

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Арутюнян Давид Арменович

**Динамика квазигеострофического эллипсоидального вихря в
баротропном и бароклинном потоках**

1.6.17 Океанология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Работа выполнена на кафедре термогидромеханики океана Физтех-школы аэрокосмических технологий Московского физико-технического института (национальный исследовательский университет)

Научный руководитель

Жмур Владимир Владимирович –
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН

Официальные оппоненты

Абрашкин Анатолий Александрович –
доктор физико-математических наук, Нижегородский филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», кафедра математики, профессор

Башмачников Игорь Львович –
доктор географических наук, Научный фонд «Международный центр по окружающей среде и дистанционному зондированию имени Нансена», директор

Курганский Михаил Васильевич –
доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт физики атмосферы имени А. М. Обухова Российской академии наук», лаборатория геофизической гидродинамики, главный научный сотрудник

Защита диссертации состоится 11 декабря 2025 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.016.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д.1, стр. 2, физический факультет, аудитория СФА

E-mail: versan@physics.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте портале <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3620>

Автореферат разослан «__» _____ 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

С.В. Колесов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Океанические вихри являются одним из ключевых элементов общей циркуляции Мирового океана, оказывая значительное влияние на перераспределение тепла, солености и питательных веществ. Эти динамические структуры играют важную роль в процессах энергообмена между различными слоями океана и влияют на глобальные климатические процессы. Еще в 30-ые годы прошлого столетия В.Б.Штокман подозревал о существовании крупных неоднородностях в Мировом океане. По его предложению в 1967 году был организован специальный эксперимент по исследованию вихревых образований в Аравийском море [Штокман и др., 1969].

Интерес к исследованию мезомасштабной изменчивости океанических течений возник после открытия антициклонического вихря в 1970 году в ходе экспедиции ПОЛИГОН-70 в северной части Атлантического океана [Кошляков, Грачев, 1974]. Впоследствии для детального изучения вихревой активности и ее роли в океанической циркуляции были организованы крупные международные экспедиционные исследования, среди которых МОДЕ (Саргассово море, 1973 г.), ПОЛИМОДЕ (Северная Атлантика, 1977–1978 гг.), МЕЗОПОЛИГОН (Северная Атлантика, 1985 г.) и МЕГАПОЛИГОН (Тихий океан, 1987 г.). Результаты этих исследований позволили подтвердить, что вихревые структуры играют ключевую роль в процессах горизонтального и вертикального перемешивания водных масс, активно участвуют в транспорте тепла, соли, питательных веществ и других примесей, а также оказывают влияние на крупномасштабные климатические изменения. Осознание важности вихревых образований в общей динамике океана способствовало росту научного интереса к теоретическим аспектам геофизической гидродинамики, а также стимулировало развитие лабораторного и численного моделирования мезомасштабных процессов в океане. На протяжении последних десятилетий исследования, посвященные моделированию и наблюдению вихревых образований, значительно продвинулись благодаря развитию численных методов и спутникового мониторинга. Численное моделирование показало, что вихревые структуры играют важную роль в мезомасштабной изменчивости морей [Stepanov, Diansky, Fomin, 2018], [Степанов, Дианский, Новотрясов, 2014], [Дианский и др., 2016], [Соколовский, 1992], [Козлов, Макаров, Соколовский, 1986]. Спутниковые снимки вихрей предоставляют ценные данные о пространственно-временной изменчивости высокопродуктивных акваторий Мирового океана [Завьялов и др., 2008]. Исследование вихревых полей также позволяют получать информацию о различных океанографических и геофизических явлениях, такие как остаточные следы цунами [Носов, Нурисламова, 2012]. Современные исследования мезомасштабной

изменчивости океана выявили особую роль Лофотенской котловины как региона с аномально высокой вихревой активностью [Федоров, Башмачников, Белоненко, 2019], [Башмачников, Белоненко, Куйбин, 2017], [Сантьева, Башмачников, Соколовский, 2021], [Зинченко и др., 2021], [Белоненко и др., 2014], [Новоселова, Белоненко, 2021], [Травкин, Белоненко, 2021]. Этот район, характеризующийся сложным взаимодействием Атлантических вод с топографией дна и арктическими водными массами, представляет уникальный полигон для изучения механизмов генерации, эволюции и диссипации вихревых структур.

Теоретическое исследование динамики вихрей началось с работ Кирхгофа [Ламб, 1947, с.273], который рассмотрел эллиптическое пятно (плоский вихрь Кирхгофа) в двумерной жидкости. Он показал, что эллиптическая область будет вращаться равномерно без изменения формы. Позже С.А. Чаплыгин рассмотрел поведение вихря Кирхгофа на течении со сдвигом [Чаплыгин, 1948]. Он получил, что вихрь Кирхгофа может периодическим образом меняться в горизонтальных размерах, оставаясь эллипсом (пульсирующий вихрь). Более детальное исследование двумерных эллиптических вихрей в потоках со сдвигом провел С.Кида [Kida, 1981]. Впервые были получены три режима поведения ядра: вращение, колебание и неограниченное вытягивание.

Требовалась теория для описания трехмерных эллипсоидальных вихрей. Такая теория была создана к концу 80-ых и к началу 90-ых годов прошлого столетия [Жмур, Панкратов, 1989], [Жмур, Панкратов, 1990 а, б], [Жмур, Щепеткин, 1991], [Жмур, Щепеткин, 1992], [Meacham S. P. et al, 1994]. Рассматривались вихри с одной вертикальной и двумя горизонтальными осями в равновихренных потоках, подобных потокам Кида. Оказалось, что поведение эллиптических вихрей Кирхгофа и упомянутых 3D эллипсоидальных вихрей в равновихренных баротропных потоках весьма схоже. И те, и другие обладают тремя основными режимами поведения вихревых ядер: вращение или колебание формы вокруг вертикальной оси с одновременной ограниченной вариацией длин горизонтальных полуосей, а также режимом неограниченного вытягивания вихревого ядра в горизонтальной плоскости. В первых двух случаях движение формы периодическое, тогда как в последнем оно апериодическое. В этих исследованиях анализировались характеристики эллипсоидальных вихрей с произвольной ориентацией в пространстве, а также их динамика в более сложных равновихренных потоках. В исследованиях [Жмур, Щепеткин, 1992], [Meacham et al, 1994] для описания и моделирования эволюции углов ориентации эллипсоидального вихря в пространстве использовались три угла Эйлера или углы Кардана. Это привело к получению достаточно сложной системы обыкновенных

дифференциальных уравнений, описывающих не только изменение ориентации вихря, но и динамику длин полуосей его ядра. Однако детальный количественный анализ режимов деформационного поведения вихревых структур до сих пор не был проведён из-за сложности данной системы и её многомерного характера. Среди качественных характеристик решений отмечались сложные изменения ориентации вихрей в пространстве, а также возникновение новых режимов неограниченного вытягивания. В этих режимах вихрь сначала демонстрировал ограниченные квазипериодические колебания полуосей своего ядра при сложной эволюции углов ориентации, но затем ядро практически прекращало движение в пространстве и начинало неограниченно вытягиваться под влиянием фонового течения. При этом в работах не рассматривались альтернативные сценарии поведения вихрей. Сравнивая данные о вихревых структурах в баротропных и бароклинных потоках, можно отметить, что вращательный и колебательный режимы, характерные для баротропных течений, в бароклинных потоках выявлены не были. Вместе с тем в бароклинных течениях усложнилась динамика неограниченного вытягивания вихрей. Однако количественные критерии для этого процесса в рассмотренных исследованиях отсутствуют.

Воздействие баротропных равнозавихренных течений на квазигеострофический эллипсоидальный вихрь рассмотрено в работах [Жмур и др., 2023а, б]. В них получены карты областей существования и эволюции вихрей в баротропных потоках с горизонтальным сдвигом, что является обобщением подхода Кида на трехмерный случай. Однако оставались открытыми вопросы поведения вихрей в бароклинных потоках, а также детального анализа эволюции их энергетики как в баротропных, так и в бароклинных течениях.

Цель и задачи диссертационной работы:

Цель работы состоит в развитии теоретических представлений о динамике эллипсоидальных вихрей океана.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Определение режимов поведения вихря во внешнем бароклинном потоке.
2. Анализ эволюции энергетических характеристик вихря во внешних потоках общего вида.
3. Выявление области применимости квазигеострофического приближения.

Научная новизна:

1. В работе впервые решена задача о режимах поведения квазигеострофических эллипсоидальных вихрей океана в бароклинных течениях.
2. В плоскости безразмерных параметров вихря и бароклинного течения впервые построены области и границы переходов между режимами поведения вихря. Определены критерии устойчивости вихрей во внешних бароклинных течениях.
3. Впервые анализирована возможность проявления обратного энергетического каскада с точки зрения эволюции вихря при его вытягивании в течениях общего вида.
4. Впервые исследована эволюция числа Россби для вихрей в баротропных и бароклинных течениях.

Практическая значимость. В работе проведен объемный анализ режимов поведения вихря в бароклинном внешнем потоке. Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования вихрей в течениях и определения условий их устойчивого существования. Исследована эволюция энергии вихря как в бароклинных, так и в баротропных потоках, что позволяет раскрыть механизм передачи энергии между различными масштабами неоднородностей. Полученные результаты естественным образом дополняют теорию эллипсоидальных вихрей в океане.

Методология и методы исследования. В ходе исследования была использована комбинированная методология, включающая теоретический анализ, численное моделирование и сравнительный анализ полученных результатов. Теоретическая часть опиралась на существующей модели в рамках теории эллипсоидальных вихрей и была развита с учетом специфики рассматриваемой задачи. Для численного анализа применялись методы вычислительной математики, в частности, при решении системы ОДУ использован метод Рунге-Кутты 2-ого и 3-ого порядка. Численные исследования проводились с использованием программного комплекса MATLAB, что позволило детально проанализировать поведение вихрей. Полученные результаты были интерпретированы с помощью собственного алгоритма анализа огромного массива данных, полученных в ходе решения ОДУ.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Существуют три режима поведения вихря в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом: режим выживания, режим конечного времени жизни и режим неограниченного вытягивания.

