

## ОТЗЫВ

официального оппонента доктора физико-математических наук, профессора кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, главного научного сотрудника (Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова) на диссертационную работу Науменко Антона Павловича «Диофантовы неравенства с простыми числами», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5.-Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

Рассматриваемая диссертация относится к одному из отделов аналитической теории чисел, связанному с диофантовыми неравенствами с простыми числами.

Диссертация состоит из Введения и двух глав.

Во Введении излагаются результаты раннее проведённых исследований, имеющих непосредственное отношение к диссертации Науменко А.П. Это работы его научного руководителя С.А. Гриценко с другими учениками В.В. Гирько (Чебышевский сб., -2006. -7:4. -С.26-30) и Н.Т. Ча. Научные ведомости БелГУ. 2012, с.202-205), основанные на плотностной технике.

В последнее время в этом направлении проводились активные исследования такими авторами, как (Хуа Ло-Кен, А.Кумчев, Д.Толев, А.Ивич, С.М. Воронин, А.А. Карацуба, С.А. Гриценко и др.).

Во всех этих исследованиях и в этой диссертации используется так называемая плотностная техника, идущая от Ю.В. Линника (ДАН СССР, 1945. Том 49, №1, с.7-9), согласно которой даётся оценка сверху для числа  $N(\sigma, N)$  нетривиальных нулей дзета-функции Римана  $\zeta(s)$  в прямоугольнике

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \operatorname{Re} s < 1, 0 < \operatorname{Im} s < T$$

(оценка в зависимости от  $T$ ).

В первой главе приводятся леммы 1-33, из них, используемые во второй главе, относительно доказательств лемм 1-4 и лемм 9 и 10, имеющие также самостоятельный интерес содержатся в работах Хаксли. При этом основную роль играют леммы 15-33. Эти леммы снабжены в диссертации достаточно подробными доказательствами.

Раздел 1.2, посвящённый основным леммам, начинается с дополнительных определений 1-5, в которых даны и соответствующие обозначения некоторых множеств, нужных в дальнейшем изложении. Леммы 15-33 играют важную роль в доказательствах основных результатов – теорем 1-3. В лемме 24 даётся верхняя оценка для  $N(\sigma, T)$  числа нетривиальных нулей дзета-функции Римана  $\zeta(s)$ , указанная выше, но в ней не указывается какой может быть величина  $\varepsilon$ , видимо она будет сколь угодно малой. При этом, например,  $\varepsilon$  также встречается в доказательстве теоремы 3, но в некотором другом смысле. Отметим ещё что варианты нужных плотностных теорем приводятся в леммах 24-30. В леммах 28 и 29 даются верхние оценки для числа  $N(\sigma, T)$ .

Перейдём теперь к содержанию второй главы, в которой содержатся основные полученные результаты, относящиеся к вопросам о приближениях действительных чисел с суммами 2-х, 3-х и 4-х квадратов простых чисел.

В доказательствах основных теорем 1-3 используется плотностная теорема Хаксли.

Основными результатами в диссертации являются доказанные теоремы 1-3 из второй главы. Из них в теореме 1 установлено, что неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H$$

разрешимо в простых числах  $p_1$  и  $p_2$  для любого  $N < N_0(\varepsilon)$  при

$$H > N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon},$$

где  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малое положительное число, т.е. даётся нижняя оценка для  $H$  в зависимости от  $N$ .

Остальные теоремы 2 и 3 соответственно относятся к диофантовым неравенствам видов

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H$$

и

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \leq H,$$

где  $p_1, p_2, p_3, p_4$  – простые числа.

В доказательстве теоремы 3 используется явная формула для функции

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

где  $\Lambda(n)$  – функция Мангольда, при этом используются нули дзета-функции Римана  $\zeta(s)$  в критической полосе.

Из полученных верхних оценок для числа решений диофантовых неравенств в простых числах следует, что оценка для  $H$  при большем количестве простых чисел становятся точнее в зависимости от  $N$ . Полученные теоремы характеризуются в удобной форме как результаты о близости суммы двух, трёх и четырёх квадратов простых чисел к любому достаточно большому положительному действительному числу.

Диссертация Науменко Антона Павловича содержит новые самостоятельно полученные результаты. В ней разработан большой круг вопросов, позволивших прийти к основным результатам диссертации. Доказанные теоремы 1-3 являются существенным вкладом в рассматриваемом направлении диофантовых неравенств с простыми числами.

Основные результаты, полученные автором по диофантовым неравенствам, были доложены в трудах XV Международной конференции (Тула, 2017 г., с.239-241), а также XVI Международной конференции (Тула, 2019 г., с.166-168).

Тема диссертации актуальна. По ней ведутся исследования как у нас в России, так и зарубежом.

Полученные Наumenко А.П. результаты могут найти применения в случае изучения простых чисел, лежащих в заданной арифметической прогрессии, а также в случае пяти квадратов в аналогичной проблеме диофантовых неравенств с простыми числами.

Автореферат адекватно соответствует содержанию диссертации. Считаю, что рассматриваемая работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, и что её автор Антон Павлович Наumenко заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Науменко Антон Павлович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, доцент  
старший научный сотрудник  
кафедры алгебры и дифференциальных уравнений  
Института математики и естественных наук  
Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова  
Урусби Мухамедович Пачев

Контактные данные:

тел.:

e-mail:

Специальность, по которой официальным оппонентом  
защищена диссертация:

01.01.06 –Математическая логика, алгебра, теория чисел

Адрес места работы:

360004, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик,

ул. Чернышевского, 173

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова

Ученый секретарь КБГУ

доктор филологических наук

И.В. Ашинова