Soc.* – 1926. – Vol. 129. – P. 2139.
25. Щёлкин К. И. Влияние шероховатости трубы на возникновение и распространение детонации в газах // *ЖЭТФ.* – 1940. – Т. 10. – С. 823.
26. Oppenheim K., Soloukhin R. I. Experiments in gasdynamics of explosion // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1973. – Vol. 5. – P. 31.
27. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Теоретическая физика. т. VI. Гидродинамика. – Москва: Наука, 1986.
28. Clavin P., Masse L., Williams F. A. Comparison of flame-front instabilities with instabilities of ablation fronts in inertial-confinement fusion // *Combust. Sci. Technol.* – 2005. – Vol. 177. – P. 979.
29. Matalon M., Matkowsky B. J. Flames as gasdynamic discontinuities // *J. Fluid Mech.* – 1982. – Vol. 124. – P. 239.
30. Class A. G., Matkowsky B. J., Klimenko A. Y. A unified model of flames as gasdynamic discontinuities // *J. Fluid Mech.* – 2003. – Vol. 491. – P. 11.
31. Михельсон В. А. Диссертация: О нормальной скорости воспламенения горючих газовых смесей. – Московский университет, 1890.
32. Markstein G. H. Experimental and theoretical studies of flame front stability // *J. Aeron. Sci.* – 1951. – Vol. 18. – P. 199.
33. Darrieus G. неопубликованная работа, представленная на La Technique Moderne, 1938.
34. Darrieus G. Propagation d'un front de flamme // неопубликованная работа, представленная на Le Congres de Mecanique Appliquee, 1945.
35. Ландау Л. Д. К теории медленного горения // *ЖЭТФ.* – 1944. – Т. 14, № 6. – С. 240.
36. Sivashinsky G. I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames // *Acta Astronaut.* – 1977. – Vol. 4. – P. 1177.
37. Sivashinsky G. I., Clavin P. On the nonlinear theory of hydrodynamic instability in flames // *J. Physique.* – 1987. – Vol. 48. – P. 193.

38. *Thual O., Frisch U., Hénon M.* Application of pole decomposition to an equation governing the dynamics of wrinkled flames // *J. Phys. (France)*. – 1985. – Vol. 46. – P. 1485.
39. *Bychkov V. V., Golberg S. M., Liberman M. A., Eriksson L. E.* Propagation of curved stationary flames in tubes // *Phys. Rev. E*. – 1996. – Vol. 54. – P. 3713.
40. *Liberman M. A., Ivanov M. F., Peil O. E., Valiev D. M., Eriksson L.-E.* Numerical studies of curved stationary flames in wide tubes // *Combust. Theory Modelling*. – 2003. – Vol. 7. – P. 653.
41. *Зельдович Я. Б.* Замечания о горении быстрого потока в трубе // *ЖТФ*. – 1944. – Т. 14. – С. 162.
42. *Scurlock A. C.* Flame stabilization and propagation in high-velocity gas streams // *Meteor Report no. 19*. – Massachusetts Institute of Technology, 1948.
43. *Tsien H. S.* Influence of flame front on the flow field // *J. Appl. Mech.* – 1951. – Vol. 18. – P. 188.
44. *Progress report UMR-33* // Aeronautical research center. – University of Michigan, 1949.
45. *Льюис Б., Эльбе Г.* Горение, пламя и взрывы в газах – Москва: Мир, 1968.
46. *Bosschaart K. J., de Goey L. P. H.* The laminar burning velocity of flames propagating in mixtures of hydrocarbons and air measured with the heat flux method // *Combust. Flame*. – 2004. – Vol. 136. – Pp. 261–269.
47. *Bychkov V. V.* Bubble motion in a horizontal tube and the velocity estimate for curved flames // *Phys. Rev. E*. – 1997. – Vol. 55. – P. 6898.
48. *Bychkov V. V., Liberman M.A.* Dynamics and stability of premixed flames // *Phys. Rep.* – 2000. – Vol. 325. – P. 115.
49. *Frankel M. L.* An equation of surface dynamics modeling flame fronts as density discontinuities in potential flows // *Phys. Fluids A*. – 1990. – Vol. 2. – P. 1879.

50. Tritton D. *J. Physical Fluid Dynamics*. – New York: Oxford University Press, 1988.
51. Marshall J., Plumb R.A. *Atmosphere, Ocean, and Climate Dynamics*. – Academic Press, 2007.
52. Batley G. A., McIntosh A.C., Brindley J. The baroclinic effect in combustion // *Math. Computer Modelling*. – 1996. – Vol. 24, n0. 8. – P. 165.
53. Coward H. F., Hartwell F. J. Studies in the mechanism of flame movement. Part I. The uniform movement of flame in mixtures of methane and air, in relation to tube diameter // *J. Chem. Soc.* – 1932. – P. 1996.
54. DigitizeIt является зарегистрированной торговой маркой корпорации Bormisoft. – <http://www.digitizeit.de>.
55. Williams F. W., Indritz D., Sheinson R. S. Concentration limits for n-butane low temperature flames // *Combust. Sci. Tech.* **11**, 67 (1975).
56. Bradley D., Gaskell P. H., GU X. J. Burning Velocities, Markstein Lengths, and Flame Quenching for Spherical Methane-Air Flames: A Computational Study // *Combust. Flame*. – 1996. – Vol. 104. – P. 176.
57. Taylor S. C. Ph.D. thesis: Burning velocity and the influence of flame stretch. – University of Leeds, 1991.
58. Vaynblat D., Matalon M. Stability of pole solutions for planar propagating flames: I. Exact eigenvalues and eigenfunctions // *SIAM J. Appl. Math.* – 2000. – Vol. 60, no. 2. – P. 679.
59. Anderson D. G. Iterative procedures for nonlinear integral equations // *JACM*. – 1965. – Vol. 12, no. 4. – P. 547.
60. Lee D. K., Kim M.-U., Shin H. D. Stability of inclined planar flames as a local approximation of weakly curved flames // *Combust. Theory Modelling*. – 2005. – Vol. 9, no. 4. – P. 587.
61. Mason W., Wheeler R. V. The propagation of flame in mixtures of methane and air. Part II. Vertical propagation. Part III. Propagation in currents of the mixtures // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1920. – Vol. 117. – P. 1227.