

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Моисеев Георгий Николаевич

Динамика и управление мобильным омни–экипажем

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

научный руководитель:

доктор физико–математических наук
Зобова Александра Александровна

Москва — 2026

Оглавление

Введение	4
В.1. Общая характеристика работы	4
В.2. Краткое содержание диссертации	11
В.3. Обзор литературы	13
Глава 1. Уравнения управляемого движения омни-экипажа без учёта инерционных свойств роликов колёс	18
1.1. Уравнения классической механики в лаконичных формах	18
1.2. Модель омни-экипажа без учёта инерционных свойств роликов колёс	22
1.3. Уравнения управляемого движения омни-экипажа произвольной конфигурации	27
1.4. Уравнения управляемого движения симметричного омни-экипажа	31
1.5. Уравнения управляемого движения омни-экипажа с параллельными колёсами	33
1.6. Приложение. Уравнения управляемого движения омни-экипажа с учётом вязкого трения в осях колёс	34
Глава 2. Устойчивость прямолинейных движений омни-экипажа с учётом инерционных свойств роликов колёс	36
2.1. О моделировании омни-экипажа с учётом инерционных свойств роликов колёс	36
2.2. Стационарные движения омни-экипажа с параллельными колёсами без учёта инерционных свойств роликов колёс	37
2.3. Уравнения движения омни-экипажа с параллельными колёсами с учётом инерционных свойств опорного ролика переднего колеса	39
2.4. Стационарные движения омни-экипажа с параллельными колёсами с учётом инерционных свойств опорного ролика переднего колеса	49
2.5. Приложение. Уравнения управляемого движения омни-экипажа с учётом вязкого трения в осях опорных роликов колёс	57
Глава 3. Управляемые движения омни-экипажа вида разгон-торможение.	62

3.1. Постановка краевой задачи	62
3.1.1. Задача управления омни-экипажем произвольной конфигурации	62
3.1.2. Задача управления симметричным омни-экипажем	63
3.2. Движение симметричного омни-экипажа с постоянным управлением	65
3.3. Решение краевой задачи для симметричного омни-экипажа	67
3.4. Исследование свойств управляемых движений симметричного омни-экипажа	72
3.4.1. Вращение на месте	73
3.4.2. Поступательное движение.	75
3.4.3. Зависимость затрат энергии от расстояния движения	79
3.4.4. Ограниченность управляющих напряжений.	81
3.4.5. Сравнение одноэтапной и двухэтапной стратегии управления	83
3.5. Решение краевой задачи для омни-экипажа с параллельными колёсами	86
Глава 4. Условия безотрывного движения омни-экипажа	95
4.1. Нормальные реакции опоры омни-экипажа	95
4.2. Условия безотрывного движения омни-экипажа произвольной конфигурации	105
4.2.1. Переворачивание в покое	105
4.2.2. Условия безотрывности для произвольного движения	107
4.2.3. Вычисление условий безотрывного движения	110
4.3. Условия безотрывного движения симметричного омни-экипажа.	113
4.3.1. Вычисление условий безотрывного движения	113
4.3.2. Анализ условий безотрывности на примерах движений.	122
Заключение	128
Список литературы.	131

Введение

В.1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

Мобильные роботы используются в различных областях в качестве помощников, способных автоматизировать рутинные процессы и выполнять задачи, которые могут быть опасными или сложными для человека. Перед такими экипажами часто ставится задача перемещения с повышенной точностью в ограниченных пространствах. В этих ситуациях оказываются эффективными платформы с омни-колёсами, которые могут совершать движение в любом направлении без предварительного разворота (рис. В.1а).



(а) Омни-экипаж [1]



(b) Меканум-колесо [2]



(c) Ортогональное омни-колесо [3]

Рис. В.1: Примеры реальных моделей

Омни-колесо (или роликонесущее колесо) — это колесо особой конструкции, на ободе которого установлены свободно вращающиеся ролики так, что оно может двигаться как обычное колесо, перекатываясь с ролика на ролик, и может двигаться за счёт вращения роликов в направлении, перпендикулярном их оси. Ролики представляют собой тела вращения, симметрично расположенные на цилиндрической поверхности. Конкретная модель омни-колеса определяется

углом между осью роликов и осью колеса. Колёса, в которых этот угол составляет 45° , называют меканум-колёсами или шведскими колёсами (рис. В.1b) [4]. Колёса, в которых этот угол составляет 90° , принято называть ортогональными омни-колёсами или просто омни-колёсами, в узком смысле (рис. В.1c) [5, 6].

Платформы всенаправленного движения с омни-колёсами находят применение во многих сферах человеческой деятельности. Подобные роботы используются для исследования поверхностей планет [7]. В медицине с использованием омни-колёс создают средства передвижения для людей с ограниченными возможностями [8]. Наибольшее применение омни-экипажи находят в областях промышленности и образования. Возможность двигаться в необходимом направлении без поворота позволяет эффективно работать на складах и в производственных залах [9–11]. Экипажи с омни-колёсами используются для обучения робототехнике и регулярно участвуют в профильных соревнованиях [1, 12, 13]. Наконец, с использованием омни-колёс создают предметы бытовой техники [14, 15].

Цели и задачи работы

Цели диссертационной работы — исследование влияния инерционных свойств ролика на движения омни-экипажа; решение задачи управления омни-экипажем с учётом динамики системы и построение программных движений с точки зрения существующих ограничений; исследование границ применимости математических моделей омни-экипажа и сравнение свойств различных конфигураций роботов.

Для достижения поставленных целей ставятся следующие задачи:

1. разработка математической модели управляемого экипажа с тремя омни-колёсами с учётом инерционных свойств ролика;
2. изучение стационарных движений модели с учётом инерционных свойств ролика и сравнение их с безынерционной моделью;
3. построение программных движений для решения задачи управления омни-экипажем в модели, не учитывающей инерционные свойства ролика; сравнение свойств движений в зависимости от существующих параметров;
4. исследование величин нормальных реакций опоры омни-экипажа на управляемых движе-

ниях;

5. создание компьютерных моделей исследуемых систем.

Научная новизна

Все основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Исследовано влияние инерционных свойств опорного ролика переднего колеса омни-экипажа с параллельными колёсами на устойчивость стационарных прямолинейных движений. Аналитически построено решение задачи управления симметричным омни-экипажем с помощью кусочно-постоянного управления с одним переключением. Исследованы программные движения симметричного омни-экипажа для кусочно-постоянного управления с одним переключением. Разработан алгоритм численного решения задачи управления для трёхколёсного омни-экипажа произвольной конфигурации и его имплементация в форме компьютерной программы. Проанализированы выражения нормальных реакций опоры для произвольного трёхколёсного омни-экипажа, который управляется посредством электродвигателей. Построены условия положительности нормальных реакций опоры на управляемых движениях омни-экипажа. Исследовано влияние параметров конструкции симметричного омни-экипажа на условия положительности нормальных реакций опоры и изучение наиболее опасных с этой точки зрения классов движения.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы заключается в исследовании динамики омни-экипажа и построении программных движений для решения задачи управления. Результаты диссертации могут найти применение при проведении исследований в МГУ имени М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, НИУ «МЭИ», Ульяновском государственном университете, Удмуртском государственном университете, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН. Также результаты диссертации могут быть применены при проектировании конструкции омни-экипажей и построении систем управления для них на специализированных производствах.

Методология и методы исследования

Для аналитических исследований в работе используются методы теоретической механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии. Для описания динамики движения омни-экипажа используется метод Я.В. Татарина получения уравнений классической механики в лаконичной форме. Устойчивость движений во второй главе исследована с помощью теоремы Ляпунова. Программы для численного моделирования, используемые для получения результатов диссертации, реализуют метод Рунге-Кутты 8 порядка с коэффициентами Дормана-Принса с автоматическим выбором шага для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, LU-разложение для решения систем линейных алгебраических уравнений и метод продолжения по параметру для решения систем нелинейных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Для стационарного прямолинейного движения омни-экипажа с параллельными колёсами в направлении переднего колеса учёт инерционных свойств опорного ролика переднего колеса не изменяет условия устойчивости относительно псевдоскоростей. При этом изменяется вид финальных движений в устойчивом случае: возмущённые движения такого экипажа стремятся к стационарному прямолинейному движению, на котором скорость центра масс направлена вдоль оси симметрии экипажа, в то время как в безынерционной модели скорость центра масс может составлять с осью симметрии ненулевой угол, зависящий от начального возмущения.
2. Задача перемещения за наперёд заданное время управляемого симметричного омни-экипажа с помощью кусочно-постоянного управления с одним переключением из заданного начального состояния в заданное конечное состояние сводится к задаче решения двух систем линейных алгебраических уравнений, причём момент переключения управлений может быть задан произвольно. Первая система линейных алгебраических уравнений всегда имеет единственное решение; аналогичное свойство второй системы доказывается аналитически в ряде частных случаев и имеет место в численных экспериментах в общем случае.
3. Мощность управляющих напряжений, при которой отрыв невырожденного омни-экипажа от опорной плоскости заведомо не происходит, должна быть меньше минимального из

значений трёх квадратичных функций псевдоскоростей, коэффициенты которых зависят только от геометрических параметров экипажа (в том числе высоты центра масс) и параметров моторов. Для симметричного омни-экипажа аналогичное ограничение на мощность управляющих напряжений также определяется непрерывной функцией кинетической энергии H вида $b_1 - a_1\sqrt{H}$ при $H \leq H_0$ и $b_2 - a_2H$ при $H \geq H_0$, где коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 и значение H_0 зависят только от геометрических параметров экипажа (в том числе высоты центра масс) и параметров моторов. Указанные функции найдены в явном виде.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность полученных результатов обусловлена корректным применением математических методов, а также сопоставлением полученных результатов с результатами, полученными другими авторами. Аналитические результаты подтверждены и проиллюстрированы с помощью численного моделирования.

Апробация

Результаты работы докладывались на следующих конференциях всероссийского и международного уровня:

1. Научная конференция “Ломоносовские чтения” 2017, секция механики (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 17–26 апреля 2017 г.),
2. Всероссийская конференция молодых-ученых механиков 2017 (Сочи, “Буревестник” МГУ, 5–15 сентября 2017 г.),
3. Международный молодёжный научный форум “ЛОМОНОСОВ–2018” (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 9–13 апреля 2018 г.),
4. Научная конференция “Ломоносовские чтения” 2019, секция механики (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 15–25 апреля 2019 г.),
5. Научная конференция “Ломоносовские чтения” 2022, секция механики (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 18–22 апреля 2022 г.),
6. Международный молодёжный научный форум “ЛОМОНОСОВ–2023” (Москва, МГУ име-

ни М.В. Ломоносова, 10–21 апреля 2023 г.),

7. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт–Петербург, СПбГУ Петра Великого, 21–25 августа 2023 г.),

на научном семинаре имени В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством проф. А.А. Зобовой и проф. Е.И. Кугушева (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова), а также на семинаре кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Института энергомашиностроения и механики НИУ “МЭИ”.

Также опубликованы тезисы докладов на всероссийских и международных конференциях [16–22]:

1. Зобова А.А., Моисеев Г.Н. Применение уравнений Я.В. Татаринова в динамике экипажа с омни–колесами с учетом массивности ролика // Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, 17–26 апреля 2017: тезисы докладов. 2017. С. 97;
2. Моисеев Г.Н., Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа с омни–колесами с учетом массы роликов // Всероссийская конференция молодых–ученых механиков, 5–15 сентября 2017: тезисы докладов. 2017. С. 65;
3. Моисеев Г.Н. Исследование управляемых движений омни–экипажа с кусочно–гладким управлением // Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНОСОВ–2018 [Электронный ресурс]. 2018. Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13568/70626_uid238575_report.pdf (дата обращения: 24.02.2026);
4. Зобова А.А., Моисеев Г.Н. Управляемые движения омни–экипажа вида разгон–торможение // Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, 15–25 апреля 2019: тезисы докладов. 2019. С. 108;
5. Зобова А.А., Моисеев Г.Н. Движение омниэкипажа по плоскости с сухим трением // Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, 18–22 апреля 2022: тезисы докладов. 2022. С. 83;
6. Моисеев Г.Н. Анализ условий отрыва управляемого омни–экипажа // Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНОСОВ–2023 [Электронный ресурс]. 2023. Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2023/data/28496/

153159_uid238575_report.pdf (дата обращения: 24.02.2026),

7. Моисеев Г.Н., Зобова А.А. Динамика и управление мобильным омни-экипажем // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: сборник тезисов докладов в 4 томах. Т. 1. 2023. С. 118–119.

Часть исследований проводилась в рамках грантов РФФИ 16–01–00338 и 19–01–00140.

Исходный код программ, разработанных в рамках диссертации, находится в открытом доступе на личном аккаунте GitHub соискателя [23].

Публикации

Основные идеи и положения работы изложены в 3 публикациях автора общим объёмом 3,125 п.л. в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук [24–27]:

1. Моисеев Г.Н., Зобова А.А. Устойчивость прямолинейных движений омни-экипажа с учетом инерционности роликов колес // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. № 6. С. 78–82 (Импакт-фактор 0,211 (РИНЦ), EDN: YSAQPZ, 0,25 п.л. / авторский вклад определен). = Moiseev G.N., Zobova A.A. Stability of the Rectilinear Motion of an Omni Vehicle with Consideration of Wheel Roller Inertia // Moscow University Mechanics Bulletin. 2018. Vol. 73, № 6. Pp. 145–148 (Импакт-фактор 0,612 (РИНЦ), EDN: LJNDLQ, 0,25 п.л. / авторский вклад определен);
2. Moiseev G.N., Zobova A.A. Dynamics-based piecewise constant control of an omnivehicle // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 18, № 4. Pp. 661–680 (Импакт-фактор 0,716 (РИНЦ), EDN: UPYMVX, 1,25 п.л. / авторский вклад определен);
3. Moiseev G.N. No-overtun conditions for omnivehicle motion // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024. Vol. 20, № 2. Pp. 311–336 (Импакт-фактор 0,716 (РИНЦ), EDN: QARBPB, 1,625 п.л.).

Личный вклад

Общая постановка задач и обсуждение полученных результатов проводились совместно с научным руководителем. Все результаты, выносимые на защиту, принадлежат лично автору.

В работе [24, 25] научный руководитель участвовал в постановке задачи, обсуждении выбора математических методов для работы и интерпретации полученных результатов. Личный вклад автора в работе [24, 25] заключается в построении уравнений динамики системы, анализе устойчивости стационарных движений системы, программной реализации численных методов и визуализации сравнения движения исследуемой системы с системой, не учитывающей инерционные свойства роликов. В работе [26] научный руководитель участвовал в постановке задачи, выборе стратегии построения управления, обсуждении выбора математических методов для работы и интерпретации полученных результатов. Личный вклад автора в работе [26] заключается в сведении решения исходной задачи к задаче последовательного решения двух систем линейных алгебраических уравнений, исследовании свойств некоторых классов решений, а также написании программы для численного решения исходной задачи.

В.2 Краткое содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследований, а также проведён обзор предшествующих исследований и публикаций в области динамики мобильных роботов.

Первая глава посвящена получению уравнений движения трёхколёсного омни-экипажа по абсолютно шероховатой плоскости в рамках модели, не учитывающей инерционные свойства колёс. Большая часть главы посвящена изложению уже известных результатов, которые выступают основой для исследований в последующих главах. В первом параграфе главы вводится лаконичная форма уравнений классической механики Я.В. Татарина и излагаются основные результаты препринта [28]. Далее рассматривается модель трёхколёсного омни-экипажа, не учитывающая инерционные свойства роликов колёс, и с помощью метода Я.В. Татарина формируются уравнения управляемого движения системы и движения по инерции. В приложении главы показано, что линейное вязкое трение в осях колёс не меняет структуры полученных уравнений движения.

Вторая глава посвящена исследованию влияния учёта инерционных свойств роликов колёс на устойчивость стационарных движений. В начале излагаются результаты исследований устойчивости стационарных движений омни-экипажа с параллельными колёсами в рамках

модели, не учитывающей инерционные свойства роликов колёс [29, 30]. Далее разработана модель, учитывающая инерционные свойства опорного ролика переднего колеса омни-экипажа с параллельными колёсами на движениях, которые не приводят к перекатыванию переднего колеса с одного ролика на другой. В рамках этой модели исследуется устойчивость стационарных движений и проводится сравнение результатов с безынерционным случаем. В приложении главы составлены уравнения движения при действии линейного вязкого трения в осях опорных роликов колёс и для симметричного омни-экипажа показано, что главные члены не меняют структуры уравнений по сравнению с рассмотренными ранее случаями.

Третья глава посвящена решению задачи управления омни-экипажем при известных начальных условиях на положение и скорости и наперёд заданных финальных положений, скоростях и времени движения. Изложен способ аналитического интегрирования уравнений движения симметричного экипажа при постоянных управлениях (возможность которого впервые была показана в [31]). На основе полученных результатов строится решение исходной задачи управления с помощью кусочно-постоянного управления с одним переключением, где момент переключения выступает в качестве параметра. Исследуются свойства простейших программных движений и рассматривается возможность оптимизации управления и удовлетворения ограничений на управления посредством изменения времени движения на каждой стадии. Для движений, в которых поворот осуществляется на угол, меньший полного угла 2π , показано преимущество предложенных программных движений по сравнению с подходом, при котором поступательное движение и вращение осуществляются последовательно [32, 33]. Далее, используя результат для симметричного омни-экипажа в качестве начального приближения, строится численный алгоритм, позволяющий решить задачу управления для омни-экипажа произвольной конструкции на примере экипажа с параллельными колёсами.

Четвёртая глава исследует границы применимости модели с точки зрения выполнения условий напряжённости неудерживающих связей. Для этого находят выражения для нормальных реакций опоры системы, на основе которых строятся ограничения для управляющих напряжений в зависимости от типа известной информации о движении экипажа. Далее полученные результаты применяются для исследования конкретной конфигурации — симметричного омни-экипажа. В результате приводятся рекомендации по конструированию симметричных омни-экипажей, а также описываются наиболее опасные с точки зрения нарушения условий положительности нормальных реакций опоры классы движения.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведённых исследований.

В.3 Обзор литературы

Основы исследований были заложены в работе G. Campion, G. Bastin и B. D’Andrea–Novel [34]. В статье рассматривается движение симметричного экипажа с тремя омни–колёсами по абсолютно шероховатой плоскости, вводится классическая модель связей, не учитывающая инерционные свойства роликов, и выписываются уравнения движения этого экипажа. Кинематическая модель колеса была также подробно описана в статье Y.P. Leow и соавторов [35].

В статье Я.В. Татарина [36] предложена новая лаконичная форма уравнений классической механики. Данная форма позволяет избегать громоздких выкладок при описании систем с неголономными связями. Методология была развита Я.В. Татариным в препринте [28].

В статьях Я.В. Татарина и А.А. Зобовой [29, 30] демонстрируется применение метода лаконичных уравнений в задаче о движении омни–экипажа с параллельными колёсами. В работах также описаны стационарные движения экипажа в модели без учёта инерционных свойства роликов и их устойчивость. Также в статье [30] и статье А.А. Зобовой [37] описаны уравнения движения трёхколёсного омни–экипажа произвольной конфигурации. Статья [37] демонстрирует применение метода лаконичных уравнений в задачах о движении других мобильных экипажей с неголономными идеальными связями — роботов с дифференциальным приводом и рояльными колёсами.

В статьях К.В. Герасимова, И.И. Косенко и соавторов [38–40] рассматривается компьютерное моделирование омни–экипажа с учётом инерционных свойств роликов колёс с помощью инструмента Modelica [41]. В совместных работах авторов с С.Я. Степановым [39, 40] и М.Е. Ставровским [39] отдельное внимание уделяется процедуре отслеживания точки контакта опорного ролика с плоскостью во время движения. Модель получила дальнейшее развитие в статьях К.В. Герасимова и А.А. Зобовой [42, 43], где была построена система, учитывающая инерционные свойства роликов и удары при переключении опорного ролика во время движения экипажа. Уравнения движения полученной системы имеют порядок 33, и дальнейшее исследование свойств системы также происходит с помощью численного моделирования на основе Modelica. Компьютерное моделирование поверхности ролика меканум–колеса также подробно

изучается в статье А. Gferrer [44].

В диссертации К.В. Герасимова на соискание уч.ст. к.ф.–м.н. [45] получают развитие исследования моделирования омни–экипажа с учётом инерционных свойств роликов колёс, начатые в статьях [38, 42, 43]. В диссертации А.А. Зобовой на соискание уч.ст. д.ф.–м.н. [46] на основе совместной с автором настоящей диссертации статьи [24] обсуждается влияние учёта массивности опорного ролика переднего колеса омни–экипажа с параллельными колёсами на устойчивость стационарных прямолинейных движений, а также рассматривается моделирование омни–экипажа с учётом инерционных свойств роликов колёс по мотивам статей [42, 43] и диссертации [45].

В статье Ю.Г. Мартыненко и А.М. Формальского [31] рассматривается управляемое движение симметричного омни–экипажа, управляемого с помощью электромоторов. В работе получен явный закон движения в случае постоянных управляющих напряжений и показана стабильность стационарных движений по псевдоскоростям. В статье Ю.Г. Мартыненко [47] аналогичный результат получен для симметричного экипажа со смещённым центром масс. В случае свободного движения робота указан дополнительный первый интеграл.

В статье А.В. Борисова, А.А. Килина и И.С. Мамаева [48] рассматривается динамика экипажа произвольной конфигурации и с произвольным числом колёс на абсолютно шероховатой плоскости и сфере. В работе приводится вывод уравнений движения, исследуется динамика свободной системы и указывается связь с проблемами управления. В статье А.А. Килина и А.Д. Бобыкина [49] рассматривается управляемое движение этой системы и производится анализ управляемости системы на основе теоремы Рашевского–Чжоу. Несмотря на то, что не удалось показать полную управляемость системы, показаны условия, при которых для любой наперёд заданной траектории можно предъявить управления, которые её реализуют. Данная тема также раскрывается в статье А.В. Борисова, А.А. Килина и И.С. Мамаева [50]. В статье А.А. Килина, П. Божека, Ю.Л. Караваяева, А.В. Клековкина и В.А. Шестакова [51] рассматривается применение полученных результатов к реальной модели четырёхколёсного робота с меканум–колёсами. В статье И.С. Мамаева, А.А. Килина, Ю.Л. Караваяева и В.А. Шестакова [52] исследуются величины нормальных реакций опоры на управляемых траекториях. В работе получен явный вид зависимости нормальных реакций опоры от геометрии экипажа с произвольным числом колёс модели без учёта инерционных свойств роликов при явно заданных управляющих поворотах ко-

лѐс. Также в работе изучаются условия отсутствия проскальзывания на различных движениях экипажа.

В статье R.L. Williams и соавторов [53] рассматривается моделирование симметричного омни-экипажа на плоскости с учётом сухого трения Кулона. Модель омни-колеса без учёта инерционных свойств роликов представлена здесь через анизотропное трение в точках контакта.

Динамика управляемого движения четырёхколѐсной платформы с меканум-колѐсами также исследуется в статье Б.И. Адамова [54]. Отдельное внимание уделяется стационарным вращениям системы. В статье Б.И. Адамова и Г.Р. Сайпулаева [55] рассматривается движение той же конфигурации по плоскости с учётом сухого трения Кулона. Используется более сложная модель, которая не учитывает инерционные свойства роликов, но учитывает смещение точки контакта, трение в осях колѐс и роликов колѐс. В статье Г.Р. Сайпулаева, Б.И. Адамова и А.И. Кобринина [56] подробно исследуются нормальные реакции опоры этой системы в точках контакта. В диссертации Г.Р. Сайпулаева на соискание уч.ст. к.т.н. [57] получает развитие исследование моделирования платформы с четырьмя меканум-колѐсами омни-экипажа с учётом геометрических свойств роликов колѐс и поликомпонентного трения.

Повышение мобильности реальных прототипов является одним из центральных направлений исследования управляемых движений омни-экипажей. Эта тема освещается в работах [58–63]. Статья R. Damato и соавторов [58] была одной из первых работ, рассматривающих управление реальным прототипом и эволюцию его дизайна. В статье Н. Taheri и С.Х. Zhao [59] производится обзор и сравнительный анализ различных моделей экипажей с точки зрения управления. Т. Terakawa и соавторы в статье [60] представляют физическую модель омни-колеса, которая разработана с целью минимизировать вибрации роликов и смещение точки контакта относительно колеса во время движения. J. Shen и D. Hong в статье [61] рассматривают проблемы управления и стабилизации робота с единственным роликонесущим колесом. В статье M.U. Shafiq и соавторов [62] рассматриваются особенности управления креслом-коляской с меканум-колѐсами с помощью джойстика. В работе J. Huang [63] рассматривается управление роботом-тростью на основе движения человека, который использует его в качестве опоры.

