

ОТЗЫВ
официального оппонента
Королева Максима Александровича
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Науменко Антона Павловича на тему:
«Диофантовы неравенства с простыми числами»
по специальности 1.1.5 –
«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика»

Представленная работа посвящена решению важной, новой и интересной теоретико-числовой задачи: насколько близко можно подойти к заданному вещественному положительному числу N суммой двух (трёх, четырёх) квадратов простых чисел? Иначе говоря, при каких наименьших H_s , $s = 1, 2, 3$, неравенства

$$|N - (p_1^2 + p_2^2)| \leq H_1, \quad |N - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)| \leq H_2, \quad |N - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2)| \leq H_3 \quad (1)$$

разрешимы в простых числах?

Известна классическая проблема, восходящая, вероятно, ещё к Л. Эйлеру: при каком наименьшем H (как функции N) неравенство

$$|N - (x^2 + y^2)| \leq H$$

разрешимо в целых числах x и y ? Удивительно, что самый естественный путь (т.н. «жадный» алгоритм: сначала приблизить число одним квадратом, а потом разность между ними - вторым квадратом) даёт наилучший известный на сегодняшний день результат: $H \asymp N^{1/4}$.

Несомненно, что задачи, рассмотренные в диссертации, навеяны именно этой трудной и интересной проблемой.

Применение «жадного» алгоритма при решении такой задачи даёт в лучшем случае разрешимость первого из неравенств (1) при H , существенно больших, чем $\sqrt{N}$. Чтобы перейти через этот «корневой барьер» и доказать разрешимость для H порядка $N^{0.5-c}$ при некотором, пусть даже очень малом, но положительном c , автору пришлось задействовать т.н. явные формулы теории распределения простых чисел и весьма нетривиальные утверждения о «плотности» нулей дзета-функции Римана. Впервые эти соображения были введены в теорию чисел Ю.В. Линником и с того времени прочно вошли в арсенал сильнейших теоретико-числовых инструментов.

Итогом этой деятельности стало доказательство диссертантом разрешимости неравенств (1) при $H_s \geq N^{\alpha_s + \varepsilon}$, где

$$\alpha_1 = \frac{31}{64} - \frac{1}{300} = 0.481041\dots, \quad \alpha_2 = \frac{7}{12}\alpha_1 = 0.280607\dots, \quad \alpha_3 = \left(\frac{7}{12}\right)^2 \alpha_1 = 0.163687\dots$$

(теоремы 1, 2 и 3 соответственно).

Без сомнения, этот результат заслуживает самой высокой оценки и по праву войдёт в число лучших достижений российской теории чисел.

При чтении диссертации естественно поставить вопрос: что явилось ключевым обстоятельством, которое дало возможность получить столь нетривиальные результаты? Дело в том, что плотностную технику можно использовать при ответе на такой вопрос: при каком наименьшем значении H можно утверждать, что «почти каждый» из промежутков $(n, n + H]$, $n = 1, 2, \dots, N$, содержит не менее

$$\frac{cH}{\ln N}$$

простых чисел. Ответ на него зависит, грубо говоря, от наличия плотностной оценки типа

$$N(\sigma, T) \ll T^{a(1-\sigma)+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (2)$$

справедливой на всем интервале $[0.5, 1)$, и имеет вид:

$$H \geq N^{1-\frac{2}{a}+\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1.$$

Наличие других плотностных оценок, более точных при σ , близких к единице, в этой задаче, как ни странно, ни к чему не приводит. Перенос подобных рассуждений без изменений на случай задачи приближения числа суммой квадратов простых в лучшем случае приводит лишь к разрешимости неравенства

$$|N - (p^2 + q^2)| \leq H$$

при $H \geq N^{0.5+c}$, где $c > 0$, и не может привести к содержательному результату при $H \ll N^{0.5-\varepsilon}$.

