

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Степанянц Петр Суренович

Орторекурсивные разложения по функциональным
системам специального вида

Специальность

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Лукашенко Тарас Павлович

Москва — 2026

Содержание

Введение	3
Система Фабера–Шаудера	4
Орторекурсивные разложения	8
Основное содержание работы	17
Глава 1. Структура орторекурсивных разложений по системам типа Фабера–Шаудера	21
1.1 Основные определения	21
1.2 Частичные суммы орторекурсивного ряда	26
Глава 2. Сходимость орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера	35
2.1 Поточечная сходимость орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера	35
2.2 Сходимость почти всюду орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера	47
2.3 Сходимость орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера в лебеговых пространствах	52
Глава 3. Сходимость орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера	58
3.1 Равномерная сходимость орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера	59
3.2 Сходимость почти всюду орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера	64
3.3 Сходимость орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера в лебеговых пространствах	82
Заключение	86
Список литературы	89
Работы автора по теме диссертации	92

Введение

Актуальность проблемы

Проблема представления функций в виде разложений по специальным системам является фундаментальным направлением в математическом анализе. Истоки данного вопроса восходят к работе Б. Тейлора 1715 года [1], заложившей основы представления функций суммами и рядами по многочленам. Качественный скачок произошёл в начале XIX века, когда Ж.-Б.Ж. Фурье [2], [3] применил тригонометрическую систему для решения уравнения теплопроводности, что положило начало теории ортогональных разложений. Дальнейшее развитие теории потребовало расширения классов приближаемых функций и исследования сходимости рядов. При этом было обнаружено, что для частичных сумм тригонометрического ряда Фурье разрывных функций возникает явление Гиббса (описанное Г. Уильбрэхамом [4] и переоткрытое Дж.У. Гиббсом [5]), выражающееся в колебаниях в окрестностях точек разрыва.

Возникновение теории гильбертовых пространств в начале XX века (см. работы Э. Шмидта [6], Д. Гильберта [7] и Дж. фон Неймана [8]) создало теоретическую основу для обобщения понятия рядов Фурье. В рамках этого подхода возникли ортогональные ряды Фурье по произвольным ортонормированным системам в пространстве функций, интегрируемых с квадратом на заданном отрезке [6]. Знаковым результатом стало построение А. Хааром [9] в 1910 году ортонормированного базиса в пространстве $L_2[0; 1]$, состоящего из кусочно-постоянных функций. Система функций, предложенная Хааром и впоследствии названная его именем, положила начало целому ряду связанных с ней исследований.

Параллельно шло развитие теории банаховых пространств. В 1910 году Ф. Рисс [10] формализовал пространства L_p , доказав их полноту, а в 1922 году С. Банах [11] сформулировал общее определение полных нормированных пространств. Ранее в работе Г. Фабера [12] была предъявлена система, которая представляет собой базис в пространстве непрерывных на отрезке

функций. Эта система, а также различные её модификации, являются предметом исследований в настоящей работе.

Появление вычислительной техники и информационных технологий во второй половине XX века способствовало развитию гармонического анализа. Существенным достижением стала реализация быстрого преобразования Фурье в 1965 году (см. [13]). Однако у классической тригонометрической системы имеются особенности, проявляющиеся в явлении Гиббса и отсутствии временной локализации. Это привело к разработке и внедрению других базисов, прежде всего ортогональных, полученных как системы сжатий и сдвигов некоторой исходной функции на числовой прямой. Они стали известны как всплески, или вейвлеты. Исторически система Хаара может рассматриваться как прототип таких систем. Теория всплесков дала начало отдельному направлению исследований, сохраняющему научную и прикладную актуальность (отметим монографии [14], [15], [16], а также [17, гл. 7]). К ключевым областям их применения относятся: решение уравнений с частными производными, подавление шумов в сигналах, анализ данных и алгоритмы сжатия аудиозаписей и изображений (например, JPEG 2000).

Ортогональные разложения нашли широкое применение в прикладных задачах благодаря простоте вычисления коэффициентов и удобным свойствам, таких как тождество Бесселя, неравенство Бесселя и эквивалентность сходимости равенству Парсеваля. Стоит отметить также свойство оперативности, благодаря которому можно одновременно осуществлять разложение и передавать уже вычисленные коэффициенты. Однако данным разложениям присущи определённые недостатки. Во-первых, требование ортогональности накладывает жёсткие ограничения на выбор системы разложения. Во-вторых, возникшие в процессе вычисления коэффициентов ошибки не исправляются, что приводит к сходимости к элементу, отличному от разлагаемого. Указанные ограничения возможно устранить, если использовать вместо ортогональных разложений орторекурсивные, которые рассматриваются в настоящей работе.

Система Фабера–Шаудера

Система Фабера–Шаудера получила своё название в честь математиков, исследовавших данную систему. Г. Фабер [12] в 1910 году построил её, про-

интегрировав функции Хаара. Ю.П. Шаудер [18] в 1927 году ввёл понятие базиса в банаховом пространстве и переоткрыл систему Фабера–Шаудера как простейший пример базиса в банаховом пространстве непрерывных на отрезке функций.

Для достижения наших целей в рамках данной работы мы определим систему Фабера–Шаудера не через интегралы от функций системы Хаара, а через системы сжатий и сдвигов.

Определение 1. Пусть функция ψ определена на отрезке $[0; 1]$. Доопределим функцию ψ на $\mathbb{R}$ нулём вне отрезка $[0; 1]$. Для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ определим

$$\psi_k^n(x) = C_k^n \psi(2^n x - k + 1), \quad (1)$$

где C_k^n — ненулевая константа. Систему $\{\psi_k^n\}_{n,k}$ будем называть *системой (двоичных) сжатий и сдвигов* функции ψ .

Определим систему Фабера–Шаудера:

Определение 2. Положим

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0; \frac{1}{2}] ; \\ 2 - 2x, & \text{если } x \in [\frac{1}{2}; 1] , \end{cases} \quad (2)$$

Пусть функции $\{\phi_k^n\}_{n,k}$ получены из данной функции $\phi(x)$ по формуле (1), где положено $C_k^n = 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k \in \{1, \dots, 2^n\}$. Множество всех функций $\{\phi_k^n\}_{n,k}$ обозначим через Φ , то есть

$$\Phi := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} \{\phi_k^n\}. \quad (3)$$

Пусть $\phi_{-2}(x) = 1$ и $\phi_{-1}(x) = x$ при $x \in [0; 1]$. Системой Фабера–Шаудера (*классической*) называется система функций $\{\phi_{-2}, \phi_{-1}\} \cup \Phi$.

Несложно заметить, что

$$\phi_k^n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}), \\ 1, & \text{если } x = \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна на отрезках } [\frac{k-1}{2^n}; \frac{2k-1}{2^{n+1}}] \text{ и } [\frac{2k-1}{2^{n+1}}; \frac{k}{2^n}]. \end{cases}$$

Как уже было отмечено ранее, система Фабера–Шаудера является базисом в пространстве непрерывных функций $C[0; 1]$. А именно, имеет место следующая теорема (см. [12], а также [17, гл. 6, §1]):

Теорема А ([17]). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и коэффициенты $\{a_{-2}, a_{-1}\} \cup \{a_k^n\}_{n,k}$ заданы формулами:

$$\begin{aligned} a_{-2} &= f(0), \\ a_{-1} &= f(1) - f(0), \\ a_k^n &= f\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) + f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда ряд по системе Фабера–Шаудера

$$a_{-2}\phi_{-2}(x) + a_{-1}\phi_{-1}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} a_k^n \phi_k^n(x)$$

сходится к $f(x)$ равномерно на $[0; 1]$.

В первоначальных исследованиях система Фабера–Шаудера рассматривалась преимущественно для разложения непрерывных функций. Однако в дальнейшем были получены фундаментальные результаты о применении её к значительно более широким классам функций. А.А. Талалян [19] доказал, что система Фабера–Шаудера позволяет представлять произвольные измеримые функции. В наших обозначениях результат звучит так:

Теорема В ([19]). Пусть f — произвольная измеримая функция на отрезке $[0; 1]$. Тогда существует набор коэффициентов $\{c_{-2}, c_{-1}\} \cup \{c_k^n\}_{n,k}$ такой, что ряд по системе Фабера–Шаудера

$$c_{-2}\phi_{-2}(x) + c_{-1}\phi_{-1}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_k^n \phi_k^n(x)$$

сходится к $f(x)$ почти всюду на отрезке $[0; 1]$.

Из работы П.Л. Ульянова [20] следует, что система Фабера–Шаудера является также системой представления (сходимость понимается по норме соответствующего пространства) в пространствах $L_p[0; 1]$. Впоследствии В.И. Фи-

липпов и П. Освальд [21] обобщили этот результат, показав, что произвольная система сжатий и сдвигов, порождённая функцией с ненулевым средним, также образуют систему представления в $L_p[0; 1]$:

Теорема С ([21]). Пусть функция $\psi \in L_p[0; 1]$, где $1 \leq p < \infty$, такова, что

$$\int_0^1 \psi d\mu \neq 0.$$

Пусть функции $\{\psi_k^n\}_{n,k}$, где $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k \in \{1, \dots, 2^n\}$, получены по формуле (1). Тогда для любой функции $f \in L_p[0; 1]$ существуют коэффициенты $\{c_k^n\}_{n,k}$ такие, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_k^n \psi_k^n$$

сходится к f по норме в L_p .

Система Фабера–Шаудера не является базисом в пространствах $L_p[0; 1]$, поскольку разложение функции в ряд по данной системе не обладает свойством единственности. В связи с этим естественно возникает вопрос о характеристике её подсистем, которые остаются системами представления. Р. Зинк [22] показал, что для всех измеримых функций таковыми в смысле сходимости почти всюду являются подсистемы с условием, что мера

$$\mu(\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} V_m) = 1, \quad (5)$$

где V_m — носитель функции с номером m из подсистемы, а верхний предел последовательности множеств здесь и далее понимается следующим образом:

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} V_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} V_m.$$

В.Г. Кротов [23] и В.И. Филиппов [24] установили, что условие (5) необходимо и достаточно, чтобы подсистема была системой представления в $L_p[0; 1]$. Т.М. Григорян и А.А. Мараньян [25] в 2021 году доказали, что система Фабера–Шаудера образует безусловную систему представления в пространстве $L_1[0; 1]$.

Приведённые результаты показывают, что система Фабера–Шаудера применима в качестве системы представления как для измеримых функций в смысле сходимости почти всюду, так и в лебеговых пространствах в смысле сходимости по норме пространства. Более того, как следует из условия (5), имеет место принципиальная неединственность коэффициентов — их выбор возможен бесконечным числом способов. В упомянутых выше работах отсутствуют явные алгоритмы вычисления этих коэффициентов, аналогичные формулам (4), известным для непрерывных функций. Наша задача — применить методы гармонического анализа для построения алгоритма поиска коэффициентов представления. Прямой подход предполагает ортогонализацию системы методом Грама–Шмидта, вычисление коэффициентов Фурье в полученном ортогональном базисе и их обратный перерасчёт для исходной системы. Ортогонализация системы Фабера–Шаудера относительно скалярного произведения в $L_2[0; 1]$ приводит к системе Франклина. Хотя ряды Фурье–Франклина сходятся в пространствах $C[0; 1]$ и $L_p[0; 1]$ (см. [17, гл. 6, §3]), они наследуют недостатки ортогональных разложений. Поэтому в отличие от данного подхода, мы рассмотрим обобщение ортогональных разложений на случай неортогональных систем, сохраняя при этом классическую структуру функций Фабера–Шаудера.

Орторекурсивные разложения

Орторекурсивные разложения были введены Т.П. Лукашенко в работах [26], [27] как обобщение ортогональных рядов. Предпосылки этого метода прослеживаются в исследованиях Б.С. и С.Б. Стечкиных [28]. Приведём определение и основные свойства орторекурсивных разложений:

Определение 3. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — счетная система ненулевых элементов H . *Орторекурсивное разложение* элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ осуществляется следующим образом:

1. Положим $r_0 = f$.
2. Если заданы остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$ и элемент e_n , то положим

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n) \|e_n\|^{-2}, \quad r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n. \quad (6)$$

Назовём $\hat{f}_k$ орторекурсивным коэффициентом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Ряд

$$\sigma(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$$

назовём орторекурсивным рядом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и будем говорить, что

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n \hat{f}_k e_k$$

является n -ой частичной суммой орторекурсивного ряда Фурье.

Замечание. Иногда слова орторекурсивное разложение используются в значении термина орторекурсивного ряда Фурье.

Орторекурсивные разложения наследуют ключевые свойства ортогональных разложений. А именно:

Теорема D ([27]). Орторекурсивное разложение элемента f гильбертова пространства H по системе $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ обладает следующими свойствами:

1. Аналог тождества Бесселя:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^N |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2 + \|r_N(f)\|^2.$$

2. Аналог неравенства Бесселя:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2.$$

3. Сходимость орторекурсивного ряда Фурье по норме пространства H к разлагаемому элементу f равносильна аналогу равенства Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2.$$

Схема орторекурсивного разложения допускает два принципиально различных подхода: использование заранее пронумерованной фиксированной системы элементов или выбор элементов на каждом шаге из заданного множества, характерный для жадных разложений (подробнее см. [29]). Ключевое

отличие заключается в свойстве линейности. Орторекурсивные разложения линейны по разлагаемому элементу, тогда как жадные алгоритмы принципиально нелинейны из-за зависимости выбора элемента разложения от текущего остатка. При орторекурсивном подходе исключена эта ресурсоёмкая процедура выбора элемента при каждой итерации. Поэтому в настоящей работе ограничимся рассмотрением разложений по фиксированным системам.

При орторекурсивном разложении по ортогональной системе полученный орторекурсивный ряд Фурье совпадает с классическим рядом Фурье. В связи с этим особый интерес представляют разложения по неортогональным, в частности, по переполненным системам. Важным преимуществом разложений по таким системам является абсолютная устойчивость к погрешностям в вычислении коэффициентов, а также абсолютная устойчивость к малым изменениям системы [30]. Общие свойства орторекурсивных разложений изучались в работах [27], [30], [31], [32]. Свойства орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам на действительной прямой исследовались в работах [33], [34], а по системам сжатий и сдвигов на отрезке — в работах [35], [36], [37]. Орторекурсивные разложения по конкретным системам были изучены в работах [26], [27], [38], [39]. Ниже приведём результаты, которые можно перенести на случай разложения по системе Фабера–Шаудера.

А.Ю. Кудрявцев [37] и А.В. Политов [35] показали, что в $L_2[0; 1]$ коэффициенты представления функции по системе сжатий и сдвигов можно отыскать с помощью орторекурсивного разложения. Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема Е ([35]). Пусть функция ϕ из $L_2[0; 1]$ такова, что

$$\int_0^1 \phi d\mu \neq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\phi, 2^{-k}) < \infty,$$

где $\omega_2(\phi, \delta)$ — интегральный модуль непрерывности в $L_2[0; 1]$. Тогда для любой функции f из $L_2[0; 1]$ её орторекурсивный ряд Фурье по системе сжатий и сдвигов функции ϕ сходится к f по норме пространства $L_2[0; 1]$.

Для системы Фабера–Шаудера подобный результат ранее был получен Т.П. Лукашенко [26]:

Следствие А ([26]). Пусть проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_2[0; 1]$, по системе Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f в $L_2[0; 1]$.

Также В.В. Галатенко, Т.П. Лукашенко и В.А. Садовничий [36] получили результат о сходимости к разлагаемой функции почти всюду орторекурсивного ряда Фурье по системе сжатий и сдвигов:

Теорема F ([36]). Пусть непрерывная функция ϕ такова, что ϕ определена и неотрицательна на $[0; 1]$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \omega^2(\phi, 2^{-k}) < \infty,$$

где $\omega(\phi, \delta)$ — модуль непрерывности. Тогда для любой функции f из $L_2[0; 1]$ её орторекурсивный ряд Фурье по системе сжатий и сдвигов функции ϕ сходится к f почти во всех точках непрерывности функции f .

Для системы Фабера–Шаудера результат выглядит так:

Следствие В. Пусть проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_2[0; 1]$, по системе Фабера–Шаудера. Тогда орторекурсивный ряд Фурье сходится к f почти во всех точках непрерывности функции f .

Отметим, что существующие результаты о сходимости орторекурсивных разложений преимущественно относятся к функциям из пространства $L_2[0; 1]$, причём исследуется, как правило, сходимость в метрике $L_2[0; 1]$ и значительно реже — сходимость почти всюду. Вместе с тем, для ряда систем, в частности для системы Фабера–Шаудера, возможно распространение разложений на функции из $L_1[0; 1]$. Целью настоящей работы является получение результатов о сходимости орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера в пространствах $L_p[0; 1]$, а также исследование сходимости почти всюду для функций из $L_1[0; 1]$. Следует подчеркнуть, что орторекурсивное разложение непрерывной функции по системе Фабера–Шаудера, вообще говоря, не сходится всюду на отрезке $[0; 1]$, поскольку орторекурсивные коэффициенты $\hat{f}_k^n$ (см. формулу (6)), вообще говоря, не совпадают с коэффициентами a_k^n (см.

формулу (4)) разложения непрерывной функции f в классическом базисе Фабера–Шаудера. Эффективность использования орторекурсивных разложений в значительной степени проявляется для переполненных систем. В связи с этим Т.П. Лукашенко [26] была предложена модификация системы Фабера–Шаудера, дополненная так называемыми половинными сдвигами. Далее также будут изучены разложения по модифицированной системе.

Цель работы

В работе рассматриваются орторекурсивные разложения по классической системе Фабера–Шаудера, а также по её модификации. Целью работы является изучение различных видов сходимостей этих разложений. В соответствии с поставленной целью были сформулированы следующие задачи:

- Установить алгоритм, позволяющий получить частичные суммы орторекурсивного разложения по классической и по модифицированной системам Фабера–Шаудера.
- Исследовать поточечную сходимость разложений по системе Фабера–Шаудера в пространстве непрерывных на отрезке функций, сходимость почти всюду для суммируемых функций и сходимость в лебеговых пространствах.
- Ввести модифицированную систему и провести орторекурсивное разложение по подпоследовательности её пачек. Изучить сходимость разложений в банаховых пространствах $C(S^1)$ и $L_p(S^1)$, где S^1 — окружность меры 1, $1 \leq p < \infty$, а также сходимость почти всюду для функций из $L_1(S^1)$.

Научная новизна

В работе получены результаты о сходимости орторекурсивных разложений по классической системе Фабера–Шаудера и по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. При разложении непрерывных функций доказана равномерная сходимость в случае подпоследовательности пачек модифицированной системы, а для классической

системы — поточечная сходимость всюду за исключением точек максимума функций базиса Фабера–Шаудера. Для обеих систем установлена сходимость почти всюду при разложении суммируемой функции. Также получены результаты о сходимости в пространствах $L_p[0; 1]$ при $1 \leq p < \infty$. Перечисленные результаты являются новыми и получены лично автором.

Методы исследования

В работе применяются методы математического анализа, методы функционального анализа, методы теории меры и интеграла, методы гармонического анализа, а также методы линейной алгебры и топологии. В работе также используются алгоритмы, специально разработанные для изучения орторекурсивных разложений.

Теоретическая и практическая ценность

Полученные результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по орторекурсивным разложениям и по анализу Фурье, а также в прикладных задачах обработки данных и передачи информации.

Соответствие паспорту научной специальности

В диссертации изучается сходимость орторекурсивных разложений, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ по направлению «вещественный анализ».

Положения, выносимые на защиту

1. Установлена поточечная сходимость орторекурсивного ряда Фурье при разложении непрерывной функции по классической системе Фабера–Шаудера.
2. Показано, что при разложении суммируемой функции по классической системе Фабера–Шаудера орторекурсивный ряд Фурье сходится почти

всюду.

3. Получена теорема о сходимости по норме $L_p[0; 1]$, где $1 \leq p < \infty$, орторекурсивного ряда Фурье при разложении функции из $L_p[0; 1]$ по классической системе Фабера–Шаудера.
4. Установлена равномерная сходимость орторекурсивного ряда Фурье при разложении непрерывной функции по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера.
5. Доказана теорема о сходимости почти всюду орторекурсивного ряда Фурье при разложении суммируемой функции по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера.
6. Показано, что орторекурсивный ряд Фурье сходится по норме $L_p(S^1)$, где $1 \leq p < \infty$, при разложении функции из $L_p(S^1)$ по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на международных конференциях:

- XXXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2024 г.);
- XXXII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2025 г.);
- XXXIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2026 г.);
- XXIII Международная Саратовская зимняя математическая школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2026 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах:

- научный семинар «Ортоподобные системы» механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора Т.П. Лукашенко, доцента В.В. Галатенко, доцента Т.В. Родионова (многократно, 2021–2023 гг.);
- научный семинар «Тригонометрические и ортогональные ряды» механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора В.А. Скворцова, профессора Т.П. Лукашенко, профессора М.И. Дьяченко, доцента А.П. Солодова (многократно, 2024–2026 гг.);
- научный семинар «Операторные модели в математической физике» механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством члена-корреспондента РАН А.А. Шкаликова, профессора И.А. Шейпака, профессора К.А. Мирзоева (2026 г.);
- Санкт–Петербургский городской семинар по конструктивной теории функций под руководством профессора М.А. Скопиной, доцента А.В. Кривошеина (2026 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 4 публикациях автора, из них 3 работы ([43], [44], [45]) опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук.

Необходимо отметить, что работа [43] выполнена совместно с А.К. Пауновым. В ней автору настоящей диссертации принадлежат результаты о сходимости разложений в лебеговых пространствах (леммы 3,4,5 и теоремы 2,3), описание процесса изменения частичных сумм при разложении функции по модифицированной системе Фабера–Шаудера и оценка коэффициентов (лемма 2), играющая ключевую роль в доказательстве теоремы о равномерной сходимости.

Личный вклад автора

Диссертантом совместно с научным руководителем проводился выбор темы, а также осуществлялось планирование всей работы. Автору диссертации принадлежат доказательства основных результатов, приведенных в диссертации.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы из 46 наименований. Работа включает 11 рисунков. Теоремы (а также леммы и следствия) имеют номера из двух чисел, первое из которых — номер главы, а второе — номер теоремы (леммы или следствия) в этой главе. Определения, замечания и формулы нумеруются сквозным образом. Результаты других авторов (теоремы и следствия) будем нумеровать латинскими буквами сквозным образом. Общий объём работы составляет 93 страницы.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Тарасу Павловичу Лукашенко и кандидату физико-математических наук Владимиру Владимировичу Галатенко за постановку задачи, внимание к работе, ценные рекомендации и плодотворные обсуждения. Также автор благодарит Александра Константиновича Паунова за совместную работу, которая способствовала развитию данных исследований.

Основное содержание работы

Во **Введении** представлен общий обзор проблематики исследования, сформулированы поставленные задачи и приводятся основные результаты работы. Там же приведены определения основных изучаемых объектов: системы Фабера–Шаудера и орторекурсивного разложения.

Основным результатом **Главы 1** является разработка алгоритма изменения частичных сумм для орторекурсивных разложений по классической и модифицированной системам Фабера–Шаудера, который позволяет обойтись без непосредственного вычисления остатков разложения на каждом шагу. В связи с этим первая часть главы посвящена введению необходимых определений и обозначений, которые используются как при описании данного алгоритма, так и в последующих главах. В частности, вводится топологическое пространство S^1 и определяется модифицированная система Фабера–Шаудера. Здесь же определяются пространства D^n — пространства ломаных с областью определения S^1 , которые в дальнейшем служат для приближения функций из $C(S^1)$ и из $L_p(S^1)$.

Следует подчеркнуть, что ломаные играют ключевую роль в доказательстве основных утверждений данной работы. Общая схема рассуждений выглядит следующим образом: сначала устанавливается сходимост орторекурсивных разложений для ломаных, затем проводятся оценки коэффициентов, входящих в представление частичных сумм, что позволяет оценить частичные суммы по норме или через максимальную функцию Харди–Литлвуда; на заключительном этапе, опираясь на линейность орторекурсивных разложений по функциональному аргументу, произвольная функция приближается ломаными, что даёт возможность оценить остаток разложения. В соответствии с этим планом в Главе 1 приведено определение максимальной функции Харди–Литлвуда и указаны её свойства.

Вторая часть Главы 1 посвящена описанию процесса изменения частичных сумм. Выделено три этапа: база, шаг по пачке и переход от одной пачки к другой. Помимо алгоритма изменения частичных сумм указано, как на упомянутых этапах изменяются коэффициенты, входящие в представление

частичных сумм.

В **Главе 2** приведены результаты о сходимости орторекурсивных разложений по классической системе Фабера–Шаудера. Значение орторекурсивного ряда Фурье в каждой точке максимума базисных функций Фабера–Шаудера зависит исключительно от значения соответствующего коэффициента $\hat{f}_k^n$ (см. формулу (6)) орторекурсивного ряда Фурье, который, вообще говоря, не совпадает с коэффициентом a_k^n (см. формулу (4)) разложения по базису. В связи с этим, как уже было отмечено ранее, орторекурсивное разложение по системе Фабера–Шаудера не обладает свойством равномерной сходимости. Однако во всех остальных точках удалось установить поточечную сходимость:

Теорема 2.1. *Пусть проводится орторекурсивное разложение непрерывной на отрезке $[0; 1]$ функции f по системе Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f во всех точках, кроме, быть может, точек максимума функций системы и точек 0 и 1.*

Класс функций, для которых орторекурсивное разложение по системе Фабера–Шаудера сходится почти всюду, может быть расширен до $L_1[0; 1]$, при этом условие на точки непрерывности функции f в формулировке Следствия В оказывается избыточным.

Теорема 2.2. *Пусть проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_1[0; 1]$, по системе Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f почти всюду на отрезке $[0; 1]$.*

В Главе 2 приведён также результат о сходимости орторекурсивного разложения по классической системе в лебеговых пространствах. Следствие А является частным случаем приведённого ниже результата.

Теорема 2.3. *Пусть $1 \leq p < \infty$ и проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_p[0; 1]$, по системе Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f по норме пространства $L_p[0; 1]$.*

Глава 3 посвящена исследованию сходимости орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера. В ней рассматривается подсистема, образованная подпоследовательностью так называемых пачек

элементов модифицированной системы с произвольной нумерацией внутри каждой пачки. Показано, что даже для такой подсистемы сохраняется свойство равномерной сходимости орторекурсивного разложения произвольной непрерывной функции:

Теорема 3.1. *Пусть проводится орторекурсивное разложение непрерывной на S^1 функции f по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f равномерно на S^1 .*

Модифицированная система не представляет собой систему сжатий и сдвигов в чистом виде. Тем не менее, любая её подсистема, образованная подпоследовательностью пачек, является системой представления для суммируемых функций относительно сходимости почти всюду, причём коэффициенты этого представления могут быть получены с помощью орторекурсивных разложений.

Теорема 3.2. *Пусть проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_1(S^1)$, по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f почти всюду на S^1 .*

Как и в случае классической системы, для модифицированной системы справедлив результат о сходимости в лебеговых пространствах, который приведён в Главе 3.

Теорема 3.3. *Пусть $1 \leq p < \infty$ и проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_p(S^1)$, по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f по норме пространства $L_p(S^1)$.*

В Главе 3 также вводится понятие α -дальности, необходимое для оценки коэффициентов в представлении частичных сумм в случае разложения по модифицированной системе. Эти оценки потребуются для доказательства основных утверждений главы.

Следует отметить, что результаты о сходимости орторекурсивных разложений как по классической, так и по модифицированной системам Фабера–Шаудера в лебеговых пространствах в случае $p = 1$ требуют отдельного рассмотрения и получения других оценок на норму частичных сумм. Данные оценки приведены в соответствующих разделах Глав 2 и 3.

Глава 1. Структура орторекурсивных разложений по системам типа Фабера–Шаудера

В настоящей главе устанавливается порядок изменения частичных сумм при орторекурсивных разложениях по классической и модифицированной системам Фабера–Шаудера, а также вводятся необходимые определения и обозначения. Основные результаты главы изложены в работах [44], [45].

1.1 Основные определения

Ранее были даны определения системы Фабера–Шаудера (3) и орторекурсивного разложения (6). Теперь предстоит подробнее рассмотреть системы разложения и ввести модификацию системы Фабера–Шаудера.

Напомним, что систему сжатий и сдвигов (1), порождённую базисной функцией (2) системы Фабера–Шаудера, мы обозначили за Φ (см. формулу (3)). Отметим, что наличие функций $\phi_{-2}(x) = 1$ и $\phi_{-1}(x) = x$ в классической системе Фабера–Шаудера не влияет на сходимость орторекурсивного ряда по ней, поскольку разложение произвольной функции $f(x)$ по полной системе Фабера–Шаудера эквивалентно разложению остатка $r_{-1}(x)$ по системе функций Φ . В связи с этим, говоря об орторекурсивном разложении по системе Фабера–Шаудера, достаточно рассмотреть разложение по системе сжатий и сдвигов Φ . Кроме того, положим константы C_k^n в системе сжатий и сдвигов равными $\sqrt{3} \cdot 2^{n/2}$, так чтобы все функции в системе Φ имели единичную норму в $L_2[0; 1]$. А именно:

$$\phi_k^n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}), \\ \sqrt{3} \cdot 2^{n/2}, & \text{если } x = \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна на отрезках } [\frac{k-1}{2^n}; \frac{2k-1}{2^{n+1}}] \text{ и } [\frac{2k-1}{2^{n+1}}; \frac{k}{2^n}]. \end{cases}$$

В орторекурсивных рядах Фурье по системе Фабера–Шаудера суммирование ведётся по возрастанию номера n , называемого *номером пачки*. Внутри пачки суммировать можно в произвольном порядке, так как внутренности

носителей функций из одной пачки классической системы Фабера–Шаудера не пересекаются. Фактически, говоря в дальнейшем о классической системе Фабера–Шаудера, мы будем иметь в виду некоторый произвольный элемент семейства систем. Элементы семейства отличаются друг от друга нумерацией внутри пачек. Чтобы обозначить сумму до некоторого индекса $\binom{N}{K}$ будем использовать обозначение:

$$\sum_{n,k}^{N,K} b_k^n := \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{2^n} b_{\sigma_{2^n}(k)}^n + \sum_{k=1}^K b_{\sigma_{2^N}(k)}^N.$$

Здесь для пачки с номером n индекс $\sigma_{2^n}(k)$ является номером функции из пачки n классической системы Фабера–Шаудера, по которой проводится разложение на шаге k по пачке n .

Теперь перейдём к определению модифицированной системы Фабера–Шаудера. Рассмотрим её на топологическом пространстве, являющемся одномерным тором S^1 , полученным склеиванием точек 0 и 1 отрезка $[0; 1]$. S^1 имеет стандартную топологию и лебеговскую σ -алгебру измеримых множеств, при этом мера всего тора единичная: $\mu(S^1) = 1$. Все точки на S^1 будем брать по mod 1, а для нижнего индекса k из пачки n все операции будут брать по mod 2^{n+1} . Теперь по аналогии с определением системы Фабера–Шаудера введём модифицированную систему через систему сжатий с половинными сдвигами.

Определение 4. Пусть функция ψ определена на S^1 . Для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}$ определим

$$\psi_k^n = C_k^n \psi(2^n x - \frac{k}{2} + 1), \quad (7)$$

где C_k^n — ненулевая константа. Систему $\{\psi_k^n\}_{n,k}$ будем называть *системой (двоичных) сжатий с половинными сдвигами* функции ψ .

Определение 5. Пусть функции $\{e_k^n\}_{n,k}$ получены из введённой ранее порождающей функции (2) системы Фабера–Шаудера по формуле (7), где положено $C_k^n = \sqrt{3} \cdot 2^{n/2}$ для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}$. Множество всех

функций $\{e_k^n\}_{n,k}$ обозначим через E , то есть

$$E := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} \{e_k^n\}.$$

Модифицированной системой Фабера–Шаудера называется система функций E . Константы C_k^n выбраны так, чтобы система E была нормирована в $L_2(S^1)$. Набор функций $\{e_k^n\}_{k \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}}$ назовём *пачкой номера n* .

Несложно заметить, что

$$e_k^n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (\frac{k-2}{2^{n+1}}; \frac{k}{2^{n+1}}), \\ \sqrt{3} \cdot 2^{n/2}, & \text{если } x = \frac{k-1}{2^{n+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна на отрезках } [\frac{k-2}{2^{n+1}}; \frac{k-1}{2^{n+1}}] \text{ и } [\frac{k-1}{2^{n+1}}; \frac{k}{2^{n+1}}]. \end{cases}$$

При этом $\phi_k^n = e_{2k}^n$. Таким образом, в модифицированной системе Фабера–Шаудера в каждой пачке вдвое больше функций, чем в классической системе. Ниже приведём графики нескольких первых функций систем E и Φ (см. Рисунок 1).

Введём пространства ломаных с вершинами в точках максимума функций системы E . Такими ломаными в дальнейшем будем приближать разлагаемые функции.

Определение 6. Пусть $x_k^n = (k-1)/2^{n+1}$, где $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^{n+1} + 1\}$. Назовем набор $\{x_k^n\}_{k=1}^{2^{n+1}+1}$ *двоично-рациональными точками порядка n* . Обозначим через Δ_k^n — носитель $e_k^n(x)$, а через D^n — пространство 1-периодических ломаных с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n .

Отметим, что при рассмотрении набора двоично-рациональных точек порядка n на торе S^1 два крайние точки набора совпадают, то есть

$$0 = x_1^n = x_{2^{n+1}+1}^n = 1.$$

Обозначим за Δ_{k+}^n левую половину отрезка Δ_k^n и за Δ_{k-}^n — правую. На Δ_{k+}^n функция возрастает и линейна, а на Δ_{k-}^n функция e_k^n убывает и линейна.

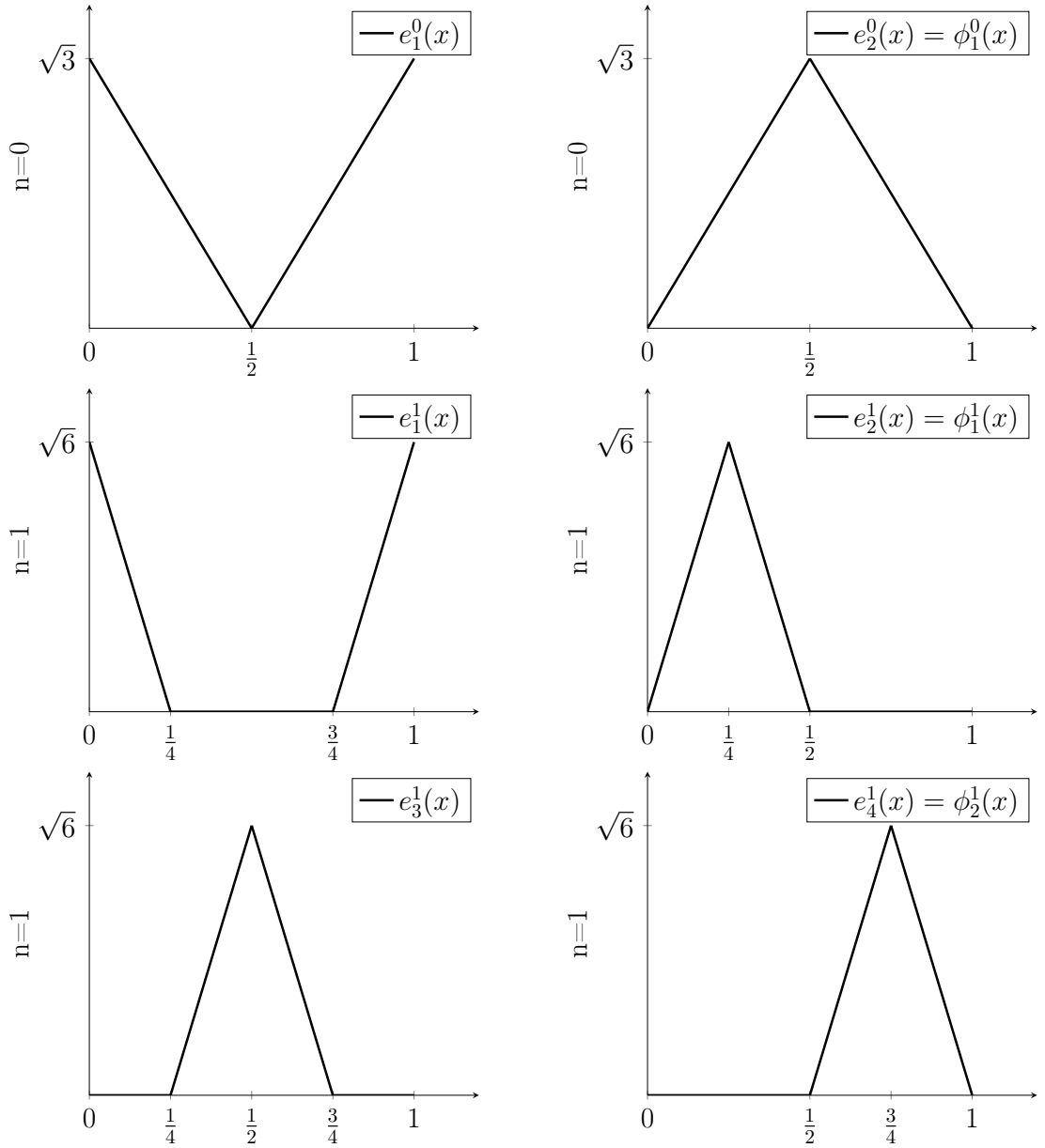


Рисунок 1: Пачки с номерами 0 и 1 модифицированной системы E .
 Функции с чётными номерами являются также элементами системы Φ .

Также имеем, что

$$\Delta_k^n = \left[\frac{k-2}{2^{n+1}}; \frac{k}{2^{n+1}} \right], \Delta_{k^+}^n = \left[\frac{k-2}{2^{n+1}}; \frac{k-1}{2^{n+1}} \right] \text{ и } \Delta_{k^-}^n = \left[\frac{k-1}{2^{n+1}}; \frac{k}{2^{n+1}} \right]. \quad (8)$$

Теперь заметим, что в каждой фиксированной точке x все функции пачки с номером n системы E , за исключением не более двух, равны нулю. Обозначим ту из двух функций, для которой x лежит на промежутке убывания, индексом $\binom{n}{k(x)}$. Тогда, если существует другая функция, которая не равна нулю в точке x , то x лежит на промежутке её возрастания. Эта функция имеет индекс $\binom{n}{k(x)+1}$.

Говоря о разложении по модифицированной системе Фабера–Шаудера, мы подразумеваем разложение по некоторому элементу семейства систем, полученных из модифицированной системы перенумерацией функций внутри каждой пачки. Более того, при разложениях по модифицированной системе будем использовать не всю систему, а лишь возрастающую подпоследовательность пачек. Для этого введём необходимые обозначения. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^+$ — номера пачек из подпоследовательности, по которой проводится орторекурсивное разложение. Число пачек разложения между номерами m и n обозначим за $\eta(n, m)$. Получим, что

$$\eta(n, m) = \begin{cases} |\Lambda \cap \{m+1, \dots, n\}|, & \text{если } n > m \\ 0, & \text{если } n \leq m. \end{cases} \quad (9)$$

Для пачки с номером n индекс $\sigma_{2^{n+1}}(k)$ является номером функции из модифицированной системы Фабера–Шаудера, по которой проводится разложение на шаге k по данной пачке.

Наконец, для доказательства основных утверждений данной работы нам потребуется максимальная функция Харди–Литлвуда (см. [40, гл. VIII] или [17, Приложение 1, §2, 2°]). Без ограничения общности введём её на используемом в данной работе топологическом пространстве S^1 .

Определение 7. Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$. Мак-

симметричная функция Харди–Литтлвуда для функции $f(x)$ — это функция

$$f^M(x) = \sup_{x \in I} \left(|I|^{-1} \int_I |f(t)| d\mu \right), \quad x \in S^1, \quad (10)$$

где супремум берётся по всем интервалам $I \subseteq S^1$, содержащим точку x .

Сформулируем несколько свойств, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема G ([17]). *Для максимальной функции Харди–Литтлвуда имеют место следующие неравенства:*

1. Пусть $1 < p \leq \infty$ и f принадлежит лебегову пространству $L_p(S^1)$. Тогда f^M принадлежит $L_p(S^1)$ и имеет место оценка на норму

$$\|f^M(x)\|_{L_p(S^1)} \leq \mathfrak{A}_p \|f\|_{L_p(S^1)}, \quad (11)$$

где $\mathfrak{A}_p$ — константа, зависящая только от p , если $f \in L_p(S^1)$.

2. Если f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$, то имеет место оценка на меру

$$\mu\{x \in S^1 : f^M(x) > t\} \leq \frac{5}{t} \|f\|_{L_1(S^1)}, \quad \text{при } t > 0. \quad (12)$$

1.2 Частичные суммы орторекурсивного ряда

В данном разделе рассмотрим частичные суммы орторекурсивного ряда Фурье при разложении функции как по классической, так и по модифицированной системам Фабера–Шаудера. Мы введём различные представления частичных сумм, которые потребуются нам в дальнейшем при доказательстве сходимостей орторекурсивного ряда. Кроме того, в Лемме 1.1 и Лемме 1.2 будет приведён алгоритм вычисления частичных сумм через рекурсивный процесс изменения некоторого набора коэффициентов. Вышеупомянутые леммы не только служат инструментом для доказательства теорем данной диссертации, но и содержат отдельные результаты, представляющие собой алгоритмы реализации орторекурсивных разложений по системам типа Фабера–Шаудера.

Для начала проясним обозначения, связанные с частичными суммами орторекурсивных разложений. Вне зависимости от системы разложения будем использовать обозначение $S_k^n(f; x)$ для частичных сумм. Здесь f — разлагаемая функция, и без необходимости она будет опускаться. Индекс $\binom{n}{k}$ означает, что разложение прошло шаг с номером k в пачке с номером n . Добавим индекс $\binom{n}{0}$, обозначающий переход к пачке с номером n . При орторекурсивном разложении по классической системе Фабера–Шаудера индекс k меняется от 0 до 2^n . Считаем $S_0^{n+1} = S_{2^n}^n$. При разложении по подпоследовательности пачек модифицированной системы при $n \in \Lambda$ индекс k меняется от 0 до 2^{n+1} и $S_0^{n+1} = S_{2^{n+1}}^n$. При $n \notin \Lambda$ считаем, что k может принимать только два значения: 0 и 2^{n+1} , причём $S_{2^n}^{n-1} = S_0^n = S_{2^{n+1}}^n = S_0^{n+1}$. Для предельного перехода по набору индексов будем использовать оба обозначения: и $\binom{n}{k} \rightarrow \infty$, и просто $n \rightarrow \infty$.

Теперь перейдём к описанию алгоритма изменения частичных сумм. Прежде всего отметим, что пачка с номером n модифицированной системы Фабера–Шаудера является базисом в пространстве ломаных D^n с вершинами в двоично–рациональных точках порядка n . Система пространств $\{D^n\}_{n=0}^\infty$ является системой вложенных пространств:

$$D^0 \subset D^1 \subset D^2 \subset \dots \subset D^n \subset \dots$$

Частичные суммы $S_k^n(x)$ разложения по классической системе Φ являются ломаными с вершинами в двоично–рациональных точках, причём $S_k^n(0) = S_k^n(1) = 0$. Значит, $S_k^n(x)$ лежит в пространстве D^n . Вместо представления через коэффициенты $\hat{f}_p^m$ (см. формулу (6)) по определению орторекурсивного разложения

$$S_k^n = \sum_{m,p}^{n,k} \hat{f}_p^m \phi_p^m$$

частичные суммы можно разложить по базису пространства D^n :

$$S_k^n(x) = \sum_{j=1}^{2^{n+1}} c_j \binom{n}{k} e_j^n(x), \quad (13)$$

где $c_j \binom{n}{k}$ — некоторые коэффициенты. Таким образом, частичной сумме $S_k^n(x)$ поставлен в соответствие набор $\{c_j \binom{n}{k}\}_{j=1}^{2^{n+1}}$, состоящий из 2^{n+1} чисел.

Аналогично, частичные суммы $S_k^n(x)$ разложения по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера представимы в виде (13).

Определим процесс изменения набора $\{c_j(\frac{n}{k})\}_{j=1}^{2^{n+1}}$ при орторекурсивном разложении по классической системе Φ . Отметим, что для функций из одной пачки системы E скалярные произведения функций, не являющихся соседними, равны нулю. То есть при $n \geq 1$ и фиксированном $k \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1}\}$ выполнено, что

$$(e_k^n, e_j^n) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \notin \{k-1, k, k+1\}, \\ \frac{1}{4}, & \text{если } j \in \{k-1, k+1\}, \\ 1, & \text{если } j = k. \end{cases}$$

Лемма 1.1. *При орторекурсивном разложении по классической системе Фабера–Шаудера набор $\{c_j(\frac{n}{k})\}_{j=1}^{2^{n+1}}$ коэффициентов, входящих в представление (13) частичных сумм, изменяется следующим образом:*

1. Положим $c_j(\frac{0}{0}) = 0$ при $j = 1, 2$.

2. Если $k \neq 2^n$ и определён набор $\{c_j(\frac{n}{k})\}_{j=1}^{2^{n+1}}$, то положим

$$\begin{cases} c_j(\frac{n}{k+1}) = c_j(\frac{n}{k}), & \text{если } j \neq 2\sigma_{2^n}(k+1), \\ c_j(\frac{n}{k+1}) = (f, e_j^n) - \frac{1}{4}[c_{j-1}(\frac{n}{k}) + c_{j+1}(\frac{n}{k})], & \text{если } j = 2\sigma_{2^n}(k+1). \end{cases} \quad (14)$$

3. Если определён набор $\{c_j(\frac{n}{2^n})\}_{j=1}^{2^{n+1}}$, то определим набор $\{c_j(\frac{n+1}{0})\}_{j=1}^{2^{n+2}}$, состоящий из 2^{n+2} чисел:

$$\begin{cases} c_{2j-1}(\frac{n+1}{0}) = 2^{-1/2}c_j(\frac{n}{2^n}), \\ c_{2j}(\frac{n+1}{0}) = 2^{-3/2}[c_j(\frac{n}{2^n}) + c_{j+1}(\frac{n}{2^n})]. \end{cases} \quad (15)$$

Данный процесс полностью определяет орторекурсивное разложение по системе Фабера–Шаудера. Изменения коэффициентов в (14) назовём *шагом по пачке*, а изменения в (15) назовём *переходом от одной пачки к другой*.

Доказательство Леммы 1.1.

База. В начале разложения частичная сумма $S_0^0(x) \equiv 0$. Следовательно, и коэффициенты $c_j \binom{0}{0} = 0$, где $j = 1, 2$.

Шаг по пачке. Частичные суммы $S_k^n(x)$ и $S_{k+1}^n(x)$ имеют разложение (13) по базису в D^n . Проведём шаг орторекурсивного разложения:

$$r_k^n = f - S_k^n = f - \sum_{j=1}^{2^{n+1}} c_j \binom{n}{k} e_j^n$$

Напомним, что индекс $\sigma_{2^n}(k+1)$ является номером функции пачки n классической системы Фабера–Шаудера, по которой проводится разложение на шаге $k+1$. Обозначим индекс $2\sigma_{2^n}(k+1)$ как s и вычислим орторекурсивный коэффициент Фурье, пользуясь тем, что $\phi_k^n = e_{2k}^n$:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{k+1}^n &= (r_k^n, \phi_{\sigma_{2^n}(k+1)}^n) = (f, e_{2\sigma_{2^n}(k+1)}^n) - \sum_{j=1}^{2^{n+1}} c_j \binom{n}{k} (e_j^n, e_{2\sigma_{2^n}(k+1)}^n) = \\ &= (f, e_s^n) - \frac{1}{4} c_{s-1} \binom{n}{k} - c_s \binom{n}{k} - \frac{1}{4} c_{s+1} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Подставим полученный коэффициент в новую частичную сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} c_j \binom{n}{k+1} e_j^n &= S_{k+1}^n = S_k^n + \hat{f}_k^n \phi_{\sigma_{2^n}(k+1)}^n = \\ &= \sum_{j=1, j \neq s}^{2^{n+1}} c_j \binom{n}{k} e_j^n + [c_s \binom{n}{k} + (f, e_s^n) - \frac{1}{4} c_{s-1} \binom{n}{k} - c_s \binom{n}{k} - \frac{1}{4} c_{s+1} \binom{n}{k}] e_s^n. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие перед функциями e_j^n , справа и слева, получим (14).

Переход от одной пачки к другой. Частичные суммы $S_{2^n}^n(x)$ и $S_0^{n+1}(x)$ равны. При этом по формуле (13) мы рассматриваем $S_{2^n}^n(x)$ как ломаную из пространства D^n , а $S_0^{n+1}(x)$ как ломаную из D^{n+1} . Коэффициент $c_j \binom{n+1}{0}$ определяется значением ломаной S_0^{n+1} в точке x_j^{n+1} . Отметим, что двоично-рациональные точки порядка $n+1$ с нечётными индексами входят также в набор двоично-рациональных точек порядка n , а именно

$$x_{2j-1}^{n+1} = \frac{(2j-1) - 1}{2^{n+2}} = \frac{j-1}{2^{n+1}} = x_j^n.$$

Нормы в пространстве $C[0; 1]$ функций пачки с номером $(n + 1)$ системы E в $\sqrt{2}$ раз больше C -норм функций из пачки n . Следовательно,

$$c_{2j-1} \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = 2^{-1/2} c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right).$$

Поскольку частичная сумма S_0^{n+1} также принадлежит D^n , то она линейна и непрерывна на отрезках вида $[x_{2j-1}^{n+1}; x_{2j+1}^{n+1}]$, а значит значения в точках x_{2j}^{n+1} с четными индексами являются средним арифметическим значений в соседних двоично-рациональных точках порядка $n + 1$. Отсюда получаем, что

$$c_{2j} \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = 2^{-1} [c_{2j-1} \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) + c_{2j+1} \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)] = 2^{-3/2} [c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) + c_{j+1} \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)].$$

Доказательство Леммы 1.1 завершено.

Заметим, что из алгоритма, определённого в Лемме 1.1, видно, что коэффициент $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ является линейной комбинацией скалярных произведений функции f с некоторыми функциями системы E . Вынесем нормировочный множитель $2^{-1/2}$ и получим, что коэффициент $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ представим в виде

$$c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = \sum_{m=0}^n 2^{m/2-n/2} \cdot \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) (f, e_i^m), \quad (16)$$

где заведомо $\lambda_{ij}^m = 0$ для всех нечётных индексов i .

В коэффициенте $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ индекс j относится к соответствующему коэффициенту $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$, а индексы m и i — к функции e_i^m в скалярном произведении. Для доказательства основных утверждений нам потребуются различные оценки на суммы модулей коэффициентов λ_{ij}^m . В связи с этим удобно задать алгоритмы изменения λ_{ij}^m подобно процессу, описанному в Лемме 1.1.

Следствие 1.1. *При орторекурсивном разложении по классической системе Фабера–Шаудера коэффициенты $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$, входящие в представление (16), изменяются следующим образом:*

1. На шаге $\left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ полагаем все $\lambda_{ij}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = 0$, где $i, j = 1, \dots, 2^{n+1}$. Таким образом, перед разложением по пачке с номером n к уже существующему набору добавляется массив из 2^{2n+2} нулевых элементов.

2. Если $k \neq 2^n$, то положим

$$\begin{cases} \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right), & \text{если } j \neq 2\sigma_{2^n}(k+1), \\ \lambda_{jj}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = 1, & \text{если } j = 2\sigma_{2^n}(k+1), \\ \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = -\frac{1}{4} \left(\lambda_{i,j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) \right), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (17)$$

Последний случай имеет место при $j = 2\sigma_{2^n}(k+1)$ и либо $m \neq n$, либо $i \neq 2\sigma_{2^n}(k+1)$.

3. Если $k = 2^n$, то положим

$$\begin{cases} \lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \\ \lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right). \end{cases} \quad (18)$$

Доказательство.

База. В представлении (16) для $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ все коэффициенты, стоящие при скалярных произведениях (f, e_i^n) с функциями пачки с номером n , нулевые, поскольку разложение по пачке с номером n ещё не проводилось. Значит, все $\lambda_{ij}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = 0$.

Шаг по пачке. Введём индекс функции из пачки с номером n системы E , по которой проводится разложение на шаге $k+1$, как $s = 2\sigma_{2^n}(k+1)$. Отметим, что до шага $(k+1)$ по пачке n , скалярное произведение (f, e_s^n) в разложении не фигурировало, а значит $\lambda_{sj}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = 0$ для всех j . А значит, из (14) следует, что $\lambda_{ss}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = 1$. Остальные равенства выражения (17) можно установить, подставив представления (16) в формулы (14) Леммы 1.1 и приравняв коэффициенты при соответствующих скалярных произведениях в левой и правой частях.

Переход от одной пачки к другой. Аналогично, подставляя представление (16) в выражения (15) Леммы 1.1, получаем (18).

Доказательство Следствия 1.1 завершено.

Отметим, что коэффициенты $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ зависят от разлагаемой функции f . Нумерация функций внутри пачек классической системы влияет только на порядок заполнения набора $\lambda_{ij}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ и на порядок изменения набора $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$. Значение коэффициента $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)$ не зависит ни от разлагаемой функции, ни от нумерации внутри пачек и является одинаковым при орторекурсивном

разложении любой функции по классической системе Фабера–Шаудера.

Теперь рассмотрим орторекурсивное разложение по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Для него приведём подобные Лемме 1.1 и Следствию 1.1 результаты.

Лемма 1.2. *При орторекурсивном разложении по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера набор $\{c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)\}_{j=1}^{2^{n+1}}$ коэффициентов, входящих в представление (13) частичных сумм, изменяется следующим образом:*

1. Положим $c_j \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = 0$ при $j = 1, 2$.
2. Если орторекурсивное разложение не проводится по пачке с номером n , то есть $n \notin \Lambda$, то положим $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right) = c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$.
3. Если $k \neq 2^{n+1}$, $n \in \Lambda$ и определён набор $\{c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)\}_{j=1}^{2^{n+1}}$, то положим

$$\begin{cases} c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right), & \text{если } j \neq \sigma_{2^{n+1}}(k+1), \\ c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = (f, e_j^n) - \frac{1}{4} [c_{j-1} \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) + c_{j+1} \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)], & \text{если } j = \sigma_{2^{n+1}}(k+1). \end{cases} \quad (19)$$

4. Если определён набор $\{c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right)\}_{j=1}^{2^{n+1}}$, то определим набор $\{c_j \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)\}_{j=1}^{2^{n+2}}$, состоящий из 2^{n+2} чисел:

$$\begin{cases} c_{2j-1} \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = 2^{-1/2} c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right), \\ c_{2j} \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = 2^{-3/2} [c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right) + c_{j+1} \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right)]. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь формулы (19) задают шаг по пачке, а формулы (20) задают переход от одной пачки к другой.

Доказательство Леммы 1.2.

Рассуждения аналогичны доказательству Леммы 1.1. Различия заключаются в следующем. Во-первых, если пачка с номером n не входит в подпоследовательность, по которой проводится разложение, то $S_0^n = S_{2^{n+1}}^n$. Во-вторых, в пачке, по которой проводится разложение, используются все функции, а не только с чётными индексами. Индекс функции, по которой проводится орторекурсивное разложение на шаге k по пачке n , из системы E теперь $\sigma_{2^{n+1}}(k)$.

В-третьих, шагов по пачке стало вдвое больше, поэтому заключительный номер разложения по пачке теперь $k = 2^{n+1}$.

Доказательство Леммы 1.2 завершено.

Подобно формуле (16), вид коэффициентов $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ при разложении по подпоследовательности пачек модифицированной системы следующий:

$$c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = \sum_{m=0, m \in \Lambda}^n 2^{m/2-n/2} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) (f, e_i^m). \quad (21)$$

Зададим алгоритм изменения коэффициентов $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$.

Следствие 1.2. *При орторекурсивном разложении по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера коэффициенты $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$, входящие в представление (21), изменяются следующим образом:*

1. Если $n \in \Lambda$, то на шаге $\left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ полагаем все $\lambda_{ij}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = 0$, где $i, j = 1, \dots, 2^{n+1}$. Таким образом, перед разложением по пачке с номером n к уже существующему набору добавляется массив из 2^{2n+2} нулевых элементов.
2. Если $n \notin \Lambda$, то положим все $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right) = \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$.
3. Если $k \neq 2^{n+1}$ и $n \in \Lambda$, то положим

$$\begin{cases} \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right), & \text{если } j \neq \sigma_{2^{n+1}}(k+1), \\ \lambda_{jj}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = 1, & \text{если } j = \sigma_{2^{n+1}}(k+1), \\ \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) = -\frac{1}{4} \left(\lambda_{i,j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) \right), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (22)$$

Последний случай имеет место при $j = \sigma_{2^{n+1}}(k+1)$ и либо $m \neq n$, либо $i \neq \sigma_{2^{n+1}}(k+1)$.

4. Если $k = 2^{n+1}$, то положим

$$\begin{cases} \lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right) \\ \lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right) \right). \end{cases} \quad (23)$$

Доказательство.

Рассуждения аналогичны доказательству Следствия 1.1. Отличие случая орторекурсивного разложения по подпоследовательности пачек модифицированной системы описано в доказательстве Леммы 1.2. Отметим также тот факт, что из представления (21) нам не требуется определения коэффициентов λ_{ij}^m , где $m \notin \Lambda$.

Доказательство Следствия 1.2 завершено.

Коэффициенты $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ зависят от разлагаемой функции f , в то время как коэффициенты $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ от неё не зависят. В отличие от разложения по классической системе Фабера–Шаудера, нумерация внутри пачек модифицированной системы влияет не только на порядок изменения набора коэффициентов $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$, но и на значения $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right)$ после прохождения пачки разложения.

Наконец, вспомним введённый индекс $\left(\begin{smallmatrix} n \\ k(x) \end{smallmatrix} \right)$. Получим, что при орторекурсивном разложении как по классической, так и по модифицированной системам значение частичной суммы в произвольной точке x зависит не более, чем от двух коэффициентов:

$$S_k^n(x) = c_{k(x)} \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) e_{k(x)}^n(x) + c_{k(x)+1} \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) e_{k(x)+1}^n(x). \quad (24)$$

В данной главе была введена модифицированная система Фабера–Шаудера, а также даны определения двоично–рациональных точек порядка n и пространства ломаных с вершинами в них (D^n) . Введённые обозначения отрезков–носителей (см. формулу (8)) и числа $\eta(n, m)$ (см. формулу (9)), а также представление частичной суммы с помощью индекса $\left(\begin{smallmatrix} n \\ k(x) \end{smallmatrix} \right)$ будут многократно использованы в дальнейшем.

Отметим, что были получены алгоритмы изменения коэффициентов c_j и λ_{ij}^m при орторекурсивных разложениях по системам типа Фабера–Шаудера. Следствие 1.1 и Следствие 1.2 потребуются в дальнейшем для получения оценок на коэффициенты λ_{ij}^m . Результаты Леммы 1.1 и Леммы 1.2 применимы не только для доказательства сходимости орторекурсивных разложений, но и для непосредственной реализации алгоритма разложения по рассматриваемым системам. При вычислении частичных сумм через процесс изменения коэффициентов c_j не требуется находить остаток разложения на каждом шаге. Более того, не требуется хранить информацию об остатке r_k^n и о коэффициентах орторекурсивного разложения $\hat{f}_k^n$. Достаточно хранить только набор из 2^{n+1} коэффициентов $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$.

Глава 2. Сходимость орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера

В настоящей главе исследуются орторекурсивные разложения по классической системе Фабера–Шаудера. Первый раздел этой главы посвящён поточечной сходимости орторекурсивного ряда Фурье во всех точках, не являющихся двоично-рациональными, при разложении непрерывной функции. Во втором разделе доказана сходимость почти всюду при разложении суммируемой функции, а в третьем — сходимость в лебеговых пространствах. Основные результаты главы опубликованы в работах автора [45], [46].

Идея доказательства результатов заключается в следующем. Исходная функция f приближается ломаными l , для которых сходимость орторекурсивного разложения по системе Фабера–Шаудера устанавливается отдельно в первом разделе. Затем выводятся оценки частичных сумм в соответствующих функциональных пространствах, чтобы представить частичную сумму разложения f через частичные суммы разложений l и $f - l$, используя их линейность по функциональному аргументу.

Хотя основные результаты данной главы сформулированы для отрезка $[0; 1]$, в доказательствах будем использовать ломаные из пространств D^n , рассматривая функции на одномерном торе S^1 . Заметим, что пространства $L_p(S^1)$ и $L_p[0; 1]$ могут быть отождествлены. Что касается разложений непрерывных функций, то различие же между случаями $C(S^1)$ и $C[0; 1]$ будет отдельно учтено в первом разделе текущей главы.

2.1 Поточечная сходимость орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера

Данный раздел посвящён доказательству результата о сходимости при разложении непрерывной функции, однако леммы, приведённые здесь, потребуются в дальнейшем и в других разделах. Так, Лемма 2.1 представляет собой важный результат о разложении ломаной по системе Фабера–Шаудера.

Формулировки Леммы 2.2 и Леммы 2.3 не требуют непрерывности разлагаемой функции.

Отметим, что ломаными из пространств D^n сколь угодно близко в $C[0; 1]$ можно приблизить только 1-периодические функции. Пространство D^n обладает удобным свойством: функции из пачки с номером n модифицированной системы E являются базисом в нём. Для того, чтобы рассматривать непериодические ломаные с вершинами в двоично-рациональных точках на отрезке $[0; 1]$, необходимо скорректировать систему E . А именно, вместо функции $e_1^n(x)$ с носителем Δ_1^n нужно рассматривать две функции с носителями соответственно на участке убывания Δ_{1-}^n и возрастания Δ_{1+}^n (8). Обозначим их за $\tilde{e}_1^n(x)$ и $\tilde{e}_{2^{n+1}+1}^n(x)$ и нормируем их в $L_2[0; 1]$. Получим, что их максимум вдвое больше, чем у $e_1^n(x)$ (см. Рисунок 2). Систему, в которой вместо всех функций $e_1^n(x)$ используются пары $\tilde{e}_1^n(x)$ и $\tilde{e}_{2^{n+1}+1}^n(x)$, обозначим за $\tilde{E}$.

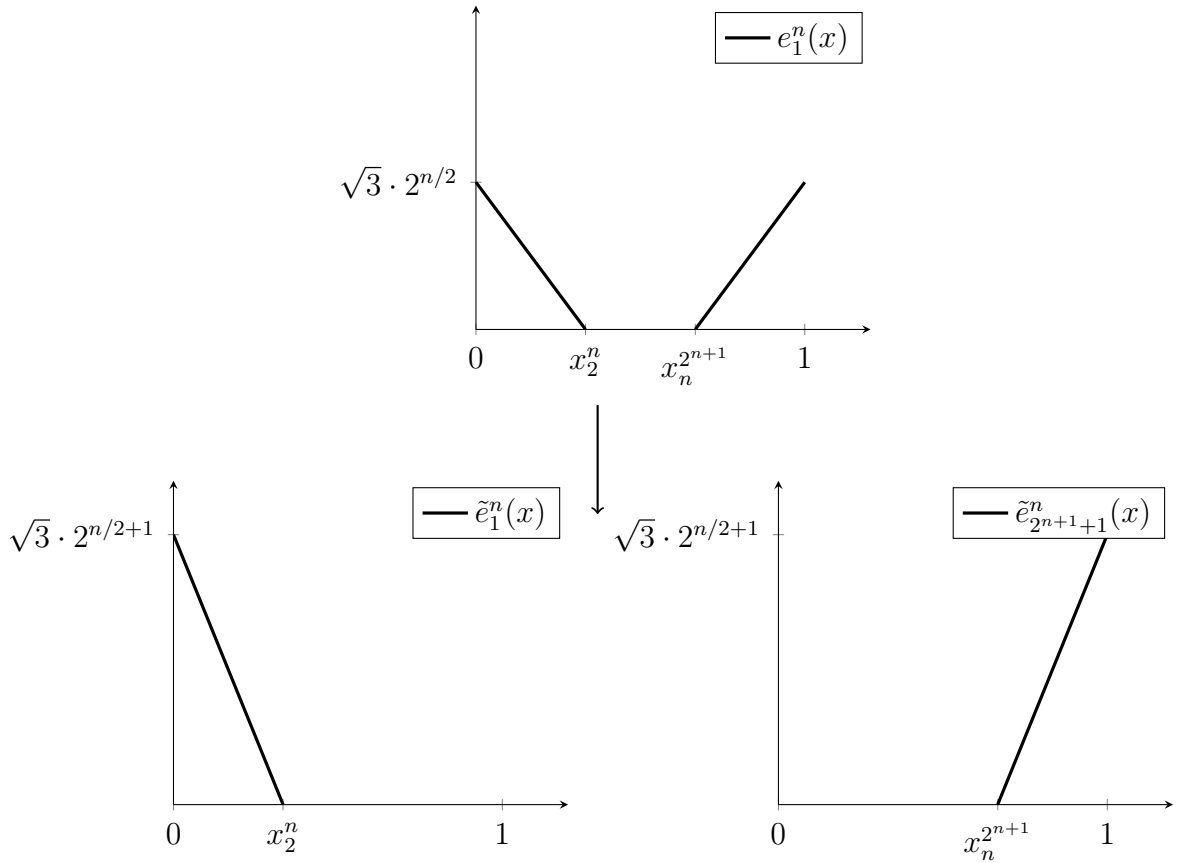


Рисунок 2: Изменение в системе E для получения системы $\tilde{E}$ на отрезке $[0; 1]$.

При орторекурсивном разложении по классической системе Фабера–Шаудера значения частичных сумм на концах отрезка $[0; 1]$ остаются равными нулю. Поэтому $S_k^n(x)$ лежит в пространстве D^n , а рассмотрения системы $\tilde{E}$

требуется только следующий результат о сходимости разложения ломаных.

Лемма 2.1. Пусть для некоторого натурального n функция $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n . Тогда орторекурсивное разложение по классической системе Фабера–Шаудера сходится поточечно к l , кроме, быть может, всех двоично-рациональных точек x_k^n .

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай $l \in D^n$, то есть $l(0) = l(1)$.

Рассмотрим орторекурсивное разложение l . Пусть r_k^N – остаток разложения для $N > n$, r_k^N является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка N , то есть $r_k^N \in D^N$. Разложим r_k^N в D^N по базису из функций пачки с номером N системы E :

$$r_k^N = \sum_{j=1}^{2^{N+1}} d_j e_j^N.$$

Пусть на шаге $k + 1$ по пачке с номером N производится разложение по функции $\phi_{\sigma_{2N}(k+1)}^N(x)$. Пусть $s = 2\sigma_{2N}(k + 1)$ – номер соответствующей функции из пачки системы E . Тогда на шаге орторекурсивного разложения (6) имеем:

$$\hat{f}_{k+1}^N = (r_k^N; e_s^N) = d_s + \frac{d_{s-1}}{4} + \frac{d_{s+1}}{4}. \quad (25)$$

В новом остатке все коэффициенты d_j сохраняются, кроме d_s , который заменяется на $-1/4 \cdot d_{s-1} - 1/4 \cdot d_{s+1}$:

$$r_{k+1}^N = r_k^N - \hat{f}_{k+1}^N \cdot e_s^N = \sum_{j=1, j \neq s}^{2^{N+1}} d_j e_j^N - \frac{d_{s-1} + d_{s+1}}{4} e_s^N.$$

Значит, модуль значения в вершине x_s^N ломаной r_{k+1}^N становится не больше половины модуля значения в каждой из соседних вершин.

$$|r_{k+1}^N(x_s^N)| \leq \frac{1}{2} \max(|r_k^N(x_{s+1}^N)|; |r_k^N(x_{s-1}^N)|). \quad (26)$$

Пусть M – максимум модуля остатка после разложения ломаной $l(x)$ по

пачке с номером n :

$$\|r_0^{n+1}\|_{C(S^1)} = \|r_{2^n}^n\|_{C(S^1)} = M.$$

Фиксируем точку x , не являющуюся двоично-рациональной. При прохождении пачки с номером $N > n$ значение остатка в точке x не превосходит максимума значений в ближайших двоично-рациональных точках:

$$|r_k^N(x)| < \max(|r_k^N(x_{k(x)}^N)|; |r_k^N(x_{k(x)+1}^N)|).$$

После прохождения пачки номера N значение остатка изменится ровно в одной из двух точек $x_{k(x)}^N$ и $x_{k(x)+1}^N$, в той, у которой нижний индекс чётный.

Поскольку x не является двоично-рациональной точкой, то в записи числа x в двоичной системе исчисления имеется бесконечно много 0 и 1 и, как следствие, пар вида 10 и 01.

Рассмотрим первую такую пару после знака n после запятой. Пусть эта пара встречается на знаке N_1 , и пусть для определённости это пара 10. Тогда при прохождении пачки с номером N_1 значение остатка изменится в точке $x_{k(x)}^{N_1}$, а при прохождении пачки номера $N_1 + 1$ значение остатка изменится в точке $x_{k(x)+1}^{N_1+1}$. При этом точка $x_{k(x)+1}^{N_1+1}$ будет являться точкой $x_{k(x)}^{N_1}$, а значит в ней значение изменилось при прохождении предыдущей пачки. По доказанному выше в (26) получаем, что

$$\left| r_{2^{N_1+2}}^{N_1+1} \left(x_{k(x)}^{N_1+1} \right) \right| < \frac{M}{2} \text{ и } \left| r_{2^{N_1+2}}^{N_1+1} \left(x_{k(x)+1}^{N_1+1} \right) \right| < \frac{M}{2}.$$

Следовательно,

$$\left| r_{2^{N_1+2}}^{N_1+1}(x) \right| < \frac{M}{2}.$$

Ищем следующую пару вида 10 или 01 в записи числа x . Пусть это будет на N_2 знаке. Повторяя рассуждения выше, получим, что

$$\left| r_{2^{N_2+2}}^{N_2+1}(x) \right| < \frac{M}{4}.$$

Находим $N_3, N_4, \dots$. Для N_t выполнено

$$\left| r_{2^{N_t+2}}^{N_t+1}(x) \right| < \frac{M}{2^t},$$

поэтому значение остатка в точке x стремится к 0. Следовательно, орторекурсивное разложение ломаной l по классической системе Фабера–Шаудера сходится к $l(x)$ в точке x , не являющейся двоично–рациональной.

В случае $l(0) \neq l(1)$ остатки разложения раскладываются по базису из функций пачки N системы $\tilde{E}$. В связи с нормировкой функций $\tilde{e}_1^n(x)$ и $\tilde{e}_{2^{n+1}+1}^n(x)$ скалярные произведения каждой из них с единственной соседней равны $1/2$. Значит формула (25) изменится для $s = 1, 2, 2^{n+1}, 2^{n+1}+1$. Однако существенно это не влияет на процесс доказательства, поскольку в формуле (26) константа $1/2$ заменится на $3/4$, что всё равно гарантирует убывание остатка.

Доказательство Леммы 2.1 завершено.

Сформулируем следствия Леммы 2.1, которые потребуются в других разделах этой главы.

Следствие 2.1. *Пусть $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично–рациональных точках порядка n . Тогда орторекурсивное разложение l по системе Фабера–Шаудера сходится к l почти всюду.*

Доказательство.

Набор всех двоично–рациональных точек является счетным множеством, значит имеет меру нуль.

Доказательство Следствия 2.1 завершено.

Также для ломаных имеет место сходимостъ в лебеговых пространствах.

Следствие 2.2. *Пусть $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично–рациональных точках порядка n . Тогда орторекурсивное разложение l по системе Фабера–Шаудера сходится к l в $L_p[0; 1]$ для всех $1 \leq p < \infty$.*

Доказательство.

Последовательность $|r_k^N|^p$, начиная с $N > n$, ограничена суммируемой функцией M^p и сходится к 0 почти всюду на S^1 . По теореме Лебега (см. [41, гл.3, §16]) получаем, что

$$\int_{S^1} |r_k^N|^p d\mu \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Доказательство Следствия 2.2 завершено.

Перейдём теперь к оценкам частичных сумм. Вначале уточним вид коэффициентов $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$, задаваемый соотношением (16). Заметим, что достаточно рассмотреть линейные комбинации, содержащие лишь по одному скалярному произведению со функциями e_i^m из каждой пачки. Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма 2.2. *При орторекурсивном разложении суммируемой функции f по классической системе Фабера–Шаудера для каждого j и фиксированного $m \leq n$ все коэффициенты $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ являются нулевыми, кроме, быть может, одного. Таким образом, коэффициент $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ представим в виде*

$$c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = \sum_{m=0}^n 2^{m/2-n/2} \lambda_{i(j),j}^m(f; e_{i(j)}^m),$$

где $i(j)$ выбирается так, что отрезок Δ_j^n лежит в $\Delta_{i(j)}^m$ и коэффициент $\lambda_{i(j),j}^m$ может быть ненулевым.

Доказательство.

Поясним выбор введённого индекса $i(j)$. Отрезки-носители Δ_j^n были описаны формулой (8). Из неё видно, что при $m < n$ отрезок меньшей длины Δ_j^n лежит ровно в двух отрезках большей длины вида Δ_i^m . Один из них имеет нечётный индекс i , а значит заведомо $\lambda_{ij}^m = 0$. Обозначим другой, чётный, индекс как $i(j)$. Отметим, что выбор $i(j)$ зависит от m (номера пачки соответствующей функции в скалярном произведении) и от n (номера пачки текущего разложения). Для $m = n$ положим $i(j) = j$.

Правила изменения набора $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ для $m < n$ были сформулированы в Следствии 1.1. Составим матрицу $G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = (\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right))_{i,j}$ для каждого m . Все нечётные строки G^m нулевые. По индукции покажем, что в чётных строках ненулевые элементы идут подряд, причём для строки i и пачки разложения n условие на индексы j ненулевых элементов следующее.

$$\text{Если } \lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) \neq 0, \text{ то } j \in \{2^{n-m}i - 2^{n-m+1} + 2, \dots, 2^{n-m}i\}. \quad (27)$$

Заметим, что условие (27) означает, что для всех j из указанного выше набора $\Delta_j^n \subseteq \Delta_i^m$.

База. При $n = m$ матрица $G^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ вводится как нулевая. При разложении по пачке с номером n матрица $G^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ заполняется по столбцам, согласно (17),

и для $k = 2^n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Условие (27) для матрицы (28) выполнено.

Переход от одной пачки к другой. При переходе от одной пачки к другой нечётные строки остаются нулевыми. Пусть $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)$ является первым ненулевым элементом в строке i . Тогда из (27) по предположению индукции имеем

$$j = 2^{n-m}i - 2^{n-m+1} + 2.$$

Согласно формулам (18) перехода от одной пачки к другой, получим, что число

$$2j - 2 = 2^{(n+1)-m}i - 2^{(n+1)-m+1} + 2$$

является новым индексом первого ненулевого элемента. Аналогично, для индекса $j = 2^{n-m}i$ последнего ненулевого элемента в строке при переходе к другой пачке имеем, что новый индекс последнего ненулевого элемента равен $2j = 2^{(n+1)-m}i$.

Шаг по пачке. Заметим, что согласно (27) номера j ненулевых элементов в разных строках не пересекаются и не стоят рядом. Действительно, последний ненулевой элемент в строке i имеет индекс $2^{n-m}i$, строка $i + 1$ — нулевая, а первый ненулевой элемент в строке $i + 2$ с индексом

$$2^{n-m}(i + 2) - 2^{n-m} = 2^{n-m}i + 2.$$

Во время шага по пачке (17) столбец с чётным номером матрицы G^m заменяется на сумму $-1/4$ столбца слева и $-1/4$ столбца справа. Нулевые столбцы имеют нечётные номера $2^{n-m}i + 1$, следовательно, не изменяются, и условие (27) сохраняется.

Доказательство Леммы 2.2 завершено.

Теперь получим оценку суммы всех коэффициентов λ_{ij}^m , входящих в коэффициент $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$. Сформулируем этот результат с использованием введённого выше обозначения индекса $i(j)$, введённого в Лемме 2.2.

Лемма 2.3. *При орторекурсивном разложении суммируемой функции f по классической системе Фабера–Шаудера для каждого коэффициента $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ сумма модулей ненулевых коэффициентов λ_{ij}^m , стоящих при скалярных произведениях f с функциями системы Фабера–Шаудера ограничена. Точнее, для каждого $j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ имеет место неравенство*

$$\sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j),j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) \right| < 2.$$

Доказательство.

Докажем индукцией по n .

База. После прохождения пачки с номером 0 коэффициенты λ_{ij}^0 следующие:

$$\lambda_{1,1}^0 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = \lambda_{1,2}^0 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = \lambda_{2,1}^0 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = 0, \quad \lambda_{2,2}^0 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = 1.$$

Переход от одной пачки к другой. При переходе от одной пачки к другой значения всех коэффициентов $\lambda_{ij}^{n+1} \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ равны 0. Используем полученные в Следствии 1.1 правила перехода от одной пачки к другой (18). Для нечётных индексов получим

$$\sum_{m=0}^{n+1} \left| \lambda_{i(2j-1),2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right| = \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j-1),2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right|.$$

Введённый индекс $i(j)$ зависит от рассматриваемой пачки разложения. При необходимости будем выделять её номер как $i(j)_n$. Из определения $i(j)$ получаем, что $\Delta_j^n \subseteq \Delta_{i(j)_n}^m$ и $\Delta_{2j-1}^{n+1} \subset \Delta_{i(2j-1)_{n+1}}^m$. Поскольку $\Delta_{2j-1}^{n+1} \subset \Delta_j^n$ имеем, что $i(j)_n = i(2j-1)_{n+1}$, то есть эти индексы задают один и тот же отрезок $\Delta_{i(2j-1)_{n+1}}^m = \Delta_{i(j)_n}^m$. Значит, применяя предположение индукции, получим

$$\sum_{m=0}^{n+1} \left| \lambda_{i(2j-1),2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right| = \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j-1)_{n+1},j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| = \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j),j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| < 2.$$

Аналогично, для чётных индексов имеем

$$\sum_{m=0}^{n+1} \left| \lambda_{i(2j),2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j)_{n+1},j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j)_{n+1},j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right|. \quad (29)$$

В данном случае $\Delta_{2j}^{n+1} = \Delta_j^n \cap \Delta_{j+1}^n$. При этом $\Delta_j^n \subseteq \Delta_{i(j)_n}^m$ и $\Delta_{j+1}^n \subseteq \Delta_{i(j+1)_n}^m$.

Если индексы $i(j)_n$ и $i(j+1)_n$ совпадают, то $i(j)_n = i(j+1)_n = i(2j)_{n+1}$. Пусть индексы $i(j)_n$ и $i(j+1)_n$ различны. Пусть для определённости индекс $i(j+1)_n$ чётный, а $i(j)_n$ — нечётный. Тогда индекс $i(2j)_{n+1}$ совпадает с $i(j+1)_n$ и не совпадает с $i(j)_n$. Тогда по Лемме 2.2 только коэффициент $\lambda_{i(j),j}^m$ может быть ненулевым, а значит

$$\lambda_{i(2j)_{n+1},j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) = 0.$$

Но при этом и

$$\lambda_{i(j)_n,j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) = 0$$

как коэффициент с нечётным индексом i . Заключаем, что

$$\sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j)_{n+1},j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| = \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j),j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| < 2.$$

Аналогично

$$\sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j)_{n+1},j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| = \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j+1),j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) \right| < 2.$$

Подставляем полученные неравенства в (29) и получаем, что

$$\sum_{m=0}^{n+1} \left| \lambda_{i(2j),2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right| < 2. \quad (30)$$

Шаг по пачке. Для всех $m < n$ коэффициенты $\lambda_{i(2j),2j}^m$ с чётными индексами изменяются ровно один раз по формулам (17) в процессе прохождения всей пачки. Коэффициенты $\lambda_{i(2j-1),2j-1}^m$ с нечётными индексами не изменяются. При этом

$$\lambda_{i(2j),2j}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) = 1 \text{ и } \lambda_{i(2j+1),2j+1}^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right) = 0.$$

Таким образом, сумма коэффициентов с нечётными индексами при прохождении всей пачки не изменилась:

$$\sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j+1), 2j+1}^m \binom{n}{2^n} \right| = \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j+1), 2j+1}^m \binom{n}{0} \right| < 2.$$

Сумма коэффициентов с чётными индексами изменилась, и имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j), 2j}^m \binom{n}{2^n} \right| &\leq \sum_{m=0}^{n-1} \left| \lambda_{i(2j), 2j}^m \binom{n}{2^n} \right| + \lambda_{i(2j), 2j}^n \binom{n}{2^n} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{n-1} \left| \lambda_{i(2j), 2j-1}^m \binom{n}{0} \right| + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{n-1} \left| \lambda_{i(2j), 2j+1}^m \binom{n}{0} \right| + 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Отметим, что по Лемме 2.2 либо $i(2j) = i(2j-1)$, либо $\lambda_{i(2j), 2j-1}^m = 0$, так как только $\lambda_{i(2j-1), 2j-1}^m$ может быть ненулевым. Получим, что

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left| \lambda_{i(2j), 2j-1}^m \binom{n}{0} \right| \leq \sum_{m=0}^{n-1} \left| \lambda_{i(2j-1), 2j-1}^m \binom{n}{0} \right| < 2.$$

Аналогично

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left| \lambda_{i(2j), 2j+1}^m \binom{n}{0} \right| \leq \sum_{m=0}^{n-1} \left| \lambda_{i(2j+1), 2j+1}^m \binom{n}{0} \right| < 2.$$

Подставляя полученные неравенства в (31), имеем

$$\sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(2j), 2j}^m \binom{n}{2^n} \right| < \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 1 = 2. \quad (32)$$

Теперь для фиксированного j рассмотрим произвольный шаг k в пачке n . Если столбец j ещё не обновлялся, то

$$\lambda_{i(j), j}^m \binom{n}{k} = \lambda_{i(j), j}^m \binom{n}{0},$$

поэтому нужная оценка следует из (30).

При прохождении всей пачки обновляются только чётные столбцы, и каж-

дый такой столбец обновляется ровно один раз. Поэтому если столбец j уже обновился, то

$$\lambda_{i(j),j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = \lambda_{i(j),j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right),$$

и нужная оценка следует из (32).

Доказательство Леммы 2.3 завершено.

Теперь перейдём к доказательству основного результата данного раздела — теоремы о поточечной сходимости.

Теорема 2.1. *Пусть проводится орторекурсивное разложение непрерывной на отрезке $[0; 1]$ функции f по классической системе Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f во всех точках, кроме, быть может, двоично-рациональных. Иными словами, орторекурсивный ряд Фурье сходится поточечно на множестве*

$$[0; 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}+1} \{x_k^n\}.$$

Доказательство.

Максимальным значением функций e_k^n из пачки n является число $\sqrt{3} \cdot 2^{n/2}$. Значение ломаной, представляющей частичную сумму в произвольной точке x , по формуле (13) не превосходит наибольшего из значения в вершинах. Поэтому присутствует следующая оценка модуля частичной суммы:

$$|S_k^n(x)| < \sqrt{3} \cdot 2^{n/2} \max_{1 \leq j \leq 2^{n+1}} |c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)|. \quad (33)$$

С помощью неравенства Гёльдера (см. [41, гл. 4, §22]) оценим скалярные произведения через C -норму функции f :

$$|(f; e_i^m)| \leq \|f\|_{L_\infty[0;1]} \cdot \|e_i^m\|_{L_1[0;1]} = \sqrt{3} \cdot 2^{-1-m/2} \|f\|_{C[0;1]}.$$

Тогда для коэффициента $c_j \binom{n}{k}$ по Лемме 2.3 выполнено неравенство

$$\begin{aligned}
|c_j^n| &< \sum_{m=0}^n 2^{m/2-n/2} \cdot \left| \lambda_{i(j),j}^m \right| \cdot \left| (f; e_{i(j)}^m) \right| \leq \\
&\leq 2^{-n/2} \cdot \|f\|_{C[0;1]} \cdot \sqrt{3} \cdot \sum_{m=0}^n 2^{m/2} \cdot 2^{-1-m/2} \cdot \left| \lambda_{i(j),j}^m \right| \leq \\
&\leq 2^{-1-n/2} \cdot \|f\|_{C[0;1]} \cdot \sqrt{3} \cdot \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(j),j}^m \right| \leq \sqrt{3} \cdot 2^{-n/2} \cdot \|f\|_{C[0;1]}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученное неравенство в (33), получаем оценку нормы частичной суммы

$$\|S_k^n(f)\|_{C[0;1]} < 3\|f\|_{C[0;1]},$$

которая выполнена для любой непрерывной на отрезке $[0; 1]$ функции f .

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для некоторого натурального N существует ломаная l с вершинами в двоично-рациональных точках порядка N , такая, что

$$\|f - l\|_{C[0;1]} < \varepsilon.$$

Тогда по Лемме 2.1 для всякой точки x , не являющейся двоично-рациональной, существует натуральное число $M > N$ такое, что для всех $n > M$ и для всех $k = 1, \dots, 2^n$ имеет место неравенство

$$|l(x) - S_k^n(l; x)| < \varepsilon.$$

Тогда для всякой точки x , не являющейся двоично-рациональной, выполнено неравенство

$$\begin{aligned}
|f(x) - S_k^n(f; x)| &\leq |(f - l)(x) - S_k^n((f - l); x)| + |l(x) - S_k^n(l; x)| < \\
&< |f(x) - l(x)| + 3|f(x) - l(x)| + \varepsilon < 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 2.1 завершено.

2.2 Сходимость почти всюду орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера

В данном разделе представлен результат о сходимости почти всюду орторекурсивного ряда при разложении произвольной интегрируемой по Лебегу функции. Доказательство использует в том числе результаты предыдущего раздела, в частности, опирается на Следствие 2.1, Лемму 2.2 и Лемму 2.3. С помощью последней получим оценку значений частичных сумм, которую сформулируем в виде леммы.

Лемма 2.4. *Пусть функция f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$. Тогда модуль значения в любой точке любой частичной суммы орторекурсивного разложения f по классической системе Фабера–Шаудера не превосходит умноженного на некоторую константу значения максимальной функции Харди–Литлвуда (10) в этой точке. Точнее,*

$$|S_k^n(f; x)| < 12f^M(x)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}^+$, $k = 1, 2, \dots, 2^n$ и $x \in S^1$.

Доказательство.

Оценим скалярные произведения функции f с функциями системы Фабера–Шаудера:

$$|(f; e_i^m)| \leq \sqrt{3} \cdot 2^{m/2} \cdot \int_{\Delta_i^m} |f| d\mu. \quad (34)$$

Используем данное неравенство, а также полученный в Лемме 2.2 вид коэффициентов $c_j \left(\frac{n}{k} \right)$ и результат Леммы 2.3 для оценки коэффициента $c_{k(x)} \left(\frac{n}{k} \right)$ через значение максимальной функции Харди–Литлвуда (10) в фиксирован-

ной точке x :

$$\begin{aligned}
|c_{k(x)} \binom{n}{k}| &\leq \sum_{m=0}^n 2^{m/2-n/2} \cdot \left| \lambda_{i(k(x)), k(x)}^m \right| \cdot \left| (f; e_{i(k(x))}^m) \right| = \\
&= 2^{-n/2} \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(k(x)), k(x)}^m \right| \sqrt{3} \left(\frac{1}{2^{-m}} \int_{\Delta_{i(k(x))}^m} |f| d\mu \right) \leq \\
&\leq \sqrt{3} \cdot 2^{-n/2} f^M(x) \sum_{m=0}^n \left| \lambda_{i(k(x)), k(x)}^m \right| \leq \sqrt{3} \cdot 2^{1-n/2} f^M(x).
\end{aligned}$$

Здесь используем, что

$$\frac{1}{2^{-m}} \int_{\Delta_{i(k(x))}^m} |f| d\mu \leq f^M(x).$$

Это неравенство следует из определения максимальной функции Харди–Литлвуда (10), поскольку $x \in \Delta_{k(x)}^n$ и по определению $i(k(x))$ имеем $\Delta_{k(x)}^n \subseteq \Delta_{i(k(x))}^m$, значит $x \in \Delta_{i(k(x))}^m$.

Аналогичная оценка есть и для коэффициента $c_{k(x)+1} \binom{n}{k}$:

$$|c_{k(x)+1} \binom{n}{k}| \leq \sqrt{3} \cdot 2^{1-n/2} f^M(x)$$

Значение частичной суммы в произвольной точке x можно получить по формуле (24). Максимальным значением функций e_k^n из пачки n является число $\sqrt{3} \cdot 2^{n/2}$. Поэтому присутствует следующая оценка модуля частичной суммы:

$$|S_k^n(x)| < \sqrt{3} \cdot 2^{n/2} (|c_{k(x)} \binom{n}{k}| + |c_{k(x)+1} \binom{n}{k}|).$$

Подставляя в неё неравенства для коэффициентов $c_{k(x)} \binom{n}{k}$ и $c_{k(x)+1} \binom{n}{k}$, получаем требуемое неравенство

$$|S_k^n(f; x)| < 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{1-n/2} f^M(x) \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{n/2} = 12 f^M(x).$$

Доказательство Леммы 2.4 завершено.

Перейдём к доказательству основного утверждения данного раздела.

Теорема 2.2. Пусть проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_1[0; 1]$, по системе Фабера–Шауде–

ра. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f почти всюду на отрезке $[0; 1]$.

Доказательство.

Согласно критерию сходимости почти всюду (см. [41, гл. 2, §13]), сходимость почти всюду на S^1 частичных сумм $S_k^n(f; x)$ к $f(x)$ эквивалентна следующему утверждению: для любого $\varepsilon > 0$ верно равенство

$$\lim_{\substack{(n_0) \\ (k_0) \rightarrow \infty}} \mu \left(\bigcup_{\substack{(n) \\ (k) = (n_0) \\ (k_0)}}^{\infty} G_k^n \right) = 0$$

где G_k^n — множество $x \in S^1$, таких, что $|S_k^n(f; x) - f(x)| > \varepsilon$, а μ — мера Лебега на отрезке $[0; 1]$. Докажем это утверждение.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для любого натурального числа j существует число $N_0(j)$ и ломаная с вершинами в двоично-рациональных точках $l_j \in D^{N_0}$ такая, что

$$\|f - l_j\|_{L_1(S^1)} < \frac{\varepsilon^2}{2^j}. \quad (35)$$

Полученная последовательность ломаных $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ в $L_1(S^1)$.

По Следствию 2.1 последовательность частичных сумм $S_k^n(l_j; x)$ сходится к ломаной l_j почти всюду на S^1 . По теореме Егорова (см. [41, гл. 2, §13]) существует такое множество $H_j \subset S^1$, что мера $\mu(H_j) < \varepsilon/2^j$ и на множестве $S^1 \setminus H_j$ последовательность $S_k^n(l_j; x)$ сходится к l_j равномерно. Таким образом, нами была введена последовательность пар $\{(l_j, S^1 \setminus H_j)\}_{j=1}^{\infty}$, состоящих из ломаной и множества равномерной сходимости орторекурсивного разложения для неё. Отметим, что существует зависящий от j индекс $(\frac{N}{K})_j$ такой, что для всех последующих индексов $(\frac{n}{k}) > (\frac{N}{K})_j$ неравенство

$$|S_k^n(l_j; x) - l_j(x)| < \varepsilon/3 \quad (36)$$

выполняется для всех $x \in S^1 \setminus H_j$. А значит, для достаточно больших индексов $(\frac{n}{k})$ существует натуральное число j , такое, что выполнено неравенство (36) для всех больших индексов на множестве $S^1 \setminus H_j$.

Теперь поставим в соответствие каждому достаточно большому индексу $(\frac{n}{k})$ некоторую пару $(l_j, S^1 \setminus H_j)$. Пусть начальный индекс $(\frac{n_0}{k_0})$ и натуральное число j_0 выбраны такими, чтобы неравенство (36) выполнялось для $j = j_0$,

всех индексов $\binom{n}{k} \geq \binom{n_0}{k_0}$ и при $x \in S^1 \setminus H_{j_0}$. Затем для каждого индекса $\binom{n}{k} > \binom{n_0}{k_0}$ выберем число j следующим образом: если для индекса $\binom{n}{k-1}$ (или $\binom{n}{2^n}$) было выбрано число j , то для индекса $\binom{n}{k}$ (или $\binom{n+1}{0}$) выберем число $j+1$, если неравенство (36) выполнено для всех $x \in S^1 \setminus H_{j+1}$ и для всех индексов, начиная с $\binom{n}{k}$. Иначе, выберем число j . В таком случае мы получим неубывающую стремящуюся к бесконечности числовую последовательность j , поставленную в соответствие последовательности индексов $\binom{n}{k}$.

Введем следующие множества:

$$\begin{cases} H_k^n := \{x \in S^1 : |S_k^n(l_j; x) - l_j(x)| > \varepsilon/3\}, \\ I_k^n := \{x \in S^1 : |S_k^n(f - l_j; x)| > \varepsilon/3\}, \\ J_k^n := \{x \in S^1 : |l_j(x) - f(x)| > \varepsilon/3\}, \\ F_k^n := \{x \in S^1 : 12(f - l_j)^M(x) > \varepsilon/3\}. \end{cases} \quad (37)$$

Здесь $(f - l_j)^M$ является максимальной функцией Харди-Литлвуда (10) для функции $f(x) - l_j(x)$. Заметим, что J_k^n и F_k^n напрямую зависят только от j , поэтому обозначим также J_k^n как J_j и F_k^n как F_j .

Частичные суммы линейны по функциональному аргументу. Поэтому

$$|S_k^n(f; x) - f(x)| \leq |S_k^n(l_j; x) - l_j(x)| + |S_k^n(f - l_j; x)| + |l_j(x) - f(x)|.$$

Таким образом, применяя введённые в (37) множества, получим, что

$$G_k^n = \{x \in S^1 : |S_k^n(f; x) - f(x)| > \varepsilon\} \subseteq H_k^n \cup I_k^n \cup J_k^n.$$

Номер j был выбран так, чтобы выполнялось неравенство (36) на $S^1 \setminus H_j$. Таким образом, $H_k^n \subset H_j$.

Функция $(f - l_j)$ интегрируема по Лебегу на S^1 , поэтому по Лемме 2.4 частичные суммы $S_k^n(f - l_j; x)$ удовлетворяют неравенству

$$|S_k^n(f - l_j; x)| \leq 12(f - l_j)^M(x).$$

Отсюда, $I_k^n \subseteq F_k^n$ и $G_k^n \subseteq F_k^n \cup J_k^n \cup H_k^n$.

Рассмотрим объединение:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}}^{\infty} G_k^n &\subseteq \bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}}^{\infty} (F_k^n \cup J_k^n \cup H_k^n) \subseteq \\ &\subseteq \left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} F_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} J_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} H_j \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Ломаная l_j была выбрана так, чтобы выполнялось неравенство (35) на L_1 -норму. Поэтому для меры множества J_j по неравенству Чебышёва (см. [41, гл. 3, §17]) верна оценка

$$\mu(J_j) = \mu(\{x \in S^1 : |l_j(x) - f(x)| > \varepsilon/3\}) < \frac{3\varepsilon}{2^j}. \quad (39)$$

Воспользуемся свойством функции Харди–Литлвуда (12) и получим неравенство для меры множества F_j

$$\begin{aligned} \mu(F_j) &= \mu(\{x \in S^1 : |(f - l_j)^M(x)| > \varepsilon/36\}) \leq \\ &\leq \frac{5 \cdot 36}{\varepsilon} \|f - l_j\|_{L_1(S^1)} \leq \frac{180}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^j} = \frac{180\varepsilon}{2^j}. \end{aligned} \quad (40)$$

Множество H_j было выбрано так, чтобы его мера удовлетворяла неравенству $\mu(H_j) < \varepsilon/2^j$. Рассмотрим меру объединения (38). Используя неравенства (39) и (40), а также оценку меры множества H_j получаем, что

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}}^{\infty} G_k^n\right) &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \mu(F_j) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \mu(J_j) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \mu(H_j) \leq \\ &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{180\varepsilon}{2^j} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{3\varepsilon}{2^j} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \frac{184\varepsilon}{2^{j_0-1}}. \end{aligned}$$

Последовательность j была выбрана таким образом, чтобы при стремлении $\binom{n_0}{k_0}$ к бесконечности индекс j_0 также стремился к бесконечности. Отсюда заключаем, что

$$\lim_{\binom{n_0}{k_0} \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}}^{\infty} G_k^n\right) = \lim_{j_0 \rightarrow \infty} \frac{184\varepsilon}{2^{j_0-1}} = 0.$$

Доказательство Теоремы 2.2 завершено.

2.3 Сходимость орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера в лебеговых пространствах

Данный раздел посвящён сходимости по нормам пространств $L_p[0; 1]$. Из утверждения Теоремы 2.2 можно получить сходимость в $L_p[0; 1]$ для случая $p \neq 1$. Для доказательства сходимости в лебеговом пространстве $L_1[0; 1]$ требуется дополнительная оценка L_1 -норм частичных сумм.

Введём определение максимальной строчной нормы. Подробнее о нормах матриц см. [42, гл. XIV, §2].

Определение 8. Пусть $\mathcal{A}$ — числовая матрица размера $m \times n$. Максимальной строчной нормой матрицы $\mathcal{A}$ называется число

$$\|\mathcal{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Прежде чем перейти к оценке норм частичных сумм, установим порядок роста сумм (по j) коэффициентов $\lambda_{ij}^m \left(\frac{n}{k} \right)$.

Лемма 2.5. При орторекурсивном разложении суммируемой функции f по классической системе Фабера–Шаудера для каждой функции e_i^m сумма по j модулей числовых коэффициентов $\lambda_{ij}^m \left(\frac{n}{k} \right)$, стоящих при скалярных произведениях f с функцией системы Фабера–Шаудера e_i^m в коэффициентах $c_j \left(\frac{n}{k} \right)$, растёт не быстрее, чем $O((3/2)^{n-m})$. Точнее, для каждого $i = 2, 4, \dots, 2^{m+1}$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \left(\frac{n}{k} \right)| \leq 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m-1},$$

а после прохождения всей пачки имеем

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \left(\frac{n}{2^n} \right)| \leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}.$$

Доказательство.

В Лемме 2.2 мы рассмотрели матрицу $G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = (\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right))_{i,j}$ для каждого m . Используем её вновь и по индукции покажем, что максимальная строчная норма удовлетворяет неравенству

$$\|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)\|_\infty \leq 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m-1}. \quad (41)$$

Более того, для $k = 2^n$ нужно доказать, что

$$\|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)\|_\infty \leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}. \quad (42)$$

База. При $n = m$ матрица $G^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ вводится как нулевая. При прохождении пачки с номером n матрица заполняется по столбцам и для $k = 2^n$ имеет вид (28) и её максимальная строчная норма удовлетворяет (42), а именно:

$$\|G^n \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)\|_\infty = 1.$$

Переход от одной пачки к другой. Пусть выполнено предположение индукции (42). При переходе от одной пачки к другой (18) число столбцов увеличивается вдвое, причём новые столбцы с нечётными номерами — это все старые столбцы, а новые столбцы с чётными номерами получаются как средние арифметические соседних столбцов. Следовательно, норма новой матрицы

$$\begin{aligned} \|G^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 2^{m+1}} \sum_{j=1}^{2^{n+2}} |\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq 2^{m+1}} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)| = \\ &= 2 \|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)\|_\infty \leq 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}, \end{aligned}$$

что удовлетворяет (41).

Шаг по пачке. Согласно формулам (17) изменения коэффициентов λ_{ij}^m , после прохождения всей пачки столбцы с нечётными номерами сохранятся, а столбцы с чётными номерами получатся как половина среднего арифметического соседних, взятых с противоположным знаком. При этом соседние, нечётные столбцы не изменяются с предыдущей пачки. Вновь воспользуемся

предположением индукции (42) и оценим

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)| &\leq \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)| + \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)| \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)| + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{2^n} (|\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)| + |\lambda_{i,2j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)|) \leq \\
&\leq \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)| \leq \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{2^n} |\lambda_{i,j}^m \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ 2^{n-1} \end{smallmatrix} \right)| \leq \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1-m} = \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}.
\end{aligned}$$

Получаем, что справедливо неравенство

$$\|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^n \end{smallmatrix} \right)\|_\infty \leq \frac{3}{2} \|G^m \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ 2^{n-1} \end{smallmatrix} \right)\|_\infty \leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m}.$$

На каждом шаге по пачке изменяется ровно один чётный столбец, а все нечётные столбцы остаются неизменными. При этом для любого j , согласно формулам (18) и (17), имеем

$$\lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ 2^{n-1} \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ 2^{n-1} \end{smallmatrix} \right) \right),$$

а после обработки этого столбца

$$\lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = -\frac{1}{4} \left(\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,2j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right) = -\frac{1}{4} \left(\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ 2^{n-1} \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,j+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ 2^{n-1} \end{smallmatrix} \right) \right).$$

Следовательно, на произвольном шаге k модуль изменённого чётного элемента уменьшается вдвое, а остальные элементы строки не изменяются. Значит, имеет место неравенство

$$\|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)\|_\infty \leq \|G^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right)\|_\infty \leq 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{n-m-1}.$$

Доказательство Леммы 2.5 завершено.

Теперь мы можем оценить L_1 -норму частичных сумм орторекурсивного разложения через норму разлагаемой функции.

Лемма 2.6. *Пусть функция f принадлежит лебегову пространству $L_1[0; 1]$. Тогда норма в $L_1[0; 1]$ любой частичной суммы орторекурсивного*

разложения f по классической системе Фабера–Шаудера не превосходит нормы в $L_1[0; 1]$ функции $9f$. Другими словами,

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_1[0;1]} < 9\|f\|_{L_1[0;1]}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и $k = 1, 2, \dots, 2^n$.

Доказательство.

Используя разложение (13) частичной суммы по базису пространства D^n , получим оценку L_1 -нормы частичной суммы

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_1[0;1]} \leq \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |c_j| \cdot \|e_j^n\|_{L_1[0;1]} = \sqrt{3} \cdot 2^{-1-n/2} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |c_j|. \quad (43)$$

С помощью Леммы 2.5 оценим сумму модулей коэффициентов c_j . Воспользуемся тем, что $|(f; e_i^m)| \leq (|f|; e_i^m)$ и

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}} e_i^m(x) = \sqrt{3} \cdot 2^{m/2}$$

для всех $x \in [0; 1]$. Получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |c_j| &\leq \sum_{j=1}^{2^{n+1}} \sum_{m=0}^n 2^{m/2-n/2} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{ij}^m| (|f|; e_i^m) \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^n 2^{-n/2} \cdot 2^{m/2} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} (|f|; e_i^m) \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m| \leq \\ &\leq 2 \cdot 2^{-n/2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \sum_{m=0}^n 2^{m/2} \left(\frac{3}{2}\right)^{-m} \left(|f|; \sum_{i=1}^{2^{m+1}} e_i^m\right) \leq \\ &\leq 2\sqrt{3} \cdot 2^{-n/2} \left(\frac{3}{2}\right)^n \|f\|_{L_1[0;1]} \cdot \sum_{m=0}^n \left(\frac{4}{3}\right)^m \leq \\ &\leq 6\sqrt{3} \frac{3^n}{(2\sqrt{2})^n} \cdot \frac{4^n}{3^n} \cdot \|f\|_{L_1[0;1]} \leq 6\sqrt{3} \cdot 2^{n/2} \|f\|_{L_1[0;1]}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (43), заключаем, что

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_1[0;1]} \leq 9\|f\|_{L_1[0;1]}.$$

Доказательство Леммы 2.6 завершено.

Перейдём к доказательству теоремы о сходимости в лебеговых пространствах.

Теорема 2.3. Пусть $1 \leq p < \infty$ и проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_p[0; 1]$, по системе Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f по норме пространства $L_p[0; 1]$.

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай $1 < p < \infty$.

Поскольку мера отрезка $[0; 1]$ конечна, то пространство $L_p[0; 1]$ вложено в пространство $L_1[0; 1]$ (см. [41, гл. 4, §22]). Значит, можно считать, что f лежит в $L_1(S^1)$ и для f справедлива Лемма 2.4. При этом для максимальной функции Харди–Литлвуда выполнено неравенство (11). Получаем, что последовательность $|S_k^n(f; x) - f(x)|^p$ ограничена суммируемой функцией $|f(x) + 12f^M(x)|^p$. По Теореме 2.2 данная последовательность сходится к нулю почти всюду. Значит, по теореме Лебега (см. [41, гл. 3, §16]) заключаем, что

$$\|f - S_k^n(f; x)\|_{L_p[0;1]} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим теперь случай $p = 1$.

Пространство ломаных

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} D^n$$

с вершинами в двоично-рациональных точках всюду плотно в пространстве $L_1(S^1)$. Используем этот факт и Лемму 2.6 для доказательства теоремы.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для некоторого натурального N существует ломаная l с вершинами в двоично-рациональных точках порядка N , такая, что

$$\|f - l\|_{L_1[0;1]} < \varepsilon.$$

По Следствию 2.2 существует натуральное число $M > N$ такое, что для всех $n > M$ и для всех $k = 1, \dots, 2^n$ выполнено

$$\|l(x) - S_k^n(l; x)\|_{L_1[0;1]} < \varepsilon.$$

Тогда имеем оценку нормы остатка:

$$\begin{aligned}\|f - S_k^n(f)\|_{L_1[0;1]} &\leq \|(f - l) - S_k^n(f - l)\|_{L_1[0;1]} + \|l - S_k^n(l)\|_{L_1[0;1]} < \\ &< \|(f - l)\|_{L_1[0;1]} + 9 \|(f - l)\|_{L_1[0;1]} + \varepsilon < 11\varepsilon.\end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 2.3 завершено.

Глава 3. Сходимость орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера

В настоящей главе приводятся результаты о сходимости орторекурсивного ряда Фурье при разложении функции по подпоследовательности пачек модифицированной системы с произвольной нумерацией внутри каждой пачки. Первый раздел посвящён разложению непрерывной функции и равномерной сходимости орторекурсивного ряда. Во втором разделе исследуется сходимость почти всюду при разложении суммируемой функции, а в третьем – сходимость в лебеговых пространствах. Основные результаты главы опираются на работу [43] (совместной автора и А.К. Паунова) и работу автора [44].

Как и в случае классической системы, при доказательстве результатов разлагаемая функция f приближается ломаными l . Для разложения ломаных при этом имеет место равномерная сходимость. Частичная сумма разложения f представляется через сумму частичных сумм разложений $f - l$ и l . Необходимо получить оценки значений и норм частичных сумм. Для оценки значения частичной суммы в точке через максимальную функцию Харди–Литлвуда во втором разделе данной главы вводится определение α -дальности. Оно характеризует влияние коэффициента λ_{ij}^m в представлении частичной суммы через формулы (24) и (21) на значение частичной суммы в заданной точке.

Основные результаты данной главы сформулированы для функций, определённых на одномерном торе S^1 . Как было уже отмечено во второй главе, отличие с рассмотрением отрезка $[0; 1]$ присутствует только в случае разложения непрерывной функции. Определённая нами модифицированная система позволяет получить равномерную сходимость для 1-периодических непрерывных функций. Для представления произвольной непрерывной функции на отрезке $[0; 1]$ орторекурсивным рядом необходимо использовать систему $\tilde{E}$, введённую в начале первого раздела второй главы. При орторекурсивном разложении по системе $\tilde{E}$ результат Леммы 1.2 требует корректировки.

Скалярные произведения крайних функций каждой пачки с единственной соседней равны $1/2$, а значит формулы (19) необходимо изменить для индексов $j = 1, 2, 2^{n+1}, 2^{n+1} + 1$. Также новая нормировка вносит изменения и в формулы (20). В целом, рассуждениями, проводимыми в первом разделе данной главы, можно показать и равномерную сходимость при разложении по системе $\tilde{E}$. Однако мы рассмотрим только модифицированную систему E на S^1 . Выбор именно такой системы обусловлен удобным алгоритмом изменения частичных сумм. Подобные рассуждения стоят и за выбором подсистемы модифицированной системы E , состоящей из подпоследовательности её пачек. Для данной подсистемы верна Лемма 1.2, гарантирующая удобный процесс изменения коэффициентов c_j , а также предоставляющая алгоритм вычисления частичных сумм для реализации орторекурсивного разложения.

3.1 Равномерная сходимость орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера

Результаты данного раздела опираются на работы автора [43], [44]. Отметим, что [43] является совместной работой автора диссертации и А.К. Паунова. В связи с этим её лемме 1 из работы [43] следствию из неё ниже будет присвоен буквенный индекс (Теорема Н и Следствие С), при этом будет приведено доказательство соответствующих результатов. При изложении дальнейших результатов данного раздела мы вернёмся к числовой нумерации лемм и теорем.

Переходя к формулировке соответствующих теорем, отметим, что в настоящем разделе рассматриваем пространство непрерывных на S^1 функций, нормы понимаются в смысле данного пространства. Целью будет изучение вопросов сходимости орторекурсивных разложений по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Начнём с важного свойства орторекурсивных разложений ломаных.

Теорема Н ([43]). *Пусть $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n для некоторого n и проводится орторекурсивное разложение l по модифицированной системе Фабера–Шаудера. Тогда для всех натуральных $N > n$ при разложении l по пачке N норма остатка*

не увеличивается. При этом каждая пачка с номером $N > n$ уменьшает норму остатка как минимум вдвое.

Доказательство.

Поскольку ломаная l принадлежит D^n , остатки разложения также являются ломаными с вершинами в двоично-рациональных точках. Для остатка разложения при $N > n$ выполняется равенство

$$r_k^N = \sum_{j=1}^{2^{N+1}} d_j e_j^N.$$

Для получения следующего остатка r_{j+1}^N коэффициент $d_{\sigma_{2^{N+1}}(j+1)}$ заменяется на половину среднего от соседних, взятых с противоположным знаком. Значит, выполнено первое утверждение теоремы:

$$\|r_{j+1}^N\|_{C(S^1)} \leq \|r_j^N\|_{C(S^1)}.$$

При этом после прохождения всей пачки каждый исходный коэффициент d_j заменился на число, по модулю не превосходящее половины нормы остатка r_0^N . Это означает, что

$$\|r_0^N\|_{C(S^1)} \geq 2\|r_{2^{N+1}}^N\|_{C(S^1)}.$$

Доказательство Теоремы Н завершено.

Следствие С. Пусть $l(x)$ является ломаной с вершинами в двоично-рациональных точках порядка n для некоторого натурального n . Тогда орторекурсивное разложение по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера, пронумерованных произвольным образом, сходится к l равномерно на S^1 .

Доказательство.

Пусть $n_1 \in \Lambda$ — первый номер, больший n , пачки, по которой проводится орторекурсивное разложение. По Теореме Н, начиная с n_1 , норма остатка после разложения по всей пачке уменьшается вдвое. Поскольку в наборе Λ бесконечно много элементов, больших n , норма остатка стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, где N — номера пачек разложения.

Доказательство Следствия С завершено.

Нам потребуются оценки коэффициентов λ_{ij}^m , входящих в представление (21). В следующей лемме отдельно получено неравенство для базы индукции в случае $m = n$.

Лемма 3.1. *При орторекурсивном разложении суммируемой функции f по пачке модифицированной системы Фабера–Шаудера с номером $n \in \Lambda$ сумма (по i) модулей числовых коэффициентов λ_{ij}^n , стоящих при скалярных произведениях f с функциями e_i^n в коэффициенте s_j ограничена. А именно, для всех $j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ выполнено следующее неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^n \binom{n}{k}| < 2. \quad (44)$$

Доказательство.

Рассмотрим изменение матрицы $L \binom{n}{k} = (\lambda_{ij}^n \binom{n}{k})_{ij}$ при орторекурсивном разложении по пачке с номером $n \in \Lambda$. Воспользуемся Следствием 1.2. На шаге $\binom{n}{0}$ матрица $L \binom{n}{0}$ заполняется нулевыми коэффициентами. На шаге $\binom{n}{k}$ согласно формулам (22) столбец с номером $s = \sigma_{2^{n+1}}(k)$ изменяется так: столбец с номером s заполняется как половина среднего арифметического соседних столбцов, взятых с противоположным знаком, а на главной диагонали ставится 1.

Покажем, что для всех $j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ имеет место (44). На шаге $\binom{n}{0}$ это выполнено. Пусть неравенство (44) выполнено на шаге $\binom{n}{k-1}$ для всех j . На шаге $\binom{n}{k}$ изменяется только столбец с номером s . При этом выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{is}^n \binom{n}{k}| < 1 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2^{n+1}} (|\lambda_{i,s-1}^n \binom{n}{k-1}| + |\lambda_{i,s+1}^n \binom{n}{k-1}|) < 2.$$

Доказательство Леммы 3.1 завершено.

Теперь перейдём к оценке сумм по i для произвольного индекса m . С помощью $\eta(n, m)$ мы обозначили число пачек подпоследовательности между номерами m и n (см. формулу (9)).

Лемма 3.2. *При орторекурсивном разложении суммируемой функции f по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера*

для каждого коэффициента $c_j \binom{n}{k}$ сумма модулей числовых коэффициентов $\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}$, стоящих при скалярных произведениях f с функциями пачки номера m , убывает как $O(2^{-\eta(n,m)})$ при $n \rightarrow \infty$. Иными словами, для всех $j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}| < 2^{-\eta(n,m)+2}, \quad (45)$$

а после прохождения всей пачки имеем

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{2^{n+1}}| < 2^{-\eta(n,m)+1}, \quad (46)$$

Доказательство.

Покажем это по индукции.

База. При $m = n$ выполнено $\eta(n, m) = 0$, и из (44) по Лемме 3.1 имеем оценку (46).

Переход от одной пачки к другой. Воспользуемся предположением индукции (46) и по формулам (23) рассмотрим отдельно чётные и нечётные индексы j . Для нечётных имеем

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{i,2j-1}^m \binom{n+1}{0}| = \sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{2^{n+1}}| < 2^{-\eta(n,m)+1},$$

а для чётных:

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{i,2j}^m \binom{n+1}{0}| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} (|\lambda_{ij}^m \binom{n}{2^{n+1}}| + |\lambda_{i,j+1}^m \binom{n}{2^{n+1}}|) < 2^{-\eta(n,m)+1}.$$

Отметим, что если $(n+1) \in \Lambda$, то $-\eta(n, m) + 1 = -\eta(n+1, m) + 2$. Если же $(n+1) \notin \Lambda$, то $\eta(n+1, m) = \eta(n, m)$ и

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n+1}{2^{n+2}}| = \sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n+1}{0}| < 2^{-\eta(n+1,m)+1}.$$

Шаг по пачке. Пусть $m < n$. Воспользуемся предположением индукции (45) и формулами шага по пачке (22). На шаге k по пачке n изменяется только

коэффициент $c_s \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$, где $s = \sigma_{2^{n+1}}(k)$. Значит, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{is}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right)| &= \sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{is}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)| \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} (|\lambda_{i,s+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right)| + |\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right)|) < \\ &< \frac{1}{2} 2^{-\eta(n,m)+2} = 2^{-\eta(n,m)+1}. \end{aligned}$$

Доказательство Леммы 3.2 завершено.

Несмотря на то что основной результат данного раздела посвящён разложению непрерывной функции, утверждения Леммы 3.1 и Леммы 3.2 верны для произвольной суммируемой функции f . Теперь мы готовы перейти к доказательству теоремы о равномерной сходимости орторекурсивного разложения.

Теорема 3.1. *Пусть проводится орторекурсивное разложение непрерывной на S^1 функции f по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f равномерно на S^1 .*

Доказательство.

Для доказательства утверждения получим оценку коэффициентов $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$. Из неравенства Гёльдера (см. [41, гл. 4, §22]) имеем оценку

$$|(f, e_i^m)| \leq \|f\|_{L_\infty(S^1)} \cdot \|e_i^m\|_{L_1(S^1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-m/2} \|f\|_{C(S^1)}.$$

Подставляя полученную в Лемме 3.2 оценку в представление (21) коэффициента $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$, получим неравенство

$$\begin{aligned} |c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)| &< \sum_{m=0, m \in \Lambda}^n 2^{m/2-n/2} \cdot \sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{ij}^m| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-m/2} \cdot \|f\|_{C(S^1)} < \\ &< \sqrt{3} \cdot 2^{-n/2-1} \|f\|_{C(S^1)} \sum_{m=0, m \in \Lambda}^n 2^{m/2-m/2-\eta(n,m)+2} \leq \\ &\leq \sqrt{3} \cdot 2^{1-n/2} \cdot \|f\|_{C(S^1)} \sum_{m=0, m \in \Lambda}^n 2^{-\eta(n,m)} < \\ &< \sqrt{3} \cdot 2^{1-n/2} \cdot \|f\|_{C(S^1)} \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} < 4\sqrt{3} \|f\|_{C(S^1)} \cdot 2^{-n/2}. \end{aligned}$$

Значит, из разложения (13) частичной суммы по базису пространства ломаных для произвольной непрерывной на S^1 функции f выполнено неравенство

$$\|S_k^n(f; x)\|_{C(S^1)} < \max_{1 \leq j \leq 2^{n+1}} |c_j| \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{n/2} < 12\|f\|_{C(S^1)}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Приближим разлагаемую функцию f ломаной. А именно, для некоторого N существует l из пространства ломаных с вершинами в двоично-рациональных точках порядка N , такая, что

$$\|f - l\|_{C(S^1)} < \varepsilon.$$

Тогда по Следствию С существует число $M > N$, такое, что для всех $n > M$, $n \in \Lambda$ и для всех k выполнено неравенство

$$\|l - S_k^n(l)\|_{C(S^1)} < \varepsilon.$$

Получим, что при всех $x \in S^1$ имеет место оценка

$$\|f - S_k^n(f)\|_{C(S^1)} < \|f - l\|_{C(S^1)} + \|S_k^n(f - l)\|_{C(S^1)} + \|l - S_k^n(l)\|_{C(S^1)} < 14\varepsilon.$$

Доказательство Теоремы 3.1 завершено.

3.2 Сходимость почти всюду орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера

Данный раздел посвящён разложению функции, интегрируемой по Лебегу на S^1 , и его сходимости почти всюду. Полученные здесь результаты будут использованы также в следующем разделе. Для доказательства сходимости почти всюду нам потребуется оценить модуль значения частичной суммы в заданной точке через значение в ней максимальной функции Харди–Литлвуда. Для этого получим некоторые оценки коэффициентов λ_{ij}^m . В данном разделе мы установим связь между значением $\lambda_{ij}^m \left(\frac{n}{k} \right)$ и тем, насколько удалены друг от друга отрезок Δ_i^m и точка x_j^n на S^1 . Чем больше между ними расстояние, тем меньше возможное значение коэффициента $\lambda_{ij}^m \left(\frac{n}{k} \right)$. Введём следующее определение.

Определение 9. Будем говорить, что коэффициент $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ и точка x_j^n имеют α -дальность от Δ_i^m , $\alpha \in \{1, \dots, 2^m\}$, если $x_j^n \notin \text{int } \Delta_i^m$ и расстояние от точки x_j^n до отрезка Δ_i^m удовлетворяет неравенству

$$\frac{\alpha - 1}{2^{m+1}} \leq \rho(x_j^n; \Delta_i^m) < \frac{\alpha}{2^{m+1}}. \quad (47)$$

Будем считать, что $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ и x_j^n имеют 0-дальность ($\alpha = 0$) от Δ_i^m , если $x_j^n \in \text{int } \Delta_i^m$ (см. Рисунок 3).

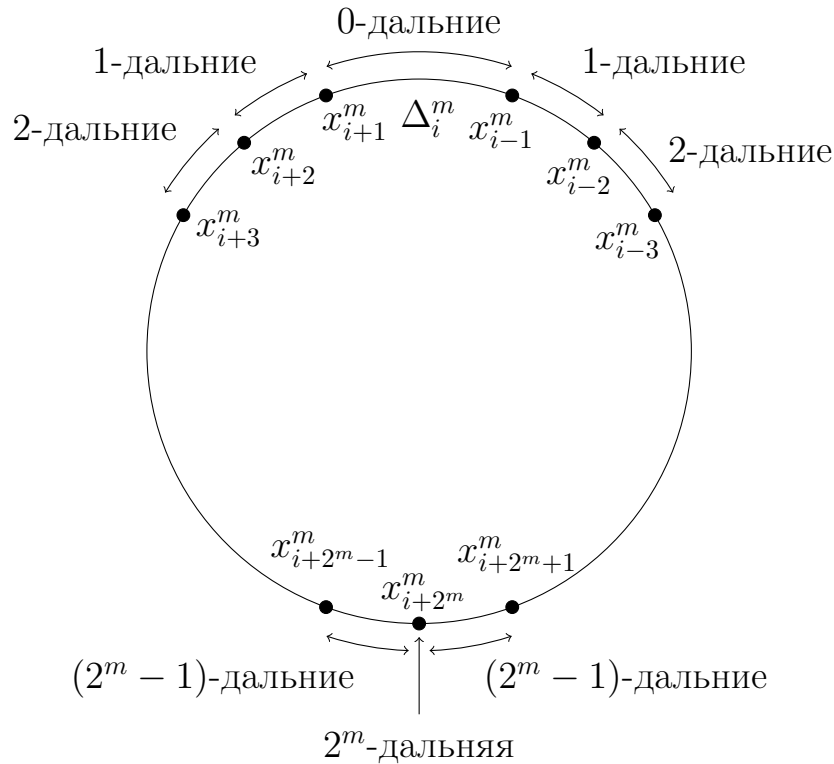


Рисунок 3: α -дальность от отрезка Δ_i^m точек x_j^n в зависимости от их расположения на S^1 .

Коэффициент $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ входит в представление (21) числа $c_j \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$, соответствующего функции e_j^n в разложении (13) частичной суммы по базису в пространстве ломаных D^n . С другой стороны, $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ — это коэффициент перед скалярным произведением (f, e_i^m) . Поэтому α -дальность характеризует то, сколько отрезков длины половины отрезка Δ_i^m нужно пройти от точки x_j^n , вершины функции e_j^n , до отрезка Δ_i^m , носителя функции e_i^m .

Оценим коэффициент $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ с учетом α -дальности. Для этого получим сначала неравенство для базы индукции в случае $m = n$ и выразим его в виде леммы.

Лемма 3.3. Пусть проводится орторекурсивное разложение суммируемой функции f по пачке модифицированной системы Фабера–Шаудера с номером $n \in \Lambda$. Пусть числовой коэффициент λ_{ij}^n имеет α -дальность от Δ_i^n . Тогда для модуля его значения имеет место следующая оценка:

$$|\lambda_{ij}^n \binom{n}{k}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n+1}-\alpha}. \quad (48)$$

Доказательство.

Отметим, что в случае $m = n$ из обозначений (8) отрезков Δ_i^n и Δ_j^n число α есть не что иное как

$$\alpha = \min\{|i - j|, 2^{n+1} - |i - j|\}.$$

Подобно доказательству Леммы 3.1 рассмотрим изменение матрицы $L \binom{n}{k} = (\lambda_{ij}^n \binom{n}{k})_{ij}$. При этом $L \binom{n}{0}$ является нулевой матрицей. По формулам (22) на шаге по пачке один столбец заполняется как половина среднего арифметического соседних столбцов, взятых с противоположным знаком, а на главной диагонали ставится 1.

Значение каждого элемента матрицы изменяется не более одного раза. Значит, достаточно рассмотреть коэффициенты после прохождения всей пачки. Здесь коэффициент, стоящий на главной диагонали, равен 1. Он имеет 0-дальность, а значит (48) для него выполнено.

Пусть теперь $i \neq j$. Коэффициент $\lambda_{i,i+1}^n \binom{n}{2^{n+1}}$ не является нулевым только в том случае, если столбец с номером $(i + 1)$ заполнялся после столбца i . Коэффициент $\lambda_{i,i+2}^n \binom{n}{2^{n+1}}$ ненулевой, если столбец $(i + 2)$ заполнялся после столбца $(i + 1)$, который в свою очередь заполнялся после столбца i . Однако коэффициент $\lambda_{i,i+2}^n \binom{n}{2^{n+1}}$ может также быть ненулевым, если после столбца i заполнился столбец $(i - 1)$, затем $(i - 2)$ и так до $(i - 2^{n+1} + 2) = (i + 2)$. Значит, при $j \neq i$ имеем, что вклад из столбца i в столбец j может дойти до j только либо по цепочке заполнений с ростом j длины $|i - j|$, либо по цепочке в обратном направлении длины $2^{n+1} - |i - j|$. Других вкладов нет. Поэтому, исходя из формул (22), имеет место неравенство

$$|\lambda_{ij}^n \binom{n}{2^{n+1}}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{|i-j|} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n+1}-|i-j|}. \quad (49)$$

Доказательство Леммы 3.3 завершено.

По аналогии с Леммой 3.1, где в случае $m = n$ исследовалась сумма по i , рассмотрим сумму по j и получим следующий результат

Следствие 3.1. *При орторекурсивном разложении суммируемой функции f по пачке модифицированной системы Фабера–Шаудера с номером $n \in \Lambda$ сумма (по j) модулей числовых коэффициентов λ_{ij}^n , стоящих при скалярных произведениях f с функцией e_i^n в коэффициентах c_j , ограничена. А именно, для всех $i = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ выполнено следующее неравенство:*

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^n \binom{n}{j}| < 2.$$

Доказательство.

Как было отмечено в Лемме 3.3, сумма по j не убывает с каждым шагом внутри пачки, потому что каждый раз заполняется столбец, который изначально был нулевым. Воспользуемся неравенством (49) и получим, что верна оценка

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^n \binom{n}{j}| = \lambda_{ii}^n \binom{n}{2^{n+1}} + \sum_{j=1, j \neq i}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^n \binom{n}{j}| < 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^j < 2.$$

Доказательство Следствия 3.1 завершено.

Следующая лемма содержит важное числовое неравенство, используемое при оценке коэффициента $\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}$ с учетом α -дальности.

Лемма 3.4. *Для всех $m \in \mathbb{Z}^+$ и $\alpha \in \{1, \dots, 2^m\}$ имеет место следующее неравенство:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} &\leq \\ &\leq 2 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

Доказательство.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} = \\ = \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Заметим, что поскольку $\alpha \in \{1, \dots, 2^m\}$, верно, что $\alpha - 1 \leq 2^{m+1} - \alpha$. Поэтому $(1/4)^{2^{m+1}-\alpha} \leq (1/4)^{\alpha-1}$. Значит, выполнено неравенство

$$\left(\frac{5}{8} - \frac{2}{8}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \leq \left(1 - \frac{5}{8}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1}.$$

Отсюда,

$$\frac{5}{8} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)}. \quad (52)$$

Объединяя (51) и (52), получим требуемое неравенство (50).

Доказательство Леммы 3.4 завершено.

Теперь охарактеризуем убывание возможного значения коэффициента $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ с учётом его α -дальности при увеличении номера пачки разложения n .

Лемма 3.5. *Пусть проводится орторекурсивное разложение суммируемой функции f по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Пусть коэффициент $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ имеет α -дальность от Δ_i^m . Тогда выполнено неравенство*

$$|\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right). \quad (53)$$

После прохождения всей пачки при $k = 2^{n+1}$ имеем

$$|\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right)| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right). \quad (54)$$

Доказательство.

Покажем это по индукции.

База. В случае $n = t$ имеем $\eta(n, m) = 0$. Требуемые утверждения (53) и (54) были доказаны в Лемме 3.3.

Переход от одной пачки к другой. Отметим сначала, что если $(n+1) \notin \Lambda$, то $\eta(n+1, m) = \eta(n, m)$ и

$$|\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 2^{n+2} \end{smallmatrix} \right)| = |\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)|. \quad (55)$$

В случае $(n+1) \in \Lambda$ получим, что

$$\eta(n+1, m) = \eta(n, m) + 1. \quad (56)$$

Примем предположение индукции (54) и покажем, что если $(n+1) \in \Lambda$, то имеет место (53) для $k = 0$. Из этих рассуждений и (55) будет автоматически следовать требуемое утверждение (54) и для случая $(n+1) \notin \Lambda$.

Воспользуемся формулами перехода от одной пачки к другой (23). Сначала рассмотрим $\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ с нечётным индексом. Отметим, что точка x_{2j-1}^{n+1} совпадает с точкой x_j^n . Поэтому, $\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ имеет ту же α -дальность от Δ_i^m , что и $\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right)$. Поэтому из (56) и предположения индукции (54) сразу получаем требуемое неравенство

$$|\lambda_{i,2j-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)| = |\lambda_{ij}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2^{n+1} \end{smallmatrix} \right)| \leq \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n+1, m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} \right)$$

Теперь рассмотрим $\lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ с чётным индексом. Нам нужно определить разницу в α -дальности от Δ_i^m для любых соседних точек x_j^n и x_{j+1}^n . Одномерный тор S^1 разбит двочно-рациональными точками порядка m на 2^{m+1} отрезков длины $1/2^{m+1}$, что является половиной длины Δ_i^m . Отметим, что точка x_{2j}^{n+1} является серединой отрезка $[x_j^n; x_{j+1}^n]$. Заметим также, что расстояние между соседними точками x_j^n и x_{j+1}^n меньше либо равно $1/2^{m+1}$. Равенство достигается только при $n = m$.

Рассмотрим возможное расположение точек x_j^n и x_{j+1}^n относительно границ интервалов длин $1/2^{m+1}$.

Если ни одна из точек x_j^n и x_{j+1}^n не является границей отрезка разбиения длины $1/2^{m+1}$, тогда точки x_j^n и x_{j+1}^n лежат на одном отрезке разбиения длины $1/2^{m+1}$. Таким образом, они имеют одинаковую α -дальность от Δ_i^m . Тогда точка x_{2j}^{n+1} имеет ту же α -дальность, что и точки x_j^n и x_{j+1}^n (см. Рисунок 4).

Если обе точки x_j^n и x_{j+1}^n являются границами отрезков разбиения длины $1/2^{m+1}$, то $n = m$. Если обе эти точки имеют 0-дальность от Δ_i^m , то и точка

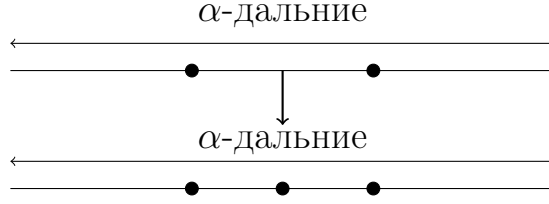


Рисунок 4: Случай одинаковых α -дальностей при переходе от одной пачки к другой.

x_{2j}^{n+1} имеет 0-дальность. В противном случае (как показано на Рисунке 5) α -дальности точек x_j^n и x_{j+1}^n различаются на единицу, и у точки x_{2j}^{n+1} та же α -дальность, как у минимума α -дальностей точек x_j^n и x_{j+1}^n . Последнее следует из выбора строгой и нестрогой частей неравенства (47) в определении α -дальности.

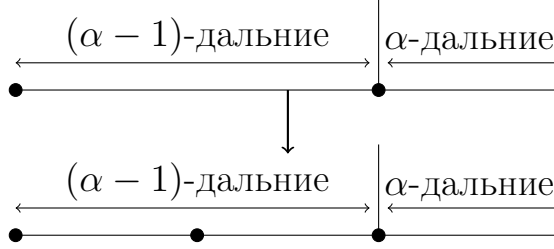


Рисунок 5: Случай разных α -дальностей при переходе от одной пачки к другой.

Теперь без ограничения общности будем считать, что только точка x_{j+1}^n является границей отрезка разбиения длины $1/2^{m+1}$. Тогда $m < n$ и расстояние между точками x_j^n и x_{j+1}^n меньше $1/2^{m+1}$. В этом случае α -дальности точек x_j^n и x_{j+1}^n либо одинаковые, что соответствует Рисунку 4, либо различаются на единицу, что соответствует Рисунку 5.

Мы показали, что α -дальности точек x_j^n и x_{j+1}^n либо равны, либо различаются на единицу, и что α -дальность точки x_{2j}^{n+1} равна минимуму α -дальностей точек x_j^n и x_{j+1}^n . Теперь докажем, что неравенство (53) выполнено для $\lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$.

Сначала предположим, что α -дальности точек x_j^n и x_{j+1}^n совпадают. Тогда $\lambda_{i,2j}^m \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ имеет ту же α -дальность. Из предположения индукции (54)

получаем

$$\begin{aligned} |\lambda_{i,2j}^m \binom{n+1}{0}| &= \left| \frac{1}{2} (\lambda_{i,j}^m \binom{n}{2^{n+1}} + \lambda_{i,j+1}^m \binom{n}{2^{n+1}}) \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) = \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n+1,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Теперь предположим, что α -дальности точек x_j^n и x_{j+1}^n отличаются на единицу. Без ограничения общности из предположения индукции (54) считаем, что

$$\begin{cases} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{2^{n+1}}| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)} \right), \\ |\lambda_{i,j+1}^m \binom{n}{2^{n+1}}| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right). \end{cases}$$

Отметим, что коэффициент $\lambda_{i,2j}^m \binom{n+1}{0}$ имеет $(\alpha-1)$ -дальность. Применяя Лемму 3.4, получим оценку

$$\begin{aligned} |\lambda_{i,2j}^m \binom{n+1}{0}| &= \left| \frac{1}{2} (\lambda_{i,j}^m \binom{n}{2^{n+1}} + \lambda_{i,j+1}^m \binom{n}{2^{n+1}}) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)} + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) \quad (57) \\ &\leq \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n+1,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)} \right). \end{aligned}$$

Шаг по пачке. При прохождении пачки с номером $n \in \Lambda$ каждый коэффициент λ_{ij}^m изменяется ровно один раз. Применим предположение индукции (53) для шага $\binom{n}{k}$ и положим $s = \sigma_{2^{n+1}}(k+1)$. По формулам (22) изменения коэффициентов λ_{ij}^m только λ_{is}^m изменяется на шаге $k+1$ по пачке n .

По аналогии с переходом от одной пачки к другой присутствуют два случая: либо $\lambda_{i,s-1}^m \binom{n}{k}$ и $\lambda_{i,s+1}^m \binom{n}{k}$ имеют одинаковую α -дальность, либо их дальности отличаются на единицу.

Предположим сначала, что коэффициенты $\lambda_{i,s-1}^m \binom{n}{k}$ и $\lambda_{i,s+1}^m \binom{n}{k}$ имеют одинаковую α -дальность. Пусть также коэффициент $\lambda_{is}^m \binom{n}{k}$ имеет не 2^m -дальность (этот случай будет разобран позднее). Тогда $\lambda_{is}^m \binom{n}{k+1}$ имеет ту же α -дальность, что и $\lambda_{i,s-1}^m \binom{n}{k}$ и $\lambda_{i,s+1}^m \binom{n}{k}$ (см. Рисунок 6).

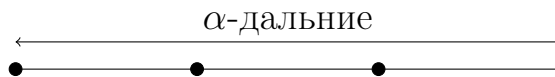


Рисунок 6: Случай одинаковых α -дальностей при шаге по пачке.

По предположению индукции (53) получаем неравенство

$$\begin{aligned} |\lambda_{is}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right)| &= \left| \frac{1}{4} (\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,s+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) < \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Теперь предположим, что α -дальности коэффициентов $\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ и $\lambda_{i,s+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ различаются на единицу. Без ограничения общности будем считать, что коэффициент $\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ имеет $(\alpha - 1)$ -дальность и $\lambda_{i,s+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ имеет α -дальность. Предположим сначала, что $\lambda_{is}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right)$ имеет $(\alpha - 1)$ -дальность (см. Рисунок 7).



Рисунок 7: Случай разных α -дальностей при шаге по пачке.

Рассматриваемый коэффициент λ_{is}^m имеет меньшую из α -дальностей соседних.

Воспользуемся предположением индукции (53) и Леммой 3.4 и получим неравенство

$$\begin{aligned} |\lambda_{is}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right)| &= \left| \frac{1}{4} (\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,s+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)} + \left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) < \\ &< \frac{2}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)} \right) < \\ &< \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-(\alpha-1)} \right). \end{aligned} \tag{58}$$

Теперь предположим, что коэффициент $\lambda_{is}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right)$ имеет α -дальность и предположим, что $\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ имеет $(\alpha - 1)$ -дальность, а $\lambda_{i,s+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ имеет α -дальность (см. Рисунок 8).

Для того, чтобы получить оценку в этом случае, нам потребуется дополнительно рассмотреть последнее изменение коэффициента $\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ с меньшей α -дальностью, то есть проследить два шага индукции.

Пусть последнее изменение коэффициента $\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ произошло при переходе от одной пачки к другой. Тогда его изменение соответствует случаю (57)

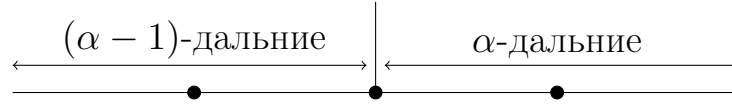


Рисунок 8: Случай разных α -дальностей при шаге по пачке. Рассматриваемый коэффициент λ_{is}^m имеет бóльшую из α -дальностей соседних.

перехода от одной пачки к другой. Используем эту более сильную оценку:

$$\begin{aligned} |\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} + \left(\frac{1}{4} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha+1} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Используя (59) для коэффициента $\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ и предположение индукции (53) для $\lambda_{i,s+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} |\lambda_{is}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right)| &= \left| \frac{1}{4} (\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) + \lambda_{i,s+1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} + \left(\frac{1}{4} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha+1} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) \leq \\ &\leq \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) \right) \leq \\ &\leq \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Если же последнее изменение коэффициента $\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ произошло на шаге по пачке, его соседние коэффициенты имеют $(\alpha - 1)$ -дальность и α -дальность в соответствии со случаем, описанным в формуле (58). Рассмотрим эту более сильную оценку

$$\begin{aligned} |\lambda_{i,s-1}^m \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} + \left(\frac{1}{4} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha+1} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Заметим, что оценка (61) сильнее, чем оценка (59). А значит и в этом случае вывод формулы (60) имеет место.

Наконец, остался нерассмотренным случай, когда коэффициент λ_{is}^m имеет 2^m -дальность. Коэффициенты $\lambda_{i,s-1}^m$ и $\lambda_{i,s+1}^m$ в этом случае имеют $(2^m - 1)$ -

дальности (см. Рисунок 9).

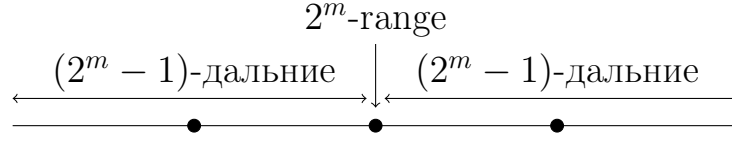


Рисунок 9: Случай, когда рассматриваемый коэффициент λ_{is}^m имеет 2^m -дальность.

Здесь вновь необходимо рассмотреть два шага индукции. Проводя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, имеем, что вне зависимости от того, как были получены коэффициенты $\lambda_{i,s-1}^m$ и $\lambda_{i,s+1}^m$, для них как минимум имеет место оценка (59), где $\alpha = 2^m$. Применяя оценку (59) для обоих коэффициентов $\lambda_{i,s-1}^m$ и $\lambda_{i,s+1}^m$, получим неравенство

$$\begin{aligned} |\lambda_{is}^m \binom{n}{k+1}| &\leq 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{2^m} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^m} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^m-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^m+1} \right) \\ &\leq \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{2^m} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{16} \right) \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{2^m} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^m} \right). \end{aligned}$$

Доказательство Леммы 3.5 завершено.

Мы получили оценку коэффициента λ_{ij}^m в зависимости от его α -дальности. Теперь дадим численное описание сумм, связанных с полученной оценкой и с определением α -дальности.

Лемма 3.6. Пусть число $\theta_i(\lambda_{ij}^m)$ определено следующим образом: если коэффициент $\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}$ имеет α -дальность от Δ_i^m , то положим

$$\theta_i := \left(\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) \frac{\alpha + 3}{2^{m+1}}.$$

Пусть проводится орторекурсивное разложение суммируемой функции f по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Для определённых выше θ_i на произвольном шаге k по пачке $n \in \Lambda$, $n \geq t$ при фиксированном $j \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1}\}$ имеет место следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}} \theta_i < \frac{12}{2^m}.$$

Доказательство.

Одномерный тор S^1 покрыт отрезками Δ_i^m так, что каждая точка, не являющаяся двоично-рациональной порядка m , лежит ровно в двух отрезках Δ_i^m . Каждая двоично-рациональная точка порядка m является граничной точкой ровно для двух отрезков Δ_i^m и внутренней для ещё одного отрезка.

Для коэффициента $c_j \binom{n}{k}$ при $n \geq m$ множество $\{\lambda_{ij}^m\}_{i=1}^{2^{m+1}}$ всех коэффициентов из представления (21) содержит максимум два элемента, у которых 0-дальность от Δ_i^m , для каждого $\alpha \in \{1, \dots, 2^m - 1\}$ по два элемента, у которых α -дальность от Δ_i^m , и максимум один элемент с 2^m -дальностью от Δ_i^m (см. Рисунок 10). Отметим, что в рассуждениях выше отрезок Δ_i^m изменялся в зависимости от индекса i , однако точка x_j^n из определения α -дальности оставалась неизменной.

Рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^{2^m} \frac{\alpha+3}{2^{m+1}} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) &\leq \frac{2}{2^{m+1}} \sum_{\alpha=0}^{2^m} \frac{\alpha+3}{4^\alpha} < \\ &< \frac{1}{2^m} \left(3 \sum_{\alpha=0}^{\infty} 4^{-\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\alpha}{4^\alpha} \right) < \frac{1}{2^m} \left(3 \cdot \frac{4}{3} + 2 \right) \leq \frac{6}{2^m}. \end{aligned}$$

Из него получим, что

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}} \theta_i \leq 2 \sum_{\alpha=0}^{2^m} \frac{\alpha+3}{2^{m+1}} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) < \frac{12}{2^m}.$$

Доказательство Леммы 3.6 завершено.

Следующая лемма представляет результат об оценке значения частичной суммы в заданной точке с помощью максимальной функции Харди–Литлвуда.

Лемма 3.7. Пусть функция f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$. Тогда модуль значения в любой точке любой частичной суммы орторекурсивного разложения f по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера не превосходит умноженного на некоторую константу значения максимальной функции Харди–Литлвуда (10) в этой точке. Точнее,

$$|S_k^n(f; x)| < 720 f^M(x)$$

для всех $n \in \Lambda$, $k = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ и $x \in S^1$.

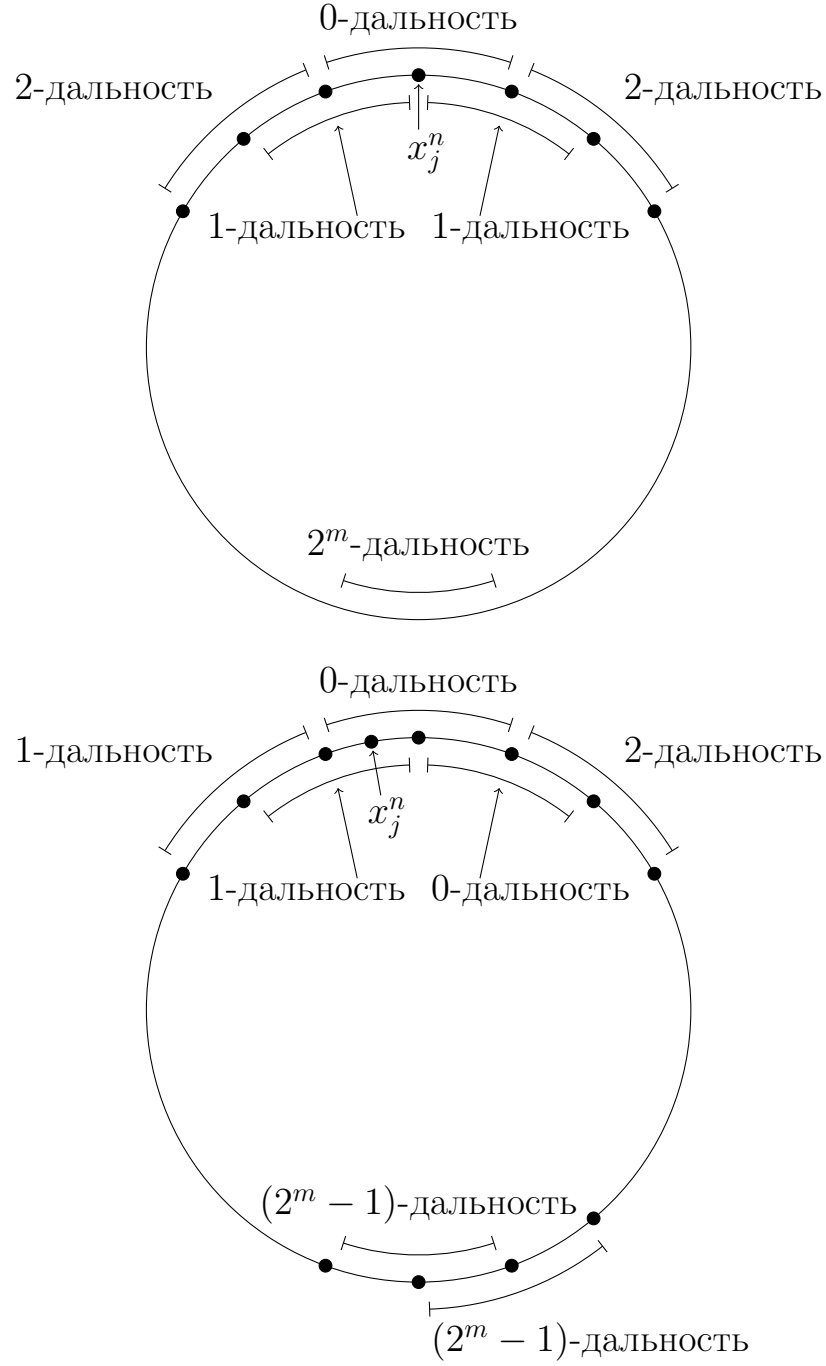


Рисунок 10: Зависимость α -дальности точки x_j^n от выбора отрезка Δ_i^m . Верхний график имеет место в случае, когда точка x_j^n является граничной для некоторого отрезка Δ_i^m , а нижний — когда не является.

Доказательство.

Зафиксируем точку $x \in S^1$. Ранее мы ввели индекс $\binom{n}{k(x)}$ для точки x . Значение частичной суммы $S_k^n(f; x)$ в этой точке можно найти по формуле (24). Предположим, что коэффициент $\lambda_{i,k(x)}^m$ имеет α -дальность от Δ_i^m . Оце-

ним связанное с этим коэффициентом скалярное произведение

$$|(f, e_i^m)| \leq \sqrt{3} \cdot 2^{\frac{m}{2}} \int_{\Delta_i^m} |f| dx \leq \sqrt{3} \cdot 2^{\frac{m}{2}} \int_{\Omega} |f| dx,$$

где Ω — связное множество минимальной длины, которое содержит точку x и отрезок Δ_i^m целиком (см. Рисунок 11).

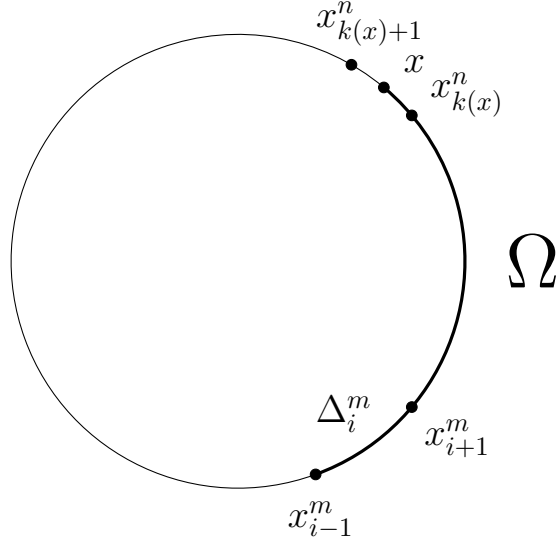


Рисунок 11: Определение множества Ω .

Более того, коэффициент $\lambda_{i,k(x)}^m$ имеет α -дальность от Δ_i^m , значит из неравенств (47) из определения α -дальности имеем

$$\frac{\alpha - 1}{2^{m+1}} \leq \rho(x_{k(x)}^n; \Delta_i^m) < \frac{\alpha}{2^{m+1}}.$$

Отсюда для точки $x_{k(x)+1}^n$ следует неравенство

$$\frac{\alpha - 2}{2^{m+1}} \leq \rho(x_{k(x)+1}^n; \Delta_i^m) < \frac{\alpha + 1}{2^{m+1}}.$$

Получаем, что $x \in \Omega$ и для длины присутствует оценка

$$|\Omega| < \frac{\alpha + 3}{2^{m+1}}.$$

Значит, для скалярного произведения имеет место оценка через макси-

мальную функцию Харди-Литлвуда $f^M(x)$:

$$|(f, e_i^m)| < \sqrt{3} \cdot 2^{m/2} |\Omega| \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)| dx \right) < \sqrt{3} \cdot 2^{m/2} \frac{\alpha + 3}{2^{m+1}} f^M(x).$$

Перейдём к оценке коэффициента $c_{k(x)}$ через его представление (21). С помощью Леммы 3.5 ограничим входящие в него коэффициенты $\lambda_{i,k(x)}^m$ через их α -дальность от Δ_i^m , обозначая $\alpha = \alpha(\lambda_{i,k(x)}^m)$. Воспользуемся также Леммой 3.6 для оценки получившейся суммы чисел $\theta_i = \theta_i(\lambda_{i,k(x)}^m)$.

$$\begin{aligned} |c_{k(x)}| &\leq \sum_{m=0, m \in \Lambda}^n 2^{m/2-n/2} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \left(|\lambda_{i,k(x)}^m| \binom{n}{k} \cdot |(f, e_i^m)| \right) \leq \\ &\leq \sum_{m=0, m \in \Lambda}^n \sqrt{3} \cdot 2^{m-n/2} f^M(x) \sum_{i=1}^{2^{m+1}} |\lambda_{i,k(x)}^m| \frac{\alpha(\lambda_{i,k(x)}^m) + 3}{2^{m+1}} \leq \\ &\leq 2^{-n/2} f^M(x) \sqrt{3} \sum_{m=0, m \in \Lambda}^n 2^m \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \theta_i < \\ &< 12\sqrt{3} \cdot 2^{-n/2} f^M(x) \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{7}{8} \right)^{s-1} < 120\sqrt{3} \cdot 2^{-n/2} f^M(x). \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$|c_{k(x)+1}| \leq 120\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} f^M(x).$$

Таким образом, подставляя полученные неравенства в формулу (33) и оценивая значение функций $e_{k(x)}^n$ и $e_{k(x)+1}^n$ их максимумами, заключаем, что неравенство

$$|S_k^n(f; x)| < 120\sqrt{3} \cdot 2^{-n/2} f^M(x) \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2^{n/2} = 720 f^M(x)$$

выполнено для произвольной функции $f \in L_1(S^1)$.

Доказательство Леммы 3.7 завершено.

Теперь мы готовы перейти к доказательству основного результата данного раздела — теоремы о сходимости орторекурсивного разложения почти всюду. Обратим внимание, что частичные суммы $S_k^n(f; x)$ линейны по функциональному аргументу. Используем это и применим критерий сходимости почти всюду для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3.2. Пусть проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_1(S^1)$, по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f почти всюду на S^1 .

Доказательство.

Используем критерий сходимости почти всюду (см. [41, гл. 2, §13]). Пусть $G_k^n = G_k^n(\varepsilon)$ — множество таких x из S^1 , в которых выполнено неравенство

$$|S_k^n(f; x) - f(x)| > \varepsilon.$$

Последовательность частичных сумм $S_k^n(f; x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на S^1 тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{\substack{n_0 \\ k_0} \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{\substack{n \\ k} = \binom{n_0}{k_0}}^{\infty} G_k^n(\varepsilon) \right) = 0$$

Докажем, что это равенство выполнено. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Приближим в пространстве $L_1(S^1)$ разлагаемую функцию f ломаными с вершинами в двоично-рациональных точках. А именно для каждого натурального числа j имеется число $N_0(j)$ и ломаная $l_j \in D^{N_0}$ такая, что выполнено неравенство

$$\|f - l_j\|_{L_1(S^1)} < \frac{\varepsilon^2}{2^j}. \quad (62)$$

Полученная последовательность ломаных $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ по норме пространства $L_1(S^1)$.

По Следствию С имеет место равномерная сходимость частичных сумм $S_k^n(l_j; x)$ к l_j при всех j . Это означает, что для каждого j существует индекс $\binom{N}{K}_j$ такой, что для всех последующих индексов $\binom{n}{k} > \binom{N}{K}_j$ и для всех $x \in S^1$ имеет место неравенство

$$|S_k^n(l_j; x) - l_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (63)$$

Таким образом, для достаточно больших номеров $\binom{n}{k}$ существует натуральное число j такое, что (63) выполнено для всех $x \in S^1$.

Обратим зависимость $\binom{N}{K}_j$ в зависимость $j \binom{N}{K}$. Выберем некоторый на-

чальный индекс $\binom{n_0}{k_0}$ и число j_0 , для которых при всех $x \in S^1$ и $\binom{n}{k} > \binom{n_0}{k_0}$ выполнено неравенство (63). Далее, для всех бóльших индексов $\binom{n}{k}$ положим в соответствие число j следующим образом: если для индекса $\binom{n}{k-1}$ (или $\binom{n}{2^{n+1}}$) выбрано число j , то для индекса $\binom{n}{k}$ (или $\binom{n+1}{0}$) выберем число $j+1$, если неравенство (63) выполнено для l_{j+1} , всех $x \in S^1$ и всех индексов, начиная с $\binom{n}{k}$. Иначе выберем число j .

Таким образом, каждому достаточно большому индексу $\binom{n}{k}$ поставлена в соответствие ломаная l_j , для которой выполнено неравенство (62) и неравенство (63) при всех $x \in S^1$ и всех номеров, бóльших $\binom{n}{k}$. Вместе с тем, если $n \rightarrow \infty$, то и $j \rightarrow \infty$.

Пусть $(f - l_j)^M$ — это максимальная функция Харди–Литлвуда для функции $(f - l_j)$. Введём следующие множества

$$\begin{cases} H_k^n := \{x \in S^1 : |S_k^n(l_j; x) - l_j(x)| > \varepsilon/3\}, \\ I_k^n := \{x \in S^1 : |S_k^n(f - l_j; x)| > \varepsilon/3\}, \\ J_k^n := \{x \in S^1 : |l_j(x) - f(x)| > \varepsilon/3\}, \\ F_k^n := \{x \in S^1 : 720(f - l_j)^M(x) > \varepsilon/3\}. \end{cases} \quad (64)$$

Отметим, что J_k^n и F_k^n явно зависят только от j , поэтому обозначим также J_k^n как J_j и F_k^n как F_j .

Поскольку частичные суммы линейны по функциональному аргументу, имеет место оценка

$$|S_k^n(f; x) - f(x)| \leq |S_k^n(l_j; x) - l_j(x)| + |S_k^n(f - l_j; x)| + |l_j(x) - f(x)|.$$

Значит, с помощью введённых обозначений (64) получим

$$G_k^n = \{x \in S^1 : |S_k^n(f; x) - f(x)| > \varepsilon\} \subseteq H_k^n \cup I_k^n \cup J_k^n.$$

Число j было выбрано так, что (63) выполнялось для всех $x \in S^1$, что означает, что $H_k^n = \emptyset$.

Поскольку функция $(f - l_j)$ принадлежит пространству $L_1(S^1)$, к ней применима Лемма 3.7 и

$$|S_k^n(f - l_j; x)| \leq 720(f - l_j)^M(x).$$

Значит, $I_k^n \subseteq F_k^n$ и $G_k^n \subseteq F_k^n \cup J_k^n$. Рассмотрим объединение множеств

$$\bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}}^{\infty} G_k^n \subseteq \bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}}^{\infty} (F_k^n \cup J_k^n) \subseteq \left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} F_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} J_j \right). \quad (65)$$

Ломаная l_j была выбрана так, что для неё выполнялось неравенство (62) на норму в пространстве $L_1(S^1)$. Таким образом, по неравенству Чебышёва (см. [41, гл. 3, §17]) имеет место оценка на меру множества J_j :

$$\mu(J_j) = \mu(\{x \in S^1 : |l_j(x) - f(x)| > \varepsilon/3\}) < 3\varepsilon/2^j. \quad (66)$$

Для меры множества F_j , исходя из свойства (12) максимальной функции Харди–Литлвуда, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \mu(F_j) &= \mu(\{x \in S^1 : |(f - l_j)^M(x)| > \varepsilon/2160\}) \leq \\ &\leq \frac{5 \cdot 2160}{\varepsilon} \|f - l_j\|_{L_1(S^1)} \leq \frac{10800}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^j} = \frac{10800\varepsilon}{2^j}. \end{aligned} \quad (67)$$

Теперь рассмотрим меру объединения (65). Используя неравенства (66) и (67), получим неравенство

$$\mu\left(\bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}}^{\infty} G_k^n\right) \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \mu(F_j) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \mu(J_j) \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{10800\varepsilon}{2^j} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{3\varepsilon}{2^j} = \frac{10803\varepsilon}{2^{j_0-1}}.$$

Последовательность чисел j была поставлена в соответствие последовательности индексов $\binom{n}{k}$ так, что выбирая всё больше и больше начальный индекс $\binom{n_0}{k_0}$, не меняя связей между $\binom{n}{k}$ и j , связанное с начальным индексом число j_0 также растёт. При $n_0 \rightarrow \infty$ имеет место, что и $j_0 \rightarrow \infty$. Таким образом, получим, что

$$\lim_{\binom{n_0}{k_0} \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{\binom{n}{k}=\binom{n_0}{k_0}}^{\infty} G_k^n\right) = \lim_{j_0 \rightarrow \infty} \frac{10803\varepsilon}{2^{j_0-1}} = 0.$$

Доказательство Теоремы 3.2 завершено.

3.3 Сходимость орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера в лебеговых пространствах

В данном разделе приведено доказательство сходимости в пространствах $L_p(S^1)$ при $1 \leq p < \infty$ орторекурсивного ряда Фурье при разложении функции из $L_p(S^1)$.

Для доказательства основного результата данного раздела будут использованы утверждения, полученные в предыдущих разделах. Так, в случае $p = 1$ рассуждения используют оценку L_1 -нормы частичных сумм с помощью неравенств на коэффициенты λ_{ij}^m с учётом α -дальности, полученных в Лемме 3.5. При $1 < p < \infty$ доказательство опирается на ограничение частичных сумм значением максимальной функции Харди–Литлвуда, полученное в Лемме 3.7. Также для завершения доказательства нам вновь потребуется равномерная сходимость разложений ломаных, описанная в Следствии С.

Для случая $p = 1$ требуется установить сначала оценки сумм коэффициентов λ_{ij}^m .

Лемма 3.8. *При орторекурсивном разложении суммируемой функции f по подпоследовательности пачек с произвольной нумерацией внутри каждой пачки модифицированной системы Фабера–Шаудера для каждой функции e_i^m сумма (по j) модулей числовых коэффициентов λ_{ij}^m , стоящих при скалярных произведениях f с функцией e_i^m в коэффициентах c_j возрастает не быстрее, чем $O(2^{n-m} \cdot (7/8)^{\eta(n,m)})$. Точнее, для каждого $i = 1, 2, \dots, 2^{m+1}$ имеем*

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}| < 2^{n-m+3} \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)-1}.$$

Доказательство.

Рассмотрим отрезок Δ_i^m и вычислим, сколько двоично–рациональных точек x_j^n порядка n имеют α -дальность от данного отрезка. Сначала отметим, что число двоично–рациональных точек порядка n , лежащих во внутренности отрезка Δ_i^m , есть $(2^{n-m+1} - 1)$, все они являются 0-дальними. Ещё одна точка является 2^m -дальней. При остальных $\alpha \in \{1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ ровно 2^{n-m+1} точек являются α -дальними. Это следует из формулы расстояния (47) определения α -дальности (также см. Рисунок 3 в определении α -дальности).

Для наших целей скажем, что всего есть не более 2^{n-m+1} двоично-рациональных точек порядка n с заданной α -дальностью от отрезка Δ_i^m . Воспользуемся оценкой модуля коэффициента $\lambda_{ij}^m \left(\frac{n}{k} \right)$, полученной в формуле (53) Леммы 3.5. Имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \left(\frac{n}{k} \right)| &< 2^{n-m+1} \sum_{\alpha=0}^{2^m} \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{m+1}-\alpha} \right) < \\ &< 2^{n-m+2} \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1} \sum_{s=0}^{\infty} 4^{-s} < 2^{n-m+3} \cdot \left(\frac{7}{8} \right)^{\eta(n,m)-1}. \end{aligned}$$

Доказательство Леммы 3.8 завершено.

Перейдём теперь к оценке норм частичных сумм в пространствах $L_p(S^1)$.

Лемма 3.9. Пусть $1 \leq p < \infty$ и пусть функция f принадлежит лебегову пространству $L_p(S^1)$. Пусть проводится орторекурсивное разложение функции f по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда норма в $L_p(S^1)$ любой частичной суммы не превосходит нормы в $L_p(S^1)$ функции f , умноженной на некоторую константу, зависящую только от p . Другими словами,

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_p(S^1)} < w_p \|f\|_{L_p(S^1)}$$

для всех $n \in \Lambda$ и $k \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1}\}$.

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай $p = 1$.

Пусть f принадлежит лебегову пространству $L_1(S^1)$. Рассмотрим разложение (13) её частичной суммы по базису пространства ломаных с вершинами в двоично-рациональных точках. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}} (|f|, e_i^m) = \sqrt{3} \cdot 2^{m/2} \|f\|_{L_1(S^1)}.$$

Используем Лемму 3.8 и представление (21) для оценки сумм коэффици-

ентов $c_j \binom{n}{k}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2^{n+1}} |c_j \binom{n}{k}| &\leq \sum_{m=0, m \in \Lambda}^n 2^{m/2-n/2} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} (|f|, e_i^m) \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |\lambda_{ij}^m \binom{n}{k}| < \\
&< \sqrt{3} \cdot 2^{-n/2+n+3} \|f\|_{L_1(S^1)} \sum_{m=0, m \in \Lambda}^n 2^{m/2-m+m/2} \left(\frac{7}{8}\right)^{\eta(n,m)-1} < \\
&< \sqrt{3} \cdot 2^{n/2+3} \|f\|_{L_1(S^1)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{s-1} < 10\sqrt{3} \cdot 2^{n/2+4} \|f\|_{L_1(S^1)}.
\end{aligned}$$

Значит, для произвольной функции f из $L_1(S^1)$ выполнено неравенство

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_1(S^1)} \leq \sum_{j=1}^{2^{n+1}} |c_j| \cdot \|e_j^n\|_{L_1(S^1)} \leq 120 \|f\|_{L_1(S^1)}.$$

Таким образом, для случая $p = 1$ имеем утверждение данной леммы при $w_1 = 120$.

Теперь рассмотрим случай $1 < p < \infty$.

Воспользуемся Леммой 3.7 и неравенством (11) для максимальной функции Харди–Литлвуда. Получаем, что для произвольной функции f из пространства $L_p(S^1)$ выполнено неравенство

$$\|S_k^n(f; x)\|_{L_p(S^1)} \leq 720 \|f^M(x)\|_{L_p(S^1)} \leq 720 \cdot \mathfrak{a}_p \|f\|_{L_p(S^1)} \leq w_p \|f\|_{L_p(S^1)},$$

где $w_p = 720\mathfrak{a}_p$ — константа, зависящая только от p .

Доказательство Леммы 3.9 завершено.

Завершим доказательство основного результата данного раздела — теоремы о сходимости в лебеговых пространствах.

Теорема 3.3. Пусть $1 \leq p < \infty$ и проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_p(S^1)$, по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f по норме пространства $L_p(S^1)$.

Доказательство.

Пространство ломаных

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} D^n$$

с вершинами в двоично-рациональных точках всюду плотно в пространствах $L_p(S^1)$ при всех $1 \leq p < \infty$. Используем этот факт для доказательства теоремы.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для некоторого натурального N существует ломаная l с вершинами в двоично-рациональных точках порядка N , такая, что

$$\|f - l\|_{L_p(S^1)} < \varepsilon.$$

Из Следствия С имеет место равномерная сходимость орторекурсивных разложений ломаных, то есть существует натуральное число $M > N$ такое, что для всех $n > M$, $n \in \Lambda$, для всех $k \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}$ и всех $x \in S^1$ выполнено неравенство

$$|l(x) - S_k^n(l; x)| < \varepsilon.$$

Значит имеет место и оценка

$$\|l - S_k^n(l)\|_{L_p(S^1)} < \varepsilon.$$

Функция $(f - l)$ принадлежит лебегову пространству $L_p(S^1)$, и для неё справедлив результат Леммы 3.9. Тогда оценим норму остатка следующим образом:

$$\begin{aligned} \|f - S_k^n(f)\|_{L_p(S^1)} &\leq \|(f - l) - S_k^n(f - l)\|_{L_p(S^1)} + \|l - S_k^n(l)\|_{L_p(S^1)} < \\ &< \|(f - l)\|_{L_p(S^1)} + w_p \|(f - l)\|_{L_p(S^1)} + \varepsilon < (w_p + 2)\varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 3.3 завершено.

Заключение

Обзор проведённого исследования

Тематика диссертации относится к области действительного анализа. В диссертации изучены вопросы сходимости орторекурсивных разложений по системам типа Фабера–Шаудера. Основные результаты работы состоят в следующем.

1. В работе рассмотрена классическая система Фабера–Шаудера, а также определена её модификация, орторекурсивные разложения по которой равномерно сходятся к разлагаемой непрерывной функции. Для классической системы и для подпоследовательности пачек модифицированной системы получены новые алгоритмы вычисления частичных сумм орторекурсивных разложений. А именно показано, что частичные суммы можно вычислить не только с помощью коэффициентов Фурье по определению орторекурсивного разложения, но и по свойствам самой системы Фабера–Шаудера, минуя затратный этап вычисления остатков на каждом шаге.
2. В диссертации исследованы орторекурсивные разложения непрерывной функции по классической системе Фабера–Шаудера. Показано, что орторекурсивный ряд сходится к разлагаемой функции поточечно, за исключением, быть может, точек максимума функций системы Фабера–Шаудера. Этот результат неулучшаем в том смысле, что, вообще говоря, добиться сходимости в проблемных точках в случае классической системы невозможно. В целях установления сходимости всюду при разложении непрерывной функции введена модифицированная система Фабера–Шаудера. В работе показано, что орторекурсивные разложения непрерывных функций по любой её подсистеме, состоящей из подпоследовательности пачек, сходятся равномерно к разлагаемой функции.
3. В работе изучен вопрос сходимости в лебеговых пространствах по вышеупомянутым системам. Результаты большинства работ по данной тема-

тике ограничены рассмотрением сходимости в гильбертовом пространстве L_2 , скалярное произведение которого фигурирует в определении орторекурсивного разложения. В частности, известны результаты о сходимости орторекурсивных разложений по норме L_2 для данных систем. В настоящей работе получены результаты о сходимости в произвольных лебеговых пространствах. При разложении функции из L_p по классической системе и по подпоследовательности пачек модифицированной системы доказана сходимость по норме L_p для $1 \leq p < \infty$.

4. В диссертации исследована сходимость почти всюду орторекурсивных разложений по данным системам. Результаты, относящиеся к сходимости почти всюду, являются редкими и обычно используют разлагаемые функции из пространств L_2 . В данной работе удалось доказать сходимость почти всюду орторекурсивных разложений по классической системе и по подпоследовательности пачек модифицированной системы при разложении любой интегрируемой по Лебегу функции.

Таким образом, в диссертации исследованы орторекурсивные разложения по классической и по модифицированной системам Фабера–Шаудера и даны положительные ответы на вопросы о сходимости орторекурсивного ряда к разлагаемому элементу при представлении функций из различных пространств. А именно, при разложении произвольной суммируемой функции по каждой из систем имеет место сходимость почти всюду и сходимость по норме пространства L_1 . Если разлагаемая функция также принадлежит пространству L_p при $1 < p < \infty$, то имеет место ещё и сходимость в пространстве L_p . Наконец, разложение непрерывной функции по модифицированной системе обладает свойством равномерной сходимости, а по классической — поточечной всюду, за исключением счётного множества. В работе также доказано, что для модифицированной системы её подсистема, состоящая из подпоследовательности пачек, сохраняет все вышеперечисленные виды сходимости. Кроме того, для обеих систем показано, что перенумерация системы, заключающаяся в смене нумерации внутри каждой пачки, не влияет на результат сходимостей.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы

Из направлений для дальнейшего исследования по тематике диссертации можно выделить следующее:

1. Исследование подсистем модифицированной системы Фабера–Шаудера, сохраняющих свойство равномерной сходимости орторекурсивных разложений по ним. Отметим, что в данной работе показано, что классическая система, являющаяся в свою очередь подсистемой модифицированной, это свойство утрачивает.
2. Исследование подсистем модифицированной (или, в частности, классической) системы, орторекурсивными разложениями по которым можно представить функции в лебеговых пространствах L_p в смысле сходимости по норме или суммируемые функции в смысле сходимости почти всюду. Напомним, что условие (5) является необходимым и достаточным для того, чтобы подсистема классической системы Фабера–Шаудера являлась системой представления в указанных смыслах. Возникает вопрос, сохраняют ли орторекурсивные разложения по подсистемам с данным условием свойства сходимости в L_p или почти всюду.
3. Изучение вопроса о том, какие перестановки элементов классической или модифицированной систем Фабера–Шаудера можно совершить, чтобы орторекурсивные разложения по полученной системе сходились в одном из указанных выше смыслах.

Список литературы

1. *Taylor B.* Methodus Incrementorum Directa et Inversa. — Londini : Impensis Gulielmi Innys, 1715.
2. *Fourier J.-B.* Memoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides // Nouveau Bulletin des Sciences par la Société Philomathique de Paris. — 1808. — Vol. 1, no. 6. — P. 112–116.
3. *Fourier J.-B.* Theorie analytique de la chaleur. — Paris : Firmin Didot, 1822.
4. *Wilbraham H.* On a certain periodic function // The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. — 1848. — Vol. 3. — P. 198–201.
5. *Gibbs J. W.* Fourier's Series // Nature. — 1899. — Vol. 59, no. 1539. — P. 606.
6. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener // Mathematische Annalen. — 1907. — Vol. 63. — P. 433–476.
7. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. — Leipzig : B.G. Teubner, 1912.
8. *Von Neumann J.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren // Mathematische Annalen. — 1929. — Vol. 102. — P. 49–131.
9. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Mathematische Annalen. — 1910. — Vol. 69, no. 3. — P. 331–371.
10. *Riesz F.* Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen // Mathematische Annalen. — 1910. — Vol. 69. — P. 449–497.
11. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // Fundamenta Mathematicae. — 1922. — Vol. 3, no. 1. — P. 133–181.

12. *Faber G.* Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Deutsche Mathematiker-Vereinigung. — 1910. — Vol. 19. — P. 104–112.
13. *Cooley J. W., Tukey J. W.* An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Mathematics of Computation. — 1965. — Vol. 19, no. 90. — P. 297–301.
14. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
15. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. — Москва : Физматлит, 2005.
16. *Walnut D. F.* An Introduction to Wavelet Analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. — Boston : Birkhäuser, 2002.
17. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
18. *Schauder J.* Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Mathematische Zeitschrift. — 1927. — Vol. 26. — P. 47–65.
19. *Талалаян А. А.* Представление произвольной измеримой функции рядами по функциям системы Шаудера // Известия АН Армянской ССР. Серия физико-математических наук. — 1959. — Т. 12, № 3. — С. 3–12.
20. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классами $\varphi(L)$ // Успехи математических наук. — 1972. — Т. 27, № 2. — С. 3–52.
21. *Filippov V. I., Oswald P.* Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // Journal of Approximation Theory. — 1995. — Vol. 82, no. 1. — P. 15–29.
22. *Zink R.* On a theorem of Goffman concerning Schauder series // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 523–529.
23. *Кротов В. Г.* Представление измеримых функций рядами по системе Фабера–Шаудера и универсальные ряды // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1977. — Т. 41, № 1. — С. 215–229.

24. *Филиппов В. И.* О подсистемах системы Фабера–Шаудера в функциональных пространствах // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1991. — № 2. — С. 78–85.
25. *Grigoryan T. M., Maranjyan A. A.* On the Unconditional Convergence of Faber–Schauder Series in L^1 // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. — 2021. — Vol. 55, no. 1. — P. 12–19.
26. *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. — Саратов, 2000. — С. 83.
27. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2001. — № 1. — С. 6–10.
28. *Стечкин Б. С., Стечкин С. Б.* Среднее квадратическое и среднее арифметическое // Доклады АН СССР. — 1961. — Т. 137, № 2. — С. 287–290.
29. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Some Remarks on Greedy Algorithms // Advances in Computational Mathematics. — 1996. — Vol. 5. — P. 173–187.
30. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Известия РАН. Серия математическая. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 3–16.
31. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Об условии сходимости почти всюду орторекурсивных разложений // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2016. — № 5. — С. 20–25.
32. *Политов А. В.* Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах // Математические заметки. — 2013. — Т. 93, № 4. — С. 637–640.

33. *Кудрявцев А. Ю.* О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Математические заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 707—720.
34. *Кудрявцев А. Ю.* О скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Известия РАН. Серия математическая. — 2012. — Т. 76, № 4. — С. 49—64.
35. *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2010. — Т. 65, № 3. — С. 95—99.
36. *Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichiy V. A.* Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansions in Systems of Translates and Dilates // Modern Mathematics and Mechanics. — 2019. — P. 3—11.
37. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. — Воронеж, 2001. — С. 161—162.
38. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Математический сборник. — 2004. — Т. 195, № 7. — С. 21—36.
39. *Баранова И. С.* Асимптотические свойства коэффициентов орторекурсивных разложений по характеристическим функциям двоичных промежутков // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2019. — № 5. — С. 3—10.
40. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p . — Москва : Мир, 1984.
41. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл. — Москва : Факториал, 1998.
42. *Гантмахер Ф.* Теория матриц. — Москва : Наука, 1988.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук

43. *Степанянц П. С., Паунов А. К.* Орторекурсивное разложение по модификации системы Фабера–Шаудера // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2023. — № 4. — С. 15–22.
44. *Stepanyants P. S.* Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansion with Respect to Modified Faber–Schauder System // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, no. 12. — P. 6610–6623.
45. *Степанянц П. С.* Орторекурсивное разложение по системе Фабера–Шаудера // Чебышевский сборник. — 2026. — Т. 27, № 2. — С. 97–117.

Иные публикации

46. *Степанянц П. С.* О представлении функций орторекурсивными рядами по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения. — 2026. — Т. 23. — С. 278–282.