Управление омни-экипажем часто рассматривается в исследованиях с точки зрения движения по заранее заданной траектории. Эта тема освещается в работах [32, 33, 64–84]. Статья T. Kalmár-Nagy и соавторов [64] была одной из первых работ, рассматривающих приближение

заданной траектории с помощью прямых линий и сплайнов. В статье Y. Liu, J.J. Zhu и соавторов [65] внимание уделяется вопросу линеаризации программной траектории. Статья А.С. Андреева и О.А. Перегудовой [66] рассматривает модель, в которой центр масс не совпадает с геометрическим центром системы, и строит управление с учётом особенностей такой системы. В статье Н.Н. Мана [67] рассматриваются движения омни-экипажа, которые допускают наклон опорной поверхности. Статьи А. Yamashita и соавторов [68] и D. Chugo и соавторов [69] также рассматривают вопрос управления омни-экипажем на неровных поверхностях. В работе Е.Ю. Колесниченко и соавторов [70] производится обзор механизмов управления различными колёсными экипажами, в том числе экипажами с омни-колёсами. В статье X. Liu, H. Chen и соавторов [71] рассматривается применение управления с прогнозирующими моделями к задаче управления омни-экипажем. В статье S. Khesrani и соавторов [72] рассматривается применение нечёткой логики к задаче управления омни-экипажем. В работе H. Qian [33] рассматривается разделение задачи управления на управление поворотом и управление перемещением. Развивая данный подход, в цикле работ I. Zeidis, K. Zimmermann и соавторов [32, 73–76] предлагается метод приближения заданного движения для четырёхколёсного экипажа с меканум-колёсами и проводится оценка отклонения финальных траекторий. Та же задача подробно рассматривается в цикле работ Z. Hendzel [77–80]. В статье Z. Hendzel и P. Penar [81] рассматривается применение теории дифференциальных игр к задаче управления. В статье T.P. Nascimento и соавторов [82] производится обзор и сравнительный анализ различных моделей колёсных экипажей с точки зрения управления по заданным траекториям. Особенностью статьи M. Rani и соавторов [83] является моделирование электродинамики моторов с помощью RBF-нейросети, для обучения которой использовались результаты реальных экспериментов, и использование этой модели для движения по заданным траекториям. В статье M. Galicki [84] управление строится при заданном конечном положении с учётом препятствий на карте.

Системы уравнений, описывающих динамику омни-экипажей, обычно являются нелинейными, что затрудняет аналитическое исследование. Благодаря этому активно развивается направление компьютерного моделирования таких систем. В работах Y. Li, S. Dai и соавторов [85, 86] рассматривается моделирование четырёхколёсного омни-экипажа в системе RecurDyn и на движке Unity3D. В статье M. Szeremeta и M. Szuster [87] для аппроксимации программного движения используются алгоритмы машинного обучения. В статье A.S. Conceição, H.P. Oliveira и соавторов [88] рассматриваются вопросы оптимизации вычисления функции издержек на управ-

ляющих напряжениях.

Особой конструкцией омни-экипажа является экипаж, который представляет собой сферу, которая управляется внутренними омни-колёсами. Специфика управления таким экипажем рассмотрена в статьях Б.И. Адамова и соавторов [89, 90].

В работе Н.Р. Oliveira и соавторов [91] производится обзор и сравнительный анализ различных конфигураций омни-экипажей. В работе Н. Almusawi и Н. Akkad [92] производится сравнение различных подходов к управлению омни-экипажем.

Глава 1. Уравнения управляемого движения омни-экипажа без учёта инерционных свойств роликов колёс

1.1 Уравнения классической механики в лаконичных формах

В 2003 году в статье [36] Я.В. Татаринов предложил новую лаконичную форму уравнений классической механики. Данная форма позволяет избегать громоздких выкладок при описании систем с идеальными неголономными связями. Метод хорошо подходит для получения динамических уравнений в задачах о движении мобильных экипажей, что было продемонстрировано в статье [37]. В данном параграфе кратко описаны основные результаты работ [28, 36]. Для более детального описания рекомендуется обратиться к оригинальному препринту [28].

Рассмотрим систему с лагранжианом $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, где $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — обобщённые координаты. На систему наложены идеальные дифференциальные связи

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{q}, t), \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $m \leq n$ — псевдоскорости системы. Считаем, что вариации псевдоскоростей независимы, а матрица $\left\| \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \right\|$ имеет максимальный ранг. Пусть на систему действуют обобщённые силы $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$. Тогда принцип Д’Аламбера–Лагранжа может быть записан в следующем виде (см., например, [93], гл. III):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - Q_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \delta \nu_k = 0. \quad (1.2)$$

Вариации $\delta \nu_k$ независимы. Из выражения (1.2) с учётом связей (1.1) получаем уравнения

Данная глава посвящена построению математической модели управляемого трёхколёсного омни-экипажа. Для получения уравнений динамики используется метод, представленный Я.В. Татариновым в работах [28, 36], который также кратко описан в данной главе. При подготовке данной главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [16–22, 24–27]. Результаты данной главы являются основой для исследований, которые проводятся в главах 2–4.

движения в форме Маджи (см., например, [93], гл. III):

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \bullet \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} = \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \quad (k = 1, \dots, m), \quad (1.3)$$

где символ \square^\bullet здесь и далее означает подстановку связей в выражение.

Лемма 1.1. *Для любой дифференцируемой функции $f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ имеет место*

$$\left[\frac{d}{dt} f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \right]^\bullet = \frac{d}{dt} [f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)]^\bullet. \quad (1.4)$$

Доказательство. Производная сложной функции f имеет вид

$$\frac{d}{dt} f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial t}. \quad (1.5)$$

После подстановки связей (1.1) выражение для производной (1.5) приобретает форму

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \right]^\bullet &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right]^\bullet \left[\frac{d\dot{q}_i}{dt} \right]^\bullet + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_i} \right]^\bullet [\dot{q}_i]^\bullet + \left[\frac{\partial f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial t} \right]^\bullet = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

В то же время производная в правой части (1.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)]^\bullet &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму. ■

Введём тройственную характеристическую функцию

$$Y = Y(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = L^\bullet - \sum_{i=1}^n p_i v_i, \quad (1.6)$$

где $L^\bullet = L^\bullet(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{q}, t) = L(\mathbf{v}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{q}, t), \mathbf{q}, t)$ — лагранжиан с учетом связей (1.1), а $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ —

формальные импульсы, которые определяются выражением

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.7)$$

Теорема 1.1 (уравнения механики в лаконичных формах). *Для механической системы уравнения Маджи (1.3) эквивалентны следующим динамическим уравнениям для тройственной функции $Y(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ из определения (1.6):*

$$\frac{d^\nu}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \nu_k} - \left\{ \frac{\partial Y}{\partial \nu_k}, Y \right\} = \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \quad (k = 1, \dots, m), \quad (1.8)$$

где в качестве $\frac{d^\nu}{dt}$ используется дифференциальный оператор

$$\frac{d^\nu}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{v}_k \frac{\partial}{\partial \nu_k},$$

а скобка Пуассона $\{f_1, f_2\}$ вводится стандартным образом

$$\{f_1, f_2\} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \frac{\partial f_1}{\partial q_i}.$$

Замкнутая система уравнений формуруется после подстановки выражений для формальных импульсов (1.7).

Доказательство. Для получения динамических уравнений необходимо составить в левой и правой части (1.8) выражения, зависящие от $\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{q}, \mathbf{p}$ и t , а после подставить выражения для формальных импульсов (1.7).

Для производных выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} = \frac{\partial L(\mathbf{v}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{q}, t))}{\partial \nu_k} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_i} \right]^\bullet \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k}, \quad (1.9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \right]^\bullet + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \right]^\bullet \frac{d}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial L^\bullet}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]^\bullet \frac{\partial v_i}{\partial q_j} + \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \right]^\bullet, \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d^\nu}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} v_i. \quad (1.12)$$

Преобразуем левую часть уравнений (1.3) к виду (1.8). С учётом леммы 1.1 и соотношений (1.9)–(1.12) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)^\bullet \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]^\bullet \frac{d}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right]^\bullet \frac{\partial v_j}{\partial q_i} \right) = \\ &= \frac{d^\nu}{dt} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial^2 L^\bullet}{\partial q_i \partial \nu_k} - \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{d^\nu}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v_i}{\partial q_j \partial \nu_k} v_j \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial v_j}{\partial q_i} \right). \end{aligned}$$

В последнем преобразовании были подставлены выражения для импульсов (1.7). Трактуя \mathbf{q} и \mathbf{p} как независимые переменные, свернём последнее выражение. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^\nu}{dt} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial^2 L^\bullet}{\partial q_i \partial \nu_k} - \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{d^\nu}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v_i}{\partial q_j \partial \nu_k} v_j \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial v_j}{\partial q_i} \right) &= \\ = \frac{d^\nu}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \nu_k} + \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial v_j}{\partial q_i} \right) &= \\ = \frac{d^\nu}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \nu_k} + \sum_{j=1}^n \left(-\frac{\partial Y}{\partial p_j} \right) \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial Y}{\partial \nu_k} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial q_i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial Y}{\partial \nu_k} \right) = \frac{d^\nu}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \nu_k} - \left\{ \frac{\partial Y}{\partial \nu_k}, Y \right\}, \end{aligned}$$

что и даёт искомый вид уравнений (1.8). ■

Следствие 1.1 (уравнения механики в лаконичных формах, частный случай). Пусть связи (1.1) линейны по псевдоскоростям и не зависят от времени. Тогда лаконичные уравнения (1.8) имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} + \{P_k, L^\bullet\} = \left\{ P_k, \sum_{j=1}^m \nu_j P_j \right\} + \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} \quad (k = 1, \dots, m), \quad (1.13)$$

где функции $P_k(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ определяются из тождества

$$\sum_{k=1}^m P_k \nu_k = \sum_{i=1}^n p_i v_i. \quad (1.14)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть (1.8) с учётом того, что P_k не зависит от t и ν , L^\bullet не зависит от \mathbf{p} и $\frac{\partial}{\partial p_i} \sum_{k=1}^m P_k \nu_k = v_i$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^\nu}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \nu_k} - \left\{ \frac{\partial Y}{\partial \nu_k}, Y \right\} &= \frac{d^\nu}{dt} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} - P_k \right) - \left\{ \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} - P_k, L^\bullet - \sum_{j=1}^m P_j \nu_j \right\} = \\
&= \frac{d^\nu}{dt} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} \right) - \left\{ \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} - P_k, L^\bullet - \sum_{j=1}^m P_j \nu_j \right\} = \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} \right) v_i + \left\{ \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k}, \sum_{j=1}^m P_j \nu_j \right\} + \{P_k, L^\bullet\} - \left\{ P_k, \sum_{j=1}^m P_j \nu_k \right\} = \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_k} \right) + \{P_k, L^\bullet\} - \left\{ P_k, \sum_{j=1}^m P_j \nu_j \right\}.
\end{aligned}$$

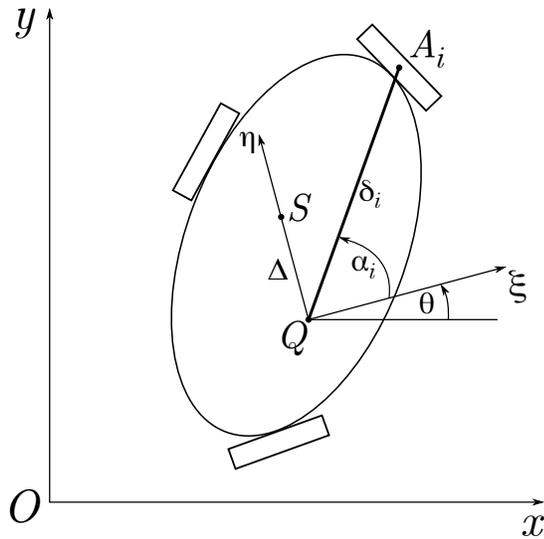
■

1.2 Модель омни-экипажа без учёта инерционных свойств роликов колёс

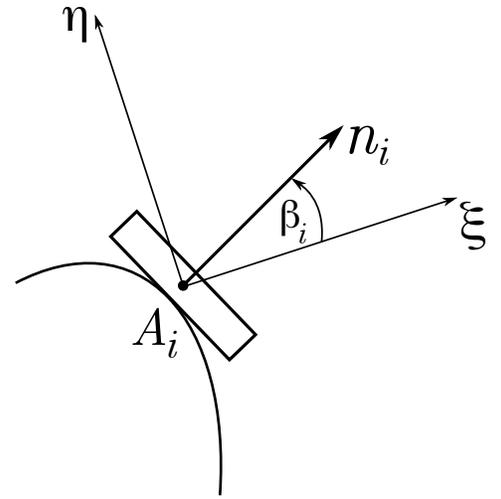
Экипаж, состоящий из горизонтальной платформы и трёх омни-колёс, совершает управляемые движения по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости (рис. 1.1а). В этой главе рассматривается простейшая механическая модель омни-колеса, не учитывающая инерционные свойства роликов [29–31, 34]. Омни-колесо моделируется вертикальным абсолютно твёрдым диском, который катится без проскальзывания в направлении оси ролика и способен свободно проскальзывать в направлении, перпендикулярном оси ролика. Такая модель также пренебрегает смещением точки контакта относительно центра колеса во время движения.

Мы рассматриваем движение в абсолютной системе координат $Oxyz$, где плоскость Oxy горизонтальна, а Oz является вертикалью. Пусть точка S — центр масс экипажа (платформы и всех колёс в совокупности). Координаты (x, y) задают положение центра масс S на плоскости Oxy . Высота центра масс над опорной плоскостью постоянна и равна h .

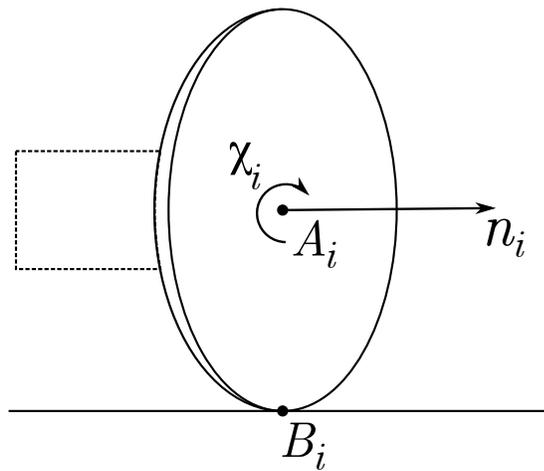
Пусть Q — некоторая фиксированная точка платформы. Через A_i обозначим центр i -го колеса, через B_i — точку касания i -го колеса с плоскостью. С платформой свяжем правый трёхгранник $Q\xi\eta z$, ось $Q\eta$ которого направлена по \overrightarrow{QS} . (Если Q выбрана так, что она совпадает



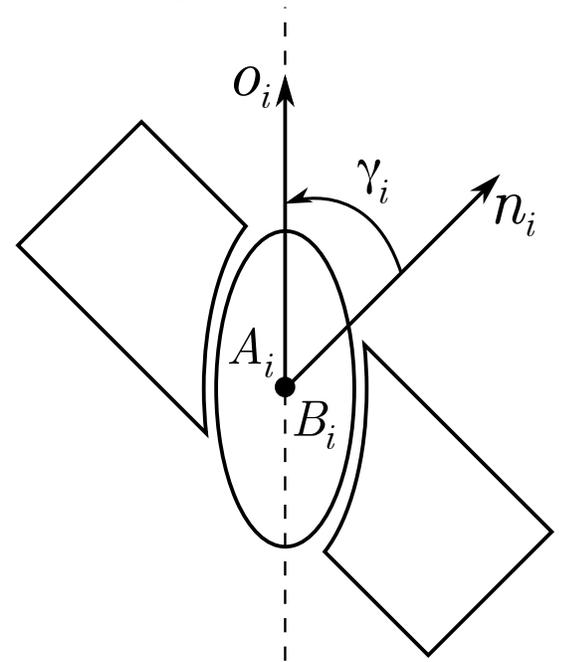
(a) Основная геометрия экипажа



(b) Положение колеса относительно платформы



(c) Угол поворота колеса экипажа



(d) Геометрия ролика колеса, находящегося в контакте с опорной плоскостью

Рис. 1.1: Обозначения в модели омни-экипажа

с S , в качестве $Q\eta$ можно выбрать любую ось в плоскости платформы.) Угол θ — угол курса платформы — угол между Qx и $Q\xi$. Угол θ отсчитывается так, что угловая скорость платформы равна $\dot{\theta}e_z$.

Вектор n_i — единичный направляющий вектор оси i -го колеса (рис. 1.1b), направленный “наружу”. Угол χ_i — угол поворота i -го колеса относительно платформы. Положительным на-

правлением отсчёта углов поворота колес χ_i будем считать направление против часовой стрелки со стороны платформы. Таким образом, угловая скорость i -го колеса относительно платформы имеет вид $\boldsymbol{\omega}_{w_i}^{\text{rel}} = -\dot{\chi}_i \mathbf{n}_i$ (рис. 1.1c). Вектор \mathbf{o}_i — касательный вектор к ободу колеса (рис. 1.1d). Он направлен таким образом, что \mathbf{o}_i совпадает с осью собственного вращения ролика, когда центр ролика расположен под центром колеса. Колёса имеют одинаковый радиус r .

Конструкция экипажа задаётся следующими параметрами: расстояние $\delta_i = |\overrightarrow{QA_i}|$ и угол α_i (угол между осью платформы $Q\xi$ и направлением из платформы в центр i -го колеса $\overrightarrow{QA_i}$) — полярные координаты центра колеса относительно $Q\xi\eta$; угол β_i — угол между $Q\xi$ и \mathbf{n}_i — задаёт направление оси вращения i -го колеса; расстояние $\Delta = |\overrightarrow{QS}|$ задаёт смещение центра масс; тип i -го колеса задаёт угол $\gamma_i \in (0, \pi)$ — угол между вектором \mathbf{o}_i и \mathbf{n}_i (в частности, углы $\gamma_i = \frac{\pi}{4}$ и $\gamma_i = \frac{3\pi}{4}$ определяют меканум-колёса (рис. В.1b), а угол $\gamma_i = \frac{\pi}{2}$ определяет омни-колесо в узком смысле (рис. В.1c)).

Общая масса экипажа (платформы и всех колёс в совокупности) равна m . Момент инерции всего экипажа относительно вертикальной оси Sz (включая моменты инерции колес относительно этой оси) равен Λ^2 . Момент инерции каждого колеса относительно его оси вращения $A_i \mathbf{n}_i$ равен λ^2 и одинаков для всех колёс.

Таким образом, исследуемая система состоит из четырёх абсолютно твёрдых тел. Её положение описывается шестью обобщёнными координатами: $x, y, \theta, \chi_1, \chi_2, \chi_3$. Конструкция экипажа задаётся набором параметров $r, h, \Delta, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Экипаж движется в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g . Высота центра масс h экипажа считается постоянной в течение всего времени движения.

Управление совершается посредством трёх двигателей, для которых используется модель электромотора постоянного тока [94]. Управляющий момент для i -го колеса имеет вид

$$\mathbf{M}_i^{\text{ctrl}} = (c_1 U_i - c_2 \dot{\chi}_i) (-\mathbf{n}_i), \quad (1.15)$$

где U_i — подаваемые на обмотки двигателей управляющие напряжения, а слагаемое с коэффициентом c_2 соответствует сопротивлению, вызываемому противоЭДС.

Введём псевдоскорости следующим образом:

$$\nu_1 = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta, \quad (1.16)$$

$$\nu_2 = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta, \quad (1.17)$$

$$\nu_3 = \Lambda \dot{\theta}. \quad (1.18)$$

Механический смысл этих переменных следующий: ν_1 и ν_2 — проекции скорости центра масс на оси, связанные с платформой:

$$\mathbf{v}_S = \nu_1 \mathbf{e}_\xi + \nu_2 \mathbf{e}_\eta,$$

ν_3 — величина угловой скорости платформы с точностью до постоянного положительного множителя.

Составим уравнения дифференциальных связей, наложенных на систему. В исследуемой модели каждое омни-колесо представляет собой вертикальный абсолютно твёрдый диск, который не проскальзывает в направлении оси ролика. Таким образом, скорость точки контакта B_i омни-колеса перпендикулярна вектору \mathbf{o}_i .

По формуле Эйлера для точек S и A_i платформы имеем

$$\mathbf{v}_{A_i} = \mathbf{v}_S + \dot{\theta} \mathbf{e}_z \times \overrightarrow{SA_i} = \left(\nu_1 + \frac{\Delta - \delta_i \sin \alpha_i}{\Lambda} \nu_3 \right) \mathbf{e}_\xi + \left(\nu_2 + \frac{\delta_i \cos \alpha_i}{\Lambda} \nu_3 \right) \mathbf{e}_\eta,$$

где $\square \times \square$ — векторное умножение. Скорость точки контакта B_i вычисляем по формуле Эйлера для колеса:

$$\mathbf{v}_{B_i} = \mathbf{v}_{A_i} + (-\dot{\chi}_i \mathbf{n}_i) \times \overrightarrow{A_i B_i} = \dot{\chi}_i r (\sin \beta_i \mathbf{e}_\xi - \cos \beta_i \mathbf{e}_\eta).$$

Условие связи для i -го колеса имеет вид

$$(\mathbf{v}_{B_i}, \mathbf{o}_i) = 0. \quad (1.19)$$

По определению (рис.1.1d) имеем

$$\mathbf{o}_i = \cos(\beta_i + \gamma_i) \mathbf{e}_\xi + \sin(\beta_i + \gamma_i) \mathbf{e}_\eta.$$

Непосредственное вычисление условия (1.19) даёт нам искомое уравнение связи:

$$\dot{\chi}_i r \sin \gamma_i = \cos(\beta_i + \gamma_i) \nu_1 + \sin(\beta_i + \gamma_i) \nu_2 + \frac{\Delta \cos(\beta_i + \gamma_i) + \delta_i \sin(\beta_i + \gamma_i - \alpha_i)}{\Lambda} \nu_3.$$

С учётом ограничений $\gamma_i \in (0, \pi)$ уравнение всегда разрешимо относительно $\dot{\chi}_i$. Уравнения связей удобно записать в матричном виде:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \Xi \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)^T, \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T, \quad \Xi = \|\sigma_{is}\|, \quad (1.20)$$

$$\sigma_{i1} = \frac{\cos(\beta_i + \gamma_i)}{r \sin \gamma_i}, \quad \sigma_{i2} = \frac{\sin(\beta_i + \gamma_i)}{r \sin \gamma_i}, \quad \sigma_{i3} = \frac{\Delta \cos(\beta_i + \gamma_i) + \delta_i \sin(\beta_i + \gamma_i - \alpha_i)}{\Lambda r \sin \gamma_i}. \quad (1.21)$$

В дальнейшем будем считать, что матрица Ξ — невырожденная. Примеры экипажей с вырожденной матрицей связей Ξ представлены на рис. 1.2. Условие вырожденности, изображённое на рис. 1.2b, также было получено в работе И.С. Мамаева, А.А. Килина и соавторов [52].