2. При вытягивании энергетика вихрей деградирует как в баротропных, так и в бароклинических течениях. Ключевым механизмом взаимодействия является перекачка энергии от вихря к течению, что обуславливает проявление обратного энергетического каскада.
3. В бароклиническом потоке во всех режимах вихрь остается геострофическим. В баротропном потоке с вытягиванием вихрь переходит в агеострофическое образование.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается комплексным подходом к исследованию, включающим строгую математическую постановку задачи, численное моделирование с использованием верифицированных методов, а также сравнительный анализ с теоретическими и экспериментальными данными. Материалы исследования докладывались в ведущих университетах и научных институтах, а также обсуждались на разных конференциях, что подтверждает их научную обоснованность и актуальность.

Апробация работы. Результаты работы проходили апробацию на следующих семинарах и конференциях:

1. В.В. Жмур, Т.В. Белоненко, Е.В. Новоселова, Б.С. Суетин, Д.А. Арутюнян. Вытягивание мезомасштабных вихрей океана в субмезомасштабные вихревые нити как способ передачи энергии по каскаду размеров // Ученый совет Физического направления ИО РАН – 16 мая 2022 г.
2. Жмур В. В., Белоненко Т. В., Новоселова Н. В., Суетин Б. С., Арутюнян Д. А. Вытягивание мезомасштабных вихрей океана в субмезомасштабные вихревые нити как способ передачи энергии по каскаду размеров. Проявление свойств отрицательной вязкости при вытягивании вихрей // XX научная школа «Нелинейные волны – 2022», 7-13 ноября.
3. Жмур В.В., Белоненко Т.В., Новоселова Е.В., Суетин Б.П., Арутюнян Д.А. Горизонтальная филаментация (удлинение) мезомасштабных вихрей как основной процесс, способствующий проявлению отрицательной вязкости океана на мезо– и субмезомасштабе // Ученый совет Физического направления ИО РАН – 21 октября 2022 г.
4. Арутюнян Д.А. Энергетическое взаимодействие вихрей океана с баротропными течениями. Возможность проявления эффекта отрицательной вязкости // 65-я Всероссийская научная конференция МФТИ – 3–8 апреля, 2023 г.
5. Жмур В.В., Арутюнян Д.А. Режимы поведения квазигеострофического эллипсоидального вихря в горизонтальном

потоке с вертикальным сдвигом // V Всероссийская конференция с международным участием «Турбулентность, динамика атмосферы и климата», посвященная памяти академика Александра Михайловича Обухова – 19–21 ноября 2024 г.

6. Арутюнян Д.А. Исследование поведения эллипсоидальных вихрей океана во внешних потоках // Семинар Центра наук о Земле МФТИ – 13 февраля 2025 г.
7. Арутюнян Д.А., Жмур В.В. Эволюция энергии квазигеострофического эллипсоидального вихря при его вытягивании внешними течениями // XIX Международная научно-техническая конференция «Современные методы и средства океанологических исследований» (МСОИ-2025) Институт океанологии им. П.П.Ширшова. –13-15 мая 2025 г.

Публикации по теме исследования. Основные идеи и положения диссертационной работы изложены в 5 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в международных базах РИНЦ, Scopus и Web of Science и рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности.

Личный вклад. Все результаты диссертационной работы получены лично автором под руководством доктора физико-математических наук, члена-корреспондента РАН, профессора Жмура Владимира Владимировича. Соискатель принимал активное участие в формулировке целей и задач исследования, а также в подготовке публикаций и докладов. В совместных публикациях [1–3] соискатель самостоятельно проводил исследования эволюции энергии вихря в баротропных течениях. Часть теоретических результатов, а также все численные расчеты были выполнены автором. В публикациях [4–5] соискателем получены основные результаты работы: определены режимы поведения и эволюция энергетики вихрей в бароклинных потоках.

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, члену-корреспонденту РАН, профессору Жмуру Владимиру Владимировичу за неоценимую поддержку, внимание и ценные научные советы на всех этапах работы. Его глубина научного мышления, стремление к точности и ясности в постановке задач, а также способность направлять исследование в наиболее значимые и актуальные области стали ключевыми факторами успешного выполнения данной работы.

Объем и структура диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений и списка используемой литературы.

В первой главе решена задача о режимах поведения квазигеострофических эллипсоидальных вихрей в условиях внешних бароклинных течений с вертикальным сдвигом. Последовательность изложения включает: формулировку математической модели, задание начальных и граничных условий, методы численного решения, а также анализ полученных результатов.

Во второй главе рассматривается эволюция энергетики вихря в баротропном и бароклинном внешних течениях.

Последняя глава содержит исследование эволюции числа Россби вихря при его вытягивании баротропным и бароклинным потоками.

Диссертационная работа изложена на 120 страницах, включая 46 иллюстраций(рисунков) и 8 таблиц. Список цитируемой литературы включает в себя 79 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **ВВЕДЕНИИ** представлены обоснование актуальности исследования, обзор научной литературы, цели и задачи, научная новизна, формулировка защищаемых положений, методологическая основа и информация об апробации результатов.

Первая глава посвящена исследованию поведения вихря в горизонтальном бароклинном потоке с вертикальным сдвигом. В этой главе диссертант опирается на актуальные работы по исследованию эллипсоидальным квазигеострофических вихрей океана. **Первый параграф** содержит описание математической модели поведения вихря в бароклинном потоке. В частности, выводится система ОДУ относительно геометрических параметров ядра вихря, которая полностью описывает эволюцию ядра в потоке с вертикальным сдвигом:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \varepsilon \cdot \tau \sin \theta [\sin 2\psi \sin \varphi - \cos \theta \cos 2\psi \cos \varphi] \\ \dot{K} &= \frac{3}{4} \tau \sin 2\theta \cos \varphi K \\ \dot{\theta} &= \frac{(g_2 - g_1)}{2} \sin \theta \sin 2\psi + \tau \left(\frac{f_3 K^2 + f_4 \varepsilon}{\varepsilon - K^2} \cos \psi + \frac{f_5 K^2 - f_6 \varepsilon^{-1}}{K^2 - \varepsilon^{-1}} \sin \psi \right) \\ \dot{\varphi} &= g_1 \sin^2 \psi + g_2 \cos^2 \psi + \frac{\tau}{\sin \theta} \left[\frac{f_3 K^2 + f_4 \varepsilon}{\varepsilon - K^2} \sin \psi - \frac{f_5 K^2 - f_6 \varepsilon^{-1}}{K^2 - \varepsilon^{-1}} \cos \psi \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = \cos\theta \left[g_3 - g_1 \sin^2 \psi - g_2 \cos^2 \psi \right. \\ \left. - \frac{\tau}{\sin \theta} \left[\frac{f_3 K^2 + f_4 \varepsilon}{\varepsilon - K^2} \sin \psi - \frac{f_5 K^2 - f_6 \varepsilon^{-1}}{K^2 - \varepsilon^{-1}} \cos \psi \right] \right] \\ + \tau \frac{f_2 \varepsilon + f_1 \varepsilon^{-1}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}, \quad (1) \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \frac{a}{b}$ – параметр вытянутости ядра, $K = \frac{Nc}{f\sqrt{ab}}$ – параметр сплюснутости ядра, N – частота Вайселя-Бреннта, f – параметр Кориолиса, a, b, c – полуоси ядра, (φ, θ, ψ) – углы ориентации ядра (углы Эйлера), $\tau = \Gamma/\sigma$ – безразмерный параметр вертикального сдвига внешнего течения, при этом производная в (1) выражается через безразмерное время σt : $\dot{f} = \frac{df}{\sigma dt}$, а функции $g_1, g_2, g_3, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} g_1(\varepsilon, K) &= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{(\varepsilon + k)(\varepsilon^{-1} + k)^3(K^2 + k)^3}} \\ g_2(\varepsilon, K) &= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{(\varepsilon + k)^3(\varepsilon^{-1} + k)(K^2 + k)^3}} \\ g_3(\varepsilon, K) &= \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{(\varepsilon + k)^3(\varepsilon^{-1} + k)^3(K^2 + k)}} \\ f_1 &= (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) \sin\psi \sin\theta \\ f_2 &= (\sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \cos\varphi \cos\theta) \sin\theta \cos\psi \\ f_3 &= (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) \cos\theta \\ f_4 &= \sin^2\theta \cos\varphi \cos\psi \\ f_5 &= (\sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \cos\varphi \cos\theta) \cos\theta \\ f_6 &= \sin\psi \sin^2\theta \cos\varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Во втором и третьем параграфах обсуждаются начальные условия для численного решения ОДУ (1) и методы его решения. **Четвертый параграф** описывает эволюцию геометрических параметров ядра вихря как результат численного решения системы (1) при заданных начальных и внешних условиях, в ходе которого выявлены различные сценарии поведения ядра.

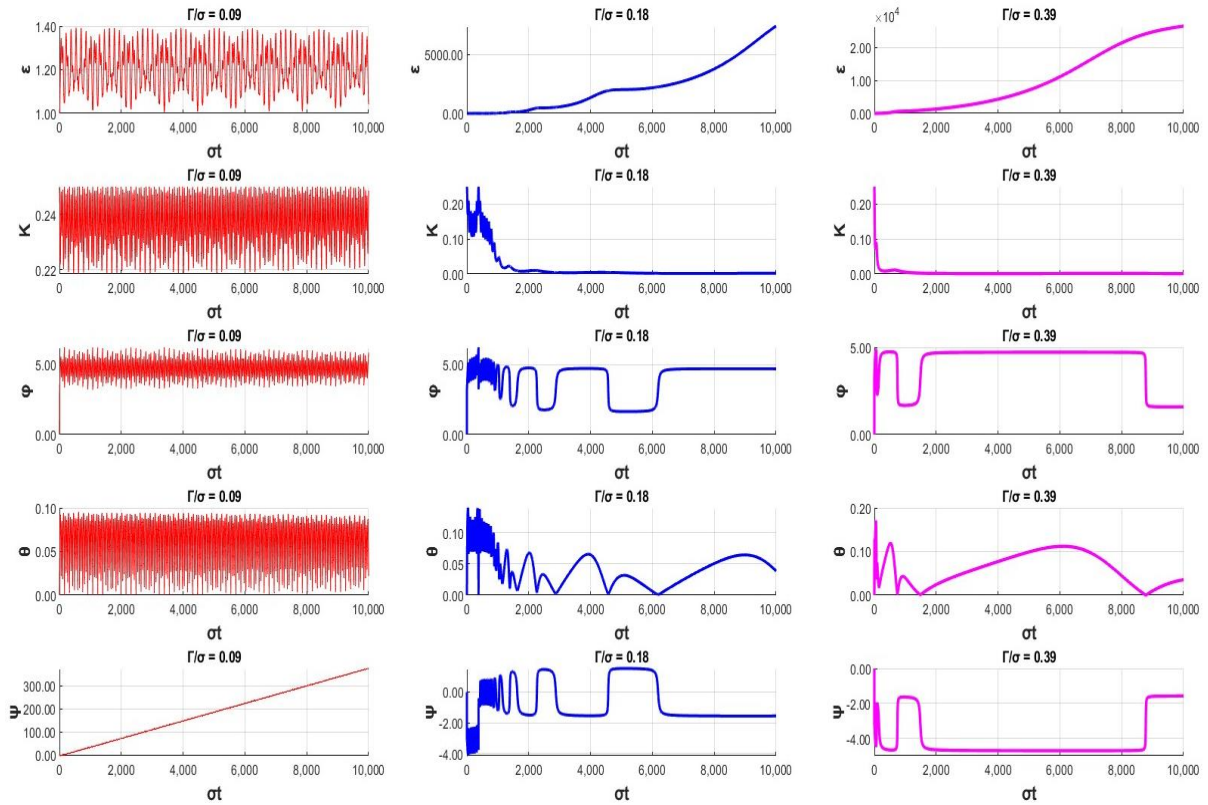


Рис.1. Эволюция геометрических параметров вихря при начальных условиях $\varepsilon(0) = 1$, $K(0) = 0.25$, $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ при разных значениях внешнего параметра $\tau = \Gamma/\sigma$.

В зависимости от внешних (величина сдвига) и начальных (параметры ядра) условий время жизни вихря — период от момента его формирования до начала вытягивания ядра — может быть бесконечным, конечным или нулевым.

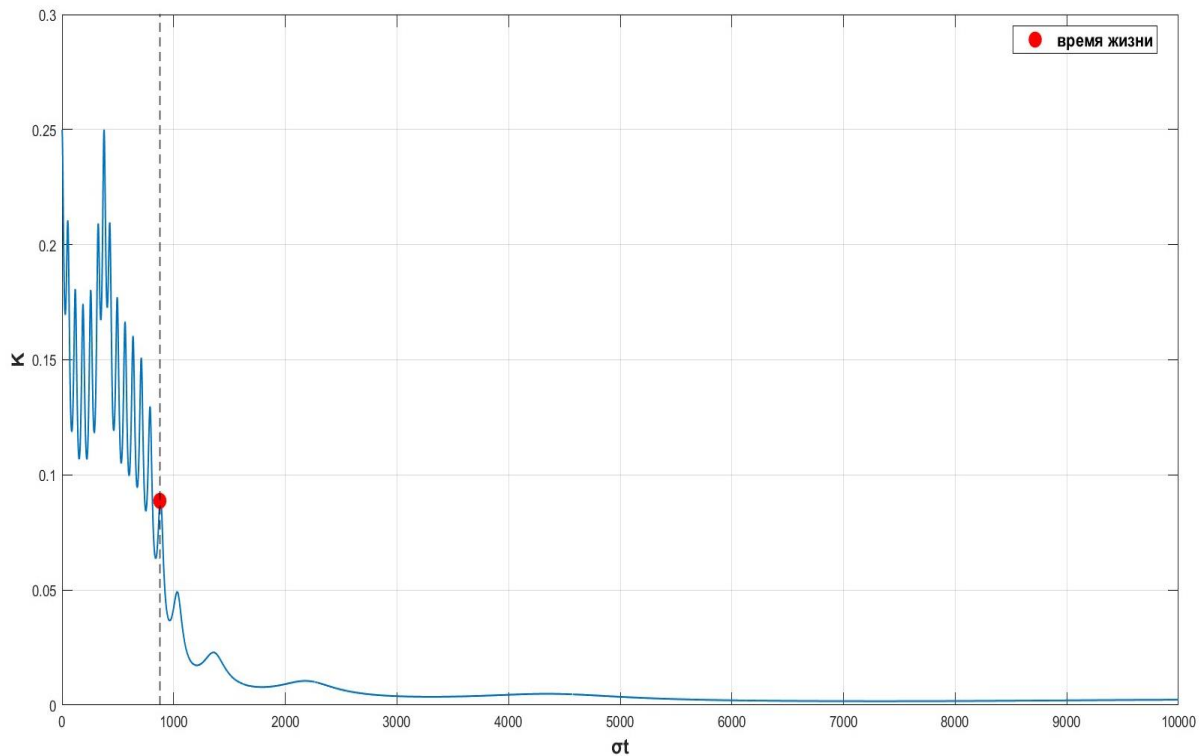


Рис.2. Зависимость параметра сплюснутости от безразмерного времени в зоне конечного времени жизни при начальных условиях $\varepsilon(0) = 1$, $K(0) = 0.25$, $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\theta(0) = 0$. Красным отмечено время жизни вихря.

Также рассматривается так называемый «критический» сдвиг течения – максимальный сдвиг, при котором время жизни вихря стремится к бесконечности. Если параметр вертикального сдвига внешнего бароклинного течения превышает критическое значение для данного ядра, то время жизни вихря оказывается конечным (включая нулевое значение).

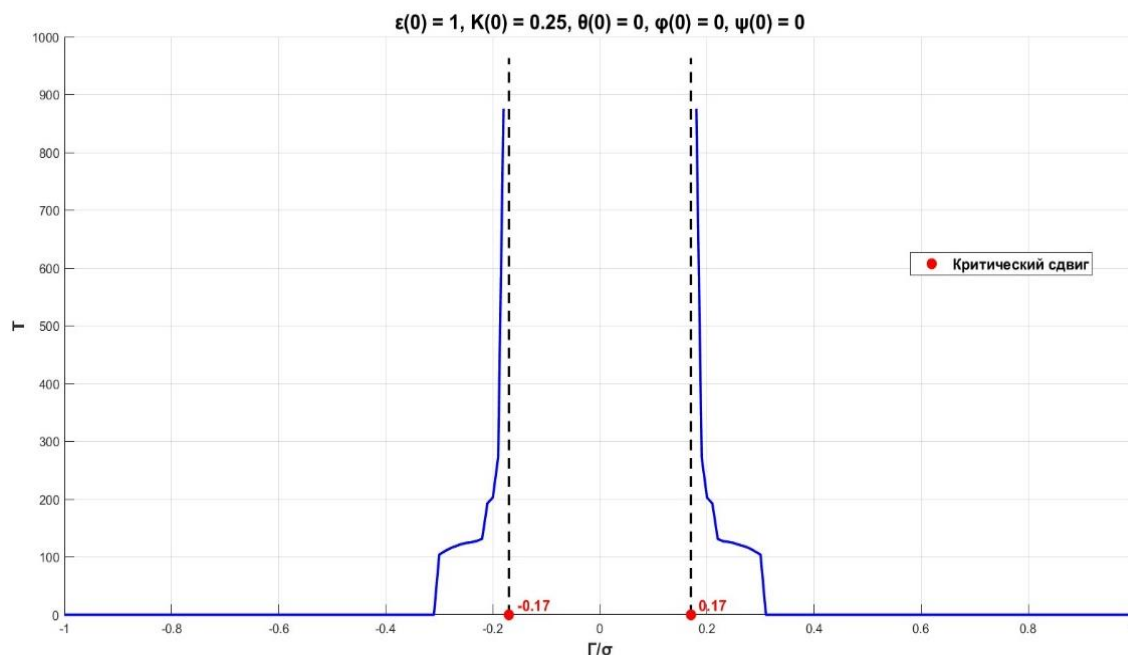


Рис.3. Зависимость времени жизни вихря $T = \sigma t$ от безразмерного параметра сдвига при начальных условиях $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$. Пустая зона в середине соответствует бесконечному времени жизни. Красные точки соответствуют значениям критического сдвига.

В пятом параграфе получены главные результаты первой главы – режимы поведения вихря в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом. Выделены три режима поведения:

1. режим выживания – время жизни вихря стремится к бесконечности;
2. режим конечного времени жизни – время жизни вихря принимает конечное ненулевое значение;
3. режим вытягивания (уничтожения) – время жизни вихря стремится к нулю.

Для различных начальных значений параметра вытянутости $\varepsilon(0)$ и угла нутации $\theta(0)$ на плоскости начальных параметров сплюснутости и безразмерного внешнего сдвига $(K(0), \tau)$ методом численного анализа были построены области режимов поведения ядра.

