Отзыв официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Козловской Татьяны Давидовны
на тему: «О множествах относительной единственности
для некоторых ортогональных систем»
по специальности 1.1.1 Вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Козловской Татьяны Давидовны по своей тематике относится к теории единственности ортогональных систем функций. Целью работы является исследование множеств относительной единственности и задач локализации для нескольких классических систем функций: тригонометрической системы, системы Уолша, системы Виленкина–Джафарли.

Актуальность диссертационной работы. Теория множеств единственности для ортогональных систем функций берет начало с одной работы Г. Кантора, а позже Н.Н. Лузин и Н.К. Бари назвали множествами единственности или U-множествами те подмножества единичной окружности, при сходимости тригонометрического ряда к нулю вне которых не нарушается единственность, а M-множествами — те, которые не являются U-множествами. Исследованиям множеств единственности посвящены известные работы Д.Е. Меньшова, А. Райхмана, Н.К. Бари, Р. Салема, А. Зигмунда, И.И. Пятецкого-Шапиро, А. Кехриса. Из этих работ видно, в частности, что вопрос о том, является заданное множество U- или M-множеством, является очень тонким и даже в простейших частных случаях требующим для ответа на него привлечения алгебраической теории чисел, а конструктивного способа ответить на этот вопрос в общем случае не существует даже для класса замкнутых множеств.

В работах А.А. Шнейдера, Н.Я. Файна, Ф.Г. Арутюняна, А.А. Талаляна, С.Б. Стечкина, П.Л. Ульянова, В.А. Скворцова, В.Р. Вэйда, К. Йонеды, Дж. Кури, Г.Г. Геворкяна, Н.Н. Холщевниковой, С.Ф. Лукомского, Н.А. Бокаева и других авторов изучались U-множества для систем функций Радемахера, Хаара и Уолша и их обобщений. В недавней серии работ Г.Г. Геворкяна получены результаты о единственности для рядов по системе Франклина.

Множества относительной единственности возникают, когда вместо всего класса рядов по некоторой системе функций рассматривают некоторый его подкласс. Изучением таких множеств для различных систем функций занимались А. Зигмунд, В.Л. Шапиро, Ж.-П. Кахан, Й. Кацнельсон, Р.И. Овсепян, А.В. Бахшецян, Г.Г. Геворкян, Л. Кольцани и другие математики. Проблемам, связанным с объединениями U-множеств, посвящены работы Н.К. Бари, В.Р. Вэйда, Н.Н. Холщевниковой и других авторов.

Таким образом, рассматриваемая диссертационная работа актуальна, а полученные в ней результаты об U_r-множествах для нескольких систем функций представляют значительный интерес и являются существенным продвижением в данной области.

Содержание работы. Диссертация включает в себя введение, четыре главы, заключение и список литературы из 36 наименований. Общий объем диссертационной работы составляет 66 страниц.

Во введении раскрыта актуальность выбранной темы, а также сформулированы основные цели исследования и обоснована научная новизна полученных результатов.

В первой главе даны основные определения, а также приведен ряд известных результатов, связывающих определяемые понятия и применяемых в диссертационной работе.

Во второй главе:

– введено понятие обобщенного формального произведения (ОФП) двух рядов Уолша;

– с помощью понятия ОФП на случай рядов Уолша перенесена теория Райхмана о локализации общих (т.е. не являющихся рядами Фурье) тригонометрических рядов; в частности доказано, что если ядро нуль-ряда Уолша замкнуто, то любая его непустая порция является ядром некоторого другого нуль-ряда Уолша.

В третьей главе:

– доказан аналог одного результата Кахана и Салема, состоящий в том, что любое подмножество E единичной окружности, размерность Хаусдорфа которого равна нулю, является U_r-множеством для тригонометрических рядов для всех $r \geq 1$;

– построена классификация подмножеств единичной окружности нулевой меры Лебега и положительной меры Лебега с точки зрения принадлежности этих подмножеств классам U_r- и M_r-множеств для тригонометрической системы функций; еще одна классификация, в которой принимают участие U_r- и M_r-множества для системы функций Уолша, построена для подмножеств единичного полуинтервала.

В четвертой главе:

– доказаны теоремы типа Бари о том, что объединение счетного числа замкнутых U_r-множеств для систем Уолша и Виленкина–Джафарли тоже является U_r-множеством;

– найдены достаточные условия того, что коэффициенты формального произведения тригонометрических рядов принадлежат классу l^p, если один из них абсолютно сходится, а коэффициенты второго — из класса l^p.

Научная новизна и теоретическая значимость результатов. Представленные результаты являются новыми и достаточно интересными. При их доказательстве использованы методы теории ортогональных рядов (в частности, метод формального произведения рядов), методы гармонического анализа (в частности, методы теории характеров нульмерных групп), методы теории меры, теории множеств и теории размерности. В диссертационной работе выдерживается определенная сюжетная линия. Так, результаты главы 2, с одной стороны, имеют самостоятельный интерес, с другой стороны, они используются в главе 4 при доказательстве теорем об объединении U_r-множеств. Интересны построенные в главе 3 классификации множеств нулевой и положительной меры на единичной окружности и единичном полуинтервале с точки зрения их принадлежности классам U_r- и M_r-множеств.

Таким образом, результаты рассматриваемой диссертационной работы являются существенным продвижением в данной области, а ее методы могут быть использованы специалистами при решении задач единственности и локализации для различных систем функций, в том числе систем характеров произвольных компактных абелевых групп.

Степень обоснованности научных положений и результатов, сформулированных в диссертации. Положения, выносимые на защиту, получены лично автором, обоснованы и подтверждены четко сформулированными и строго доказанными теоремами. Основные результаты диссертационной работы отражены в 8 публикациях автора, из которых 3 опубликованы в научных изданиях, рецензируемых Scopus, Web of Science и RSCI, в также определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Результаты проведённого исследования были представлены на нескольких международных научных конференцях и научно-исследовательских семинарах, что подтверждает их актуальность и научную значимость.

Замечания по диссертационной работе.

1. Теорема 4.1.1 об объединении U_r-множеств для системы Уолша сформулирована и доказана для случая $r \geq 2$, в то время как подобная теорема 4.2.1 для системы Виленкина–Джафарли — лишь для случая $r > 2$. В то же время из доказательства теоремы 4.2.1 и предшествующих ей лемм видно, что эта теорема остается верной и при $r = 2$.

2. Пункт 4.3 диссертационной работы посвящен, как видно из его названия, объединению U_r-множеств для тригонометрической системы. Диссертант сразу отмечает, что в отличие от систем Уолша и Виленкина–Джафарли в случае тригонометрической системы метод формального произведения дает возможность доказать теорему типа Бари лишь в ослабленном виде. После этого в диссертационной работе находятся дополнительные условия, при выполнении которых эта теорема становится верной. При этом сама теорема, фактически доказанная при выполнении найденных диссертантом дополнительных условий, так и не была сформулирована.

3. Доказательство леммы 2.1.1 можно несколько сократить. Для этого достаточно сказать, что при рассматриваемом условии на число n коэффициент при 2^k в двоичном разложении этого числа равен 1, числа p — нулю, а числа $n \oplus p$ — единице. Отсюда сразу получается ключевая формула (2.7), а после ее получения можно перейти к последним двум абзацам в доказательстве.

4. Доказательство теоремы 4.2.1 предваряет шесть вспомогательных лемм 4.2.2–4.2.7. При этом доказательство леммы 4.2.2 о ядрах Дирихле для системы Виленкина–Джафарли вполне можно было бы опустить и сослаться на более общий результат для произвольной системы характеров нульмерной компактной абелевой группы, который содержится, например, в формуле (3.8) на странице 98 из источника [21] в списке литературы.

5. В работе имеется небольшое количество опечаток и неточностей: в определении двоичного разложения числа n на странице 17 неверно указан нижний предел суммирования; в выносной формуле в конце страницы 19 стоит избыточная запись $\mathrm{mod}\, 2\pi$ в показателе степени; в ссылке на странице 49 вместо [2] должно быть [20]; в начале доказательства теоремы 4.2.1 вместо ссылки на лемму 4.2.3 указана ошибочная ссылка на лемму 4.1.2.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационная работа оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Козловская Татьяна Давидовна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Плотников Михаил Геннадьевич

Контактные данные: тел. +79296723127,
email: mikhail.plotnikov@math.msu.ru.
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Адрес места работы: 119991, ГСП-1, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, Главное здание,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра математического анализа.
Тел. +7 (495) 939-10-00, email: info@rector.msu.ru.

Подпись М.Г. Плотникова удостоверяю:

Декан механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»,
член.-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор

Шафаревич Андрей Игоревич