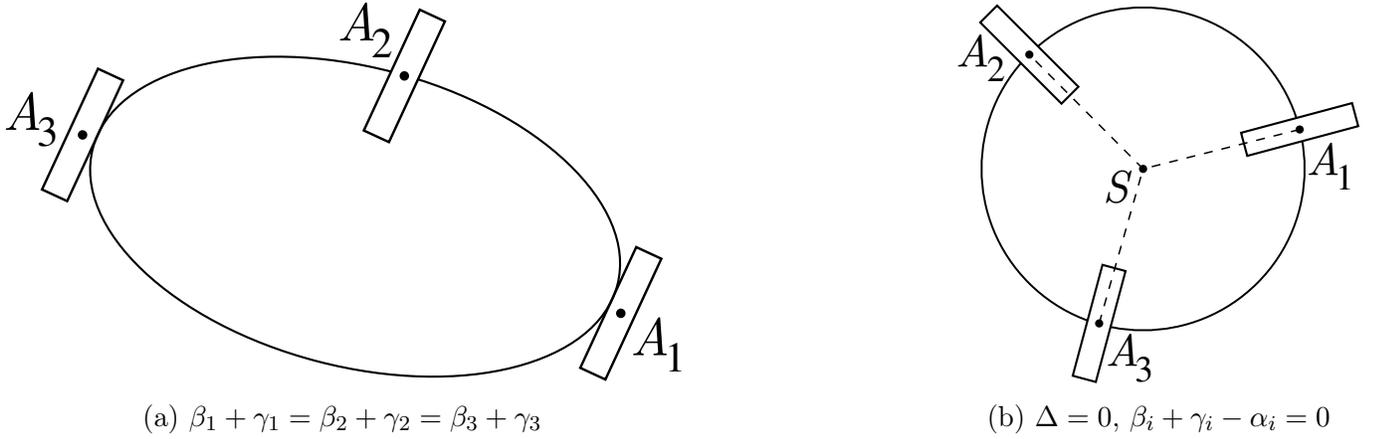


Рис. 1.2: Омни-экипажи с вырожденной матрицей связей Ξ (1.20)

1.3 Уравнения управляемого движения омни-экипажа произвольной конфигурации

Поскольку связи (1.20) линейны по псевдоскоростям и не зависят от времени, для составления уравнений движения экипажа можно воспользоваться лаконичными уравнениями Я.В. Татаринова в форме следствия 1.1.

Сначала выпишем лагранжиан системы.

Утверждение 1.1. *Для экипажа произвольной конфигурации с тремя омни-колёсами, модели которых не учитывают инерционные свойства роликов, кинетическая энергия имеет вид*

$$2T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Lambda^2 \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^3 \lambda^2 \dot{\chi}_i^2, \quad (1.22)$$

где $\lambda^2 = \text{const}$ — момент инерции колеса относительно его оси вращения $A_i \mathbf{n}_i$, $\Lambda^2 = \text{const}$ — момент инерции экипажа (платформы и всех колёс в совокупности) относительно вертикальной оси Sz , проходящей через центр масс всей системы [30].

Доказательство. Согласно формуле Кёнига, для центра масс всей системы S имеем

$$2T = (m\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_S) + 2T^{\text{knг}}, \quad (1.23)$$

где $T^{\text{knг}}$ — кинетическая энергия, вычисленная в осях Кёнига всей системы. Относительно платформы точка S неподвижна, поэтому для её кинетической энергии в осях Кёнига $T_{\text{base}}^{\text{knг}}$ имеем

$$2T_{\text{base}}^{\text{knг}} = J_{\text{base}}^{Sz} \dot{\theta}^2, \quad (1.24)$$

где J_{base}^{Sz} — момент инерции платформы относительно вертикали Sz , проходящей через центр масс.

Далее для i -го колеса повторно применим формулу Кёнига:

$$2T_{w_i}^{\text{knг}} = (m_w \mathbf{v}_{A_i}, \mathbf{v}_{A_i}) + J_w^{A_i z} \dot{\theta}^2 + J_w^{A_i \mathbf{n}_i} \dot{\chi}_i^2, \quad (1.25)$$

где m_w , $J_w^{A_i z}$, $J_w^{A_i \mathbf{n}_i}$ — соответственно масса, момент инерции относительно вертикали $A_i z$ и момент инерции относительно оси вращения $A_i \mathbf{n}_i$ для i -го колеса.

Рассмотрим величину Λ^2 — момент инерции всего экипажа относительно вертикали Sz , проходящей через центр масс системы. С учётом геометрии экипажа и формулы Гюйгенса–Штейнера имеют место следующие выражения:

$$\Lambda^2 \dot{\theta}^2 = J_{\text{base}}^{Sz} \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^3 \left(m_w \left| \overrightarrow{SA_i} \right|^2 + J_{w_i}^{A_i z} \right) \dot{\theta}^2 = J_{\text{base}}^{Sz} \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^3 \left((m_w \mathbf{v}_{A_i}, \mathbf{v}_{A_i}) + J_{w_i}^{A_i z} \dot{\theta}^2 \right). \quad (1.26)$$

С учётом выражения для момента инерции (1.26) и обозначения $\lambda^2 = J_w^{A_i \mathbf{n}_i}$, компоненты кинетической энергии (1.23)–(1.25) можно сгруппировать в искомую форму (1.22):

$$2T = m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Lambda^2 \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^3 \lambda^2 \dot{\chi}_i^2. \quad \blacksquare$$

Так как потенциальная энергия силы тяжести Π для системы постоянна, лагранжиан L совпадает с кинетической энергией T . Выпишем лагранжиан (1.22) с учётом связей (1.20) и определения псевдоскоростей (1.16)–(1.18):

$$2L^\bullet = \boldsymbol{\nu}^T \mathfrak{A} \boldsymbol{\nu}, \quad \mathfrak{A} = \|\mathfrak{a}_{ij}\| = \mathfrak{M} + \lambda^2 \Xi^T \Xi, \quad (1.27)$$

где $\mathfrak{M} = \text{diag} \{m, m, 1\}$ — диагональная матрица.

Далее для формирования уравнений динамики выпишем комбинацию формальных импульсов (1.14):

$$P_1 \nu_1 + P_2 \nu_2 + P_3 \nu_3 = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_\theta \dot{\theta} + p_{\chi_1} \dot{\chi}_1 + p_{\chi_2} \dot{\chi}_2 + p_{\chi_3} \dot{\chi}_3. \quad (1.28)$$

После подстановки в правую часть выражения (1.28) уравнений связей (1.20) и определения

псевдоскоростей (1.16)–(1.18) получим выражения для P_k :

$$P_1 = p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_{i=1}^3 p_{\chi_i} \sigma_{i1}, \quad (1.29)$$

$$P_2 = -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_{i=1}^3 p_{\chi_i} \sigma_{i2}, \quad (1.30)$$

$$P_3 = \frac{p_\theta}{\Lambda} + \sum_{i=1}^3 p_{\chi_i} \sigma_{i3}. \quad (1.31)$$

Так как лагранжиан системы с учётом связей L^\bullet не зависит от обобщённых координат и формальных импульсов p_\square , имеем

$$\{P_k, L^\bullet\} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.32)$$

Вычислим $\{P_k, P_j\}$ с учётом выражений (1.29)–(1.31):

$$\{P_1, P_2\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial p_x} + \dots = 0, \quad (1.33)$$

$$\{P_1, P_3\} = \frac{\partial P_1}{\partial \theta} \frac{\partial P_3}{\partial p_\theta} = \frac{-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta}{\Lambda}, \quad (1.34)$$

$$\{P_2, P_3\} = \frac{\partial P_2}{\partial \theta} \frac{\partial P_3}{\partial p_\theta} = \frac{-p_x \cos \theta - p_y \sin \theta}{\Lambda}. \quad (1.35)$$

Также по определению (1.7) вычислим формальные импульсы p_x, p_y :

$$p_x = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^\bullet = (m\dot{x})^\bullet = \nu_1 \cos \theta - \nu_2 \sin \theta, \quad (1.36)$$

$$p_y = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right)^\bullet = (m\dot{y})^\bullet = \nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta. \quad (1.37)$$

После подстановки выражения для формальных импульсов (1.36)–(1.37) в скобки Пуассона (1.33)–(1.35) имеем

$$\{P_1, P_2\} = 0, \quad (1.38)$$

$$\{P_1, P_3\} = \frac{m\nu_2}{\Lambda}, \quad (1.39)$$

$$\{P_2, P_3\} = -\frac{m\nu_1}{\Lambda}. \quad (1.40)$$

Совместив выражения для лагранжиана (1.22), (1.32) и выражения для скобок Пуассона (1.38)–(1.40), получаем уравнения динамики в виде (1.13) в случае движения омни-экипажа по инерции:

$$\mathfrak{A}\dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{m}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Матрица левой части \mathfrak{A} положительно определена (так как \mathfrak{M} и $\lambda^2\Xi^T\Xi$ положительно определены), поэтому система разрешима относительно производных псевдоскоростей.

Теперь получим выражения для обобщённых сил управляемой системы. К каждому колесу со стороны платформы приложены управляющие моменты (1.15):

$$\mathbf{M}_i^{\text{ctrl}} = (c_1U_i - c_2\dot{\chi}_i)(-\mathbf{n}_i) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Элементарная работа управляющих моментов (1.15) имеет вид

$$\delta A = \sum_{i=1}^3 \mathbf{M}_i^{\text{ctrl}} \cdot (-\delta\chi_i\mathbf{n}_i),$$

из чего следуют выражения для обобщённых сил, соответствующих углу χ_i :

$$Q_{\chi_i} = c_1U_i - c_2\dot{\chi}_i,$$

или, в матричном виде с учётом связей (1.20),

$$\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\chi}} = c_1\mathbf{U} - c_2\boldsymbol{\chi} = c_1\mathbf{U} - c_2\Xi\boldsymbol{\nu}. \quad (1.42)$$

Совместив выражения для лагранжиана (1.22), (1.32), выражения для скобок Пуассона (1.38)–(1.40) и выражения для обобщённых сил (1.42), с учётом производной уравнений связей (1.20)

$$\frac{\partial v_i}{\partial \nu_k} = \Xi^T$$

окончательно получаем уравнения движения управляемого омни-экипажа:

$$\mathfrak{A}\dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{m}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\Xi^T\mathbf{U} - c_2\Xi^T\Xi\boldsymbol{\nu}. \quad (1.43)$$

В дальнейшем будет удобен следующий вид записи уравнений (1.43):

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\mathfrak{B}^\nu\boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \mathfrak{C}^\nu\boldsymbol{\nu} + \mathfrak{U}^\nu\mathbf{U}, \quad (1.44)$$

где матрицы \mathfrak{B}^ν , \mathfrak{C}^ν , \mathfrak{U}^ν определяются следующими выражениями:

$$\mathfrak{B}^\nu = \|\mathfrak{b}_{ij}^\nu\| = \frac{m}{\Lambda} \mathfrak{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

$$\mathfrak{C}^\nu = \|\mathfrak{c}_{ij}^\nu\| = -c_2\mathfrak{A}^{-1}\Xi^T\Xi, \quad (1.46)$$

$$\mathfrak{U}^\nu = \|\mathfrak{u}_{ij}^\nu\| = c_1\mathfrak{A}^{-1}\Xi^T. \quad (1.47)$$

Верхний индекс \square^ν обозначает связь матриц и их компонентов с уравнениями движения системы.

1.4 Уравнения управляемого движения симметричного омни-экипажа

Рассмотрим одну из моделей омни-экипажа — так называемый *симметричный* омни-экипаж (рис. 1.3) [1, 34, 38, 40, 42, 47, 48, 53, 64, 65]. Колёса этого экипажа расположены в вершинах правильного треугольника, центром которого является центр масс системы, а их оси направлены по биссектрисам этого треугольника. Экипаж характеризуется следующим набором параметров:

$$\Delta = 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta > 0, \quad (1.48)$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = -\frac{\pi}{6}, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \beta_3 = \frac{7\pi}{6}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{\pi}{2}. \quad (1.49)$$

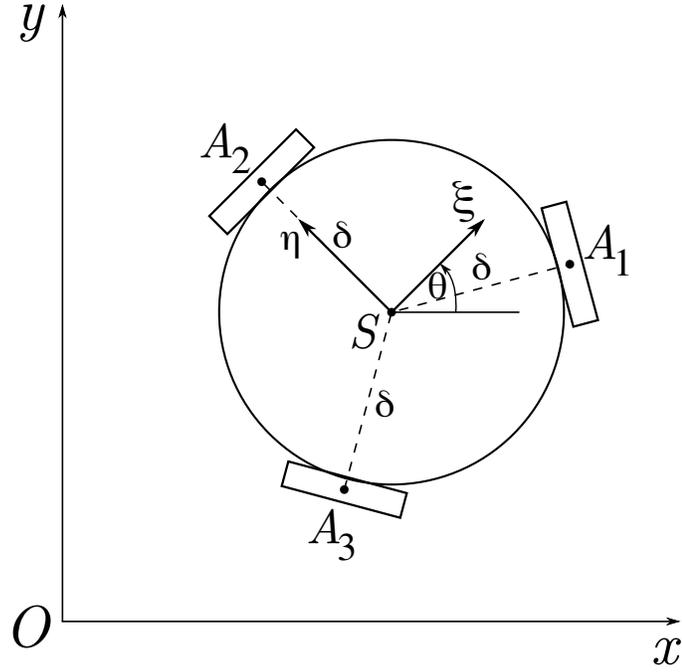


Рис. 1.3: Симметричный омни-экипаж

Уравнения управляемого движения (1.43) симметричного омни-экипажа имеют вид

$$\mathbf{a}^{\odot} \dot{\nu}_1 = \frac{m}{\Lambda} \nu_2 \nu_3 - \frac{3c_2}{2r^2} \nu_1 + \frac{c_1}{2r} (U_1 - 2U_2 + U_3), \quad (1.50)$$

$$\mathbf{a}^{\odot} \dot{\nu}_2 = -\frac{m}{\Lambda} \nu_1 \nu_3 - \frac{3c_2}{2r^2} \nu_2 + \frac{\sqrt{3}c_1}{2r} (U_1 - U_3), \quad (1.51)$$

$$\mathbf{a}_3^{\odot} \dot{\nu}_3 = -\frac{3c_2 \delta^2}{\Lambda^2 r^2} \nu_3 + \frac{c_1 \delta}{\Lambda r} (U_1 + U_2 + U_3), \quad (1.52)$$

где коэффициенты лагранжиана со связями определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{a}^{\odot} = \mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{22} = m + \frac{3\lambda^2}{2r^2}, \quad \mathbf{a}_3^{\odot} = \mathbf{a}_{33} = 1 + \frac{3\delta^2 \lambda^2}{\Lambda^2 r^2}.$$

Верхний индекс \square^{\odot} обозначает связь величин с симметричной конфигурацией омни-экипажа.

Важной особенностью системы (1.50)–(1.52) является возможность отделить третье уравнение, если управляющие напряжения явно заданы как функции времени.

1.5 Уравнения управляемого движения омни-экипажа с параллельными колёсами

Рассмотрим ещё одну конфигурацию трёхколёсного омни-экипажа — экипаж с *параллельными колёсами* (рис. 1.4) [29,30,37,48]. Этот экипаж имеет вертикальную плоскость симметрии. Оси вращения двух его колёс совпадают (но независимы) и перпендикулярны плоскости симметрии. В дальнейшем эти колёса — колёса 1 и 3 — будем называть *задними*. Ещё одно колесо расположено так, что его ось лежит в плоскости симметрии экипажа. Его — колесо 2 — будем называть *передним*.

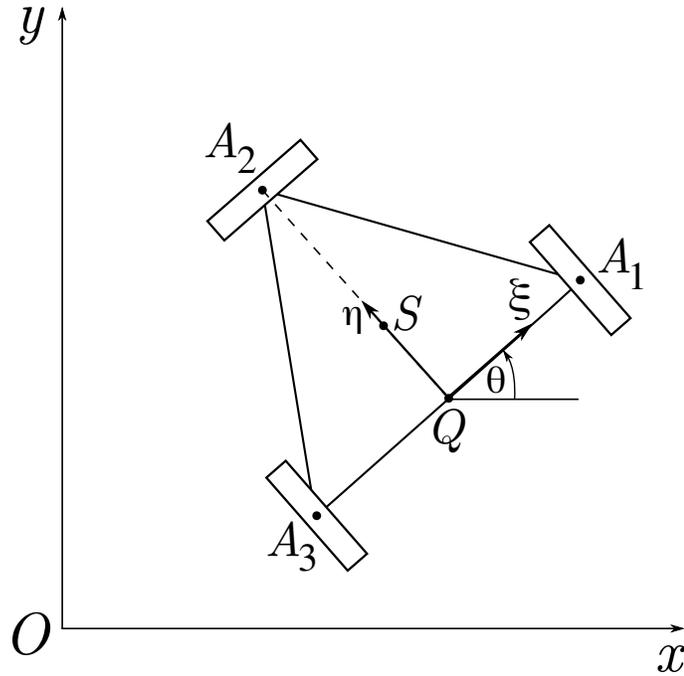


Рис. 1.4: Омни-экипаж с параллельными колёсами

Экипаж характеризуется следующим набором параметров:

$$\delta_2 > \Delta > 0, \quad \delta_1 = \delta_3 = \delta_{||}, \tag{1.53}$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \beta_3 = \pi, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{\pi}{2}. \tag{1.54}$$

Уравнения управляемого движения (1.43) омни-экипажа с параллельными колёсами имеют

вид

$$\mathbf{a}_1^\Delta \dot{\nu}_1 - \kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 = \frac{m}{\Lambda} \nu_2 \nu_3 - \frac{c_2}{r^2} \left(\nu_1 + \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda} \nu_3 \right) - \frac{c_1}{r} U_2, \quad (1.55)$$

$$\mathbf{a}_2^\Delta \dot{\nu}_2 = -\frac{m}{\Lambda} \nu_1 \nu_3 - \frac{2c_2}{r^2} \nu_2 + \frac{c_1}{r} (U_1 - U_3), \quad (1.56)$$

$$-\kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_1 + \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 = -\frac{c_2}{r^2} \left(\frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda} \nu_1 + \frac{2\delta_{\parallel}^2 + (\delta_2 - \Delta)^2}{\Lambda^2} \nu_3 \right) + \frac{c_1}{r} \frac{\delta_{\parallel} U_1 + (\delta_2 - \Delta) U_2 + \delta_{\parallel} U_3}{\Lambda}, \quad (1.57)$$

где коэффициенты лагранжиана со связями определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^\Delta = \mathbf{a}_{11} &= m + \lambda^2 \frac{1}{r^2}, & \mathbf{a}_2^\Delta = \mathbf{a}_{22} &= m + \lambda^2 \frac{2}{r^2}, \\ \mathbf{a}_3^\Delta = \mathbf{a}_{33} &= 1 + \lambda^2 \frac{2\delta_{\parallel}^2 + (\delta_2 - \Delta)^2}{\Lambda^2 r^2}, & \kappa &= -\frac{\mathbf{a}_{13}}{\mathbf{a}_{33}} = -\frac{\mathbf{a}_{31}}{\mathbf{a}_{33}} = \frac{\lambda^2 \delta_2 - \Delta}{\mathbf{a}_3^\Delta \Lambda r^2}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Верхний индекс \square^Δ обозначает связь величин с конфигурацией омни-экипажа, имеющей параллельные задние колёса.

1.6 Приложение. Уравнения управляемого движения омни-экипажа с учётом вязкого трения в осях колёс

Покажем, что задачу исследования динамики экипажа с вязким трением в осях колёс можно свести к задаче исследования динамики экипажа, описанного в параграфе 1.2.

Рассмотрим модель, аналогичную общей модели из параграфа 1.2, дополнительно учитывающую вязкое трение в осях колёс экипажа. В этом случае кроме управляющих моментов (1.15) на i -ое колесо будет действовать момент трения

$$\mathbf{M}_i^{\text{frw}} = -\mu_w (-\dot{\chi}_i \mathbf{n}_i), \quad (1.59)$$

где $\mu_w > 0$ — коэффициент вязкого трения в оси колеса экипажа.

Элементарная работа моментов трения (1.59) имеет вид

$$\delta A^{\text{frw}} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{M}_i^{\text{frw}} \cdot (-\delta \chi_i \mathbf{n}_i),$$

из чего с учётом (1.42) следуют выражения для обобщённых сил, соответствующих углу χ_i :

$$\mathbf{Q}_\chi = c_1 \mathbf{U} - (c_2 + \mu_w) \Xi \boldsymbol{\nu},$$

и уравнения управляемого движения (1.43) записываются следующим образом:

$$\mathfrak{A} \dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{m}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \Xi^T \mathbf{U} - c_{2+\mu} \Xi^T \Xi \boldsymbol{\nu}, \quad (1.60)$$

где $c_{2+\mu} = c_2 + \mu_w > 0$.

Уравнения движения (1.60) имеют ту же форму, что и уравнения движения (1.43). Таким образом, задачу исследования динамики экипажа с вязким трением в осях колёс можно свести к задаче исследования динамики экипажа без учёта трения корректировкой коэффициента сопротивления c_2 .

Глава 2. Устойчивость прямолинейных движений омни-экипажа с учётом инерционных свойств роликов колёс

2.1 О моделировании омни-экипажа с учётом инерционных свойств роликов колёс

В главе 1 была введена модель омни-экипажа, в которой колесо рассматривается как вертикальный абсолютно твёрдый диск, а наличие на его ободке роликов выражается через связь: диск может свободно проскальзывать в направлении, перпендикулярном оси ролика. В данной главе мы исследуем более сложную модель, которая рассматривает колесо как систему твёрдых тел, состоящую из основания колеса и роликов, в которой опорный ролик не проскальзывает в точке контакта.

Разница между моделью, учитывающей инерционные свойства роликов колёс, и безынерционной моделью, заключается в двух следующих пунктах. Во-первых, в кинетической энергии системы появляются дополнительные слагаемые, связанные с вращением ролика относительно его оси в колесе. Это приводит к увеличению порядка системы уравнений движения. Во-вторых, во время движения появляются эффекты, связанные со сменой ролика, находящегося в контакте с опорной плоскостью.

Второй вопрос подробно рассматривается в работах Герасимова К.В. совместно с Косенко И.И. и Зобовой А.А. [38, 42, 43] и в диссертациях этих авторов [45, 46]. При повороте колеса вокруг своей оси на достаточно большой угол находящийся в контакте с опорной плоскостью ролик перестает с ней контактировать. При этом в контакт с плоскостью приходит новый ролик, скорость которого, вообще говоря, не согласована со связями. При этом возникает переходный процесс, во время которого возможно скольжение ролика относительно опорной плоскости. В

Данная глава посвящена исследованию влияния инерционных свойств роликов колёс на устойчивость прямолинейных движений омни-экипажа с параллельными колёсами (см. параграф 1.5). При подготовке данной главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [16, 17, 24, 25].

работе [43] в предположении, что скольжение ролика прекращается за бесконечно малый промежуток времени, смена ролика рассматривается как абсолютно неупругий удар, происходящий при мгновенном снятии и наложении связи, при этом освободившийся ролик на том же колесе начинает свободно вращаться вокруг своей оси. В результате при смене роликов наблюдается убывание кинетической энергии скачками в моменты смены контакта.

Выражения, описывающие переходный процесс при смене ролика в работе [43], получаются достаточно громоздкими, а рассматриваемая система уравнений движения из непрерывной становится гибридной. Чтобы избежать этих затруднений при аналитическом исследовании, в данной главе мы будем работать в рамках модели, в которой на рассматриваемых движениях не происходит смены ролика, находящегося в контакте с опорной плоскостью.

