

ОТЗЫВ научного руководителя
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Никулина Михаила Александровича
на тему: «Некоторые свойства квантовых и классических
бильярдов на софокусных столах»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

В современной математике заметное место занимают исследования свойств интегрируемых гамильтоновых систем как квантовых, так и классических. К этим свойствам относятся, в частности, разнообразные асимптотики, топология пространства траекторий, слоение изоэнергетического пространства на поверхности постоянных значений дополнительных интегралов. Известно, что классический бильярд в области, ограниченной дугами софокусных квадрик, интегрируем по Лиувиллю. Изучение таких систем с точки зрения лиувиллевой эквивалентности было начато В.Драговичем, М.Раднович и В.В.Ведюшкиной.

В диссертации М.А.Никулина исследуется новая интегрируемая система, введенная диссертантом и его научным руководителем: в области, ограниченной софокусными квадриками, рассматриваются несколько сред разной «оптической» плотности, разделенных дугами софокусных квадрик, причем на границе раздела сред выполняется «косинусный» закон преломления, а именно, отношение косинусов падающего и преломленного лучей постоянно и равно отношению «оптических» плотностей граничащих сред. Такая система обладает дополнительным интегралом. Более точно, если границы раздела сред являются дугами попарно непересекающихся квадрик, то интеграл принимает значение в вещественной прямой, если же границы раздела сред относятся к пересекающимся квадрикам, то дополнительный интеграл в общем случае имеет ветвления в точках пересечения границ раздела сред и в удобных случаях принимает значения в окрестности. Заметим, что стандартный закон преломления Снеллиуса приводит к неинтегрируемой системе.

В диссертации М.А.Никулина подробно исследованы поверхности постоянного значения дополнительного интеграла и постоянной энергии, а также их бифуркации для двух важных случаев конфигурации границы области и границ раздела сред: в одном случае интеграл не имеет ветвления, а во втором— имеет одну точку ветвления. Оба случая в

диссертации изучены очень подробно, продемонстрировано сложное топологическое устройство слоения изоэнергетического пространства на поверхности уровня дополнительного интеграла. Изложение снабжено наглядными иллюстрациями. Помимо торов (в классическом случае — торов Лиувилля) в рассматриваемых системах возникают также поверхности более высокого рода с проколами.

По всей видимости, эта тематика в обозримой перспективе может принести другие интересные результаты.

Другой круг вопросов, связанных с поведением свободной квантовой частицы в области, ограниченной дугами софокусных квадрик, — исследование спектра оператора энергии и его асимптотик.

Нетривиальной и интересной является задача вычисления в явном виде асимптотики спектра энергии при стремлении фокального расстояния к нулю.

Случай свободной квантовой частицы в области, ограниченной эллипсом, является классическим: в пределе получается круг. В обоих случаях: предельном и допредельном — стационарное уравнение Шредингера расщепляется в подходящих координатах и решение записывается явным образом в терминах функций Бесселя первого рода и функций Матье, соответственно. Энергетический спектр описывается в терминах нулей этих функций с подходящими параметрами.

В диссертации М.А.Никулина рассмотрены два типа областей, ограниченных внешним эллипсом и отрезками дуг софокусных гипербол, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора. В обоих случаях спектр энергии выражается в терминах нулей специальных функций, являющихся комбинацией функций Матье. В работе найдены явные формулы для коэффициентов при квадрате фокального расстояния, а также спектр наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

Все результаты диссертации являются новыми, получены М.А.Никулиным самостоятельно. Они докладывались на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3 Геометрия и топология (по

физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Никулина Михаила Александровича удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В.Ломоносова» и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4-1 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 Геометрия и топология.

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова»

ПОПЕЛЕНСКИЙ Федор Юрьевич

30.12.2025 г.

Контактные данные:

тел.: _____, email: fedor.popelensky@math.msu.ru

Специальность, по которой научным руководителем
защищена диссертация:

01.01.04 – Геометрия и топология

Адрес места работы:

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1,

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет

Тел.: 8(495)939-12-63; email: office@mech.math.msu.su

Подпись доцента кафедры дифференциальной геометрии и
приложений механико-математического факультета МГУ
имени М.В. Ломоносова Ф.Ю.Попеленского удостоверяю:

Декан механико-математического
факультета МГУ, член-корреспондент РАН
профессор А.И. Шафаревич

_____ / _____