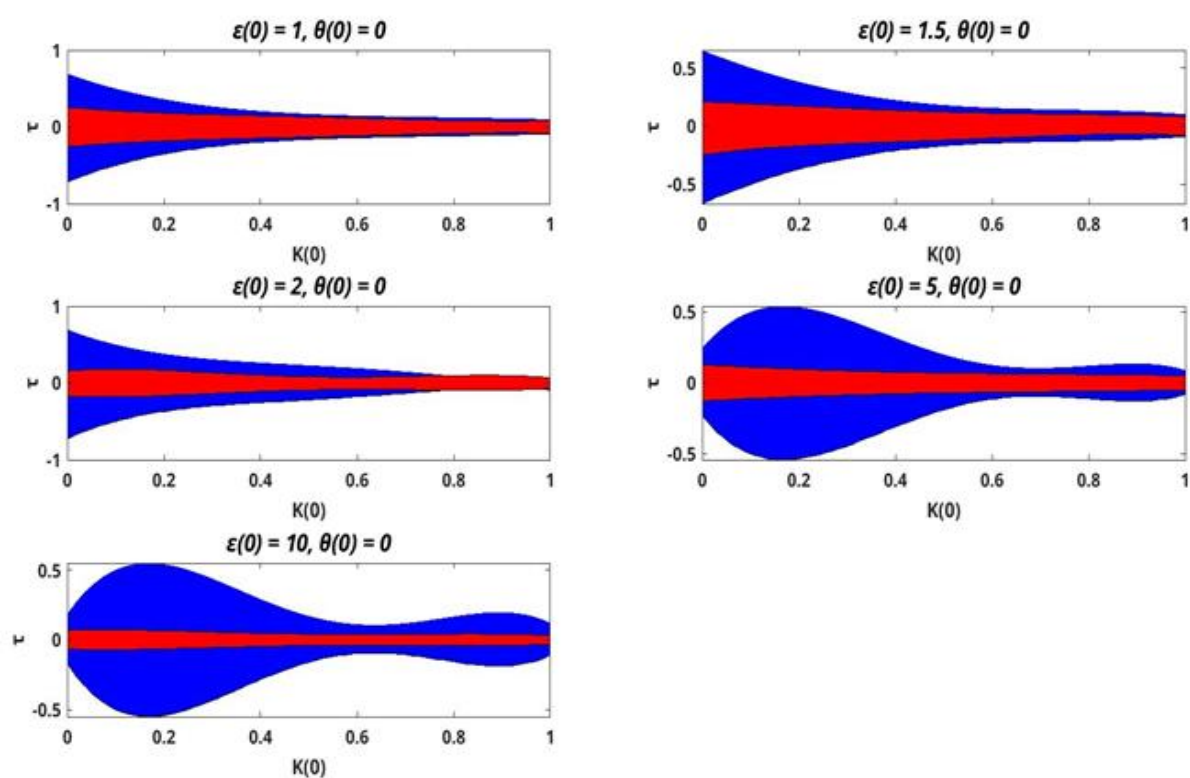


Рис.4. Области режимов поведения ядра вихря в плоскости $(K(0), \tau)$ для начальных значений $\varepsilon(0) \in \{1, 1.5, 2, 5, 10\}$ и $\theta(0) = 0$. Красная зона соответствует зоне выживания, синяя – зоне конечного времени жизни, белая – зоне безграничного вытягивания.

Получено необходимое условие выживаемости вихря в потоке с вертикальным сдвигом:

$$|\tau| < 0.25. \quad (3)$$

Полученный критерий устойчивости проиллюстрирован на примере средиземноморской линзы Шарон. Для характерного значения потенциальной завихренности ядра $\sigma \sim 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ критический сдвиг, соответствующий порогу устойчивости, составляет $\Gamma_{\text{кр}} \sim 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$. В реальном океане вертикальные сдвиги скорости редко достигают указанных значений на масштабах толщины вихря, что качественно объясняет долговременную устойчивость таких структур. Модельная оценка является предельной, поскольку предполагает воздействие бароклинного потока неограниченной глубины, тогда как в реальных условиях конечная толщина течения существенно снижает дестабилизирующее воздействие. Качественный вывод работы подтверждается наблюдениями: увеличение сдвига потока объективно снижает устойчивость вихря к вытягиванию.

Вторая глава посвящена исследованию энергетики вихря в баротропном и бароклинном потоках. **В первом параграфе** исследуется эволюция энергии вихря и отдельно его ядра при вытягивании последнего баротропным внешним потоком. Энергия всего вихря описывается выражением

$$E = \frac{3}{40\pi} \rho_o \frac{V_0^2 \sigma^2}{c} K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(m + \varepsilon)(m + \varepsilon^{-1})(K^2 + m)}}, \quad (4)$$

где ρ_o — плотность жидкости в покое, V_0 — объем ядра, σ — потенциальная завихренность ядра, m — переменная интегрирования. Однако для удобства в работе исследуется безразмерная энергия вихря:

$$H(\varepsilon, K) = \frac{E}{\frac{3}{40\pi} \rho_o \frac{V_0^2 \sigma^2}{\tilde{c}} K} = \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(m + \varepsilon)(m + \varepsilon^{-1})(K^2 + m)}}. \quad (5)$$

Дело в том, что в баротропном потоке объем ядра и параметр вертикальной сплюснутости сохраняются: $V_0 = const, K = const$ [Жмур, Панкратов, 1989]. Поэтому в выражении (5) переменной частью является только интеграл. Расчеты показывают, что с вытягиванием, то есть с увеличением параметра ε , полная механическая энергия вихря убывает.

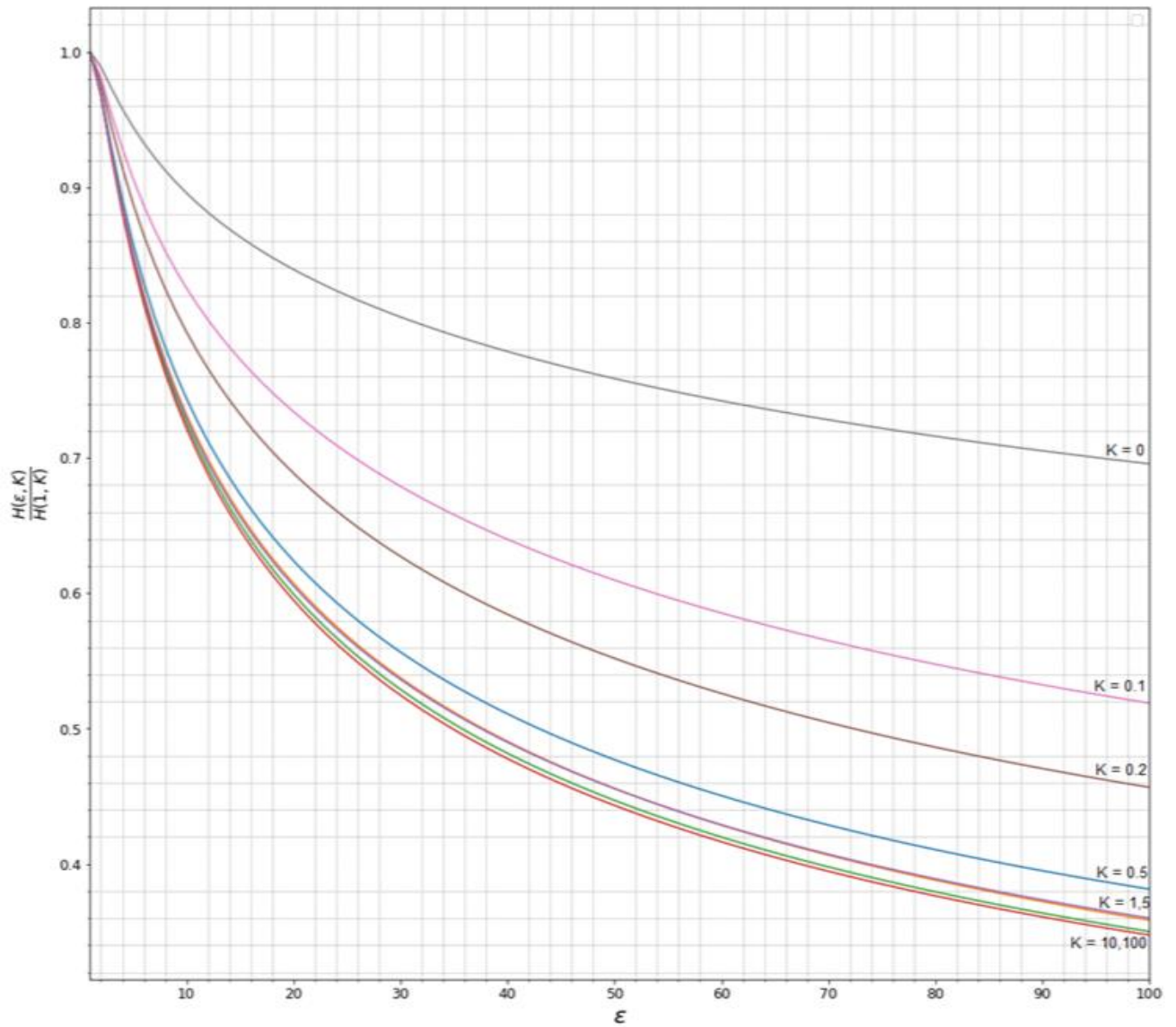


Рис.5. Зависимость нормированной полной механической энергии вихря $\frac{H(\varepsilon, K)}{H(1, K)}$ от безразмерного параметра вытягивания ε при различных фиксированных значений параметра сплюснутости K .

Далее рассматривается энергия отдельного вихревого ядра, которая записывается в виде

$$\begin{aligned}
E_{core} = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 a b K^2 & \left(\varepsilon \left[\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3 (\varepsilon^{-1} + m) (K^2 + m)}} \right]^2 \right. \\
& + \varepsilon^{-1} \left[\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m) (\varepsilon^{-1} + m)^3 (K^2 + m)}} \right]^2 \\
& \left. + K^2 \left[\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m) (\varepsilon^{-1} + m) (K^2 + m)^3}} \right]^2 \right), \quad (6)
\end{aligned}$$

а в безразмерной форме – в виде

$$\begin{aligned}
H_{core} = \varepsilon & \left[\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3 (\varepsilon^{-1} + m) (K^2 + m)}} \right]^2 \\
& + \varepsilon^{-1} \left[\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m) (\varepsilon^{-1} + m)^3 (K^2 + m)}} \right]^2 \\
& + K^2 \left[\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m) (\varepsilon^{-1} + m) (K^2 + m)^3}} \right]^2. \quad (7)
\end{aligned}$$

При вытягивании ядра вихря баротропным потоком его полная механическая энергия также монотонно убывает.

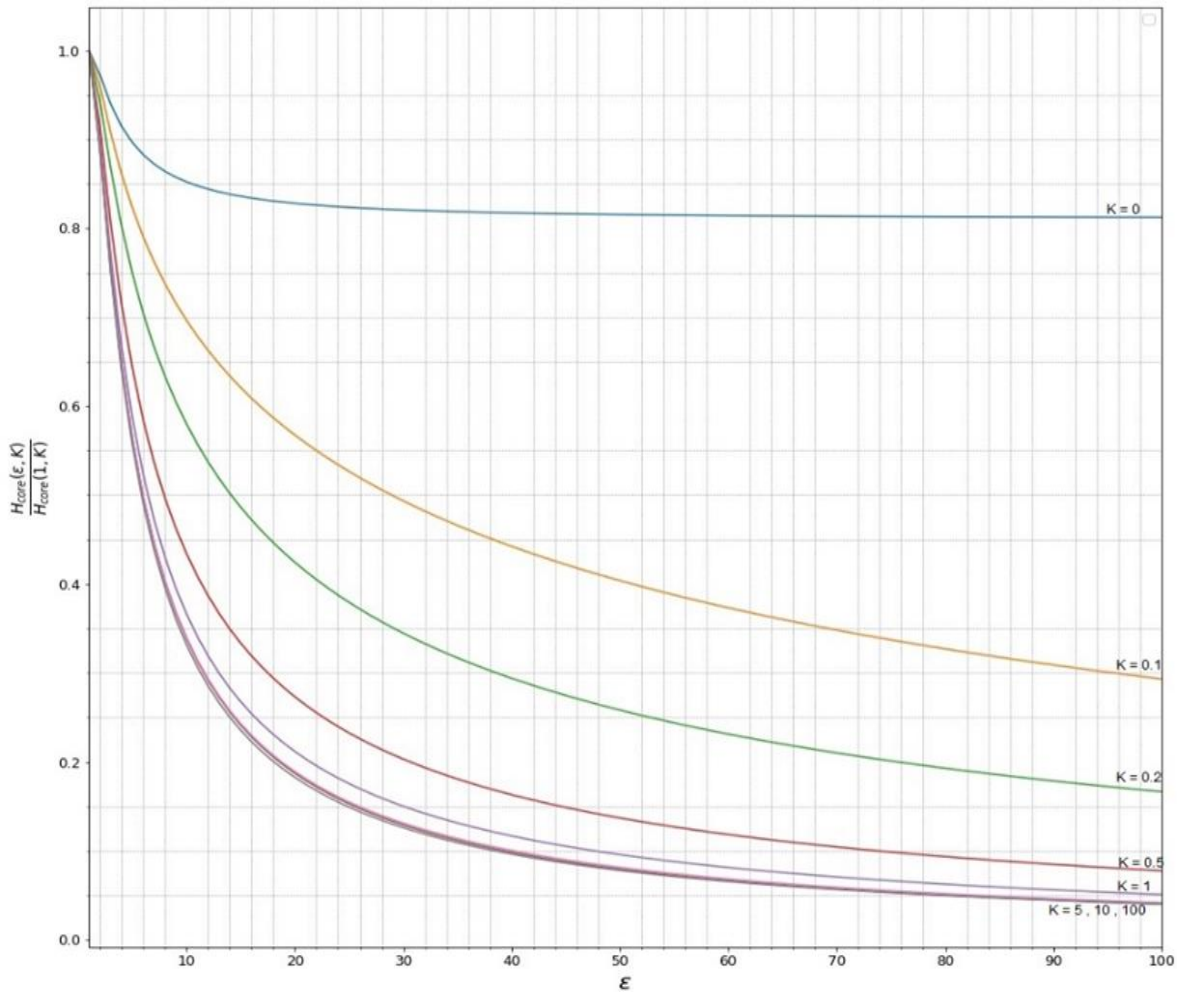


Рис.6. Зависимость нормированной полной механической энергии вихревого ядра $\frac{H_{core}(\epsilon, K)}{H_{core}(1, K)}$ от безразмерного параметра вытягивания ϵ при различных фиксированных значениях параметра сплюснутости K .

В качестве примера проведена верификация теоретических соотношений (6) на основе натурных данных для мезомасштабного антициклонического вихря в Лофотенской котловине (по реанализу GLORYS12V1). Установлено количественное соответствие между моделью и наблюдениями: при переходе вихря из состояния с параметрами $(\epsilon = 1, K = 0.08)$ в состояние $(\epsilon = 4.3, K = 0.23)$ относительное изменение энергии вихря по натурным данным составило $\frac{E_{core}(4.3; 0.23)}{E_{core}(1; 0.08)} = 0.43$, тогда как теоретическая оценка дает значение 0.53. Полученное расхождение не является существенным и подтверждает применимость теоретических соотношений для оценки энергетических характеристик вихрей. Кроме того, численное исследование показывает, что основная доля механической энергии вихря заключена вне ядра. Максимальная доля энергии вихря,

которая запасена внутри ядра, составляет порядка 17% и соответствует вихрю в форме шара с параметрами $\varepsilon = 1, K = 1$.

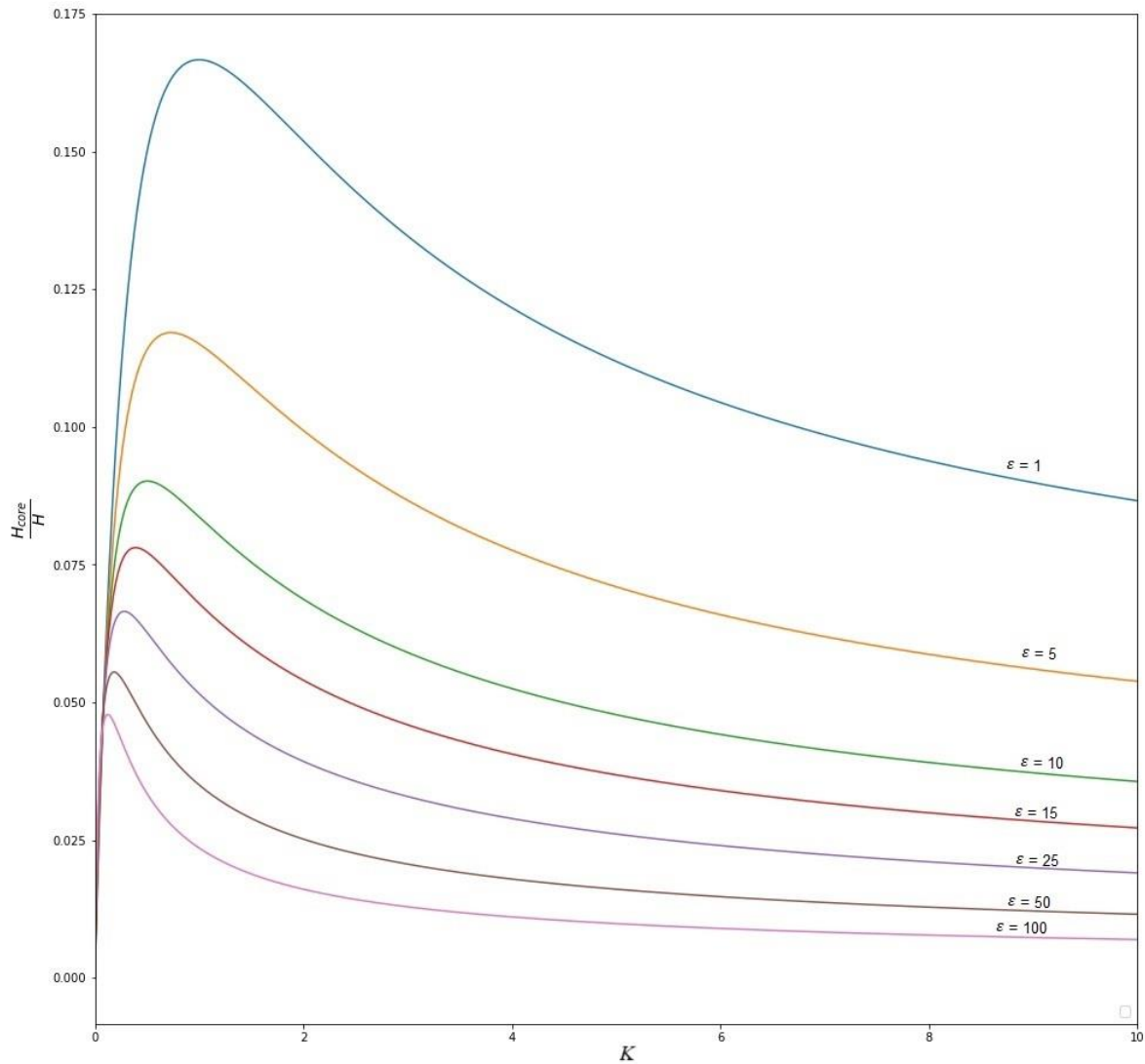


Рис.7. Зависимость доли энергии ядра в энергии всего вихря $\frac{H_{core}}{H}$ от безразмерного параметра сплюснутости K при различных фиксированных значениях параметра вытягивания ε .

Второй параграф посвящен исследованию энергетики вихря в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом. В таком течении при вытягивании ядра меняется не только параметр вытягивания, но и параметр сплюснутости: ε растет, K убывает. Поэтому в качестве безразмерной энергии вихря рассматривается выражение

$$E(\sigma t) = K(\sigma t)^{\frac{1}{3}} \int_0^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{(m + \varepsilon(\sigma t))(m + \varepsilon(\sigma t)^{-1})(K(\sigma t)^2 + m)}}, \quad (8)$$

где σt – безразмерное время, которое неявно входим в систему (1), а эволюция геометрических параметров ядра $\varepsilon(\sigma t)$ и $K(\sigma t)$ определяется численным решением этой системы. Очевидно, что эволюция энергии будет сильно меняться при переходе через критический сдвиг внешнего бароклинного течения.