2.2 Стационарные движения омни-экипажа с параллельными колёсами без учёта инерционных свойств роликов колёс

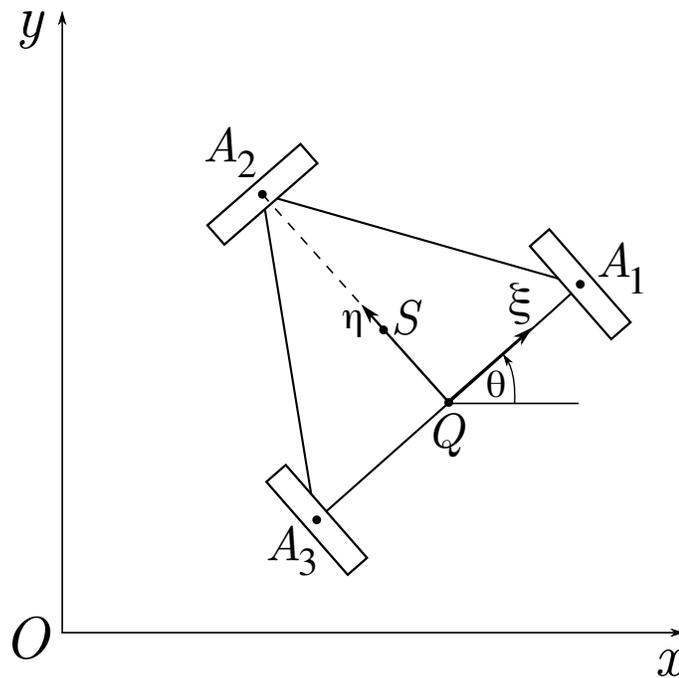


Рис. 2.1: Омни-экипаж с параллельными колёсами

Рассмотрим движение омни-экипажа с параллельными колёсами (рис. 2.1, см. параграф 1.5) по инерции. (С учётом параграфа 1.6 также считается, что мы пренебрегаем вязким трением в осях колёс.) Уравнения движения системы (1.41), не учитывающей инерционные свойства

роликов колёс, имеют вид

$$\mathbf{a}_1^\Delta \dot{\nu}_1 - \kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 = \frac{m}{\Lambda} \nu_2 \nu_3, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{a}_2^\Delta \dot{\nu}_2 = -\frac{m}{\Lambda} \nu_1 \nu_3, \quad (2.2)$$

$$-\kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_1 + \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{a}_1^\Delta = m + \lambda^2 \frac{1}{r^2}, \quad \mathbf{a}_2^\Delta = m + \lambda^2 \frac{2}{r^2}, \quad \mathbf{a}_3^\Delta = 1 + \lambda^2 \frac{2\delta_\parallel^2 + (\delta_2 - \Delta)^2}{\Lambda^2 r^2}, \quad \kappa = \frac{\lambda^2 \delta_2 - \Delta}{\mathbf{a}_3^\Delta \Lambda r^2}. \quad (2.4)$$

Третье уравнение движения (2.3) допускает интеграл

$$-\kappa \nu_1 + \nu_3 = C = \text{const.}$$

Проекции фазовых траекторий системы (2.1)–(2.3), лежащих на фиксированном уровне интеграла C , описываются системой уравнений

$$(\mathbf{a}_1^\Delta - \kappa^2 \mathbf{a}_3^\Delta) \dot{\nu}_3 = \frac{m\kappa}{\Lambda} \nu_2 \nu_3, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{a}_2^\Delta \dot{\nu}_2 = -\frac{m}{\Lambda\kappa} (C - \nu_2) \nu_3. \quad (2.6)$$

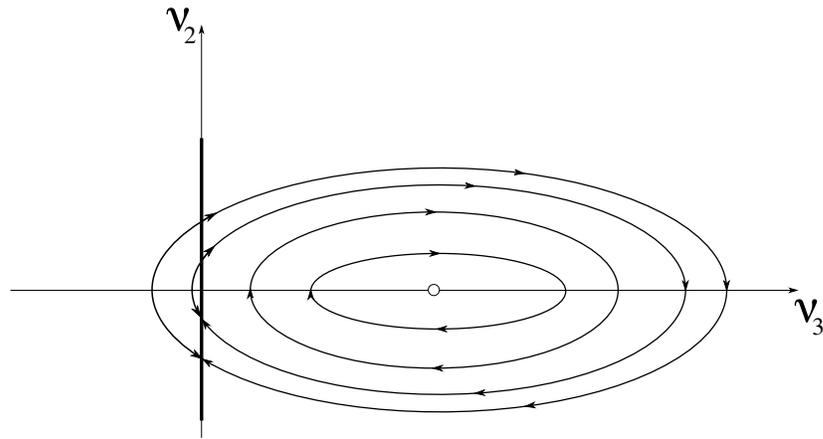


Рис. 2.2: Фазовый портрет на фиксированном уровне интеграла

На плоскости (ν_3, ν_2) траектории системы с различной энергией $T = H$ принадлежат концентрическим эллипсам с центром на оси $\nu_2 = 0$ (рис. 2.2). Центр эллипсов $\nu_2 = 0$, $\nu_3 = -C$

соответствует равномерному вращению экипажа вокруг оси, проходящей через центр масс экипажа. Особая прямая $\nu_3 = 0$ соответствует равномерному прямолинейному движению экипажа (ось симметрии экипажа при этом не обязана быть параллельна курсу). Из уравнений фазовых траекторий (2.5)–(2.6) следует, что в полупространстве $\nu_3 > 0$ движение по эллипсам происходит по часовой стрелке, а в полупространстве $\nu_3 < 0$ — против часовой стрелки. Таким образом, равномерные прямолинейные движения

$$\nu_1 = \text{const}, \quad \nu_2 = \text{const}, \quad \nu_3 = 0$$

устойчивы по псевдоскоростям при $\nu_2 < 0$ и неустойчивы при $\nu_2 > 0$. Физический смысл условия: прямолинейное движение устойчиво, если центр масс во время движения находится позади оси параллельных колёс.

Данный результат впервые был получен в работах А.А. Зобовой и Я.В. Татарина [29,30].

Одним из стационарных движений системы (2.1)–(2.3) является движение вида

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \text{const}, \quad \nu_3 = 0. \tag{2.7}$$

Именно это движение мы будем изучать в следующих параграфах главы.

2.3 Уравнения движения омни-экипажа с параллельными колёсами с учётом инерционных свойств опорного ролика переднего колеса

Для того, чтобы изучить влияние инерционных свойств роликов колёс на динамику омни-экипажа с параллельными колёсами, рассмотрим следующую модель. Пусть задние колёса экипажа моделируются так же, как и в параграфе 2.2 — без учёта инерционных свойств роликов. Переднее колесо мы будем моделировать с учётом инерционных свойств роликов (рис. 2.3). Будем рассматривать лишь такое движение экипажа, при котором касание переднего колеса с плоскостью происходит посредством одного и того же ролика, т.е. не случается “переключения” с одного опорного ролика на другой. С учётом этого ограничения будем считать, что

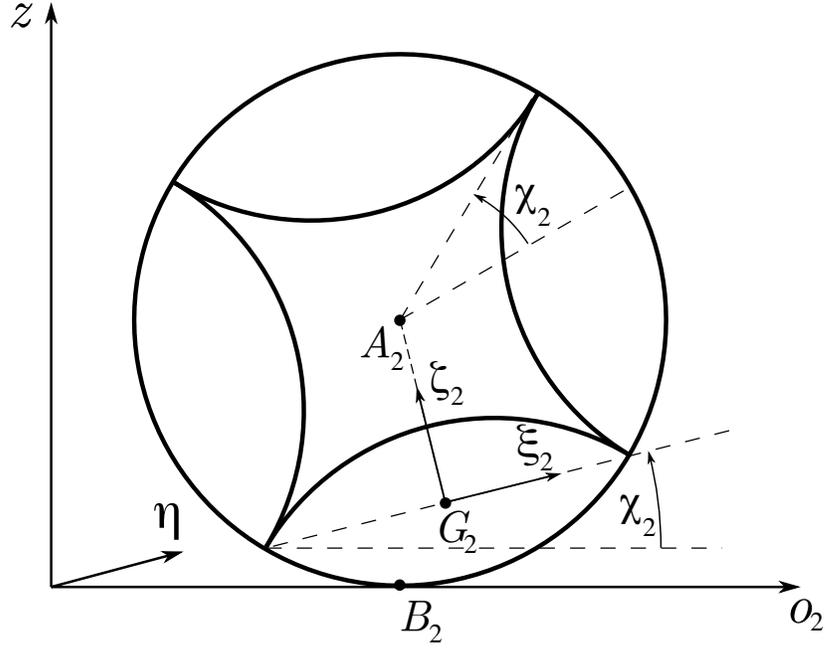


Рис. 2.3: Модель, учитывающая инерционные свойства роликов колёс ($n = 4$)

$\chi_2 \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right)$, где $n = 3, 4, \dots$ — количество роликов на ободе колеса. (В положении $\chi_2 = 0$ центр ролика G_2 лежит на одной прямой с A_2 и B_2 .) Ниже будет показано, что такое движение действительно возможно.

Будем считать, что собственные вращения роликов, не находящихся в контакте с опорной плоскостью, относительно основания переднего колеса пренебрежимо малы, т.е. система из основания колеса и непогрных роликов является абсолютно твёрдым телом. Аналогично модели, описанной в главе 1, будем считать, что точка контакта не смещается относительно центра колеса во время движения.

Пусть $G_2\xi_2\eta\zeta_2$ — главные оси инерции ролика, $G_2\xi_2$ — ось вращения опорного ролика. Угол собственного вращения ролика относительно колеса обозначим ϕ . Отсчёт угла ϕ будем вести таким образом, что угловая скорость ролика относительно основания колеса равна $\dot{\phi}\mathbf{e}_{\xi_2}$. Внешняя поверхность ролика в собственных осях $G_2\xi_2\eta\zeta_2$ задаётся следующим уравнением [38, 42]:

$$(\xi_2)^2 + \left(\sqrt{(\eta)^2 + (\zeta_2)^2} + \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 = r.$$

Ось вращения опорного ролика неподвижна относительно основания колеса. На опорный ролик наложена связь: скорость точки его касания с плоскостью — скорость нижней точки колеса B_2 — равна нулю. Положение системы описывается семью обобщёнными координатами: $x, y, \theta, \chi_1,$

χ_2, χ_3, ϕ .

С использованием результатов параграфа 1.2 выпишем уравнения связей. Для задних колёс имеют место уже известные уравнения связей безынерционной модели (1.20). Получим оставшиеся уравнения связей для переднего колеса.

Найдём уравнения связей в более общем случае. Условия имеют вид

$$\mathbf{v}_{B_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.8)$$

Рассмотрим движение омни-экипажа произвольной конфигурации с тремя ортогональными омни-колёсами $\gamma_i = \frac{\pi}{2}$ ($i = 1, 2, 3$). Колёса будем моделировать с учётом инерционных свойств роликов. Пусть $G_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ — главные оси инерции опорного ролика i -го колеса ($G_i \zeta_i$ направлена в центр колеса A_i), $G_i \xi_i$ — ось вращения опорного ролика. Угол собственного вращения ролика относительно i -го колеса обозначим ϕ_i . Отсчёт угла ϕ_i будем вести таким образом, что угловая скорость ролика относительно основания колеса равна $\dot{\phi}_i \mathbf{e}_{\xi_i}$. По формуле Эйлера для точек S и A_i платформы имеем

$$\mathbf{v}_{A_i} = \mathbf{v}_{S_i} + \dot{\theta} \mathbf{e}_z \times \overrightarrow{SA_i} = \left(\nu_1 + \frac{\Delta - \delta_i \sin \alpha_i}{\Lambda} \nu_3 \right) \mathbf{e}_\xi + \left(\nu_2 + \frac{\delta_i \cos \alpha_i}{\Lambda} \nu_3 \right) \mathbf{e}_\eta, \quad (2.9)$$

где $\square \times \square$ — векторное умножение.

Для центра опорного ролика G_i по формуле Эйлера для основания колеса имеем

$$\mathbf{v}_{G_i} = \mathbf{v}_{A_i} + \left(\frac{\nu_3}{\Lambda} \mathbf{e}_z - \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i \right) \times \overrightarrow{A_i G_i} = \mathbf{v}_{A_i} + \left(\frac{\nu_3}{\Lambda} \mathbf{e}_z - \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i \right) \times \left(-r \cos \frac{\pi}{n} \mathbf{e}_{\zeta_i} \right), \quad (2.10)$$

Ещё раз применив формулу Эйлера, получим выражение для скорости точки касания опорного ролика с плоскостью B_i :

$$\mathbf{v}_{B_i} = \mathbf{v}_{G_i} + \left(\frac{\nu_3}{\Lambda} \mathbf{e}_z - \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i + \dot{\phi}_i \mathbf{e}_{\xi_i} \right) \times \overrightarrow{G_i B_i} = \mathbf{v}_{G_i} + \left(\frac{\nu_3}{\Lambda} \mathbf{e}_z - \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i + \dot{\phi}_i \mathbf{e}_{\xi_i} \right) \times \left(r \cos \frac{\pi}{n} \mathbf{e}_{\zeta_i} - r \mathbf{e}_z \right). \quad (2.11)$$

Совместив выражения (2.10) и (2.11), получаем следующий вид выражения для скорости точки контакта колеса с плоскостью:

$$\mathbf{v}_{B_i} = \mathbf{v}_{A_i} - \left(\frac{\nu_3}{\Lambda} \mathbf{e}_z - \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i \right) \times r \mathbf{e}_z + \dot{\phi}_i \mathbf{e}_{\xi_i} \times \left(r \cos \frac{\pi}{n} \mathbf{e}_{\zeta_i} - r \mathbf{e}_z \right). \quad (2.12)$$

Из конструкции экипажа (рис. 2.3) имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\xi_i} \\ \mathbf{e}_{\eta_i} \\ \mathbf{e}_{\zeta_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi_i & \sin \chi_i \\ 0 & -\sin \chi_i & \cos \chi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{o}_i \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\xi} \\ \mathbf{e}_{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & -\sin \beta_i \\ \sin \beta_i & \cos \beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{o}_i \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

С учётом выражения (2.9) и определений (2.13)–(2.14), выражение для скорости точки контакта (2.12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{B_i} = & \left(\cos \beta_i \nu_1 + \sin \beta_i \nu_2 + \frac{\Delta \cos \beta_i + \delta_i \sin (\beta_i - \alpha_i)}{\Lambda} \nu_3 \right) \mathbf{n}_i + \\ & + \left(-\sin \beta_i \nu_1 + \cos \beta_i \nu_2 + \frac{-\Delta \sin \beta_i + \delta_i \cos (\beta_i - \alpha_i)}{\Lambda} \nu_3 \right) \mathbf{o}_i - \\ & - \dot{\chi}_i r \mathbf{o}_i - \dot{\phi}_i r \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \chi_i \right) \mathbf{n}_i. \end{aligned}$$

Условие равенства нулю проекции \mathbf{v}_{B_i} на направление \mathbf{o}_i совпадает с уравнением связей системы без учёта инерционных свойств роликов (1.20). Условие равенства нулю проекции \mathbf{v}_{B_i} на направление \mathbf{n}_i даёт три новых уравнения связей:

$$\dot{\phi}_i r \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \chi_i \right) = \cos \beta_i \nu_1 + \sin \beta_i \nu_2 + \frac{\Delta \cos \beta_i + \delta_i \sin (\beta_i - \alpha_i)}{\Lambda} \nu_3. \quad (2.15)$$

В матричной форме уравнения связей для углов вращения опорных роликов имеют вид

$$\dot{\phi} = \hat{\Xi}(\boldsymbol{\chi}) \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T, \quad \hat{\Xi}(\boldsymbol{\chi}) = \|\hat{\sigma}_{ij}(\chi_i)\|, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{i1}(\chi_i) &= \rho(\chi_i)\cos\beta_i, \quad \hat{\sigma}_{i2}(\chi_i) = \rho(\chi_i)\sin\beta_i, \quad \hat{\sigma}_{i3}(\chi_i) = \rho(\chi_i)\frac{\Delta\cos\beta_i + \delta_i\sin(\beta_i - \alpha_i)}{\Lambda}, \\ \rho(\chi_i) &= -\frac{1}{r\left(\cos\chi_i - \cos\frac{\pi}{n}\right)}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Заметим, что $r\left(\cos\chi_i - \cos\frac{\pi}{n}\right)$ — это расстояние от оси ролика до точки касания с опорной плоскостью. С точностью до обозначений результат совпадает с результатом статьи Герасимова К.В. и Зобовой А.А. [42].

В случае экипажа с параллельными колёсами, учитывающего инерционные свойства опорного ролика переднего колеса, группа уравнений связей (1.20) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\chi}_1 \\ \dot{\chi}_2 \\ \dot{\chi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & \frac{\delta_{\parallel}}{\Lambda r} \\ -\frac{1}{r} & 0 & \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{\delta_{\parallel}}{\Lambda r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}\tag{2.18}$$

а уравнение связи (2.15) для угла поворота ролика ϕ — вид

$$\dot{\phi} = \rho(\chi_2)\nu_2.\tag{2.19}$$

С учётом условия отсутствия переключения роликов переднего колеса, имеет место неравенство $\rho(\chi_2) < 0$ и уравнение (2.19) не вырождается. На практике случай $\rho(\chi_i) = 0$ никогда не реализуется, поскольку для закрепления роликов на колесах в реальных системах их концы усекаются (см. также параграф 2.5). В некоторых вариантах омни-колёс ролики располагают рядами в двух и более плоскостях, чтобы в каждый момент гладкий участок поверхности хотя бы одного ролика был в контакте с плоскостью (рис. В.1а, рис. В.1с).

Чтобы получить уравнения движения экипажа с помощью метода Я.В. Татарина, необходимо выписать кинетическую энергию системы. Получим её также в общем случае для экипажа произвольной конфигурации с тремя ортогональными омни-колёсами $\gamma_i = \frac{\pi}{2}$ ($i = 1, 2, 3$), где колёса моделируются с учётом инерционных свойств роликов.

Утверждение 2.1. *Для экипажа произвольной конфигурации с тремя ортогональными омни-*

колёсами $\gamma_i = \frac{\pi}{2}$ ($i = 1, 2, 3$), модели которых учитывают инерционные свойства роликов, кинетическая энергия имеет вид

$$2T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Lambda^2 \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^3 \lambda^2 \dot{\chi}_i^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=n}^3 \lambda_r^2 \left(2 \sin \chi_i \dot{\theta} \dot{\phi}_{ij} + \dot{\phi}_{ij}^2 \right). \quad (2.20)$$

Доказательство. Согласно формуле Кёнига, для центра масс всей системы S имеем

$$2T = (m\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_S) + 2T^{\text{knг}}, \quad (2.21)$$

где $T^{\text{knг}}$ — кинетическая энергия, вычисленная в осях Кёнига всей системы. Относительно платформы точка S неподвижна, поэтому для её кинетической энергии в осях Кёнига $T_{\text{base}}^{\text{knг}}$ имеем

$$2T_{\text{base}}^{\text{knг}} = J_{\text{base}}^{Sz} \dot{\theta}^2, \quad (2.22)$$

где J_{base}^{Sz} — момент инерции платформы относительно вертикали Sz , проходящей через центр масс.

Далее для i -го колеса повторно применим формулу Кёнига:

$$2T_{w_i}^{\text{knг}} = (m_{w-r} \mathbf{v}_{A_i}, \mathbf{v}_{A_i}) + J_{w-r}^{A_i z} \dot{\theta}^2 + J_{w-r}^{A_i \mathbf{n}_i} \dot{\chi}_i^2 + \sum_{j=1}^n 2T_{r_{ij}}^{\text{knг}^*}, \quad (2.23)$$

где m_{w-r} , $J_{w-r}^{A_i z}$, $J_{w-r}^{A_i \mathbf{n}_i}$ — соответственно масса, момент инерции относительно вертикали $A_i z$ и момент инерции относительно оси вращения $A_i \mathbf{n}_i$ для основания колеса без роликов, а $T_{r_{ij}}^{\text{knг}^*}$ — кинетическая энергия j -го ролика i -го колеса в осях Кёнига i -го колеса.

Для j -го ролика i -го колеса имеем

$$2T_{ij}^{\text{knг}^*} = (m_r \mathbf{v}_{G_{ij}}, \mathbf{v}_{G_{ij}}) + (\mathbf{J}_r^{G_{ij}} \boldsymbol{\omega}_{r_{ij}}, \boldsymbol{\omega}_{r_{ij}}), \quad (2.24)$$

где $\mathbf{J}_r^{G_{ij}}$ — тензор инерции ролика относительно его центра масс G_{ij} , $\boldsymbol{\omega}_{r_{ij}}$ — абсолютная угловая скорость ролика. Выпишем угловую скорость в главных осях инерции ролика:

$$\boldsymbol{\omega}_{r_{ij}} = \dot{\theta} \mathbf{e}_z - \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i + \dot{\phi}_{ij} \mathbf{e}_{\xi_{ij}} = \left(\dot{\phi}_{ij} + \sin \chi_i \dot{\theta} \right) \mathbf{e}_{\xi_{ij}} - \dot{\chi}_i \mathbf{e}_\eta + \cos \chi_i \dot{\theta} \mathbf{e}_{\zeta_{ij}}, \quad (2.25)$$

где $G_{ij}\xi_{ij}\eta_{ij}\zeta_{ij}$ — главные оси инерции ролика ($G_{ij}\zeta_{ij}$ направлена в центр колеса A_i), $G_{ij}\xi_{ij}$ — его ось вращения, ϕ_{ij} — угол его собственного вращения.

Подставив выражение (2.25) в кинетическую энергию (2.24) и перегруппировав слагаемые, получаем явный вид кинетической энергии j -го ролика i -го колеса

$$2T_{r_{ij}}^{\text{kn}g_{w_i}^*} = (m_r \mathbf{v}_{G_{ij}}, \mathbf{v}_{G_{ij}}) + \left(J_r^{G\xi_{ij}} \sin^2 \chi_i \dot{\theta}^2 + J_r^{G\eta_{ij}} \dot{\chi}_i^2 + J_r^{G\zeta_{ij}} \cos^2 \chi_i \dot{\theta}^2 \right) + J_r^{G\xi_{ij}} \left(2 \sin \chi_i \dot{\theta} \dot{\phi} + \dot{\phi}^2 \right), \quad (2.26)$$

где $J_r^{G\xi_{ij}}$, $J_r^{G\eta_{ij}}$, $J_r^{G\zeta_{ij}}$ — главные моменты инерции ролика относительно его центра масс. Заметим, что первые два слагаемых (2.26) — кинетическая энергия ролика, которую он имел бы в том случае, если бы являлся частью абсолютно твёрдой системы, объединяющей основание колеса и этот ролики. Таким образом, для i -го колеса кинетическая энергия (2.23) имеет вид

$$2T_{w_i}^{\text{kn}g} = (m_w \mathbf{v}_{A_i}, \mathbf{v}_{A_i}) + J_{w_i}^{A_i z} \dot{\theta}^2 + \lambda^2 \dot{\chi}_i^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_r^2 \left(2 \sin \chi_i \dot{\theta} \dot{\phi}_{ij} + \dot{\phi}_{ij}^2 \right), \quad (2.27)$$

где $\lambda_r^2 = J_r^{G\xi_{ij}}$ — момент инерции ролика относительно оси его собственного вращения. (Поскольку ролики считаются одинаковыми, величина не зависит от индексов i, j .)

Рассмотрим величину Λ^2 — момент инерции всего экипажа относительно вертикали Sz , проходящей через центр масс системы. С учётом геометрии экипажа и формулы Гюйгенса–Штейнера имеют место следующие выражения:

$$\Lambda^2 \dot{\theta}^2 = J_{\text{base}}^{Sz} \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^3 \left(m_w \left| \overrightarrow{SA_i} \right|^2 + J_{w_i}^{A_i z} \right) \dot{\theta}^2 = J_{\text{base}}^{Sz} \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^3 \left((m_w \mathbf{v}_{A_i}, \mathbf{v}_{A_i}) + J_{w_i}^{A_i z} \dot{\theta}^2 \right), \quad (2.28)$$

С учётом выражения для момента инерции (2.28), компоненты кинетической энергии (2.22), (2.27) можно сгруппировать в искомую форму (2.20):

$$2T = m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Lambda^2 \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^3 \lambda^2 \dot{\chi}_i^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=n}^3 \lambda_r^2 \left(2 \sin \chi_i \dot{\theta} \dot{\phi}_{ij} + \dot{\phi}_{ij}^2 \right).$$

С точностью до обозначений результат совпадает с результатом работы К.В. Герасимова и А.А. Зобовой [42]. ■

Замечание 2.1. Покажем, что Λ не является функцией χ_2 .

Рассмотрим конфигурацию колеса при $\chi_2 = 0$ и $\chi_2 = \frac{\pi}{n}$ (рис. 2.4). Из материальной симметрии ясно, что в эти моменты оси $A_i \mathbf{o}_i \mathbf{n}_i z$ будут являться главными осями инерции для колеса, а матрица тензора инерции будет иметь диагональный вид, причём с одними и теми же компонентами. Отсюда следует, что эллипсоид инерции колеса в точке A_i – эллипсоид вращения относительно оси $A_i \mathbf{n}_i$, и любые две перпендикулярные ей оси из плоскости $A_i \mathbf{o}_i z$, составляющие в совокупности с $A_i \mathbf{n}_i$ правую тройку, будут являться главными. В том числе, главными будут являться оси $A_i \mathbf{n}_i \mathbf{o}_i z$ для любого χ_i . Значит, $\Lambda^2 = \text{const}$. \square

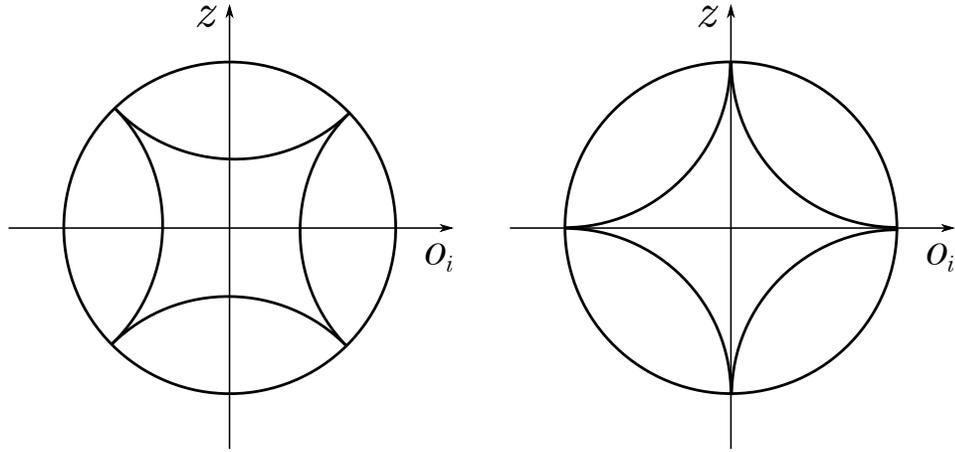


Рис. 2.4: Главные оси инерции модели омни-колеса с учётом инерционных свойств роликов

Замечание 2.2. Покажем, что имеет место неравенство $\Lambda^2 > \lambda_r^2$.

Из рис. 2.4 также видно, что всегда имеет место выражение

$$J_{w_i}^{A_i z} = \lambda_r^2 + m_r r^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + J_{w-1r}^{A_i z},$$

где $J_{w-1r}^{A_i z}$ – момент инерции колеса без учёта одного ролика относительно вертикали $A_i z$ в ситуации, когда ось вращения удалённого ролика параллельна $A_i z$. Таким образом, имеет место неравенство $J_{w-1r}^{A_i z} > \lambda_r^2$, а с учётом выражения (2.28) всегда имеет место и неравенство вида $\Lambda^2 > \lambda_r^2$. \square

В случае экипажа с параллельными колёсами с массивным опорным роликом переднего колеса кинетическая энергия (2.20) имеет вид

$$2T = m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Lambda^2 \dot{\theta}^2 + \lambda^2 (\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2 + \dot{\chi}_3^2) + \lambda_r^2 (2 \sin \chi_2 \dot{\theta} \dot{\phi} + \dot{\phi}^2). \quad (2.29)$$

С учётом связей (2.18), (2.19) и определения псевдоскоростей (1.16)–(1.18), кинетическая энергия экипажа с параллельными колёсами с учётом массивности опорного ролика переднего колеса (2.20) имеет вид

$$2T^\bullet = \boldsymbol{\nu}^T (\mathfrak{A} + \lambda_r^2 \mathfrak{E}) \boldsymbol{\nu}, \quad (2.30)$$

$$\text{где } \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2(\chi_2) & \frac{\rho(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda} \\ 0 & \frac{\rho(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для системы имеет место $L = T$, $L^\bullet = T^\bullet$.

Далее для получения уравнений движения выпишем комбинацию импульсов (1.14):

$$P_1 \nu_1 + P_2 \nu_2 + P_3 \nu_3 = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_\theta \dot{\theta} + p_{\chi_1} \dot{\chi}_1 + p_{\chi_2} \dot{\chi}_2 + p_{\chi_3} \dot{\chi}_3 + p_\phi \dot{\phi}. \quad (2.31)$$

Подставив уравнения связей (2.18)–(2.19) в комбинацию (2.31), получим выражения для P_k :

$$\begin{aligned} P_1 &= p_x \cos \theta + p_y \sin \theta - \frac{p_{\chi_2}}{r}, \\ P_2 &= -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \frac{p_{\chi_1} - p_{\chi_3}}{r} + p_\phi \rho(\chi_2), \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda r} (\delta_{||} p_{\chi_1} + (\delta_2 - \Delta) p_{\chi_2} + \delta_{||} p_{\chi_3} + r p_\theta). \end{aligned}$$

Далее вычислим скобки Пуассона $\{P_k, L^\bullet\}$ и $\{P_k, P_j\}$:

$$\{P_1, L^\bullet\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_2}} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \chi_2} = \frac{\lambda_r^2}{\Lambda r} (\Lambda \rho(\chi_2) \rho'(\chi_2) \nu_2 + \rho(\chi_2) \cos \chi_2 \nu_3 + \rho'(\chi_2) \sin \chi_2 \nu_3) \nu_2, \quad (2.32)$$

$$\{P_2, L^\bullet\} = 0, \quad (2.33)$$

$$\{P_3, L^\bullet\} = -\frac{\partial P_3}{\partial p_{\chi_2}} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \chi_2} = -\frac{\lambda_r^2}{\Lambda r} \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda} (\Lambda \rho(\chi_2) \rho'(\chi_2) \nu_2 + \rho(\chi_2) \cos \chi_2 \nu_3 + \rho'(\chi_2) \sin \chi_2 \nu_3) \nu_2, \quad (2.34)$$

$$\{P_1, P_2\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_2}} \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} = -\frac{1}{r} \rho'(\chi_2) p_\phi, \quad (2.35)$$

$$\{P_1, P_3\} = \frac{\partial P_1}{\partial \theta} \frac{\partial P_3}{\partial p_\theta} = \frac{-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta}{\Lambda}, \quad (2.36)$$

$$\{P_2, P_3\} = \frac{\partial P_2}{\partial \theta} \frac{\partial P_3}{\partial p_\theta} + \frac{\partial P_2}{\partial \chi_2} \frac{\partial P_3}{\partial p_{\chi_2}} = -\frac{p_x \cos \theta + p_y \sin \theta}{\Lambda} + \frac{1}{r} \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda} \rho'(\chi_2) p_\phi, \quad (2.37)$$

где $\rho'(\chi_2) = \frac{d\rho(\chi_2)}{d\chi_2}$.

Выражения для формальных импульсов имеют вид

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = m(\nu_1 \cos \theta - \nu_2 \sin \theta), \quad (2.38)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = m(\nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta), \quad (2.39)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \lambda_r^2 (\dot{\phi} + \sin \chi_2 \dot{\theta}) = \frac{\lambda_r^2}{\Lambda} (\Lambda \rho(\chi_2) \nu_2 + \sin \chi_2 \nu_3), \quad (2.40)$$

Подставив формальные импульсы (2.38)–(2.40) в скобки Пуассона (2.35)–(2.37), получим окончательный вид выражений

$$\{P_1, P_2\} = -\frac{\lambda_r^2}{\Lambda r} (\Lambda \rho(\chi_2) \rho'(\chi_2) \nu_2 + \rho'(\chi_2) \sin \chi_2 \nu_3), \quad (2.41)$$

$$\{P_1, P_3\} = \frac{m}{\Lambda} \nu_2, \quad (2.42)$$

$$\{P_2, P_3\} = -\frac{m}{\Lambda} \nu_1 + \frac{\lambda_r^2}{\Lambda r} \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda} (\Lambda \rho(\chi_2) \rho'(\chi_2) \nu_2 + \rho'(\chi_2) \sin \chi_2 \nu_3). \quad (2.43)$$

Далее вычислим производные лагранжиана L^\bullet :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_1} = \mathbf{a}_1^\Delta \dot{\nu}_1 - \kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_2} &= \mathbf{a}_2^\Delta \dot{\nu}_2 + \frac{\lambda_r^2}{\Lambda r} (\Lambda r \rho^2(\chi_2) \dot{\nu}_2 + r \rho(\chi_2) \sin \chi_2 \dot{\nu}_3) + \\ &+ \frac{\lambda_r^2}{\Lambda r} (2\Lambda \rho(\chi_2) \rho'(\chi_2) \nu_2 + \rho(\chi_2) \cos \chi_2 \nu_3 + \rho'(\chi_2) \sin \chi_2 \nu_3) \left(-\nu_1 + \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda} \nu_3 \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^\bullet}{\partial \nu_3} &= -\kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_1 + \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 + \frac{\lambda_r^2}{\Lambda r} r \rho(\chi_2) \sin \chi_2 \dot{\nu}_2 + \\ &+ \frac{\lambda_r^2}{\Lambda r} (\rho(\chi_2) \cos \chi_2 \nu_3 + \rho'(\chi_2) \sin \chi_2 \nu_3) \left(-\nu_1 + \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda} \nu_3 \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

где

$$\mathbf{a}_1^\Delta = m + \lambda^2 \frac{1}{r^2}, \quad \mathbf{a}_2^\Delta = m + \lambda^2 \frac{2}{r^2}, \quad \mathbf{a}_3^\Delta = 1 + \lambda^2 \frac{2\delta_{||}^2 + (\delta_2 - \Delta)^2}{\Lambda^2 r^2}, \quad \kappa = \frac{\lambda^2}{\mathbf{a}_3^\Delta} \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda r^2}$$

— те же коэффициенты кинетической энергии, что и в безынерционной модели (2.4).

Наконец, из скобок Пуассона (2.32)–(2.34), (2.41)–(2.43) и производных (2.44)–(2.46) сформируем уравнения движения по инерции омни-экипажа с параллельными колёсами с учётом инерционных свойств опорного ролика переднего колеса в форме лаконичных уравнений Я.В. Татаринова (1.13):

$$\mathbf{a}_1^\Delta \dot{\nu}_1 - \kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 = \left(\frac{m}{\Lambda} - \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \cos \chi_2}{\Lambda r} \right) \nu_2 \nu_3, \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2^\Delta \dot{\nu}_2 + \lambda_r^2 \rho^2(\chi_2) \dot{\nu}_2 + \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda} \dot{\nu}_3 = & - \left(\frac{m}{\Lambda} - \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \cos \chi_2}{\Lambda r} \right) \nu_1 \nu_3 + \\ & + \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \rho'(\chi_2)}{r} \nu_1 \nu_2 - \lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho(\chi_2) \rho'(\chi_2)}{\Lambda r} \nu_2 \nu_3 - \\ & - \lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho(\chi_2) \cos \chi_2}{\Lambda^2 r} \nu_3^2, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} -\kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_1 + \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 + \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda} \dot{\nu}_2 = & \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \cos \chi_2 + \rho'(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda r} \nu_1 \nu_2 - \\ & - \lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho'(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda^2 r} \nu_2 \nu_3. \end{aligned} \quad (2.49)$$

При $\lambda_r = 0$ уравнения движения (2.47)–(2.49) совпадают с уравнениями движения безынерционной модели (2.1)–(2.3).

2.4 Стационарные движения омни-экипажа с параллельными колёсами с учётом инерционных свойств опорного ролика переднего колеса

Уравнения движения (2.47)–(2.49), (2.18), (2.19) допускают решения вида

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \nu_2^0 \neq 0, \quad \nu_3 = 0, \quad \chi_2 = \chi_2^0 \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right). \quad (2.50)$$

Поскольку коэффициенты уравнений движения относительно псевдокоростей зависят только от угла поворота переднего колеса χ_2 , далее вместо полной системы уравнений, состоящей из уравнений динамики (2.47)–(2.49) и всех уравнений связей (2.18)–(2.19) будем рассматривать замкнутую систему из уравнений динамики (2.47)–(2.49) и одного уравнения связи на $\dot{\chi}_2$ из системы (2.18).

Утверждение 2.2. *Прямолинейные движения вида (2.50) неустойчивы по переменным $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \chi_2$ при $\nu_2^0 > 0$. При $\nu_2^0 < 0$ такие движения устойчивы, причём всякое возмущённое движение, достаточно близкое к невозмущённому, стремится с неограниченным возрастанием времени к одному из установившихся движений этого вида.*

Для начала докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0$ — матрицы с компонентами нулевого порядка малости, O_1 и O_2 — матрицы с членами минимум первого и второго порядка малости соответственно. Пусть матрица \mathfrak{A}_0 обратима. Тогда линейная система*

$$(\mathfrak{A}_0 + O_1) \mathbf{x} = \mathfrak{B}_0 + O_2$$

равносильна системе

$$\mathfrak{A}_0 \mathbf{x} = \mathfrak{B}_0 + O_1.$$

Доказательство. Имеем $(\mathfrak{A}_0 + O_1) = (E + O_1) \mathfrak{A}_0$, где E — единичная матрица. Покажем, что

$$(E + O_1)^{-1} - E + O_1 = O_2.$$

Домножим это выражение справа на $(E + O_1)$ — матрицу, содержащую компоненты нулевой степени малости. Очевидно, $O_2(E + O_1) = O_2$. Левая часть с учётом дистрибутивности по сложению примет вид

$$\begin{aligned} ((E + O_1)^{-1} - E + O_1) (E + O_1) &= (E + O_1)^{-1} (E + O_1) - (E - O_1) (E + O_1) = \\ &= E - EE - O_1E + EO_1 + O_1O_1 = O_1O_1 = O_2. \end{aligned}$$

Далее домножим исходную систему слева на $(E + O_1)^{-1}$. В правой части имеем

$$(E - O_1) (\mathfrak{B}_0 + O_2) = \mathfrak{B}_0 + O_1,$$

что и требовалось доказать. ■

Теперь докажем основное утверждение 2.2.

Доказательство. Воспользуемся линеаризованной системой для анализа устойчивости прямолинейного движения (2.50).

Рассмотрим возмущённое движение

$$\nu_1 = \vartheta\nu_1, \quad \text{где } |\vartheta\nu_1| \ll |\nu_2^0|, \quad (2.51)$$

$$\nu_2 = \nu_2^0 + \vartheta\nu_2, \quad \text{где } |\vartheta\nu_2| \ll |\nu_2^0|, \quad (2.52)$$

$$\nu_3 = \vartheta\nu_3, \quad \text{где } |\vartheta\nu_3| \ll \Lambda\delta_{||} |\nu_2^0|, \quad (2.53)$$

$$\chi_2 = \chi_2^0 + \vartheta\chi_2, \quad \text{где } |\vartheta\chi_2| \ll 1. \quad (2.54)$$

Уравнения динамики (2.47)–(2.49) и уравнение связи на $\dot{\chi}_2$ из (2.18) на возмущённом движении (2.51)–(2.54) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^\Delta \frac{d(\vartheta\nu_1)}{dt} - \kappa\mathbf{a}_3^\Delta \frac{d(\vartheta\nu_3)}{dt} &= \left(\frac{m}{\Lambda} - \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0}{\Lambda r} \right) \nu_2^0 \vartheta\nu_3 + O_2, \\ \mathbf{a}_2^\Delta \frac{d(\vartheta\nu_2)}{dt} + \lambda_r^2 \rho^2(\chi_2^0) \frac{d(\vartheta\nu_2)}{dt} + \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \sin \chi_2^0 + \rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0 \vartheta\chi_2 + \rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0 \vartheta\chi_2}{\Lambda} \frac{d(\vartheta\nu_3)}{dt} &= \\ &= \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \rho'(\chi_2^0)}{r} \nu_2^0 \vartheta\nu_1 - \lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho(\chi_2^0) \rho'(\chi_2^0)}{\Lambda r} \nu_2^0 \vartheta\nu_3 + O_2, \\ -\kappa\mathbf{a}_3^\Delta \frac{d(\vartheta\nu_1)}{dt} + \mathbf{a}_3^\Delta \frac{d(\vartheta\nu_3)}{dt} + \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \sin \chi_2^0 + \rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0 \vartheta\chi_2 + \rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0 \vartheta\chi_2}{\Lambda} \frac{d(\vartheta\nu_2)}{dt} &= \\ &= \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0 + \rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0}{\Lambda r} \nu_2^0 \vartheta\nu_1 - \lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0}{\Lambda^2 r} \nu_2^0 \vartheta\nu_3 + O_2, \\ \frac{d(\vartheta\chi_2)}{dt} &= \frac{-\Lambda\vartheta\nu_1 + (\delta_2 - \Delta) \vartheta\nu_3}{r\Lambda}, \end{aligned}$$

где $O_2 = O_2(\vartheta\nu_1, \vartheta\nu_2, \vartheta\nu_3, \vartheta\chi_2)$ – функции второго порядка малости по ϑ –переменным. Запишем систему в матричном виде:

$$(\mathfrak{A}_0^l + \mathfrak{A}_1^l \vartheta\chi_2) \frac{d\vartheta\mathbf{q}}{dt} = \mathfrak{B}_0^l \vartheta\mathbf{q} + O_2, \quad (2.55)$$

где

$$\mathfrak{A}_0^l = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^\Delta & 0 & -\kappa\mathbf{a}_3^\Delta & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_2^\Delta + \rho^2(\chi_2^0) & \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \sin \chi_2^0}{\Lambda} & 0 \\ -\kappa\mathbf{a}_3^\Delta & \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \sin \chi_2^0}{\Lambda} & \mathbf{a}_3^\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}_1^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r^2 \frac{\rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0 + \rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0}{\Lambda} & 0 \\ 0 & \lambda_r^2 \frac{\rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0 + \rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0}{\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{B}_0^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{m}{\Lambda} - \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0}{\Lambda r} \right) \nu_2^0 & 0 \\ \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \rho'(\chi_2^0)}{r} \nu_2^0 & 0 & -\lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho(\chi_2^0) \rho'(\chi_2^0)}{\Lambda r} \nu_2^0 & 0 \\ \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0 + \rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0}{\Lambda r} \nu_2^0 & 0 & -\lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0}{\Lambda^2 r} \nu_2^0 & 0 \\ -\frac{1}{r} & 0 & \frac{\delta_2 - \Delta}{r} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vartheta \mathbf{q} = \left(\vartheta \nu_1 \quad \vartheta \nu_2 \quad \vartheta \nu_3 \quad \vartheta \chi_2 \right)^T.$$

Верхний индекс \square^l обозначает связь величин с линеаризованной формой уравнений движения омни-экипажа с параллельными колёсами, учитывающих инерционные свойства опорного ролика переднего колеса.

С учётом леммы 2.1 линеаризованная система уравнений движения (2.55) имеет вид

$$\mathfrak{A}_0^l \frac{d\vartheta \mathbf{q}}{dt} = \mathfrak{B}_0^l \vartheta \mathbf{q}. \quad (2.56)$$

Исследуем собственные значения системы (2.56) из уравнения $\det(\mathfrak{B}^l - \varkappa \mathfrak{A}_0^l) = 0$ с учётом определений (1.58):

$$\varkappa^2 (\mathbf{c}_2^\varkappa \varkappa^2 + \mathbf{c}_1^\varkappa \varkappa + \mathbf{c}_0^\varkappa) = 0, \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2^\varkappa &= \det \mathfrak{A}_0^l = \left(m + \lambda^2 \frac{1}{r^2} \right) \left(m + \lambda^2 \frac{2}{r^2} + \lambda_r^2 \rho(\chi_2^0)^2 \left(1 - \lambda_r^2 \frac{\sin^2 \chi_2^0}{\Lambda^2} \right) \right) + \\ &+ \left(m + \lambda^2 \frac{2}{r^2} + \lambda_r^2 \rho(\chi_2^0)^2 \right) \left(m \lambda^2 \frac{2\delta_{||}^2 + (\delta_2 - \Delta)^2}{\Lambda^2 r^2} + \lambda^4 \frac{2\delta_{||}^2}{\Lambda^2 r^4} \right) \\ \mathbf{c}_1^\varkappa &= -m \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda^2 r} \left(\lambda^2 \left(\mathbf{a}_2^\Delta + \lambda_r^2 \rho(\chi_2^0)^2 \right) - \lambda_r^2 \mathbf{a}_2^\Delta r \rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2 \right) \nu_2^0, \\ \mathbf{c}_0^\varkappa &= - \left(\frac{m}{\Lambda} - \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0}{\Lambda r} \right) \left(\mathbf{a}_2^\Delta \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2^0) \cos \chi_2^0 + \rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0}{\Lambda r} + \lambda_r^4 \frac{\rho^3(\chi_2^0) \cos \chi_2^0}{\Lambda r} \right) (\nu_2^0)^2 \end{aligned}$$

Верхний индекс \square^\varkappa обозначает связь величин с собственными значениями линеаризованной

СИСТЕМЫ.

Так как всегда имеет место $\Lambda^2 > \lambda_r^2$ (см. замечание 2.2), коэффициент \mathbf{c}_2^z положителен на любом движении. С учётом определения (2.19), для всех допустимых $\chi_2^0 \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right)$ имеем

$$\rho(\chi_2^0) < 0, \quad \cos \chi_2^0 > 0.$$

Кроме того, имеет место следующее неравенство:

$$\rho'(\chi_2^0) \sin \chi_2^0 = \frac{-\sin^2 \chi_2^0}{r \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \chi_2^0\right)^2} \leq 0.$$

Таким образом, коэффициент \mathbf{c}_0^z также положителен на любом движении: первый множитель всегда положителен, второй всегда отрицателен. Наконец, с учётом тех же свойств $\rho(\chi_2^0)$, знак коэффициента \mathbf{c}_1^z противоположен знаку ν_2^0 .

Согласно критерию Гурвица (см., например, [95] §8), существует корень характеристического многочлена (2.57) с положительной действительной частью при $\nu_2^0 > 0$, и такое движение является неустойчивым. При $\nu_2^0 < 0$ наблюдается критический случай двух нулевых корней, причём остальные корни имеют отрицательную действительную часть, а семейство решений (2.50) двухпараметрическое. Согласно теореме Ляпунова (см., например, [96], §34), такое движение устойчиво по переменным $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \chi_2$, причём всякое возмущённое движение, достаточно близкое к невозмущённому, стремится с неограниченным возрастанием времени к одному из установившихся движений этого вида. ■

В безынерционной модели $\lambda_r = 0$ семейству (2.50) соответствуют решения вида (2.7):

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \nu_2^0 \neq 0, \quad \nu_3 = 0,$$

устойчивые также при $\nu_2^0 < 0$ (см. параграф 2.2, рис. 2.2). Следовательно, на условие устойчивости добавление инерции ролика не повлияло. Однако в безынерционной модели существуют также прямолинейные движения вида

$$\nu_1 = \nu_1^0 \neq 0, \quad \nu_2 = \nu_2^0 \neq 0, \quad \nu_3 = 0,$$

такие, что скорость центра масс S экипажа составляет некоторый ненулевой угол с осью симметрии, и именно таким будет в общем случае финальное движение экипажа в безынерционной модели омни-колеса при возмущении устойчивого прямолинейного движения. Таким образом, учет инерционных свойств ролика ведет к качественным отличиям в финальных прямолинейных движениях экипажа.

Проиллюстрируем результат численным моделированием. В рамках моделирования для интегрирования дифференциальных уравнений (2.47)–(2.49), (1.16)–(1.18) был реализован метод Рунге-Кутты 8 порядка с коэффициентами Дормана-Принса с автоматическим выбором шага интегрирования на основе [97], для создания графиков использовались библиотеки Qt [98] и QCustomPlot [99]. Для моделирования экипажа используем параметры, описанные в таб. 2.1. Выбор параметров основан на реальных моделях [1, 100] и численном моделировании в работах [55, 66, 70]. Исходный код программы находится в открытом доступе (см. [23], директория *rollers-inertia-steady*).

Параметр	Значение	Единицы измерения	Параметр	Значение	Единицы измерения
$\delta_{ }$	0.10	м	m	3	кг
δ_2	0.15	м	Λ^2	$5 \cdot 10^{-2}$	кг · м ²
Δ	0.05	м	λ^2	$5 \cdot 10^{-4}$	кг · м ²
r	0.05	м	n	4	

Таблица 2.1: Параметры численного моделирования омни-экипажа с параллельными колёсами

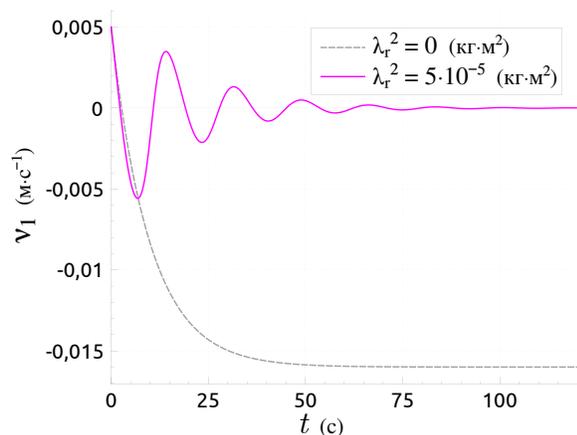
Рассмотрим возмущённое движение с начальными условиями таб. 2.2.

