ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук Добровольского Николая Николаевича на тему: «Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы» по специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Диссертация Добровольского Н. Н. посвящена теории дзета-функций моноидов натуральных чисел и методу параметрических множеств. Им получены новые асимптотические формулы в теории гиперболической дзета-функции решёток. Он открыл новые закономерности в поведении остаточных дробей в разложении алгебраических иррациональностей произвольной степени больше двух.

Основным объектом исследования в диссертации Н. Н. Добровольского являются обобщения классической дзета-функции Римана – дзета-функции моноидов натуральных чисел. Как показали исследования соискателя, многие представители из этого множества дзета-функций обладают свойствами, которые отсутствуют у дзета-функции Римана. Всё это указывает на то, что **актуальность** данного исследования не вызывает сомнения.

Эйлерово произведение играет фундаментальную роль в теории дзета-функции Римана. То же самое можно сказать про дзета-функции моноидов натуральных чисел. Прежде всего, заметим, что множество всех моноидов натуральных чисел делятся на два больших класса: моноиды с однозначным разложением на простые элементы и моноиды без однозначного разложения. Первые характеризуются тем фактом, что только для них дзета-функция равна произведению Эйлера. Поэтому не случайно диссертация начинается с главы «Логарифм эйлерова произведения». Центральный результат этой главы состоит в том, что логарифм произведения Эйлера, полученный почленным интегрированием, когда для каждого сомножителя берется главное значение логарифма, в сумме даёт непрерывную функцию. Эта непрерывная функция на большей части плоскости абсолютной сходимости задает главное значение логарифма, а при приближении к абсциссе абсолютной сходимости пробегает все ветви логарифмической функции. Из этого глубокого факта, который в неявном виде содержится в знаменитой работе Дэвенпорта-Хейльбронна, соискатель выводит интересные свойства дзета-функции Римана.

Можно отметить, что результаты диссертации обоснованы подробными доказательствами.

Сказанное в полной мере относится и ко второй главе «Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле». В центре внимания в этой главе мы видим периодизированные по вещественному параметру дзета-функции Гурвица, гиперболические дзета-функции Гурвица и гиперболические дзета-функции сдвинутых диагональных решёток. Для этих новых объектов соискатель строит содержательную теорию, следуя классической монографии Н. Г. Чудакова. Данная теория необходима для дальнейшего развития теоретико-числового метода Н. М. Коробова в приближённом анализе.

В третьей главе «Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители» собственно и начинается изложение теории дзета-функции моноидов натуральных чисел. Забегая вперед, стоит отметить, что работы Н. Н. Добровольского наиболее близко примыкают к исследованиям Б. М. Бредихина по свободным числовым полугруппам, но существенно от них отличаются. В этой главе дается общее определение дзета-функций моноидов натуральных чисел. Указывается их связь с обобщённой функцией Мёбиуса. Определяется очень важный класс моноидов, заданных последовательностью простых чисел экспоненциального роста. И здесь мы встречаем первое отличие от дзета-функции Римана. Дзета-функция моноида, заданного последовательностью простых чисел экспоненциального роста, абсолютно сходится в полуплоскости с положительной вещественной частью аргумента.

Четвертая глава «О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы» содержит большое количество примеров моноидов с однозначным разложение на простые элементы. Заключительным результатом этой главы является теорема об общем виде моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы. Сложность этого вопроса состоит в том, что множество простых элементов моноида натуральных чисел может содержать помимо обычных простых чисел ещё и псевдопростые числа, которые в общем случае и создают неоднозначность разложения на простые элементы.

Следующая пятая глава «Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости» даёт объяснение принципиальных отличий дзета-функции моноида натуральных чисел от дзета-функции Римана. С помощью классических результатов Ингама и Россера соискателю удается построить последовательности простых, для которых дзета-функции соответствующих моноидов имеют любую заданную абсциссу абсолютной сходимости от 0 до 1.