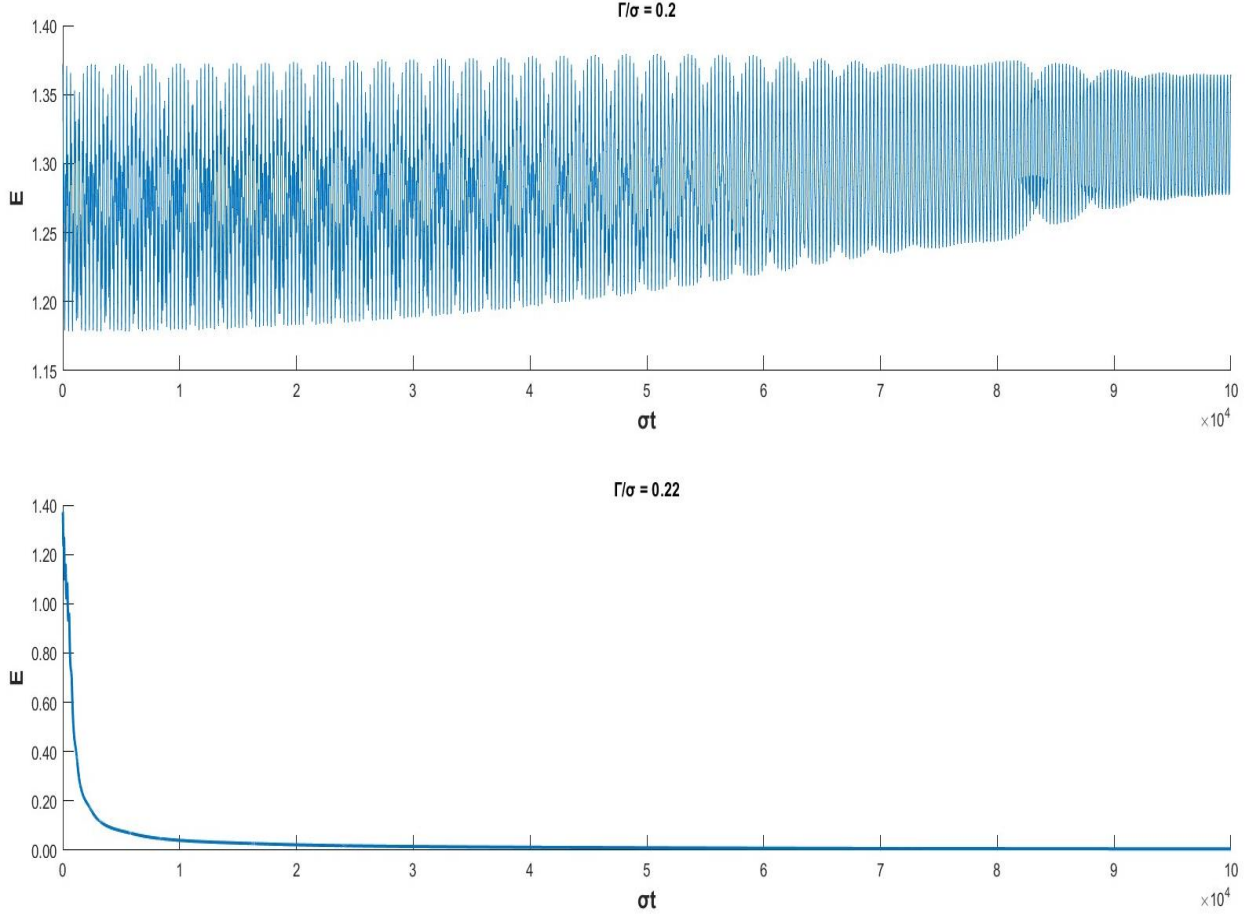


Рис.8. Зависимость безразмерной энергии вихря E от безразмерного времени σt для двух значений сдвига: при величине сдвига, меньшей критического ($\Gamma/\sigma = 0.2$) и при превышении критического порога ($\Gamma/\sigma = 0.22$). В обоих случаях использованы одинаковые начальные параметры: $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.1, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$.

В потоке с вертикальным сдвигом энергия ядра будет зависеть также от углов ориентации:

$$H_{core} = \frac{1}{40} \rho_o \sigma^2 V_0 a b K^2 [(r_{11}^2 + r_{12}^2) f + (r_{21}^2 + r_{22}^2) g + (r_{31}^2 + r_{32}^2) h + r_{13}^2 f + r_{23}^2 g + r_{33}^2 h], \quad (9)$$

где f, g, h являются функциями геометрических параметров ядра ε и K :

$$\begin{aligned}
f &= \varepsilon \left(\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3 (\varepsilon^2 + m) (K^2 + m)}} \right)^2 \\
g &= \varepsilon^{-1} \left(\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m) (\varepsilon^{-1} + m)^3 (K^2 + m)}} \right)^2 \\
h &= K^2 \left(\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m) (\varepsilon^{-1} + m) (K^2 + m)^3}} \right)^2, \quad (10)
\end{aligned}$$

а r_{ij} – соответствующий элемент матрицы поворота на углы Эйлера:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi, r_{12} = -\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi \\
r_{13} &= \sin\theta\cos\varphi, r_{21} = \sin\varphi\cos\psi\cos\theta + \sin\psi\cos\varphi \\
r_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi, r_{23} = \sin\varphi\sin\theta \\
r_{31} &= -\sin\theta\cos\psi, r_{32} = \sin\psi\sin\theta, r_{33} = \cos\theta \quad . \quad (11)
\end{aligned}$$

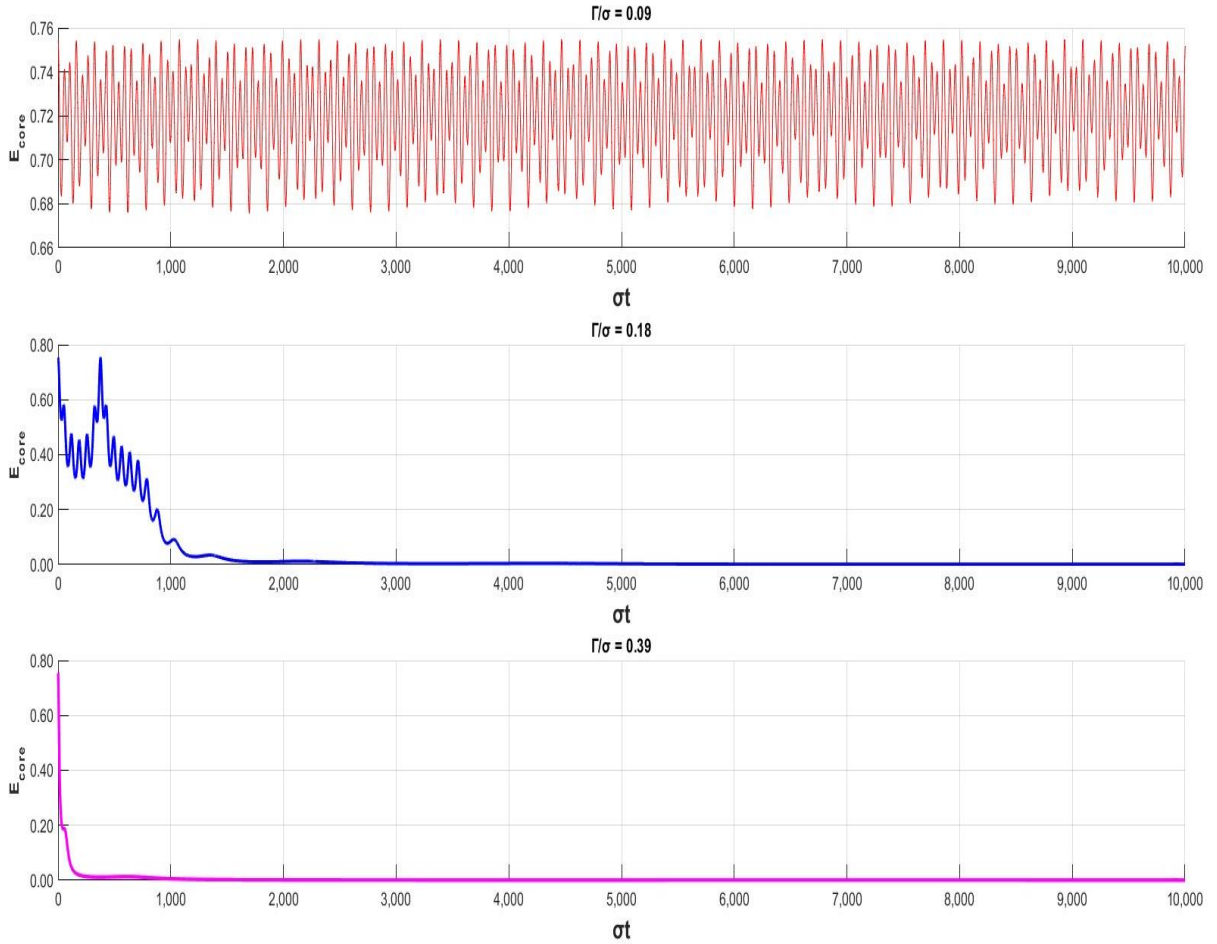


Рис.9. Зависимость безразмерной полной механической энергии ядра от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима

выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях: $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$.

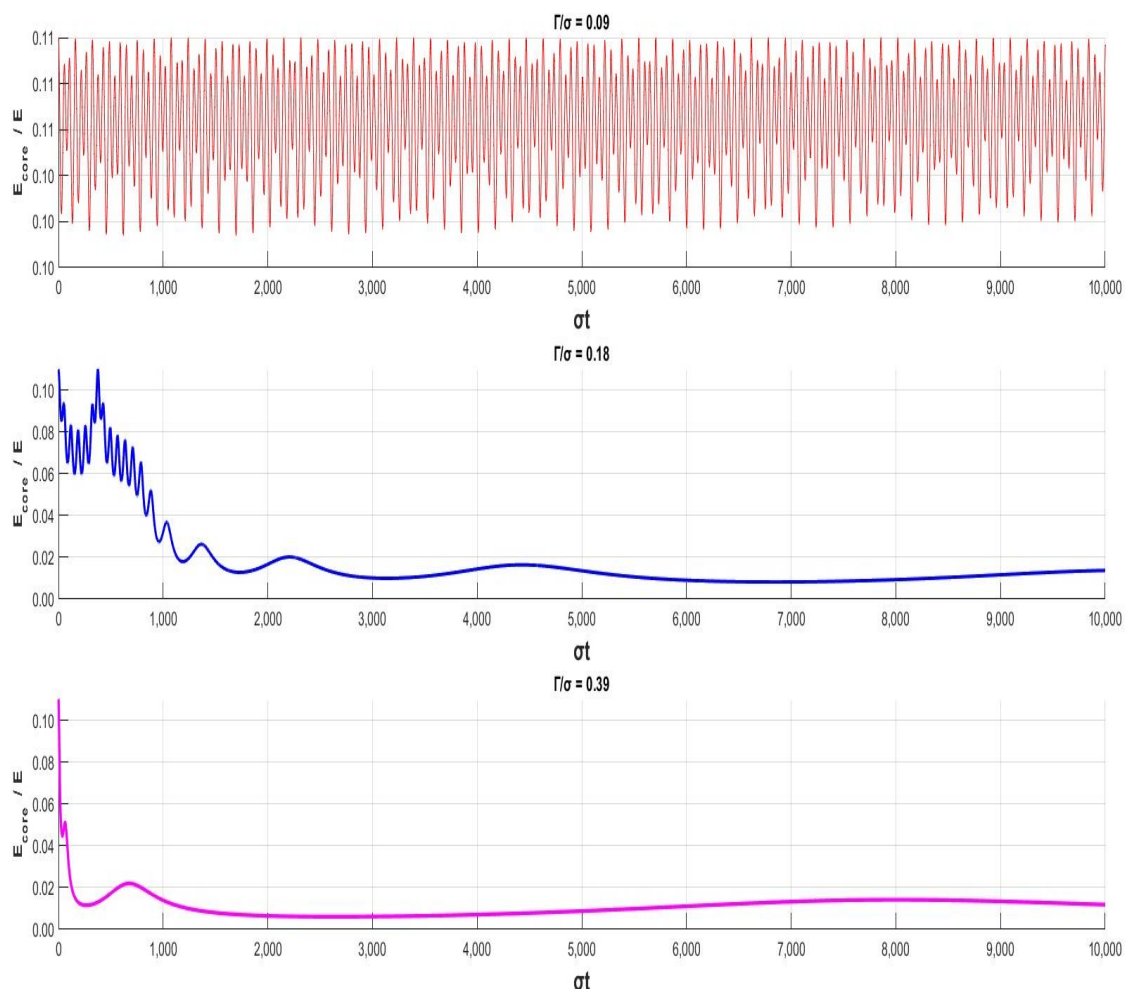


Рис.10. Зависимость доли полной механической энергии ядра в полной механической энергии вихря от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях: $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$.

