

**ОТЗЫВ научного руководителя
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Иванова Андрея Александровича
на тему «Ковариантные непрерывные функторы
в категориях $\mathbf{Comp}$ и P »
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

Изучение различных топологических аспектов теории категорий и, в частности, исследование геометрических свойств ковариантных функторов, действующих в той или иной категории топологических пространств и их отображений, является в настоящее время важным, актуальным и интенсивно развивающимся направлением общей топологии. Хорошо известно, что многие классические конструкции общей топологии имеют функториальный характер: они определены не только для пространств, но и для отображений.

Важными примерами таких конструкций являются: операция возведения в степень топологического пространства, порождающая степенной функтор и конструкция гиперпространства, впервые появившаяся в топологии в 1923 году в работах Вьеториса. Эти операции являются ковариантными функторами в категории $\mathbf{Comp}$ всех компактов и их непрерывных отображений. Серьезный вклад в теорию гиперпространств внесли многие топологи. Изучение свойств ковариантных функторов привело к выделению ряда естественных условий, составляющих важное определение нормального функтора, действующего в категории $\mathbf{Comp}$. Нормальные функторы были введены в общую топологию Е.В.Щепиным в 1981 году. Затем В.В.Федорчук определил полунормальный функтор, тем самым расширив понятие нормального функтора. Теория полунормальных функторов в дальнейшем развивалась в работах многих авторов. Заметим, что и нормальные функторы и полунормальные функторы удовлетворяют важному условию непрерывности.

Диссертация А.А.Иванова посвящена изучению свойств полунормальных и нормальных функторов в категории $\mathbf{Comp}$ компактов и их непрерывных отображений и в категории P паракомпактных r -пространств и

их совершенных отображений. При этом сразу следует отметить, что распространение понятия полунормального функтора на категорию P является новым и неочевидным заранее результатом, полученным А.А.Ивановым.

Диссертация состоит из введения и двух глав, разбитых на девять параграфов, и заключения. Первая глава посвящена дальнейшим обобщениям классических теорем Катетова и Зенора с использованием нормальных и полунормальных функторов. В этой главе предпринята оказавшаяся успешной попытка распространения понятия полунормального функтора с категории Comp на категорию P , что безусловно является новым и интересным результатом. Первая глава содержит много технических результатов, некоторые из которых имеют и самостоятельное значение. Например, доказывается, что если куб паракомпактного p -пространства X наследственно паранормален, то пространство X метризуемо, что является одновременным обобщением в категории P классических теорем Катетова и Зенора о кубе. Основными результатами первой главы несомненно следует считать следующие две теоремы А.А.Иванова.

1) Пусть X – паракомпактное p -пространство, F – нормальный функтор степени ≥ 3 , действующий в категории P . Тогда если пространство $F(X)$ наследственно паранормально, то пространство X метризуемо.

2) Пусть F – полунормальный функтор в категории P со степенным спектром $sp(F)=\{1, m, n, \dots\}$ и удовлетворяющий условию (*). Если для паракомпактного p -пространства X пространство $F_n(X) \setminus X$ наследственно паранормально, то пространство X метризуемо.

Следует отметить, что А.А.Иванов также в первой главе доказывает, что комбинаторное условие (*) и условие на степенной спектр автоматически выполняются для всех нормальных функторов степени ≥ 3 в категории P и, следовательно, эти теоремы являются далеко идущими одновременными обобщениями теоремы Добрыниной 2011 года и теоремы Комбарова 2015

года, причем вторая из этих теорем Иванова в данной тематике представляет собой ослабление условий, налагаемых на функтор, что открывает новые возможности для исследований в этом направлении.

Во второй главе изучаются полунормальные функторы, действующие в категории Comp . Основные результаты второй главы связаны с важным примером полунормального функтора λ , порождаемого конструкцией суперрасширения пространства. Суперрасширение $\lambda(X)$ представляет собой пространство всех максимальных сцепленных систем пространства X , снабженное некоторой специальной топологией. Пространство $\lambda(X)$ впервые рассматривалось де Гроотом еще в 1969 году. В частности, Де Гроот доказал, что суперрасширение любого компакта является компактом. Во второй главе рассматриваются метрические компакты и метризуемые (в смысле В.В.Федорчука) функторы, а также верхняя и нижняя размерности квантования для некоторых функторов в категории Comp . Верхняя и нижняя размерности квантования являются относительно новыми понятиями, и А.А.Иванов аккуратно выписывает формулы, определяющие эти размерности и отмечает, что верхняя и нижняя размерности квантования для функтора гиперпространства совпадают с верхней и нижней ёмкостной размерностями пространства из работы Я.Б.Песина 2013 года. Было известно, что для метрического компакта существуют подмножества со всеми возможными промежуточными значениями верхней ёмкостной размерности и что для нижней ёмкостной размерности это неверно. Также было известно, что верхняя размерность квантования максимальных сцепленных систем принимает все промежуточные значения вплоть до верхней ёмкостной размерности, и оставался неразрешенным единственный вопрос: *принимает ли все промежуточные значения нижняя размерность квантования максимальных сцепленных систем?* Основным результатом второй главы является положительный ответ на этот вопрос, а именно, для любого метрического компакта X с нижней ёмкостной размерностью a и любого неотрицательного числа $b \leq a$, найдется максимальная сцепленная система

с носителем X , нижняя размерность квантования которой равна b . Тем самым продемонстрировано отличие нижней размерности квантования от нижней ёмкостной размерности Песина. При доказательстве теоремы автору пришлось преодолеть значительные технические трудности.

Подводя итог, можно сделать вывод, что в диссертации Иванова Андрея Александровича, посвященной весьма актуальной теме, получены важные результаты, некоторые из которых открывают новые перспективы научных исследований в изучении топологических вопросов теории категорий и теории размерности. Представленные в диссертации результаты снабжены подробными доказательствами, а приведенные и используемые факты – соответствующими ссылками. Все результаты, полученные в работе, являются новыми, носят теоретический характер, вносят вклад в развитие общей топологии и теории категорий и доказаны автором самостоятельно. При работе над диссертацией автор проявил высокую математическую квалификацию и творческое мышление.

Результаты диссертации опубликованы в 3 печатных работах в научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ. Автореферат соответствует требованиям, правильно и полно отражает содержание диссертации. Работа прошла многократную апробацию. Результаты работы обсуждались и докладывались на международных и всероссийских научных конференциях и на научных семинарах.

На основании сказанного считаю, что диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите

диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Считаю, что диссертационная работа Иванова Андрея Александровича удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова» и рекомендую её к защите в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук, доцент
профессор кафедры общей топологии и геометрии
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
Комбаров Анатолий Петрович

5 февраля 2025 г.

Подпись профессора кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» Комбарова А.П. удостоверяю:

Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова
член-корр. Шафаревич А.И.

5 февраля 2025 г.