Параметр	Значение	Единицы измерения	Параметр	Значение
$\nu_1(0)$	$5 \cdot 10^{-3}$	м · с ⁻¹	$\theta(0)$	0
$\nu_2(0)$	$-3 \cdot 10^{-1}$	м · с ⁻¹	$\chi_1(0)$	0
$\nu_3(0)$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	кг ^{1/2} · м · с ⁻¹	$\chi_2(0)$	0
$x(0)$	0	м	$\chi_3(0)$	0
$y(0)$	0	м	$\phi(0)$	0

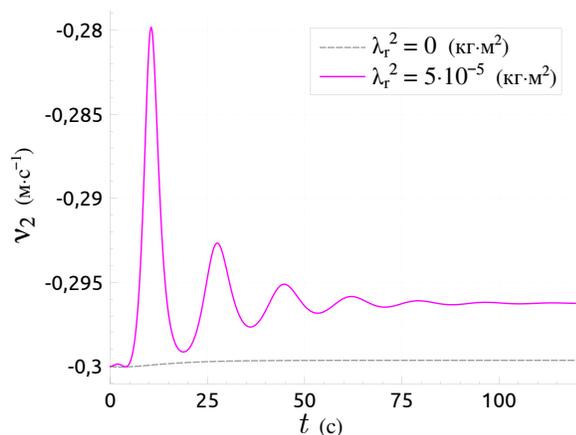
Таблица 2.2: Начальные условия возмущённого движения

На рис. 2.5 показаны зависимости ν_1 , ν_2 , ν_3 , θ , χ_2 и траектории центра масс S . Пурпурной сплошной линией показаны графики для системы, учитывающей массу опорного ролика перед-

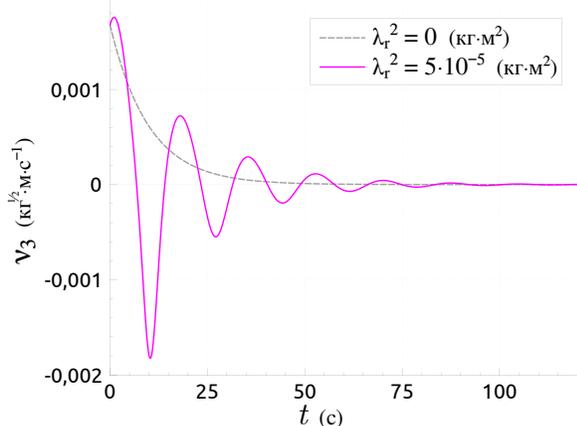
него колеса ($\lambda_r^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$), серой пунктирной — для безынерционной модели ($\lambda_r^2 = 0 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$). На рис. 2.5d, где изображены траектории центра масс, схематично (без соблюдения масштаба) показана ориентация экипажа в конце движения. Численный эксперимент подтверждает результаты аналитического исследования. Движение модели, учитывающей инерционные свойства опорного ролика переднего колеса, асимптотически стремится к прямолинейному движению вида $\nu_1 = 0$ и такому положению колеса, что центр опорного ролика располагается строго над точкой контакта с плоскостью. Движение модели, не учитывающей инерционные свойства опорного ролика переднего колеса, стремится к прямолинейному движению вида $\nu_1 \neq 0$, при котором скорость центра масс не параллельна оси симметрии и переднее колесо вращается вокруг своей оси.



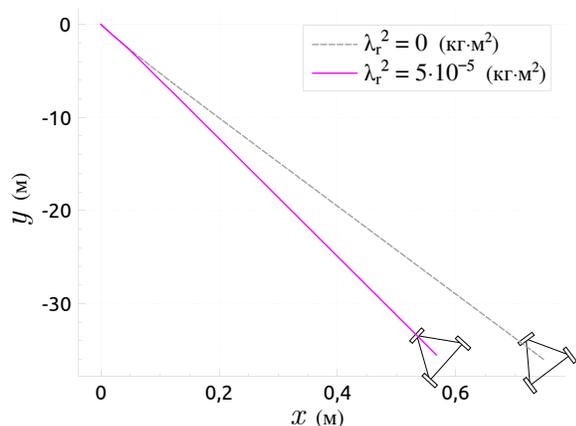
(a) Псевдоскорость ν_1



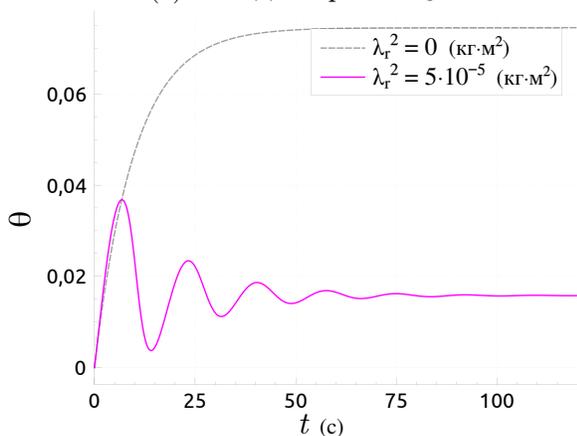
(b) Псевдоскорость ν_2



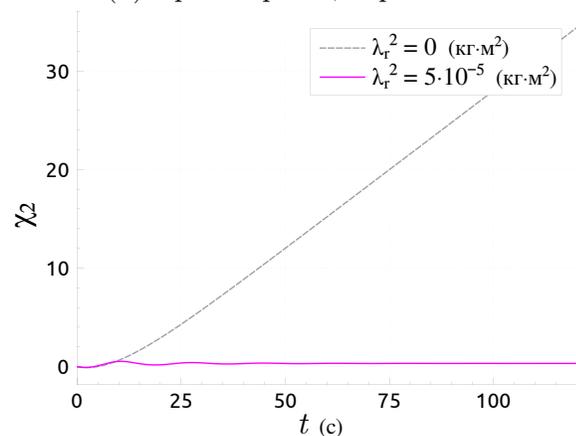
(c) Псевдоскорость ν_3



(d) Траектория центра масс



(e) Угол курса θ



(f) Угол поворота переднего колеса χ_2

Рис. 2.5: Сравнение моделей на возмущённом движении
(Сплошная пурпурная линия соответствует модели экипажа с учётом инерционных свойств опорного ролика переднего колеса. Серая пунктирная линия соответствует модели экипажа без учёта инерционных свойств роликов колёс.)

2.5 Приложение. Уравнения управляемого движения омни-экипажа с учётом вязкого трения в осях опорных роликов колёс

Покажем, что задачу исследования динамики экипажа с вязким трением в осях роликов колёс в некоторых случаях можно свести к задаче исследования динамики экипажа, описанного в параграфе 1.2.

Рассмотрим модель, аналогичную общей модели из параграфа 1.2, дополнительно учитывающую вязкое трение в осях опорных роликов колёс. (При этом мы не будем учитывать инерционные свойства роликов.) В этом случае кроме управляющих моментов (1.15) на i -ое колесо будет действовать момент трения [54]:

$$\mathbf{M}_i^{\text{frr}} = -\mu_{\text{r}} \dot{\phi}_i \mathbf{e}_{\xi_i}, \quad (2.58)$$

где $\mu_{\text{r}} > 0$ — коэффициент вязкого трения в оси опорного ролика, $\dot{\phi}_i \mathbf{e}_{\xi_i}$ — угловая скорость опорного ролика относительно i -го колеса.

Элементарная работа моментов трения (2.58) имеет вид

$$\delta A^{\text{frr}} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{M}_i^{\text{frr}} \cdot \delta \phi_i \mathbf{e}_{\xi_i}.$$

С учётом уравнений связей (2.16) обобщённые силы, соответствующие углам ϕ_i , имеют вид

$$\mathbf{Q}_{\phi} = -\mu_{\text{r}} \hat{\Xi}(\boldsymbol{\chi}) \boldsymbol{\nu},$$

а уравнения движения записываются следующим образом:

$$\mathfrak{A} \dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{m}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \Xi^T \mathbf{U} - c_2 \Xi^T \Xi \boldsymbol{\nu} - \mu_{\text{r}} \hat{\Xi}(\boldsymbol{\chi})^T \hat{\Xi}(\boldsymbol{\chi}) \boldsymbol{\nu}. \quad (2.59)$$

В частности, в случае симметричного экипажа (см. параграф 1.4) произведения матриц связей в уравнениях движения (2.59) имеют вид

$$\Xi^T \Xi = \begin{pmatrix} \frac{3}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\delta^2}{l^2 r^2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Xi}^T \hat{\Xi} = \begin{pmatrix} \frac{3\rho(\chi_1)^2 + 3\rho(\chi_3)^2}{4} & \frac{-\sqrt{3}\rho(\chi_1)^2 + \sqrt{3}\rho(\chi_3)^2}{4} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}\rho(\chi_1)^2 + \sqrt{3}\rho(\chi_3)^2}{4} & \frac{\rho(\chi_1)^2 + 4\rho(\chi_2)^2 + \rho(\chi_3)^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что третий столбец $\hat{\Xi}^T \hat{\Xi}$ состоит из нулей и слагаемое $\hat{\Xi}^T \hat{\Xi} \boldsymbol{\nu}$ в уравнениях динамики (2.59) не зависит от ν_3 . Это связано с тем, что в симметричном экипаже “чистое” вращение платформы ($\nu_1(t) \equiv 0, \nu_2(t) \equiv 0$) производится только посредством поворота колёс без вращения роликов ($\dot{\phi}_i(t) \equiv 0, i = 1, 2, 3$).

Рассмотрим более детальную модель омни-колеса (рис. 2.6а). Пусть ролики располагаются на ободе колеса в два ряда, по $n \geq 3$ роликов в каждом ряду. Ролики усечены так, что функция $\rho(\chi_i)$, ранее определённая в (2.17), имеет вид

$$\rho(\chi_i) = -\frac{1}{r(\cos(\text{mod } \chi_i) - \cos \pi\tau)}, \quad (2.60)$$

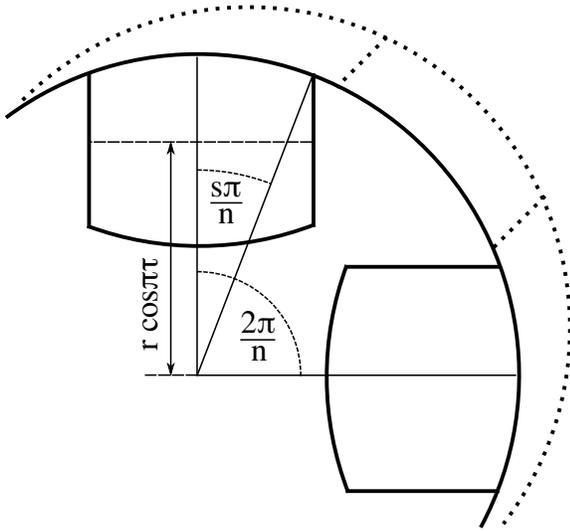
где $\text{mod } \chi_i = \chi_i + \frac{\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\text{mod } \chi_i \in \left[-\frac{s\pi}{n}, \frac{s\pi}{n}\right]$,

параметр $\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ определяет радиус роликов, параметр $s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ определяет усечение роликов. (При $s > 1$ соседние ролики одного слоя накладываются друг на друга. При $s < \frac{1}{2}$ на колесе существуют секции, в которых ни один из роликов не соприкасается с опорной плоскостью.) В этой модели мы всё ещё пренебрегаем смещением точки контакта относительно центра колеса во время движения.

В случае, когда роликов достаточно много, относительная разница между наибольшим и наименьшим расстоянием составляет

$$\frac{r(1 - \cos \pi\tau) - r\left(\cos \frac{s\pi}{n} - \cos \pi\tau\right)}{r} = 1 - \cos \frac{s\pi}{n} = \frac{\pi^2 s^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

и изменением расстояния от оси роликов до точки касания с плоскостью при повороте колеса



(a) Обозначения



(b) Реальная модель [101]

Рис. 2.6: Моделирование усечённых роликов

в (2.60) можно пренебречь. В частности, для колеса рис. 2.6b, за параметры которого возьмём

$$n = 9, \quad \tau = \frac{1}{6}, \quad s = \frac{1}{2},$$

относительная разница составляет $\approx 1.52\%$.

В этом случае уравнения динамики симметричного экипажа примут ту же форму, что и уравнения динамики безынерционной управляемой модели (1.43):

$$\mathbf{a}_1^\odot \dot{\nu}_1 = \frac{m}{\Lambda} \nu_2 \nu_3 - \frac{3}{2} \left(\frac{c_2}{r^2} + \mu_r \rho^2 \right) \nu_1 + \frac{c_1}{2r} (U_1 - 2U_2 + U_3), \quad (2.61)$$

$$\mathbf{a}_2^\odot \dot{\nu}_2 = -\frac{m}{\Lambda} \nu_1 \nu_3 - \frac{3}{2} \left(\frac{c_2}{r^2} + \mu_r \rho^2 \right) \nu_2 + \frac{\sqrt{3}c_1}{2r} (U_1 - U_3), \quad (2.62)$$

$$\mathbf{a}_3^\odot \dot{\nu}_3 = -\frac{3c_2 \delta^2}{\Lambda^2 r^2} \nu_3 + \frac{c_1 \delta}{\Lambda r} (U_1 + U_2 + U_3), \quad (2.63)$$

и мы получим результат, схожий с результатом приложения 1.6: задачу исследования динамики симметричного экипажа с вязким трением в осях роликов можно свести к задаче исследования динамики экипажа без учёта трения корректировкой коэффициента сопротивления c_2 в уравнениях относительно ν_1 и ν_2 .

Замечание 2.3. В случае модели усечённых роликов (2.60) функции $\rho(\chi_i)$ из уравнений связи (2.16) на любых движениях являются ограниченными. Учёт инерционных свойств роликов приводит к структуре динамических уравнений вида

$$(m\mathfrak{A}_{0m} + \Lambda^2\mathfrak{A}_{0\Lambda} + \lambda^2\mathfrak{A}_{0\lambda} + \lambda_r^2\mathfrak{A}_1) \begin{pmatrix} \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \\ \frac{\dot{\nu}_3}{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \frac{\nu_3}{\Lambda} \end{pmatrix} (m\mathfrak{B}_{0m} + \Lambda^2\mathfrak{B}_{0\Lambda} + \lambda^2\mathfrak{B}_{0\lambda} + \lambda_r^2\mathfrak{B}_1) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \end{pmatrix},$$

где λ_r^2 — момент инерции ролика относительно оси его собственного вращения; m и Λ^2 соответственно масса всего экипажа (включая ролики) и его момент инерции относительно вертикали, проходящей через центр масс; λ^2 — момент инерции колеса (включая ролики) относительно его оси вращения. В частном случае это показано в уравнениях (2.47)–(2.49), в общем случае продемонстрировано в диссертациях К.В. Герасимова [45] и А.А. Зобовой [46]. Элементы входящих в уравнение матриц $\mathfrak{A}_{0\Box}$ и $\mathfrak{B}_{0\Box}$ постоянны и зависят от геометрии экипажа; элементы матриц \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{B}_1 дополнительно зависят от углов поворота колес (при этом для усечённой модели ролика все такие зависимости являются ограниченными функциями). Таким образом, на конечных движениях на гладких участках, где не происходит переключений с ролика на ролик, по сравнению с основными членами при коэффициентах \mathfrak{A}_{0m} , $\mathfrak{A}_{0\Lambda}$, \mathfrak{B}_{0m} , $\mathfrak{B}_{0\Lambda}$, за порядок которых возьмём $O(1)$, дополнительные члены, связанные с учётом инерционных свойств роликов, имеют первый порядок малости $O\left(\frac{\lambda_r^2}{\Lambda^2}\right)$.

При переключении роликов за счёт сил трения происходит выравнивание скорости вращения входящего в контакт ролика со скоростями экипажа, так что через довольно короткий промежуток времени дифференциальные связи (2.8) оказываются выполнены [43, 45, 46]. Этот процесс может быть описан как абсолютно неупругий удар. Согласно результатам диссертации [46], потеря кинетической энергии при ударе также пропорциональна произведению коэффициентов первого порядка малости $O\left(\frac{\lambda_r^2}{\Lambda^2}\right)$ на приращения угловой скорости ролика $\vartheta\dot{\phi}_i$, которые зависят только от скорости центра масс экипажа, угловой скорости платформы и геометрии ролика.

Учёт инерционных свойств роликов колёс для трёхколёсного экипажа в постановке без проскальзывания приводит к системе с $3n$ степенями свободы, где n — число роликов одного колеса [45]. Моделирование движения такого экипажа состоит из решения задачи Коши для уравнений динамики, пока в контакте находится один и тот же ролик, и решения линейных ал-

гебраических уравнений при смене ролика для получения начальных условий для следующего гладкого участка. Аналитическое исследование свойств подобной системы и построение её программных движений является крайне затруднительной задачей. При этом, если движение рассматривается на конечных интервалах времени, с точностью до $O\left(\frac{\lambda_r^2}{\Lambda^2}\right)$ учётом инерционных свойств роликов можно пренебречь. Поэтому в следующих главах диссертации при построении программных управляемых движений на конечных интервалах времени и мгновенных оценках нормальных реакций будет использоваться безынерционная модель омни-колеса.

Глава 3. Управляемые движения омни-экипажа вида разгон-торможение

3.1 Постановка краевой задачи

3.1.1 Задача управления омни-экипажем произвольной конфигурации

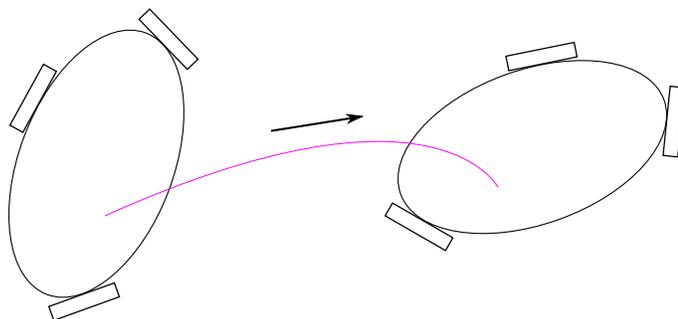


Рис. 3.1: Задача управления

Рассматривается управляемое движение трёхколёсного омни-экипажа по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Колёса моделируются без учёта инерционных свойств роликов (см. главу 1 и замечание 2.3).

Ставится следующая задача: необходимо найти такое управление, чтобы за наперёд заданное время T экипаж из произвольного начального положения при произвольных начальных скоростях переместился в наперёд заданное положение, имея в конце интервала наперёд заданные скорости (рис. 3.1). Более строго, необходимо найти управляющие напряжения $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ на интервале $[0, T]$ такие, что решение уравнений движения (1.16)–(1.18), (1.44) для начальных условий

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad \theta(0) = \theta^0, \quad \nu_1(0) = \nu_1^0, \quad \nu_2(0) = \nu_2^0, \quad \nu_3(0) = \nu_3^0$$

Данная глава посвящена решению задачи управления омни-экипажем. При подготовке данной главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [18, 19, 22, 26].

имеет на конце интервала наперёд заданные значения

$$x(T) = x^T, \quad y(T) = y^T, \quad \theta(T) = \theta^T, \quad \nu_1(T) = \nu_1^T, \quad \nu_2(T) = \nu_2^T, \quad \nu_3(T) = \nu_3^T.$$

В этой главе мы будем искать аналитическое решение задачи управления для симметричной конфигурации экипажа, которое будет использовано в качестве начального приближения для численного решения задачи управления экипажем произвольной конфигурации на примере экипажа с параллельными колёсами. Демонстрируемый подход может быть использован для численного решения задач управления других моделей омни-экипажей: экипажей, движущихся по плоскости с сухим трением Кулона или экипажей, учитывающих инерционные свойства роликов колёс (см. главу 2).

3.1.2 Задача управления симметричным омни-экипажем

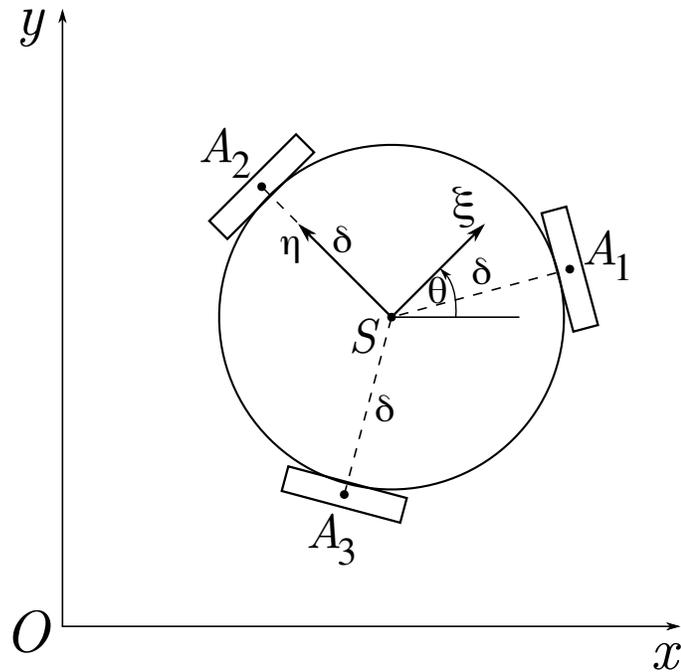


Рис. 3.2: Симметричный омни-экипаж

Рассмотрим управляемое движение модели симметричного омни-экипажа, не учитывающей инерционные свойства роликов колёс (рис. 3.2, см. параграф 1.4). Уравнения движения

ИМЕЮТ ВИД

$$\mathbf{a}^\odot \dot{\nu}_1 = \frac{m}{\Lambda} \nu_2 \nu_3 - \frac{3c_2}{2r^2} \nu_1 + \frac{c_1}{2r} (U_1 - 2U_2 + U_3), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{a}^\odot \dot{\nu}_2 = -\frac{m}{\Lambda} \nu_1 \nu_3 - \frac{3c_2}{2r^2} \nu_2 + \frac{\sqrt{3}c_1}{2r} (U_1 - U_3), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a}_3^\odot \dot{\nu}_3 = -\frac{3c_2\delta^2}{\Lambda^2 r^2} \nu_3 + \frac{c_1\delta}{\Lambda r} (U_1 + U_2 + U_3), \quad (3.3)$$

$$\text{где } \mathbf{a}^\odot = m + \frac{3\lambda^2}{2r^2}, \quad \mathbf{a}_3^\odot = 1 + \frac{3\delta^2\lambda^2}{\Lambda^2 r^2}.$$

Для линейных комбинаций управляющих напряжений U_i , входящих в правые части уравнений (3.1)–(3.3), введём новые обозначения W_i :

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \frac{c_1}{r} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\odot & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^\odot & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_3^\odot \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\delta}{\Lambda} & \frac{\delta}{\Lambda} & \frac{\delta}{\Lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Тогда уравнения (3.1)–(3.3) принимают вид:

$$\dot{\nu}_1 = \mathbf{b}^\odot \nu_2 \nu_3 - \mathbf{c}^\odot \nu_1 + W_1, \quad (3.5)$$

$$\dot{\nu}_2 = -\mathbf{b}^\odot \nu_1 \nu_3 - \mathbf{c}^\odot \nu_2 + W_2, \quad (3.6)$$

$$\dot{\nu}_3 = -\mathbf{c}_3^\odot \nu_3 + W_3, \quad (3.7)$$

$$\text{где } \mathbf{b}^\odot = \frac{m}{\mathbf{a}^\odot \Lambda}, \quad \mathbf{c}^\odot = \frac{3c_2}{2\mathbf{a}^\odot r^2}, \quad \mathbf{c}_3^\odot = \frac{3c_2\delta^2}{\mathbf{a}_3^\odot \Lambda^2 r^2}, \quad (3.8)$$

Ставится задача из пункта 3.1.1. Необходимо найти функции $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$ (или, что равносильно, $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$) на интервале $[0, T]$ для наперёд заданного T такие, что решение уравнений (1.16)–(1.18), (3.5)–(3.7) для начальных условий

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad \theta(0) = \theta^0, \quad \nu_1(0) = \nu_1^0, \quad \nu_2(0) = \nu_2^0, \quad \nu_3(0) = \nu_3^0$$

имеет на конце интервала наперёд заданные значения

$$x(T) = x^T, \quad y(T) = y^T, \quad \theta(T) = \theta^T, \quad \nu_1(T) = \nu_1^T, \quad \nu_2(T) = \nu_2^T, \quad \nu_3(T) = \nu_3^T.$$

Наиболее простым типом управления являются постоянные значения W_1, W_2, W_3 . Однако в общем случае невозможно решить поставленную задачу с помощью таких управлений. Мы будем решать эту задачу с помощью кусочно–постоянного управления с одним переключением. Для построения программного управления сначала рассмотрим динамику симметричного омни–экипажа при постоянных управляющих напряжениях.

3.2 Движение симметричного омни–экипажа с постоянным управлением

Найдем общее решение уравнений (3.5)–(3.7) на отрезке $t \in [t_1, t_2]$, предполагая управления постоянными:

$$W_i \equiv \text{const}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

(или, что эквивалентно, $U_i \equiv \text{const}$).

Третье уравнение системы (3.7) отделяется и имеет решение

$$\nu_3(t) = D_3 e^{-c_3^\odot t} + \frac{W_3}{c_3^\odot} \quad (3.9)$$

для некоторой константы интегрирования D_3 .

С учётом решения (3.9) первые два уравнения движения (3.5)–(3.6) примут вид

$$\dot{\nu}_1 = \mathbf{b}^\odot \left(D_3 e^{-c_3^\odot t} + \frac{W_3}{c_3^\odot} \right) \nu_2 - c^\odot \nu_1 + W_1, \quad (3.10)$$

$$\dot{\nu}_2 = -\mathbf{b}^\odot \left(D_3 e^{-c_3^\odot t} + \frac{W_3}{c_3^\odot} \right) \nu_1 - c^\odot \nu_2 + W_2. \quad (3.11)$$

Введём следующие комплексные переменные:

$$\nu_{1.2} = \nu_1 + I\nu_2, \quad W_{1.2} = W_1 + IW_2, \quad (3.12)$$

где I — комплексная единица.

С учётом определений (3.12) два уравнения движения (3.10)–(3.11) можно записать в виде

одного комплексного уравнения

$$\dot{\nu}_{1.2} = - \left(\mathbf{c}^\ominus - I \mathbf{b}^\ominus \left(D_3 e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t} + \frac{W_3}{\mathbf{c}_3^\ominus} \right) \right) \nu_{1.2} + W_{1.2}. \quad (3.13)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (3.13), получим методом разделения переменных. Оно имеет вид

$$\nu_{1.2}(t) = C e^{-\psi(t_1, t)}, \quad \psi(t_1, t) = (t - t_1) \mathbf{c}^\ominus - I \frac{\mathbf{b}^\ominus \left((t - t_1) W_3 - \left(e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t} - e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t_1} \right) D_3 \right)}{\mathbf{c}_3^\ominus}, \quad (3.14)$$

где t_1 — начальный момент времени. Отметим, что здесь и далее дополнительный произвольный параметр t_1 введён для удобства сшивания решений при дальнейшем решении задачи, и фактически общее решение содержит только две независимых вещественных произвольных постоянных.

Общее решение неоднородного уравнения (3.13) найдём методом варьирования произвольной постоянной. Использование метода приводит к следующему уравнению:

$$\dot{C}(t) = W_{1.2} e^{\psi(t_1, t)},$$

из которого непосредственным интегрированием получается вид $\dot{C}(t)$. Таким образом, решение дифференциального уравнения (3.13) имеет вид

$$\nu_{1.2}(t) = \left(W_{1.2} \int_{t_1}^t e^{\psi(t_1, \tau)} d\tau + D_{1.2} \right) e^{-\psi(t_1, t)}, \quad (3.15)$$

где $D_{1.2} = D_1 + I D_2 = \text{const}$ — константа интегрирования, функция $\psi(t_1, t)$ определена в (3.14).

Интегрируемость уравнений управляемого движения симметричной модели омни-экипажа при постоянных напряжениях в осях электромоторов впервые показана в работе Ю.Г. Мартыненко и А.М. Формальского [31].

Далее для угла курса по определению псевдоскорости (1.18) имеем

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}.$$

Интегрируя это уравнение с учётом решения уравнения движения (3.9), получим закон изменения угла курса:

$$\theta(t) = \frac{tW_3 - D_3 e^{-\mathfrak{c}_3^\odot t}}{\mathfrak{c}_3^\odot \Lambda} + D_6 \quad (3.16)$$

для некоторой константы интегрирования D_6 .

Введём комплексную переменную для координат центра масс S :

$$\Upsilon = x + Iy. \quad (3.17)$$

С учётом определения (3.17), выражения для псевдоскоростей (1.16)–(1.17) можно записать в комплексном виде

$$\dot{\Upsilon} = \nu_{1.2}(t)e^{I\theta(t)},$$

решением которого будет функция

$$\Upsilon(t) = \int_{t_1}^t e^{-\psi(t_1, \tau) + I\theta(\tau)} \left(W_{1.2} \int_{t_1}^{\tau} e^{\psi(t_1, s)} ds + D_{1.2} \right) d\tau + D_{4.5}, \quad (3.18)$$

где $D_{4.5} = D_4 + ID_5 = \text{const}$ — константа интегрирования, функция $\psi(t_1, t)$ определена в (3.14).

Таким образом, последовательно интегрируя уравнения системы, мы получили явные законы движения в квадратурах (3.9), (3.15), (3.16), (3.18) при некоторых вещественных константах D_j ($j = 1, \dots, 6$), однозначно определяемых начальными условиями на координаты центра масс, угол курса и псевдоскорости или же начальными условиями на координаты центра масс, угол курса и их производные. (Между $\dot{x}(t_1)$, $\dot{y}(t_1)$, $\dot{\theta}(t_1)$ и $\nu_1(t_1)$, $\nu_2(t_1)$, $\nu_3(t_1)$ при известном $\theta(t_1)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие по формулам (1.16)–(1.18).)

3.3 Решение краевой задачи для симметричного омни-экипажа

Рассмотрим движение с кусочно-постоянным управлением на заданном отрезке $[0, T]$ и единственным переключением в заданный момент времени $t_{\text{sw}} \in (0, T)$ для заданных начальных

условий

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad \theta(0) = \theta^0, \quad \nu_1(0) = \nu_1^0, \quad \nu_2(0) = \nu_2^0, \quad \nu_3(0) = \nu_3^0$$

и заданных условий в конце интервала

$$x(T) = x^T, \quad y(T) = y^T, \quad \theta(T) = \theta^T, \quad \nu_1(T) = \nu_1^T, \quad \nu_2(T) = \nu_2^T, \quad \nu_3(T) = \nu_3^T.$$

Моменты времени t_{sw} , T считаем зафиксированными. Будем обозначать верхними индексами \square^- и \square^+ величины соответственно до переключения (этап “разгона”) и после переключения (этап “торможения”).

Для начала найдём константы $D_3^-, D_3^+, W_3^-, W_3^+, D_6^-, D_6^+$. Выписав решения уравнений движения для псевдоскорости ν_3 (3.9) и угла курса θ (3.16) в концах полуинтервалов с постоянным управлением, с учётом краевых условий и условий склейки получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \nu_3(0) &= D_3^- + W_3^- \mathbf{c}_3^\ominus = \nu_3^0, \\ \nu_3(t_{sw}) &= D_3^- e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t_{sw}} + \frac{W_3^-}{\mathbf{c}_3^\ominus}, \\ \nu_3(t_{sw}) &= D_3^+ e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t_{sw}} + \frac{W_3^+}{\mathbf{c}_3^\ominus}, \\ \nu_3(T) &= D_3^+ e^{-\mathbf{c}_3^\ominus T} + \frac{W_3^+}{\mathbf{c}_3^\ominus} = \nu_3^T, \\ \theta(0) &= \frac{-D_3^-}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} + D_6^- = \theta^0, \\ \theta(t_{sw}) &= \frac{t_{sw} W_3^- - D_3^- e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t_{sw}}}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} + D_6^-, \\ \theta(t_{sw}) &= \frac{t_{sw} W_3^+ - D_3^+ e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t_{sw}}}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} + D_6^+, \\ \theta(T) &= \frac{TW_3^+ - D_3^+ e^{-\mathbf{c}_3^\ominus T}}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} + D_6^+ = \theta^T. \end{aligned}$$

Они формируют линейную относительно $D_3^-, D_3^+, W_3^-, W_3^+, D_6^-, D_6^+$ систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\mathfrak{c}_3^\ominus} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-\mathfrak{c}_3^\ominus t_{sw}} & -e^{-\mathfrak{c}_3^\ominus t_{sw}} & \frac{1}{\mathfrak{c}_3^\ominus} & -\frac{1}{\mathfrak{c}_3^\ominus} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mathfrak{c}_3^\ominus T} & 0 & \frac{1}{\mathfrak{c}_3^\ominus} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mathfrak{c}_3^\ominus \Lambda} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{e^{-\mathfrak{c}_3^\ominus t_{sw}}}{\mathfrak{c}_3^\ominus \Lambda} & \frac{e^{-\mathfrak{c}_3^\ominus t_{sw}}}{\mathfrak{c}_3^\ominus \Lambda} & \frac{t_{sw}}{\mathfrak{c}_3^\ominus \Lambda} & -\frac{t_{sw}}{\mathfrak{c}_3^\ominus \Lambda} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{e^{-\mathfrak{c}_3^\ominus T}}{\mathfrak{c}_3^\ominus \Lambda} & 0 & \frac{T}{\mathfrak{c}_3^\ominus \Lambda} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_3^- \\ D_3^+ \\ W_3^- \\ W_3^+ \\ D_6^- \\ D_6^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_3^0 \\ 0 \\ \nu_3^T \\ \theta^0 \\ 0 \\ \theta^T \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Утверждение 3.1. *Линейная система (3.19) имеет единственное решение при фиксированных параметрах $T > 0$, $t_{sw} \in (0, T)$.*

Доказательство. Определитель матрицы системы (3.19) равен

$$\frac{e^{-(T+t_{sw})\mathfrak{c}_3^\ominus} f(t_{sw})}{(\mathfrak{c}_3^\ominus)^6 \Lambda^3}, \quad \text{где } f(t_{sw}) = (-T + T e^{t_{sw}\mathfrak{c}_3^\ominus} + t_{sw} - t_{sw} e^{T\mathfrak{c}_3^\ominus}).$$

Исследуем гладкую функцию $f(t_{sw})$ на $t_{sw} \in [0, T]$. В концах отрезка $t_{sw} = 0$, $t_{sw} = T$ она равна нулю. Её производная

$$\frac{df(t_{sw})}{dt_{sw}} = \mathfrak{c}_3^\ominus T e^{t_{sw}\mathfrak{c}_3^\ominus} + 1 - e^{T\mathfrak{c}_3^\ominus}$$

строго монотонно растёт, значит, функция $f(t_{sw})$ строго выпукла вверх, и поэтому она не имеет других корней кроме корней в границах отрезка. Таким образом, при всех допустимых $t_{sw} \in (0, T)$ определитель матрицы не равен нулю. Тогда ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной системы и максимален, и она имеет единственное решение при фиксированных параметрах $T > 0$, $t_{sw} \in (0, T)$. \blacksquare

Аналогичным образом выпишем значения в концах отрезков постоянного управления для псевдоскоростей ν_1, ν_2 (3.15) и координат центра масс системы x, y (3.18) с учётом краевых условий

$$\nu_{1.2}^0 = \nu_1^0 + I\nu_2^0, \quad \nu_{1.2}^T = \nu_1^T + I\nu_2^T, \quad \Upsilon^0 = x^0 + Iy^0, \quad \Upsilon^T = x^T + Iy^T$$

и условий склейки:

$$\begin{aligned}
\nu_{1.2}(0) &= D_{1.2}^- = \nu_{1.2}^0, \\
\nu_{1.2}(t_{\text{sw}}) &= W_{1.2}^- e^{-\psi(0,t_{\text{sw}})} \int_0^{t_{\text{sw}}} e^{\psi(0,\tau)} d\tau + D_{1.2}^- e^{-\psi(0,t_{\text{sw}})}, \\
\nu_{1.2}(t_{\text{sw}}) &= D_{1.2}^+, \\
\nu_{1.2}(T) &= W_{1.2}^+ e^{-\psi(t_{\text{sw}},T)} \int_{t_{\text{sw}}}^T e^{\psi(t_{\text{sw}},\tau)} d\tau + D_{1.2}^+ e^{-\psi(t_{\text{sw}},T)} = \nu_{1.2}^T, \\
\Upsilon(0) &= D_{4.5}^- = \Upsilon^0, \\
\Upsilon(t_{\text{sw}}) &= \int_0^{t_{\text{sw}}} e^{-\psi(0,\tau)+I\theta(\tau)} \left(W_{1.2}^- \int_0^\tau e^{\psi(0,s)} ds + D_{1.2}^- \right) d\tau + D_{4.5}^-, \\
\Upsilon(t_{\text{sw}}) &= D_{4.5}^+, \\
\Upsilon(T) &= \int_{t_{\text{sw}}}^T e^{-\psi(t_{\text{sw}},\tau)+I\theta(\tau)} \left(W_{1.2}^+ \int_{t_{\text{sw}}}^\tau e^{\psi(t_{\text{sw}},s)} ds + D_{1.2}^+ \right) d\tau + D_{4.5}^+ = \Upsilon^T.
\end{aligned}$$

Из этих выражений мы сразу получаем явные выражения для D_j^- ($j = 1, 2, 4, 5$) и систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \Phi(0, t_{\text{sw}}) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \Phi(t_{\text{sw}}, T) & e^{-\psi(t_{\text{sw}}, T)} & 0 \\ \Gamma(0, t_{\text{sw}}) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \Gamma(t_{\text{sw}}, T) & \Psi(t_{\text{sw}}, T) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{1.2}^- \\ W_{1.2}^+ \\ D_{1.2}^+ \\ D_{4.5}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_{1.2}^0 e^{-\psi(0,t_{\text{sw}})} \\ \nu_{1.2}^T \\ -\nu_{1.2}^0 \Psi(0, t_{\text{sw}}) \\ \Upsilon^T \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\psi(t_1,\tau)+I\theta(\tau)} \left(\int_{t_1}^\tau e^{\psi(t_1,s)} ds \right) d\tau, \\
\Psi(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\psi(t_1,\tau)+I\theta(\tau)} d\tau, \\
\Phi(t_1, t_2) &= e^{-\psi(t_1,t_2)} \int_{t_1}^{t_2} e^{\psi(t_1,\tau)} d\tau.
\end{aligned}$$

Систему (3.20), состоящую из четырёх комплексных уравнений, можно также представить в виде системы из восьми линейных вещественных уравнений с неизвестными $W_1^-, W_2^-, W_1^+, W_2^+, D_1^+, D_2^+, D_4^+, D_5^+$.

К сожалению, исследование существования и единственности решения системы (3.20) из-за сложного устройства коэффициентов типа $\Gamma(\cdot, \cdot)$, $\Psi(\cdot, \cdot)$, $\Phi(\cdot, \cdot)$ является нетривиальной задачей. При этом все попытки численного решения системы уравнений при различных параметрах завершались успешно.

На рис. 3.3 определитель левой части системы (3.20) представлен как функция времени переключения t_{sw} для краевой задачи, заданной в таблице 3.2, на интервале $[0, 10]$ (в секундах). Видно, что определитель отличен от нуля в области допустимых значений $t_{sw} \in (0, T)$. Для моделирования экипажа используем параметры, описанные в таб. 3.1. Выбор параметров основан на реальных моделях [1, 100, 102] и численном моделировании в работах [55, 66, 70].)

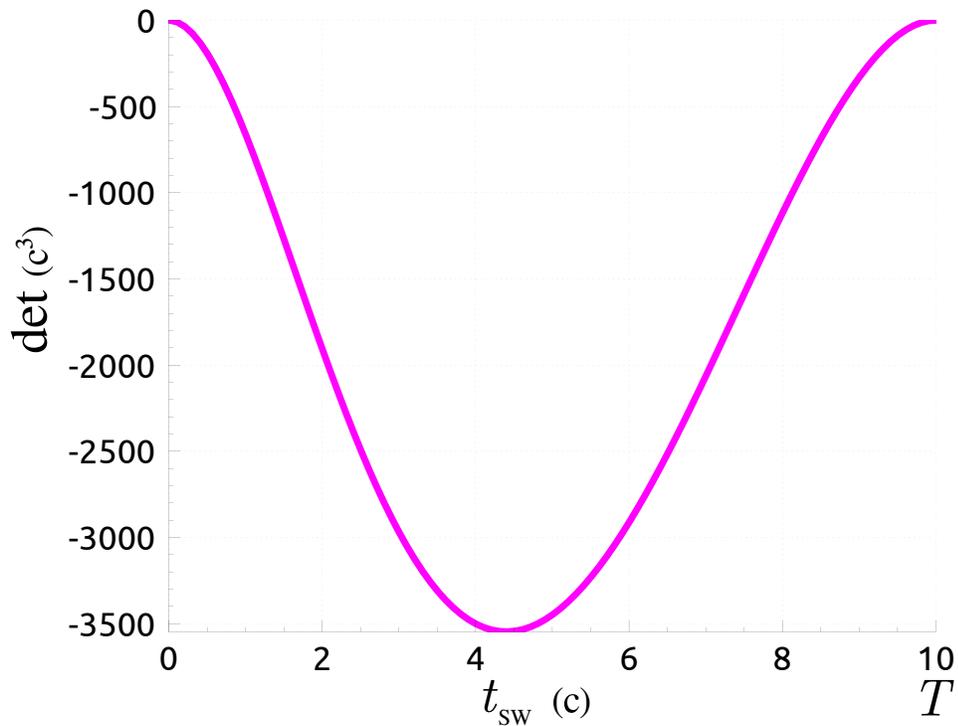


Рис. 3.3: Определитель левой части системы уравнений (3.20) для поиска управлений

Параметр	Значение	Единицы измерения
δ	0.10	м
r	0.05	м
Λ^2	$5 \cdot 10^{-2}$	кг · м ²
λ^2	$5 \cdot 10^{-4}$	кг · м ²

Параметр	Значение	Единицы измерения
m	3	кг
c_1	10^{-2}	кг · м ² · с ⁻² · В ⁻¹
c_2	$2.5 \cdot 10^{-4}$	кг · м ² · с ⁻¹

Таблица 3.1: Параметры численного моделирования симметричного омни-экипажа

Параметр	Значение	Единицы измерения	Параметр	Значение	Единицы измерения
$\nu_1(0)$	0	м · с ⁻¹	$\nu_1(T)$	0	м · с ⁻¹
$\nu_2(0)$	0	м · с ⁻¹	$\nu_2(T)$	0.2	м · с ⁻¹
$\nu_3(0)$	0.02	кг ^{1/2} · м · с ⁻¹	$\nu_3(T)$	0	кг ^{1/2} · м · с ⁻¹
$x(0)$	0	м	$x(T)$	1	м
$y(0)$	0	м	$y(T)$	-1.5	м
$\theta(0)$	0		$\theta(T)$	4	

Таблица 3.2: Краевые условия задачи управления

Таким образом, задача управления из параграфа 3.1 была сведена к задаче последовательного решения двух систем линейных алгебраических уравнений при заданном в качестве параметра времени переключения t_{sw} .

3.4 Исследование свойств управляемых движений симметричного омни-экипажа

Многие из пунктов этого параграфа будут в той или иной степени посвящены вопросам оптимизации движения с использованием кусочно-постоянного управления с одним переключением. Введём функционал расхода энергии:

$$\mathcal{E} = \int_0^T ((U_1)^2 + (U_2)^2 + (U_3)^2) dt. \quad (3.21)$$

Он характеризует энергетические затраты на построенном управляемом движении.

Для рассматриваемого класса задач функционал расхода (3.21) имеет вид

$$\mathcal{E} = t_{sw} \left((U_1^-)^2 + (U_2^-)^2 + (U_3^-)^2 \right) + (T - t_{sw}) \left((U_1^+)^2 + (U_2^+)^2 + (U_3^+)^2 \right).$$

В рамках моделирования для интегрирования дифференциальных уравнений был реализован метод Рунге-Кутты 8 порядка с коэффициентами Дормана-Принса с автоматическим выбором шага интегрирования на основе [97], для решения систем линейных уравнений и матричных операций использовались методы библиотеки GSL [103]. Для создания графиков использовались библиотеки Qt [98] и QCustomPlot [99], для создания карт интенсивности — библиотека

seaborn [104]. Для моделирования экипажа используем параметры, описанные в таб. 3.1.

3.4.1 Вращение на месте

Для начала сформулируем несколько фактов, которые имеют место для некоторых классов краевых задач.

Утверждение 3.2. *При движении из состояния $\nu_3^0 = 0$ в состояние $\nu_3^T = 0$ с помощью кусочно–постоянного управления с одним переключением угол курса $\theta(t)$ либо тождественно равен нулю (в случае $\theta^T = \theta^0$), либо строго монотонен на всём времени движения (в случае $\theta^T \neq \theta^0$).*

Доказательство. Из решения (3.9) следует, что $\nu_3(t)$ строго монотонна либо постоянна на полуинтервалах постоянного управления $[0, t_{sw})$ и $(t_{sw}, T]$. С учётом краевых условий $\nu_3(0) = 0$ и $\nu_3(T) = 0$ функция $\nu_3(t)$ либо тождественно равна нулю на $[0, T]$, либо строго возрастает (строго убывает) на $[0, t_{sw})$ и строго убывает (строго возрастает) на $(t_{sw}, T]$; при этом $\nu_3(t)$ не меняет знака на $[0, T]$. По определению (1.18) функция $\theta(t)$ на всём интервале движения либо строго монотонна, либо равна нулю. ■

Следствие 3.1. *Движение, которое происходит из состояния $\nu_3^0 = 0$, $\theta^0 = \theta^0$ в состояние $\nu_3^T = 0$, $\theta^T = \theta^0$ с помощью кусочно–постоянного управления с одним переключением, соответствует поступательному движению платформы экипажа.*

Рассмотрим пример тривиального движения: поворот экипажа вокруг вертикали на фиксированный угол из одного состояния покоя в другое (центр масс системы остаётся на месте). Соответствующие краевые условия записываются следующим образом:

$$\nu_i^0 = \nu_i^T = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad x^0 = x^T, \quad y^0 = y^T, \quad \theta^T \neq \theta^0. \quad (3.22)$$

Решая систему линейных уравнений (3.19) для краевых условий (3.22), получим управле-

ния

$$W_3^- = \frac{e^{c_3^\circ t_{sw}} - e^{c_3^\circ T}}{t_{sw} - t_{sw} e^{c_3^\circ T} - T + T e^{c_3^\circ t_{sw}}} c_3^\circ \Lambda (\theta^T - \theta^0),$$

$$W_3^+ = \frac{e^{c_3^\circ t_{sw}} - 1}{t_{sw} - t_{sw} e^{c_3^\circ T} - T + T e^{c_3^\circ t_{sw}}} c_3^\circ \Lambda (\theta^T - \theta^0).$$

Напомним, что из доказательства утверждения 3.1 следует, что знаменатели не обращаются в ноль. Управления $W_{1,2}^\pm = 0$ удовлетворяют системе (3.20) при требуемых краевых условиях (3.22). При этом

$$\nu_1 \equiv 0, \quad \nu_2 \equiv 0, \quad x \equiv x^0, \quad y \equiv y^0,$$

то есть центр масс неподвижен.

Рассмотрим задачу оптимизации в смысле минимизации функционала расхода (3.21). В качестве параметра выберем время переключения t_{sw} .

В случае вращения на месте напряжения на осях колёс одинаковы:

$$U_i^\pm = \frac{\Lambda^2 r^2 + 3\delta^2 \lambda^2}{3c_1 \Lambda \delta r} W_3^\pm \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.23)$$

Тогда, с учётом определения коэффициентов (3.8), имеем

$$\mathcal{E}(t_{sw}, T) = \frac{3c_2^2 \delta^2}{c_1^2 r^2} (\theta^T - \theta^0)^2 \varepsilon_{c_3^\circ}(t_{sw}, T),$$

$$\text{где } \varepsilon_{c_3^\circ}(t_{sw}, T) = \frac{\left(e^{c_3^\circ t_{sw}} - e^{c_3^\circ T} \right)^2 t_{sw} + \left(e^{c_3^\circ t_{sw}} - 1 \right)^2 (T - t_{sw})}{\left(t_{sw} - t_{sw} e^{c_3^\circ T} - T + T e^{c_3^\circ t_{sw}} \right)^2}. \quad (3.24)$$

Численно проанализируем функцию $\varepsilon_{c_3^\circ}(t_{sw}, T)$ для $T = 1$ с как функцию t_{sw} (рис. 3.4).