Диссертантом же успешно использована специфика задачи, а именно то, что число N приближается не одним линейным слагаемым, а двумя нелинейными: $p_1^2 + p_2^2$. Это позволило ему доказать две ключевые леммы общего вида, которые, грубо говоря, оценивают одну и ту же сумму по нулям дзета-функции, но разными способами. Речь идёт о леммах 17 и 19 (включая их следствия - леммы 18 и 20 соответственно). В первом случае автор оценивает исходную сумму, сводя её к оценке суммы типа

$$\sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ \sigma_1 \leq \beta < \sigma_2}} X^\beta$$

через использование тривиального неравенства «модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля». Во втором же случае такая оценка проводится с использованием неравенства Коши. Имея два указанных утверждения, автор умело комбинирует их, сочетая их с богатым арсеналом плотностных оценок, и так достигает успеха: разрешимости указанного неравенства при

$$H < N^{0.5-c}$$

с надлежащим положительным c .

Другим ключевым обстоятельством, приведшим к успеху, является тот факт, что количество нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках вблизи единичной прямой аномально мало (если, конечно, оно отлично от нуля). Например, при σ , очень близких к единице (слева) оценка (2) уступает по силе другой оценке совершенно иного типа:

$$N(\sigma, T) \ll T^{a(1-\sigma)^{3/2}} (\ln T)^b, \quad (3)$$

где a и b – некоторые абсолютные постоянные. Автором существенно используется оценка (3) при работе с соответствующим диапазоном изменения σ (с. 58-59).

Однако самой по себе оценки (3) мало. Для того, чтобы добиться успеха, автору пришлось самостоятельно вывести целый ряд новых плотностных теорем, каждую из которых он впоследствии применял на том или ином диапазоне изменения σ (лемма 25 на с. 35, лемма 27 на с. 44, лемма 29 на с. 48, лемма 30 на с. 50). Для этого ему пришлось основательно и творчески освоить соответствующую технику доказательств таких утверждений (по книгам Х. Монтгомери и А. Ивича). Большую часть текста диссертации занимает именно доказательство плотностных теорем.

Доказательства теорем 2 и 3 (о приближении числа суммой трёх и четырёх квадратов простых) в целом следуют схеме доказательства теоремы 1, которая по праву может быть названа главным результатом диссертации.

Автором проделана большая и сложная работа, неизбежным спутником которой являются опечатки и неточности в тексте. Все они не влияют на правильность основных результатов, хотя их скрупулёзный анализ потребовал детального ознакомления с ходом выкладок. Они перечислены ниже, с разбивкой на две группы. В первую вошли опечатки, во вторую – более содержательные замечания. Вторые снабжаются небольшими комментариями.

Опечатки:

стр. 3:

– в определении функции Чебышёва $\psi(x)$ вместо «сумма значений функции $\pi(x)$ » должно быть: «сумма значений функции $\Lambda(n)$ »;

– в определении символа $\ll$ вместо $A \leq B$ должно быть $|A| \leq B$;

стр. 8:

– в неравенстве для $J(N, H)$ присутствует параметр N_1 , но его определение даётся только на стр. 11;

стр. 18

– в неравенстве (7) леммы 7 вместо T должно быть t ;

стр. 18-20:

– похоже, в ссылках на источники произошёл сдвиг на одну позицию; так, под [18] явно следует понимать книгу А.Ивича [19], а под [19] – книгу Х.Монтгомери [20].

стр. 19:

- в лемме 12 (формула для $S(x, K, T)$) вместо $(-1)^d$ должно быть $(-1)^n$; то же
- на с. 27;
- стр. 20:
- в определении $M(A)$ пропущен дифференциал dt ;
- стр. 21:
- в лемме 16 (формулировка и доказательство) пропущен дифференциал dx ;
- стр. 23:
- в лемме 17 (формула для $W_1(\alpha)$) вместо $1 > \sigma \geq \sigma_0$ должно быть $1 > \beta \geq \sigma_0$;
- то же – в формулировке леммы 18 (с. 24).
- стр. 24:
- в формулировке леммы 18 величина T берётся равной $(N_1/H)(\ln N)^{-3}$, хотя лемма применяется в ситуации, когда $T = (N_1/H)(\ln N)^3$. Точное значение T из леммы можно убрать, так как оно там по сути не используется (возможно, используется только то, что $\ln T \ll \ln N$).
- слагаемое

$$\frac{HT}{N^{1-\alpha}} \ln T$$

во второй снизу выносной формуле можно опустить (см. ниже Замечание 2).

