

**Отзыв официального оппонента на  
диссертацию Науменко Антона Павловича  
«Диофантовы неравенства с простыми числами»,  
представленную на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисел и  
дискретная математика**

Диссертационная работа Науменко А. П. является исследованием в области аналитической теории чисел и посвящена разрешимости квадратичных диофантовых неравенств в простых числах.

Одна из классических задач аналитической теории чисел состоит в исследовании распределения простых чисел в коротких интервалах, то есть в нахождении минимального показателя  $\theta$ , при котором для всех достаточно больших  $x$  интервал  $[x, x + x^\theta]$  содержит хотя бы одно простое число. Эта проблема тесно связана с оценками плотности нулей дзета-функции Римана  $\zeta(s)$ . Первое доказательство существования  $\theta < 1$  принадлежит Г. Хохайзелю (1930). Позднее А. Ингэм (1937) улучшил показатель до  $\theta = 5/8$ , используя плотностные теоремы для нулей  $\zeta(s)$ . Значительный прогресс был достигнут М. Н. Хаксли (1972), который доказал наличие простых чисел при  $\theta = \frac{7}{12}$ , применив свою новую теорему о плотности нулей дзета-функции Римана.

Наилучший безусловный результат принадлежит Р. Бейкеру, Г. Харману и Й. Пинцу (Baker–Harman–Pintz, 2001), которые, в частности, пользуясь методами решета, доказали, что для всех  $x > x_0$  интервал  $[x, x + x^{0.525}]$  содержит хотя бы одно простое число. Это соответствует безусловному доказательству разрешимости в простых числах  $p$  диофантова неравенства

$$|p - x| \leq x^\theta, \quad \theta = 0.525. \quad (1)$$

В диссертационной работе А. П. Науменко при  $k = 2, 3, 4$  исследуется разрешимость в простых числах  $p_1, \dots, p_k$  диофантовых неравенств вида

$$|p_1^2 + \dots + p_k^2 - N| \leq H, \quad H = N^\theta, \quad \theta < 1, \quad (2)$$

то есть в задаче (1) простое число  $p$  заменяется, соответственно, суммами квадратов двух, трёх и четырёх квадратов простых чисел.

Ранее разрешимость диофантовых неравенств (2) в случаях  $k = 2$  и  $k = 3$  была исследована С. А. Гриценко с учениками. Было доказано, что данные неравенства разрешимы при

- $H > \sqrt{N} \exp(-\ln^{0.1} N)$  в случае  $k = 2$ ;
- $H > N^{0.3402\dots} \exp(\ln^{0.8} N)$  в случае  $k = 3$ .

Эти результаты приведены в диссертационной работе как теоремы В и С.

Результаты, полученные в диссертации (теоремы 1, 2 и 3), являются новыми, обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- доказана разрешимость в простых числах  $p_1$  и  $p_2$  диофантова неравенства

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

при  $H = N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon} = N^{0.481 + \varepsilon}$  для любого  $N > N_0(\varepsilon)$ , и показано, что для числа решений  $J(N, H)$  данного диофантова неравенства справедлива оценка

$$J(N, H) \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N} \ln N}, \quad N_1 = N^{\frac{61}{80} + \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0,$$

что является усилением теоремы В, доказанной С. А. Гриценко и его учеником Н. Т. Ча (2012 г.);

- доказано, что квадратичное диофантово неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3 - N| \leq H,$$

разрешимо относительно простых чисел  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  при

$$H = N^{\frac{7}{12}(\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.2806\dots + \varepsilon},$$

где  $N$  — достаточно большое натуральное число, зависящее только от  $\varepsilon$ ; этот результат также является усилением теоремы С, доказанной С. А. Гриценко и Н. Т. Ча (2012 г.);

- доказано, что квадратичное диофантово неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3 + p_4^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  и  $p_4$  для любого  $N > N_0(\varepsilon) > 0$  при

$$H = N^{\frac{49}{144}(\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.1636 + \varepsilon}.$$

Доказательства перечисленных результатов проведены методами, основанными на теоремах о плотности нулей дзета-функции Римана, в том числе нулей, действительная часть которых близка к единице, в сочетании с методом экспоненциальных пар, представляющим собой современный вариант метода оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута.

Результаты диссертации приведены с подробными доказательствами; их достоверность не вызывает сомнений. Они обоснованы строгими математическими выкладками, хорошо согласуются с известными результатами других авторов, являются новыми, теоретически значимыми и вносят существенный вклад в аналитическую и алгебраическую теорию чисел.

Все результаты диссертации опубликованы в трёх научных работах в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ им. М. В. Ломоносова по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика», входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и РИНЦ.

Автореферат диссертации корректно и полно отражает содержание, актуальность темы исследования, новизну и значимость полученных результатов, содержит все основные положения и выводы.

Основные результаты диссертации докладывались на международных научных конференциях и научных семинарах.

К недостаткам диссертации можно отнести несколько незначительных опечаток редакционного характера, которые не умаляют достоинств полученных результатов и не влияют на её положительную оценку.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа «Диофантовы неравенства с простыми числами» отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определённым пунктами 2.1–2.5 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Работа оформлена в соответствии с требованиями Положения о совете по защите диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук МГУ.

Автор диссертации Науменко Антон Павлович заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

**Официальный оппонент:**

доктор физико-математических наук, профессор,  
академик Национальной академии наук Таджикистана,  
главный научный сотрудник Института математики  
им. А. Джураева НАН Таджикистана,  
Рахмонов Зарулло Хусенович  
10 ноября 2025 года

**Контактные данные:**

e-mail:

Специальность, по которой оппонентом защищена диссертация:  
01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Адрес места работы:

734063, г. Душанбе, ул. Айни, дом 299/4,  
Институт математики им. А. Джураева  
e-mail:

Подпись главного научного сотрудника Отдела теории чисел,  
алгебры и топологии Института математики им. А. Джураева  
НАН Таджикистана З. Х. Рахмонова удостоверяю:

Директор Института математики им. А. Джураева  
НАН Таджикистана Рахимзода А. О.  
10 ноября 2025 года