В шестой главе диссертации вводятся понятия «заградительного ряда» для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых и обобщенное эйлерово произведение. Обобщенное эйлерово произведение задает мероморфную функцию на всей комплексной плоскости. В этой главе всесторонне рассматриваются дзета-функции различных моноидов натуральных чисел. А также доказывается неожиданный основной результат о голоморфности дзета-функции в правой полуплоскости с положительной вещественной частью аргумента. На первый взгляд может показаться, что это свойство только редких моноидов, но соискатель очень просто с помощью деления дзета-функции Римана на дзету-функцию моноида, заданного последовательностью простых чисел экспоненциального роста, показывает, что утверждение справедливо и для густых моноидов.

В седьмой главе «Две асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции решёток» соискателю удалось уточнить и усилить две асимптотические формулы из теории гиперболической дзета-функции решёток, которые были известны уже тридцать лет тому назад. Для этого ему потребовалось разработать метод параметрических множеств.

Восьмая глава «О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел» и девятая глава «О моноиде квадратичных вычетов» перекликаются по содержанию между собой и исследуют общий вопрос о количестве простых элементов в моноидах. Основные усилия здесь приходятся на подсчёт псевдопростых. Необходимо отметить, что вид псевдопростых меняется от моноида к моноиду.

Десятая глава «Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых» связана с решением аналога классической задачи Б. М. Бредихина для свободных числовых полугрупп. И здесь оказалась принципиально другая ситуация. Б. М. Бредихин работал со свободными числовыми полугруппами со степенной плотностью, а в случае моноидов с экспоненциальной последовательностью простых соискателю пришлось вводить новое понятие логарифмическая степенная плотность. Как показал соискатель позднее в работе, не вошедшей в диссертацию, ему фактически удалось вычислить энтропию этого моноида.

В одиннадцатой главе «О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей» соискатель продвинулся в направлении, заложенном в трудах Жозефа Лагранжа и Эвариста Галуа. А именно, соискатель задался вопросом, как ведут себя минимальные многочлены остаточных дробей алгебраических иррациональностей. Чисто периодический случай разложения квадратических иррациональностей описал ещё Эварист Галуа в 1828 году. Соискателем введено два новых понятия: приведённая алгебраическая иррациональность и обобщенное число Пизо. Установлено, что, начиная с некоторого места, все остаточные дроби в разложении чисто вещественной алгебраической иррациональности в непрерывную дробь являются приведёнными алгебраическими иррациональностями. Также установлено, что, начиная с некоторого места, все остаточные дроби в разложении алгебраической иррациональности в общем случае являются обобщёнными числами Пизо.

Заключительная двенадцатая глава «Новые направления исследований» содержит краткую панораму возможных дальнейших исследований. Необходимо отметить, что в заключениях каждой из глав содержится возможный список новых задач для дальнейших исследований.

Наверное, содержание диссертации после определенной доработки было бы полезно опубликовать в виде монографии, что послужило бы дальнейшему развитию этой области исследования.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Все работы своевременно опубликованы и доложены на различных конференциях.

Из всего выше сказанного можно сделать вывод, что несомненно диссертация Н. Н. Добровольского является научным достижением в аналитической теории чисел и теории диофантовых приближений, в которой решены ряд важных и трудных математических задач.

Диссертация отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к докторским диссертациям. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание учёной степени доктора наук Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Всё перечисленное выше даёт основание считать, что соискатель Добровольский Николай Николаевич заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Официальный оппонент:

Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник Хабаровского отделения
Федерального государственного бюджетного учреждения
науки Института прикладной математики ДВО РАН
Быковский Виктор Алексеевич

Контактные данные: E-mail:

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена докторская диссертация: 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Адрес места работы: Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики ДВО РАН. 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60, оф. 312 Тел. +7 (4212) 32-46-76 E-mail: admin_khv@iam.dvo.ru

Подпись сотрудника ФГБУН «Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН» В. А. Быковского удостоверяю: