**ОТЗЫВ научного руководителя
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Трифоновой Екатерины Евгеньевны
на тему «О свойствах конечно порождающих систем булевых функций
для классов рациональных вероятностей»
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика**

Рассматриваемые в диссертации вопросы, по-видимому, восходят к первым исследованиям о применении случайных и псевдослучайных величин в вычислительных системах, а также влиянии случайных помех на вычисления (Дж. ф. Нейман, К.Э.Шеннон). В 1960-х годах возрос интерес к построению вычислительных устройств, эксплуатирующих вероятностные принципы, что потребовало разработки соответствующей теории. В частности, в рамках исследования вероятностных автоматов (Р.Г.Бухараев) ставится задача построения «управляемых генераторов вероятностей». Исследования в этой области достаточно быстро приводят к вопросам выразимости одних случайных величин с помощью функций от других случайных величин, что позволяет говорить о рассматриваемых вопросах с позиций теории функциональных систем. Вместе с тем, распределения случайных величин как объект исследования существенно отличаются от типичных для теории функциональных систем k-значных функций, и, зачастую, требуют создания специальных методов исследования.

Наиболее подробно исследован вопрос о преобразованиях бренуллиевских случайных величин с рациональными вероятностями с помощью булевых функций. В этом случае каждая случайная величина характеризуется вероятностью обращения в единицу, и можно, фактически говорить о преобразованиях вероятностей булевыми функциями. Одним из первопроходцев этой области был Р.Л.Схиртладзе: в 1960-х года он установил, что всевозможные двоично-рациональные вероятности получаются из единственной вероятности 1/2 с помощью конъюнкций и дизъюнкций, а любая троично-рациональная вероятность получается с помощью тех же булевых функций из вероятностей 1/3 и 2/3. Таким образом, для двоично- и троично-рациональных вероятностей система «конъюнкция, дизъюнкция» оказалась *конечно порождающей* — т. е. позволяла выражать произвольные вероятности из класса путем преобразования некоторого конечного множества исходных вероятностей. Примечательно, что распространить результат о конечно порождающем свойстве системы, например, на пятеричные вероятности Р.Л.Схиртладзе не удалось. Более того, возникла гипотеза о том, что для p-ичных вероятностей, где p — простое число не меньше 5, система «конъюнкция, дизъюнкция» не является конечно порождающей. Однако, шестьдесят лет спустя эту гипотезу так и не удалось, ни подтвердить, ни опровергнуть.

В дальнейшем исследования этой задачи шли по двум направлениям: с одной стороны, предлагались различные усиления системы «конъюнкция, дизъюнкция», которые были бы конечно порождающими, а с другой — исследовалось, в каких классах рациональных вероятностей эта система все-таки будет конечно порождающей.

По второму направлению в 1990-х годах Р.М.Колпаковым были получены существенные продвижения, а именно, было доказано, что система «конъюнкция, дизъюнкция» конечно порождающая в любом из классов рациональных вероятностей, у которых в разложении знаменателя на множители могут встречаться хотя бы два различных простых числа. Тем самым, вопрос о конечном порождении остался незакрытым только для классов вероятностей, у которых знаменатель — степень некоторого фиксированного простого числа не меньшего пяти.

В первом направлении, по-видимому, наиболее значимый результат принадлежит Ф.И.Салимову, который в 1980-х годах показал, что система «конъюнкция, дизъюнкция», дополненная селекторной функцией от трех переменных, — конечно порождающая во всех упомянутых выше классах рациональных вероятностей. Существенно позднее (в 2010-х годах) эти результаты были независимо получены группой исследователей под руководством Дж. Брака и М. Риделя.

Таким образом, оказалось, что существуют конечно порождающие системы для p-ичных вероятностей, однако, в отличие от других классов рациональных вероятностей, не удается доказать (или опровергнуть) возможность конечного порождения системой «конъюнкция, дизъюнкция». В связи с этим представляется актуальным исследование того, какими свойствами должна обладать система булевых функций, чтобы быть (или, наоборот, *не* быть) конечно порождающей в классе p-ичных вероятностей для простого p не меньшего пяти. Именно такие вопросы исследуются в настоящей диссертации. Одни из наиболее значимых результатов в этом направлении — доказанные необходимые условия конечного порождения. Они позволили, в частности, привести нетривиальный пример системы для которой удается доказать свойство бесконечного порождения, тогда как ранее строились преимущественно конечно порождающие системы, а доказуемо бесконечно порождающие были достаточно тривиальны.

Связь преобразований случайных величин с бесповторной суперпозицией булевых функций прослеживается, как минимум начиная с работ Ф.И.Салимова. Хотя бесповторная суперпозиция исследуется, по-видимому, с 1950-х годов, полученные в этих исследованиях результаты не давали существенных продвижений в вопросах выразимости распределений. Исследователям лишь оставалось сетовать на трудность оперирования с бесповторной суперпозицией и недостаточную разработанность соответствующей теории. В этом контексте особенно примечательно, что в настоящей диссертации не только используется операция бесповторной суперпозиции, но и удается установить некоторые свойства бесповторно замкнутых классы булевых функций, представляющие самостоятельный интерес, не связанный непосредственно с преобразованиями рациональных вероятностей. Построенные в результате исследования условий конечного порождения классы p-сократимых и p-несократимых булевых функций, демонстрируют чрезвычайно неожиданные (с точки зрения обычной суперпозиции) свойства бесповторной суперпозиции.

Наконец, также на основе построенных бесповторно замкнутых классов, в диссертации строятся новые конечно порождающие системы для пятеричных вероятностей. Хотя эти результаты выглядят более частными, они, по-видимому, создают задел для дальнейших исследований в этой области, что представляет несомненный интерес.

В процессе работы над диссертацией Е.Е.Трифонова продемонстрировала огромное трудолюбие и большую исследовательскую добросовестность, которые в итоге позволили получить значимые результаты. Все результаты диссертации являются новыми, получены Е.Е.Трифоновой самостоятельно, опубликованы в ведущих математических журналах и неоднократно докладывались на различных конференциях.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Трифоновой Екатерины Евгеньевны удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова» и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ 011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
ЯШУНСКИЙ Алексей Дмитриевич,
независимый исследователь

____

11.08.2025

Контактные данные:
тел.: , email:

Специальность, по которой научным руководителем защищена диссертация:
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел