

**ОТЗЫВ официального оппонента  
о диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
Макаровой Юлии Константиновны  
на тему: «Многотипные ветвящиеся случайные блуждания  
при отсутствии и наличии иммиграции»  
по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая  
статистика**

Диссертационная работа относится по своей тематике к одному из современных направлений теории случайных процессов – теории ветвящихся случайных блужданий. Эта теория содержит глубокие результаты, в частности, хорошо известно, как с привлечением ветвящихся случайных блужданий можно описывать, например, пространственную структуру динамики популяций (С.А. Молчанов и Дж. Витмайер, 2016г.) и распространения эпидемий, эффект нерегулярного роста моментов численностей частиц, который влечет так называемую «перемежаемость» (наличие высоких пиков) в предельном распределении поля частиц в задачах статистической физики (см., например, серию работ академика Я.Б. Зельдовича с соавторами, начатую еще в 80-е годы прошлого века, и продолженную С.А. Молчановым с соавторами в цикле статей по теории случайных сред).

Особую **актуальность** тема диссертации приобретает в связи с рассмотрением ветвящихся случайных блужданий с несколькими типами частиц, которые могут различаться не только законами размножения и гибели частиц, как в многотипных ветвящихся процессах, но и законами блуждания частиц. Сразу отмечу, что работ в этом направлении до сих пор достаточно немного. Это связано со сложностью их исследования и необходимостью применения разнообразной техники. Одна из последних работ в этом направлении --- статья Н.В. Смородиной и Е.Б. Яровой (2023г.), где использовался мартингалный и спектральный подходы.

Переходя к анализу диссертации, отмечу внутреннее единство работы основанное на изучении непрерывного по времени многотипного ветвящегося случайного блуждания по многомерной решетке (т.е. по неограниченному фазовому пространству со счетным числом состояний). С одной стороны, таким процессам посвящены две монографии Е.Б. Яровой «Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде» (2024г.) и «Пространственная структура ветвящихся случайных блужданий» (2007г, 2025г.). С другой стороны, к настоящему времени малоизученными остаются вопросы о поведении, именно, многотипных ветвящихся случайных блужданий и ветвящихся случайных блужданий с иммиграцией частиц. В связи с этим, **новизна** диссертационной работы сомнений не вызывает.

**Целью диссертационной работы** является исследование предельного поведения моментов численностей частиц популяций (общего числа частиц в каждой точке) и субпопуляций (потомков фиксированной частицы в каждой точке) для многотипных ВСБ по  $d$ -мерной целочисленной решетке с наличием или отсутствием иммиграции, с одним источником ветвления или источниками ветвления в каждой точке при различных начальных распределениях частиц.

Диссертационная работа носит **теоретический характер**, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 115 страниц. Список литературы содержит 44 наименования.

**Во введении** приведен подробный обзор результатов предшествующих работ в данном направлении, сформулирована цель и пять основных положений, выносимых на защиту.

**В первой главе** соискатель рассматривает модель ветвящегося случайного блуждания с двумя типами частиц с одним источником ветвления, а также с источниками ветвления, расположенными в каждой точке целочисленной решетке. Для данной модели получены предельные поведения первых моментов при больших временах при различных

предположениях о генераторах блужданий частиц каждого типа. Хочу отметить фундаментальную статью соискателя с соавторами в журнале «Mathematics» (2022г.), в которой изложены основные результаты первой главы и, пожалуй, одну из первых, где рассматриваются двутипные случайные блуждания. Особый интерес вызывает также статья Ю.К. Макаровой без соавторов в одном из ведущих российских журналов «Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института имени В.А. Стеклова РАН», в которой акцент сделан на различии в законах блуждания частиц.

**Во второй главе** рассматривается модель ветвящегося случайного блуждания с иммиграцией. Особенностью главы является изучение предельного поведения первого и второго момента численностей частиц в случае, когда интенсивности размножения, гибели и иммиграции зависят от положения частицы на решетке, что значительно усложняет исследование и требует изучения смешанных моментов. Наиболее интересной по тематике второй главы является статья в журнале «Markov Processes and Related Fields» (2019г.).

**В третьей главе** изучается модель ветвящегося случайного блуждания с двумя типами частиц в случае, когда частицы могут менять тип. Исследуется поведение первого и второго момента численностей частиц каждого типа при больших временах в предположении, что блуждание частиц каждого типа имеет конечную дисперсию скачков. Результаты этой главы, по моему мнению, могут найти приложения при изучении распространения эпидемий, когда в рамках модели возможно изменение типа частицы с неинфицированной на инфицированную и наоборот.

**В заключении** кратко перечислены основные результаты работы.

**Несомненным достоинством диссертации** является рассмотрение большого числа разнообразных ранее неисследованных моделей ветвящихся случайных блужданий по целочисленным решеткам, среди которых наиболее

детально изучены модели с двумя типами частиц и модели с иммиграцией. Для всех моделей изучено предельное поведение первых и вторых моментов численностей частиц популяций при различных предположениях о числе источников ветвления на решетке при больших временах, что позволяет сделать вывод о поведении самих популяций с течением времени. Все приведенные утверждения в диссертации имеют строгие и полные математические доказательства.

Все публикации, из которых 10 статей (две без соавторов) и 6 тезисов на международных конгрессах и конференциях, точно отражают содержание диссертации и подтверждают широкую апробацию результатов работы. Из них 4 статьи опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Остановлюсь на общем замечании: автором не изучается поведение моментов старших порядков численностей частиц, которые могут однозначно, в некоторых случаях, определять предельное распределение поля частиц. Однако изучение моментов старших порядков может являться предметом дальнейших исследований в рамках представленных моделей.

Вместе с тем, отмечу ряд мелких неточностей в тексте диссертации:

- На стр. 15 в промежуточной формуле вывода производящей функции пропущен множитель  $dt$
- На стр. 42 в определении полинома Белла неверно указан нижний индекс.

Указанные замечания ни в коей мере не умаляют значимости диссертационного исследования. Сама диссертация вносит важный вклад в развитие теории ветвящихся случайных блужданий и открывает новые

направления исследований, связанных с предельным поведением многотипных процессов с иммиграцией частиц. В ходе работы над диссертацией Ю.К. Макарова продемонстрировала профессиональное владение весьма сложными методами, среди которых представления Фейнмана-Каца и спектральная теория операторов в гильбертовых пространствах. Результаты диссертации могут быть использованы специалистами, работающими в области теории вероятностей и стохастических процессов в Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Институте математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН и его Омском филиале и других научных центрах.

Положения, выносимые на защиту, получены лично автором, обоснованы и подтверждены четко сформулированными и строго доказанными теоремами и согласуются с результатами, полученными другими авторами. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки), а именно --- областям исследований: *6. Предельные теоремы* и *10. Марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели.*

На основании изучения диссертации и работ соискателя, в которых излагаются основные научные результаты диссертации могу заключить, что диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание

ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Макарова Юлия Константиновна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,  
ведущий научный сотрудник  
лаборатории комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики  
Омского филиала федерального бюджетного  
учреждения науки Института математики  
имени С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН  
Топчий Валентин Алексеевич

7 мая 2026

Контактные данные:

тел.: 7(3812)23-65-21, e-mail: topchij@ofim.oscsbras.ru  
Специальность, по которой официальным оппонентом  
защищена диссертация:  
01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:

644099, Российская Федерация, Омск, ул. Певцова 13  
Тел.: 7(3812)23-65-21; e-mail:

Подпись В.А. Топчия удостоверяю:

Директор ОФ ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.

Еремеев А.В.