- стр. 59:
- в третьей снизу выносной формуле в сумме по нулям пропущено условие $0.5 \leq \beta < \sigma_0$, где $\sigma_0 = \frac{45\,869}{48\,270}$;
- стр. 69:
- в списке литературы у публикации [8] не указан год (2006).

Содержательные замечания:

1) Описание основных этапов доказательства теоремы 1 представляется излишне длинным. Оно занимает практически 5 страниц – ровно столько, сколько и само доказательство. В описании имеется множество ссылок на соотношения, которые ещё только будут доказаны позже, и в этом смысле оно не сообщает практически ничего читателю, который видит текст впервые.

Вместе с тем, здесь было бы уместо пояснить главное: за счёт чего автору удаётся степенным образом улучшить величину H , при которой неравенство

$$|N - (p^2 + q^2)| \leq H$$

разрешимо в простых числах. Именно, ранее это было известно для $H = \sqrt{N}e^{-(\ln N)^{0.1}}$, теперь – при $H = N^{\alpha+\varepsilon}$, где, как уже отмечалось,

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{31}{64} - \frac{1}{300} < \frac{1}{2}.$$

За вычислениями на стр. 59-61 это совершенно не просматривается.

Так, весьма желательно объяснить «на пальцах» (скажем, во Введении) следующее. В доказательстве существенно используются (помимо прочего) два ключевых утверждения:

а) плотностная оценка Хаксли (1) с $a = 12/5$;

б) теорема А. Бейкера, Г. Хармана и Я. Пинтца о том, что всякий промежуток вида $(N, N + h]$ содержит при $N > h \gg N^b$, $b = 21/40$, порядка

$$\frac{h}{\ln N} \quad \text{простых чисел.}$$

Какое именно из двух чисел – $a = 12/5$ или $b = 21/40$ – так, сказать, больше «повлияло» на показатель α_1 ?

2) В доказательстве лемм 16, 17 (с. 22, 23) есть ссылки на лемму 2, но из контекста следует, что под леммой 2 автор в действительности понимал общую оценку суммы вида

$$S = \sum_{\sigma_1 \leq \beta < \sigma_0, |\gamma| \leq T} X^\beta,$$

но в тексте работы она отсутствует. Также нужно отметить, что для неё справедливо неравенство

$$|S| \leq (\ln X + 1) \max_{\sigma_1 \leq u < \sigma_0} (X^u N(u; T)),$$

которое приводит к появлению дополнительной степени логарифма (чего не учитывается в выкладках – например, на с. 23, – хотя и не влияет на конечный результат).

3) Непонятно, для чего на с. 23 в начале доказательства дается ссылка на [14], глава 7, когда далее автор пользуется общеизвестным фактом: модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля функции.

4) На стр. 24 в доказательстве леммы 19 идёт отсылка к лемме 16, которая, однако, говорит совсем о другом (неравенство леммы 19 при этом остаётся справедливым);

5) На стр. 25 утверждается, что промежутки интегрирования в выражении для $W_3(\alpha)$ не пересекаются. Но приведённое там же неравенство утверждает ровно обратное. Действительно, если положить

$$\xi_n = (N - n^{1/\alpha} - H)^\alpha, \quad \eta_n = (N - n^{1/\alpha} + H)^\alpha,$$

то очевидно, что $\xi_{n+1} < \xi_n$, $\eta_{n+1} < \eta_n$. Упомянутое неравенство означает, что $\eta_{n+1} \geq \xi_n$, т.е. то, что отрезки $[\xi_n, \eta_n]$ и $[\xi_{n+1}, \eta_{n+1}]$ могут иметь общие точки. Поэтому утверждать, что эти промежутки не пересекаются, и что суммарный интеграл по

ним не превосходит интеграла по отрезку вида $[N_1^\alpha/2, 2N_1^\alpha]$ вообще говоря, нельзя. Тем не менее, само утверждение леммы остаётся верным. Именно,

$$W_3(\alpha) \leq \sum_n \int_{\xi_n}^{\eta_n} \left| \sum_{\varrho} x^{\varrho-1} \right| dx \leq \int_U^V \left(\sum_{n: \xi_n \leq x \leq \eta_n} 1 \right) \left| \sum_{\varrho} x^{\varrho-1} \right| dx,$$

где U - наименьшее значение ξ_n , а V - наибольшее значение η_n .

В силу условия $H \leq 0.5N_1$ (которого, кстати, нет в формулировке леммы), легко видеть, что

$$\eta_n < (3N_1)^\alpha, \quad \eta_n > (0.5N_1)^\alpha,$$

так что $U, V \asymp N_1^\alpha$. Далее, двойное неравенство

$$\xi_n \leq x \leq \eta_n$$

равносильно неравенству

$$(N - x^{1/\alpha} - H)^\alpha \leq n \leq (N - x^{1/\alpha} + H)^\alpha,$$

и ему удовлетворяет не более

$$\frac{2H}{(N/2)^{1-\alpha}} + 1 \ll \frac{H}{N^{1-\alpha}}$$

чисел n . Это рассуждение приводит к неравенству

$$W_3(\alpha) \ll \frac{H}{N^{1-\alpha}} \int_U^V \left| \sum_{\varrho} x^{\varrho-1} \right| dx,$$

которое приведено в самом низу с. 25. Однако в работе появление множителя $H/N^{1-\alpha}$ никак не объясняется.

6) Для чего применять на стр. 59 (при оценке W_2) неравенство Коши, когда можно сослаться на лемму 20?

7) На стр. 60, 61 автором предъявляются конкретные экспоненциальные пары (κ, λ) . Но как проверить, что это действительно экспоненциальные пары? Было бы полезным указать последовательность A - и B - процессов метода экспоненциальных пар, а также исходную пару (скажем, $(0, 1)$), из которой получаются все пары, используемые в работе.

При вычислениях значений функций $g_i(\sigma)$, по-видимому, допущены неточности, которые не влияют на результат. Так, подсчёт даёт для величины

$$g_2(\sigma), \quad \sigma = \frac{31\,949}{33\,650}$$

значение $-0.00000453\dots$ вместо указанного на с. 60 значения $-0.00001\dots$. Аналогично, для величины

$$g_3(\sigma), \quad \sigma = \frac{15\,958}{16\,825}$$

получается значение $-0.0006029\dots$ вместо приведённого на стр. 60 значения $-0.002\dots$. Неточность вкралась и в подсчёты, относящиеся к промежутку $[\frac{39}{50}, \frac{9}{10})$: вместо значения $-0.037\dots$ в действительности получается число

$$-\frac{604}{46\,495} = -0.01245\dots$$

Кроме того, на стр. 61 при рассмотрении промежутка

$$\left[\frac{17}{18}, \frac{15\,958}{16\,825} \right)$$

автор ограничивается ссылкой на плотностную оценку (36), в то время как здесь было бы уместо привести отвечающее этому случаю неравенство типа

$$N_1^{\sigma-1} \frac{\sqrt{N}}{H} N(\sigma, T) \ll N_1^{g(\sigma)+\varepsilon}, \quad g(\sigma) = \sigma - 1 + \frac{1351}{915} \frac{1-\sigma}{2\sigma+1}$$

и отметить, что максимум такой функции g не превосходит значения в правом конце, равного $-0.01679\dots$. Наконец, непонятно, откуда взялось и для чего приведено неравенство

$$\sigma \leq \frac{1633}{2088} = 0.782,$$

когда автор работает с теоремой Хаксли на промежутке $[\frac{1}{2}, \frac{39}{50})$. Всё, что необходимо – заметить, что максимум функции

$$\frac{91}{3660} - \frac{174}{1525}(1-\sigma)$$

равен

$$-\frac{109}{457\,500} = -0.00238\dots$$

Подводя итог, отмечу, что все перечисленные выше замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Сама же диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Работа оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Таким образом, соискатель – Антон Павлович Науменко – заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:

Доктор физ.-мат. наук,

Член-корреспондент РАН,

Главный науч. сотр. Отдела теории чисел

ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Королев Максим Александрович

Контактные данные:

тел.: +7(495)984-81-41

e-mail:

Специальность, по которой официальным оппонентом

защищена диссертация: 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Адрес места работы:

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8,

ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Тел.: +7(495)984-81-41

e-mail: korolevma@mi-ras.ru