Полученные результаты подтверждают, что и в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом при вытягивании энергия вихревого ядра убывает. **В третьем параграфе** обсуждается потеря энергии вихря во внешнем потоке. Течение за счет неустойчивости (в основном бароклиной) генерирует мезомасштабные вихри. При определённых условиях часть вихрей выживает, в то время как другие вытягиваются. Статистически выживающие вихри характеризуются сохранением энергии, тогда как вытягивающиеся теряют её в процессе взаимодействия с фоновым потоком.

Потерянная вихрем энергия может уйти только обратно в течение. Такое явление характеризуется обратным энергетическим каскадом или так называемым эффектом отрицательной вязкости.

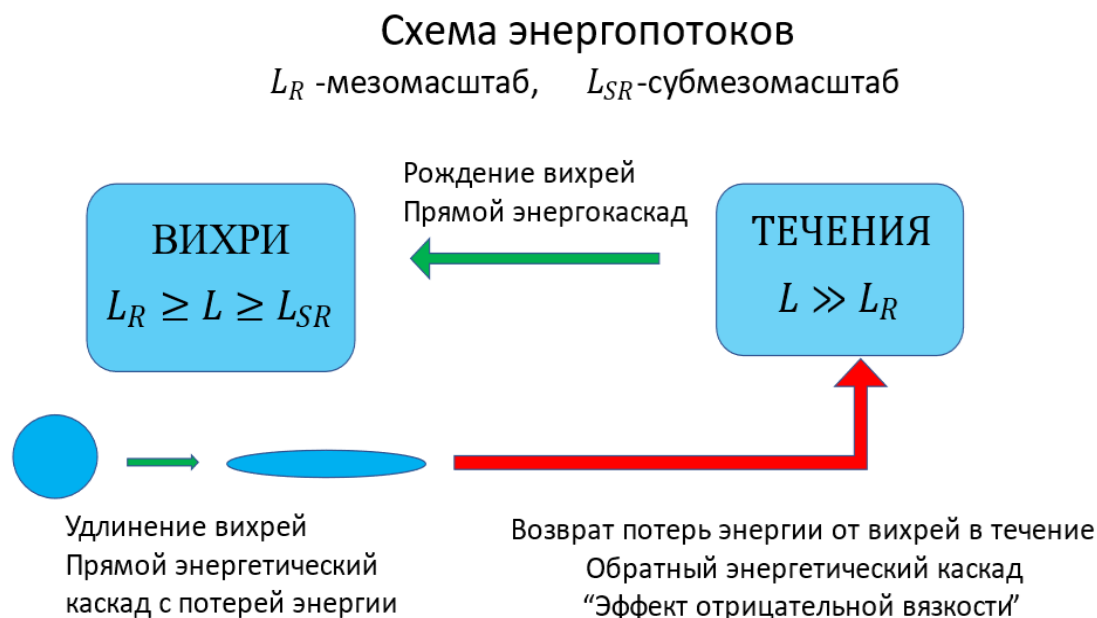


Рис.11. Схема энергопотоков в системе «течение-вихрь».

Третья глава диссертационной работы посвящена исследованию числа Россби вихря во внешних потоках как баротропного, так и бароклинного типов. **В первом параграфе** исследуется эволюция относительного числа Россби в баротропном потоке:

$$\frac{R_o(\varepsilon, K)}{R_o(1, K)} = \frac{\int_0^\infty \frac{(2m + (\varepsilon + \varepsilon^{-1}))dm}{\sqrt{(m^2 + (\varepsilon + \varepsilon^{-1})m + 1)^3(K^2 + m)}}}{2 \int_0^\infty \frac{dm}{(m + 1)^2 \sqrt{(K^2 + m)}}}. \quad (12)$$

Выражение (11) показывает, во сколько раз изменяется число Россби при вытягивании вихря, имеющего в начальный момент круглую форму в плане ($\varepsilon = 1$), до произвольного значения параметра ε при фиксированной сплюснутости ядра K . Этот показатель является ключевым, поскольку вся теория эллипсоидальных вихрей построена в рамках квазигеострофического приближения, справедливого при малых числах Россби. Численный анализ подтверждает, что с увеличением вытягивания число Россби растёт. В результате вихрь теряет геострофический баланс и переходит в режим агеострофического образования.

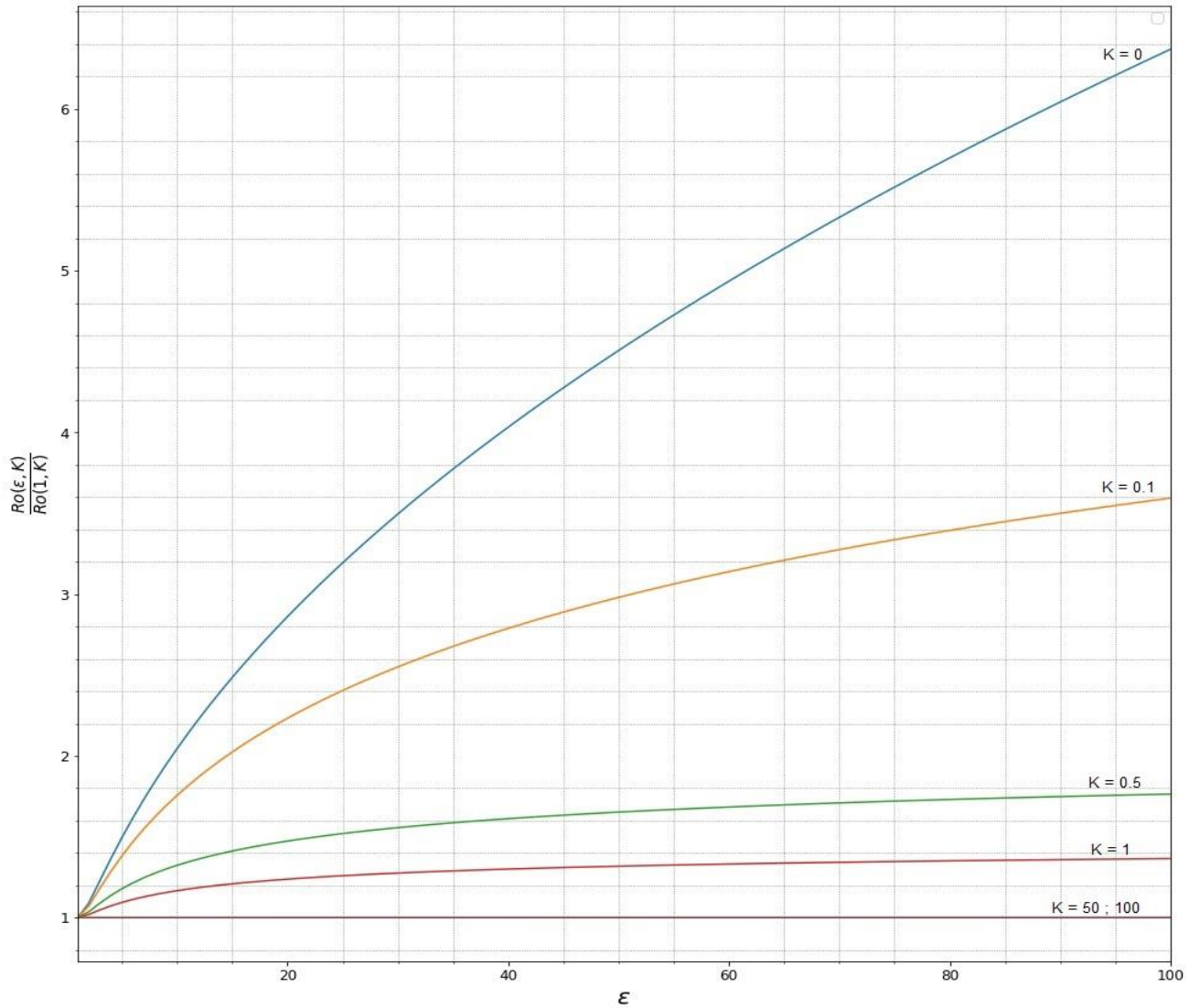


Рис.44. Зависимость коэффициента усиления числа Россби $\frac{R_O(\varepsilon, K)}{R_O(1, K)}$ от параметра вытягивания ε при различных значениях параметра сплюснутости K .

Эволюция числа Россби в бароклинном потоке освещена **во втором параграфе**. Число Россби в таком течении зависит от геометрических параметров ядра

$$R_O = \frac{\left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right|}{f} = \frac{\left| \frac{\sigma}{2} [(r_{11}^2 + r_{12}^2)l_1 + (r_{21}^2 + r_{22}^2)l_2 + (r_{31}^2 + r_{32}^2)l_3] \right|}{f}, \quad (13)$$

где как и прежде, r_{ij} соответствующий элемент матрицы поворота на углы Эйлера, а l_1, l_2, l_3 являются функциями геометрических параметров ядра ε и K :

$$\begin{aligned}
l_1 &= K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)^3(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)}} \\
l_2 &= K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)^3(K^2 + m)}}, \\
l_3 &= K \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(\varepsilon + m)(\varepsilon^{-1} + m)(K^2 + m)^3}}. \quad (14)
\end{aligned}$$

При вытягивании ядра бароклинным потоком число Россби остается конечным, а сам вихрь – геострофическим. Это объясняется тем, что при вытягивании бароклинным потоком помимо роста параметра вытягивания ε наблюдается спад параметра сплюснутости K , в отличие от баротропного течения, в котором параметр K сохраняется.

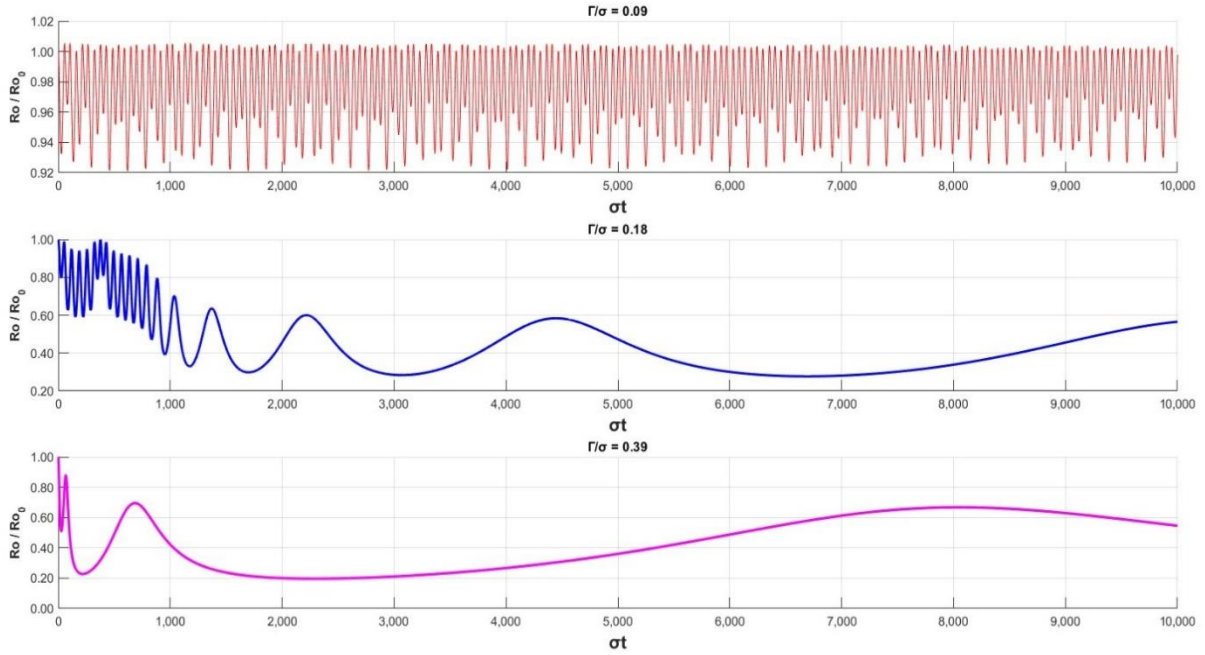


Рис.46. Зависимость относительного числа Россби $\frac{Ro(\varepsilon, K)}{Ro(\varepsilon(0), K(0))}$ от безразмерного времени для трёх характерных режимов: режима выживания, конечного времени жизни и безграничного вытягивания (в порядке сверху вниз). Графики представлены при одинаковых начальных условиях: $\varepsilon(0) = 1, K(0) = 0.25, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы:

- 1) Решена задача об эволюции вихря в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом. В зависимости от начальных и внешних условий выявлены три основных режима поведения ядра вихря: 1) режим выживания, в котором вихрь существует бесконечно долгое время, ограниченно сохраняя линейные размеры своего ядра, при этом углы ориентации ядра демонстрируют сложное поведение, сочетающее колебательные и вращательные компоненты; 2) режим конечного времени жизни, при котором ядро вихря на начальной стадии сохраняет свою устойчивую структуру, аналогичную режиму выживания, однако спустя определённый промежуток времени начинает вытягиваться в горизонтальном направлении; 3) режим неограниченного вытягивания, находясь в котором ядро вихря вытягивается с начального момента времени. Определено время жизни вихря, которое в первом режиме стремится к бесконечности, во втором – конечно, в третьем – стремится к нулю. Также выявлен так называемый критический сдвиг – значение сдвига внешнего течения, при котором конкретный вихрь из режима выживания переходит в режим конечного времени жизни или вытягивания. Особый интерес представляет режим конечного времени жизни. Такой режим выявлен именно в бароклинном потоке с вертикальным сдвигом. Аналогичного режима в баротропном потоке не выявлено. В зону конечного времени жизни попадают вихри промежуточной интенсивности. Их мощности хватает для устойчивого существования лишь конечное время. В долгосрочной перспективе такие вихри, как и слабые, вытягиваются внешним течением в вихревую нить. На стадии вытягивания с ядром вихря происходит следующее: одна из горизонтальных полуосей ядра (малая полуось эллипсоида) остается неизменной, вторая горизонтальная полуось (большая полуось эллипсоида) неограниченно растёт, а вертикальная полуось ядра схлопывается почти до нуля. Такое явление характеризуется монотонным ростом параметра вытягивания ядра ε и убыванием параметра сплюснутости ядра K .
- 2) Исследована эволюция энергии вихря и его ядра как в баротропном, так и в бароклинном потоках. Установлено, что при вытягивании потоками этих двух типов энергия всего вихря, а также отдельно энергия его ядра убывают. При вытягивании баротропным потоком доля кинетической энергии ядра монотонно уменьшается, тогда как доля доступной потенциальной энергии возрастает. В условиях вертикального сдвига (бароклинное течение) соотношение между

этими долями может зависеть от угла нутации ядра. Однако в реальных океанических условиях, при малых отклонениях ядра от горизонтальной ориентации, поведение системы аналогично баротропному случаю: доля кинетической энергии также убывает по мере вытягивания. Численные расчёты показали, что на всех этапах эволюции значительная часть энергии сосредоточена за пределами ядра вихря. Этот результат справедлив как для баротропных, так и для бароклинных течений.

- 3) Обоснована возможность проявления обратного энергетического каскада или так называемого эффекта отрицательной вязкости как в баротропных, так и в бароклинных течениях. Такое явление наблюдается для вихрей в режимах конечного времени жизни и в режиме вытягивания. Вихрь, получив энергию от течения (в момент формирования), на стадии неограниченного вытягивания монотонно перекачивает свою энергию обратно в течение. Эффект отрицательной вязкости проявляется в течениях, которым характерны деформирующие свойства. При наблюдении процессов вытягивания вихрей в таких течениях можно ожидать усиления последнего вследствие передачи энергии от мелкомасштабных структур к более крупным.
- 4) Определена эволюция числа Россби для вихрей как в баротропных, так и в бароклинных течениях. В баротропном потоке с вытягиванием вихря число Россби увеличивается, причем коэффициент усиления больше для тонких по вертикали ядер. С вытягиванием вихрь превращается в агеострофическое образование. В бароклинном потоке эволюция числа Россби сильно меняется. Во всех режимах поведения, включая режим вытягивания, число Россби не увеличивается, а сам вихрь остается квазигеострофичным.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.6.17 Океанология

1. Жмур В.В., Травкин В.С., Белоненко Т.В., Аругюнян Д.А. Трансформация кинетической и потенциальной энергии при вытягивании мезомасштабного вихря // Морской гидрофизический журнал. — 2022. — Т.38, № 5. — С. 466–480. EDN: MJMZVU. Импакт фактор 0.469(РИНЦ). Объем 0.857 п.л./авторский вклад 0.26 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, участие в подготовке выводов.
Переводная версия статьи:

Zhmur, V.V., Travkin, V.S., Belonenko, T.V. and **Arutyunyan, D.A.** Transformation of Kinetic and Potential Energy during Elongation of a Mesoscale Vortex // *Physical Oceanography*. — 2022. — Vol. 29, № 5. — pp. 449-462. DOI:10.22449/1573-160X-2022-5-449-462. Импакт фактор 0.36(SJR). Объем 0.85 п.л./авторский вклад 0.26 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, участие в подготовке выводов.

2. Жмур В.В., **Арутюнян Д.А.** Перераспределение энергии при горизонтальном вытягивании океанских вихрей баротропными течениями // *Океанология*. — 2023. — Т. 63, №1. — С. 3–19. EDN: AFRQHI. Импакт фактор 1.826(РИНЦ). Объем 1.26 п.л./авторский вклад 0.8 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, выводы, подготовка текста.

Переводная версия статьи:

Zhmur V. V., **Harutyunyan D. A.** Redistribution of energy during horizontal stretching of ocean vortices by barotropic currents // *Oceanology*. — 2023. — Vol. 63. — №. 1. — pp. 1-16. DOI:10.1134/S0001437023010186. Импакт фактор 0.371(SJR). Объем 1.2 п.л./авторский вклад 0.75 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, выводы, подготовка текста.

3. Zhmur, V.V., Belonenko, T.V., Travkin, V.S., Novoselova, E.V., **Harutyunyan, D.A.**, Raj, R.P. Changes in the Available Potential and Kinetic Energy of Mesoscale Vortices When They Are Stretched into Filaments // *Journal of Marine Science and Engineering*. — 2023. — Vol.11, № 6. — P.1131. DOI: 10.3390/jmse11061131. Импакт фактор 0.579(SJR). Объем 0.86 п.л./ авторский вклад 0.24 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, участие в подготовке выводов.
4. **D.A. Harutyunyan**, V.V. Zhmur. Behavior Modes of a Quasi-Geostrophic Ellipsoidal Vortex in a Horizontal Flow with Vertical Shear // *Oceanology*. — 2025. — Vol. 65, No. 4. — pp. 481–499. DOI: 10.1134/S000143702570016X. Импакт фактор 0.371(SJR). Объем 1.175 п.л./авторский вклад 0.875 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, выводы, подготовка текста.
5. **Арутюнян Д. А.**, Жмур В. В. Эволюция гидродинамических параметров эллипсоидального вихря в бароклинном фоновом потоке // *Russian Journal of Earth Sciences*. — 2025. — Т. 25, № 5. — ES5002. DOI: 10.2205/2025es001047. Импакт фактор 0.214(SJR). Объем 0.715 п.л./ авторский вклад 0.57 п.л.: анализ литературы, теоретический и численный анализ, интерпретация результатов, выводы, подготовка текста.