Функция достигает минимума в точке $t_{sw} = 0.504464$ с. Таким образом, для поворота на месте оптимальный по расходу энергии момент переключения оказывается близок к середине временного отрезка, но из-за влияния противоЭДС сдвинут к правому концу.

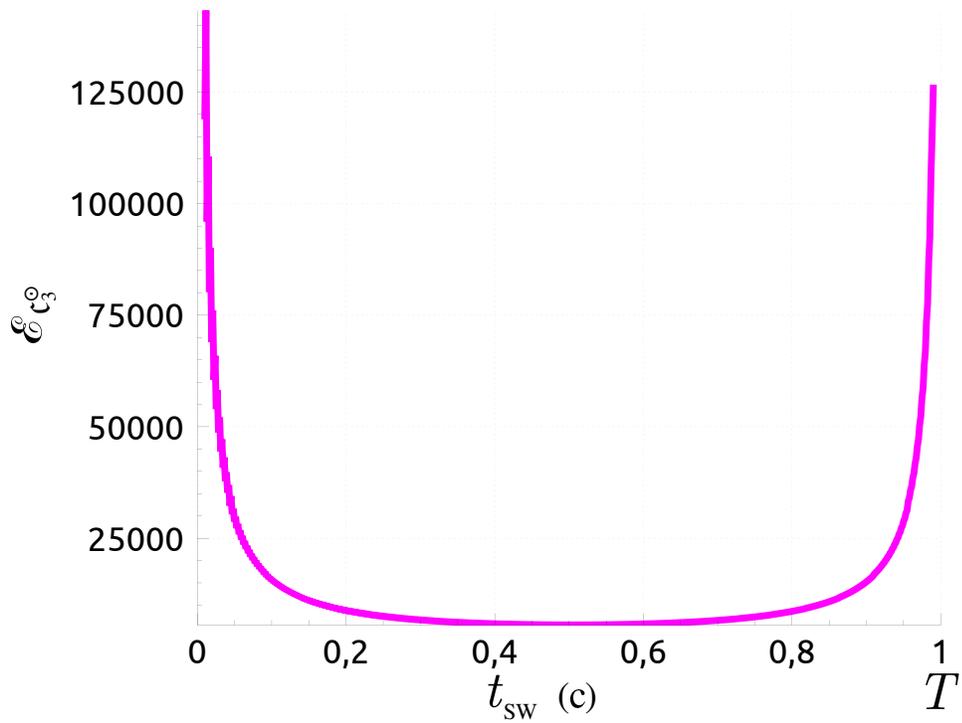


Рис. 3.4: Функция расхода энергии $\varepsilon_{c_3^0}(t_{sw}, 1)$

3.4.2 Поступательное движение

Рассмотрим теперь перемещение экипажа из одной точки в другую без осуществления поворота. Докажем, что в этом случае центр масс движется по прямой, а платформа движется поступательно.

Утверждение 3.3. *Траектория центра масс при движении из состояния покоя экипажа $\nu_i^0 = 0$ ($i = 1, 2, 3$) в состояние покоя $\nu_i^T = 0$ ($i = 1, 2, 3$) без поворота ($\theta^T = \theta^0$) с помощью кусочно-постоянного управления с одним переключением является отрезком прямой или вырождается в точку при $x^T = x^0$, $y^T = y^0$. Платформа при этом движется поступательно.*

Доказательство. Напомним, что, согласно утверждению 3.2, из условий $\nu_3^0 = \nu_3^T = 0$, $\theta^T = \theta^0$ следует $\nu_3(t) \equiv 0$, $\theta(t) \equiv \theta^0$ на интервале движения $t \in [0, T]$, откуда следует, что платформа экипажа движется поступательно.

Тогда уравнения (3.5)–(3.6), (1.16)–(1.17) примут вид

$$\dot{\nu}_1 = -\mathbf{c}^\ominus \nu_1 + W_1, \quad (3.25)$$

$$\dot{\nu}_2 = -\mathbf{c}^\ominus \nu_2 + W_2, \quad (3.26)$$

$$\dot{x} = \nu_1, \quad (3.27)$$

$$\dot{y} = \nu_2. \quad (3.28)$$

Проинтегрировав группу уравнений (3.25)–(3.26) на полуинтервалах постоянного управления с учётом краевых условий, получим

$$\nu_{1,2}(t) = \begin{cases} \frac{W_{1,2}^-}{\mathbf{c}^\ominus} \left(1 - e^{-\mathbf{c}^\ominus t}\right), & t \in [0, t_{\text{sw}}], \\ \frac{W_{1,2}^+}{\mathbf{c}^\ominus} \left(1 - e^{-\mathbf{c}^\ominus (t-T)}\right), & t \in [t_{\text{sw}}, T]. \end{cases}$$

Из условий склейки в момент t_{sw} имеем

$$W_{1,2}^- \left(1 - e^{-\mathbf{c}^\ominus t_{\text{sw}}}\right) = W_{1,2}^+ \left(1 - e^{-\mathbf{c}^\ominus (t_{\text{sw}}-T)}\right). \quad (3.29)$$

Далее, проинтегрировав группу уравнений (3.27)–(3.28) для заданных краевых условий x^0 , y^0 , x^T , y^T , получим

$$x(t) = \begin{cases} \frac{W_1^-}{\mathbf{c}^\ominus} \left(t + \frac{e^{-\mathbf{c}^\ominus t} - 1}{\mathbf{c}^\ominus}\right) + x^0, & t \in [0, t_{\text{sw}}], \\ \frac{W_1^+}{\mathbf{c}^\ominus} \left(t - T + \frac{e^{-\mathbf{c}^\ominus (t-T)} - 1}{\mathbf{c}^\ominus}\right) + x^T, & t \in [t_{\text{sw}}, T]; \end{cases} \quad (3.30)$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{W_2^-}{\mathbf{c}^\ominus} \left(t + \frac{e^{-\mathbf{c}^\ominus t} - 1}{\mathbf{c}^\ominus}\right) + y^0, & t \in [0, t_{\text{sw}}], \\ \frac{W_2^+}{\mathbf{c}^\ominus} \left(t - T + \frac{e^{-\mathbf{c}^\ominus (t-T)} - 1}{\mathbf{c}^\ominus}\right) + y^T, & t \in [t_{\text{sw}}, T]. \end{cases} \quad (3.31)$$

Из условий склейки в момент t_{sw} также получаем

$$W_1^- \left(t_{\text{sw}} + \frac{e^{-c^\ominus t_{\text{sw}}} - 1}{c^\ominus} \right) + c^\ominus x^0 = W_1^+ \left(t_{\text{sw}} - T + \frac{e^{-c^\ominus(t_{\text{sw}}-T)} - 1}{c^\ominus} \right) + c^\ominus x^T, \quad (3.32)$$

$$W_2^- \left(t_{\text{sw}} + \frac{e^{-c^\ominus t_{\text{sw}}} - 1}{c^\ominus} \right) + c^\ominus y^0 = W_2^+ \left(t_{\text{sw}} - T + \frac{e^{-c^\ominus(t_{\text{sw}}-T)} - 1}{c^\ominus} \right) + c^\ominus y^T. \quad (3.33)$$

Окончательно, решив систему линейных уравнений (3.29)–(3.33), получаем управления

$$W_1^- = \frac{c^\ominus (e^{c^\ominus t_{\text{sw}}} - e^{c^\ominus T})}{t_{\text{sw}} - t_{\text{sw}} e^{c^\ominus T} - T + T e^{c^\ominus t_{\text{sw}}}} (x^T - x^0), \quad (3.34)$$

$$W_1^+ = \frac{c^\ominus (e^{c^\ominus t_{\text{sw}}} - 1)}{t_{\text{sw}} - t_{\text{sw}} e^{c^\ominus T} - T + T e^{c^\ominus t_{\text{sw}}}} (x^T - x^0), \quad (3.35)$$

$$W_2^- = \frac{c^\ominus (e^{c^\ominus t_{\text{sw}}} - e^{c^\ominus T})}{t_{\text{sw}} - t_{\text{sw}} e^{c^\ominus T} - T + T e^{c^\ominus t_{\text{sw}}}} (y^T - y^0), \quad (3.36)$$

$$W_2^+ = \frac{c^\ominus (e^{c^\ominus t_{\text{sw}}} - 1)}{t_{\text{sw}} - t_{\text{sw}} e^{c^\ominus T} - T + T e^{c^\ominus t_{\text{sw}}}} (y^T - y^0). \quad (3.37)$$

Напомним, что из доказательства утверждения 3.1 следует, что знаменатели не обращаются в ноль.

Подставив найденные управления (3.34)–(3.37) в траекторию (3.30)–(3.31), получаем уравнение отрезка прямой (в невырожденном случае $(x^T - x^0)^2 + (y^T - y^0)^2 \neq 0$)

$$x(t) = \begin{cases} (x^T - x^0) \left(\frac{(e^{c^\ominus t_{\text{sw}}} - e^{c^\ominus T})}{t_{\text{sw}} - t_{\text{sw}} e^{c^\ominus T} - T + T e^{c^\ominus t_{\text{sw}}}} \left(t + \frac{e^{-c^\ominus t} - 1}{c^\ominus} \right) \right), & t \in [0, t_{\text{sw}}], \\ (x^T - x^0) \left(1 + \frac{(e^{c^\ominus t_{\text{sw}}} - 1)}{t_{\text{sw}} - t_{\text{sw}} e^{c^\ominus T} - T + T e^{c^\ominus t_{\text{sw}}}} \left(t - T + \frac{e^{-c^\ominus(t-T)} - 1}{c^\ominus} \right) \right), & t \in [t_{\text{sw}}, T]; \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} (y^T - y^0) \left(\frac{(e^{c^\ominus t_{\text{sw}}} - e^{c^\ominus T})}{t_{\text{sw}} - t_{\text{sw}} e^{c^\ominus T} - T + T e^{c^\ominus t_{\text{sw}}}} \left(t + \frac{e^{-c^\ominus t} - 1}{c^\ominus} \right) \right), & t \in [0, t_{\text{sw}}], \\ (y^T - y^0) \left(1 + \frac{(e^{c^\ominus t_{\text{sw}}} - 1)}{t_{\text{sw}} - t_{\text{sw}} e^{c^\ominus T} - T + T e^{c^\ominus t_{\text{sw}}}} \left(t - T + \frac{e^{-c^\ominus(t-T)} - 1}{c^\ominus} \right) \right), & t \in [t_{\text{sw}}, T]; \end{cases}$$

вырождающееся в точку при $x^T = x^0$, $y^T = y^0$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 3.2. При фиксированных $T > 0$, $t_{sw} \in (0, T)$, значение функционала расхода энергии (3.21) одинаково для краевых задач класса

$$\nu_i^0 = \nu_i^T = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \theta^T = \theta^0, \quad (x^T - x^0)^2 + (y^T - y^0)^2 = \text{const},$$

т.е. при движении симметричного экипажа по прямой без поворота энергетические затраты не зависят от выбора направления движения и пропорциональны квадрату пройденного расстояния.

Доказательство. Используя результаты доказательства утверждения 3.3, выпишем значение функционала расхода энергии (3.21) на классе движений. Напомним, что его реализуют управления (3.34)–(3.37), $W_3^\pm = 0$.

Пользуясь определением управлений (3.4) и его обратимостью, выпишем соответствующие управляющие напряжения U_i^\pm :

$$\begin{pmatrix} U_1^\pm \\ U_2^\pm \\ U_3^\pm \end{pmatrix} = \frac{2mr^2 + 3\lambda^2}{2c_1r} \begin{pmatrix} \frac{W_1^\pm + \sqrt{3}W_2^\pm}{3} \\ -\frac{2}{3}W_1^\pm \\ \frac{W_1^\pm - \sqrt{3}W_2^\pm}{3} \end{pmatrix}.$$

При этом имеем

$$\left((U_1^\pm)^2 + (U_2^\pm)^2 + (U_3^\pm)^2 \right) = \frac{2}{3c_1^2r^2} \left(m + \frac{3\lambda^2}{2r^2} \right)^2 \left((W_1^\pm)^2 + (W_2^\pm)^2 \right).$$

Тогда функционал расхода энергии (3.21) будет иметь вид

$$\mathcal{E}(t_{sw}, T) = \frac{3c_2^2}{2c_1^2r^2} \left((x^T - x^0)^2 + (y^T - y^0)^2 \right) \varepsilon_{c^\odot}(t_{sw}, T),$$

$$\text{где } \varepsilon_{c^\odot}(t_{sw}, T) = \frac{\left(e^{c^\odot t_{sw}} - e^{c^\odot T} \right)^2 t_{sw} + \left(e^{c^\odot t_{sw}} - 1 \right)^2 (T - t_{sw})}{\left(t_{sw} - t_{sw}e^{c^\odot T} - T + Te^{c^\odot t_{sw}} \right)^2}, \quad (3.38)$$

что и доказывает утверждение. ■

Заметим, что функция $\varepsilon_{c\odot}(t_{sw}, T)$, определённая в (3.38), имеет вид, аналогичный виду функции $\varepsilon_{c\oplus}(t_{sw}, T)$ из определения (3.24). Численно проанализируем функцию $\varepsilon_{c\odot}(t_{sw}, T)$ при $T = 1$ с как функцию t_{sw} (рис. 3.5).

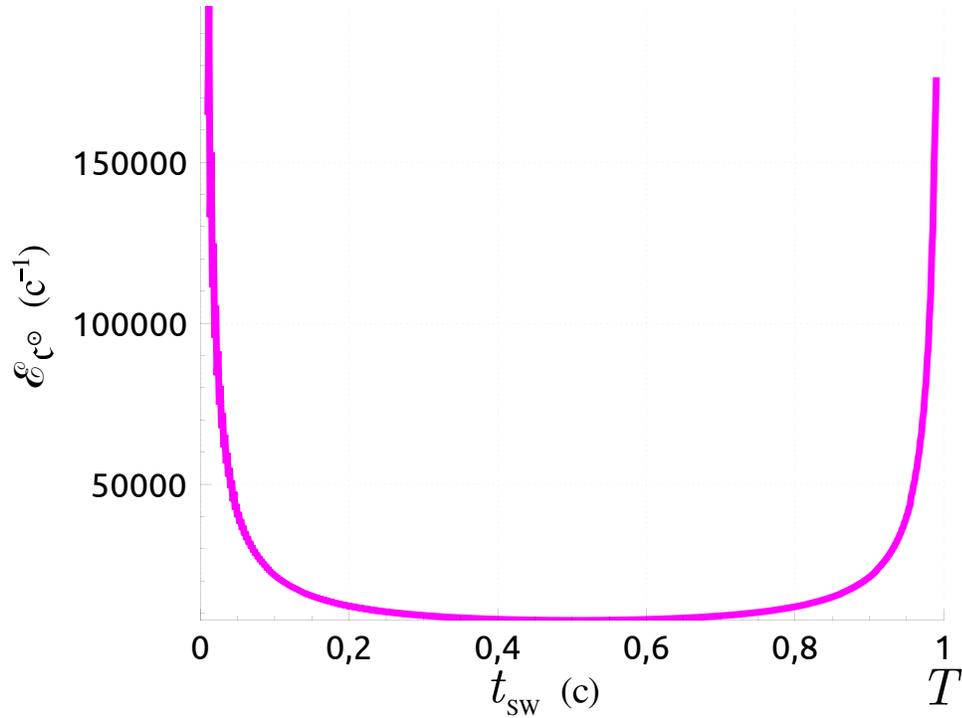


Рис. 3.5: Функция расхода энергии $\varepsilon_{c\odot}(t_{sw}, 1)$

Функция достигает минимума в точке $t_{sw} = 0.503788$ с. Таким образом, оптимальный по расходу энергии момент переключения оказывается близок к середине временного отрезка, но из-за влияния противоЭДС сдвинут к правому концу.

3.4.3 Зависимость затрат энергии от расстояния движения

Рассмотрим два типа краевых задач: экипаж за фиксированное время $T = 10$ с перемещается из начала координат и состояния покоя

$$\nu_i^0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad \theta^0 = 0$$

в состояние покоя в некоторую точку плоскости

$$\nu_i^T = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad x^T = x^T, \quad y^T = y^T.$$

В первом случае он не меняет ориентацию:

$$\theta^T = 0; \quad (3.39)$$

а во втором меняет её так, что в конце движения радиус-вектор центра масс \vec{OS} будет сонаправлен с осью второго колеса $S\mathbf{n}_2$:

$$\theta^T = \theta^T(x^T, y^T), \quad \text{где } \cos \theta^T = \frac{y^T}{\sqrt{(x^T)^2 + (y^T)^2}}, \quad \sin \theta^T = \frac{-x^T}{\sqrt{(x^T)^2 + (y^T)^2}}, \quad \theta^T \in (-\pi, \pi] \quad (3.40)$$

$$(\theta^T = 0 \text{ при } (x^T)^2 + (y^T)^2 = 0).$$

Примеры движений представлены на рис. 3.6.

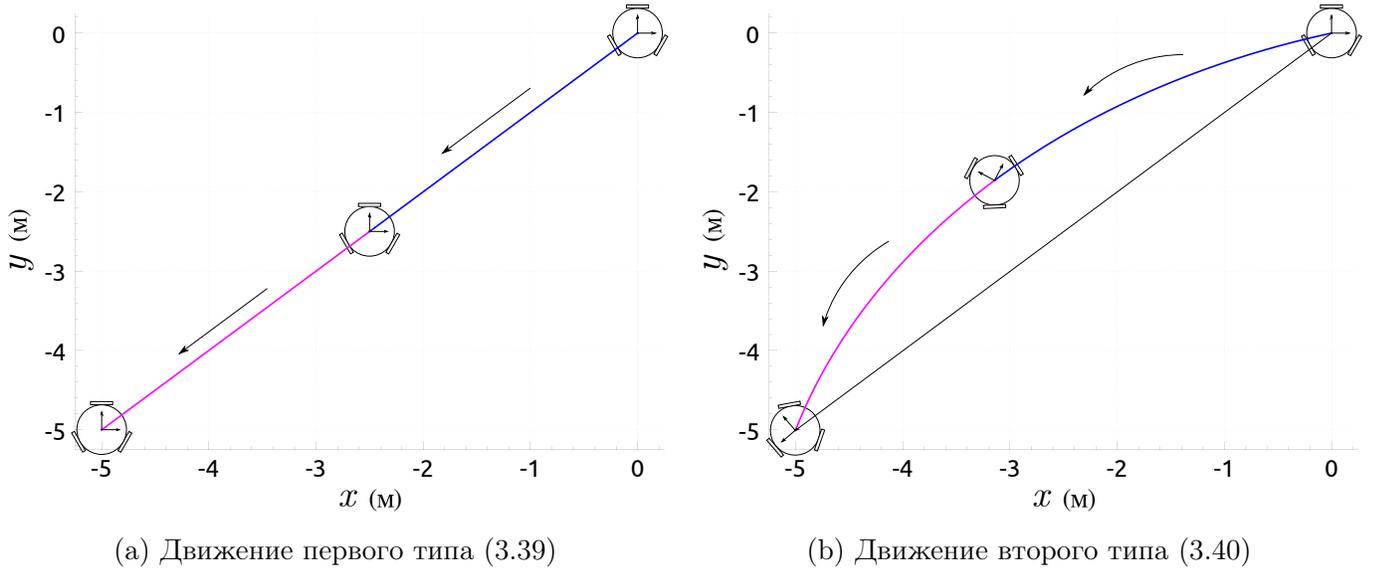


Рис. 3.6: Траектория центра масс на классах движений

Время переключения t_{sw} для каждой из конкретных задач будем выбирать исходя из минимизации функционала расхода энергии (3.21). Для простоты вычислений воспользуемся следующим подходом: мы будем выбирать его минимальное значение среди двадцати значений t_{sw} , равномерно распределённых внутри интервала $(0, T)$.

Построим для каждого из типов краевых задач в некоторой области плоскости (квадрат, описываемый условием $\{(x, y) \mid \max(|x|, |y|) \leq 10 \text{ м}\}$) карту интенсивности, где в точке (x, y) значение будет соответствовать значению функционала расхода энергии $\mathcal{E}(t_{\text{sw}}, T)$ для краевой задачи, в которой эта точка является положением центра масс экипажа в конце движения $x^T = x, y^T = y$.

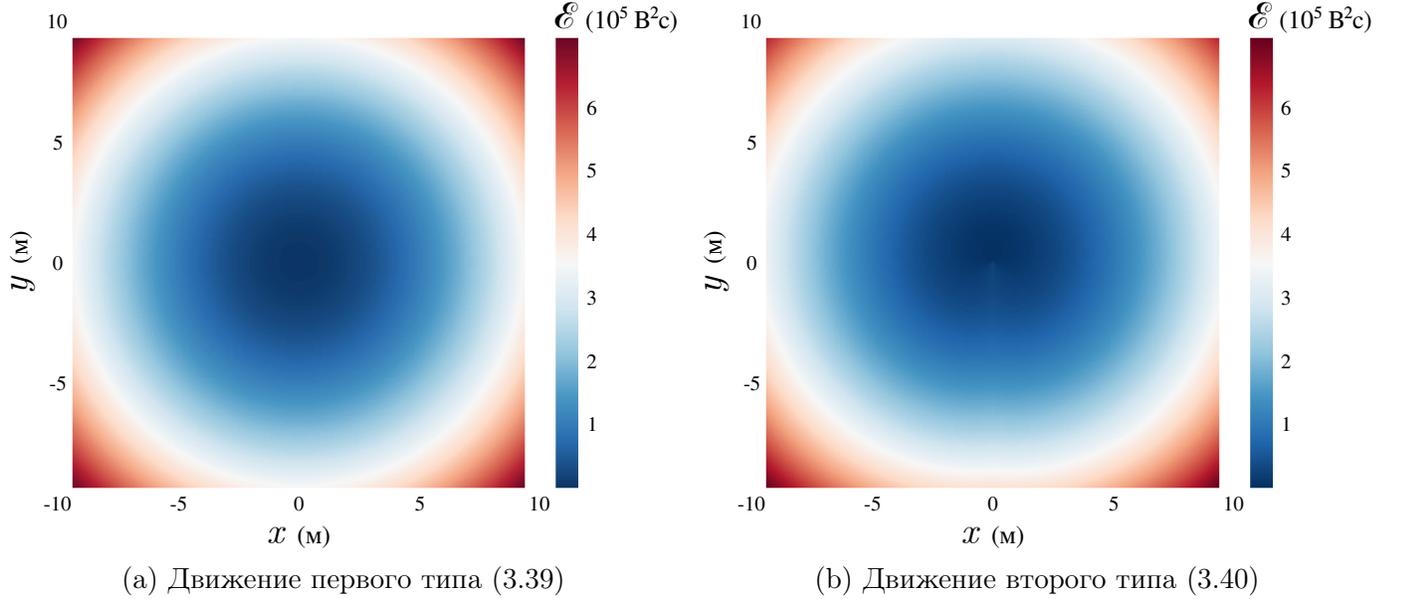


Рис. 3.7: Затраты энергии на классах движений

Вид карты на рис. 3.7а соответствует результатам, полученным аналитически в пункте 3.4.2: в случае отсутствия поворота выбор направления движения не влияет на затраты энергии. В случае рис. 3.7b менее затратным оказывается движение без поворота, причём затраченная энергия растёт пропорционально увеличению угла поворота в конце интервала движения.

Заметим, что в случае обоих типов движений переключение (в нетривиальном случае $x^2 + y^2 \neq 0$) происходило в момент $t_{\text{sw}} \simeq 5$ с, что согласуется с аналитическими результатами пункта 3.4.2 для первого класса движений.

3.4.4 Ограниченность управляющих напряжений

Отметим, что при решении краевой задачи из параграфа 3.1 никаких ограничений на параметры W_i ($i = 1, 2, 3$), связанные линейными соотношениями с управляющими напряжениями U_i ($i = 1, 2, 3$), не накладывается. Однако в задачах управления такие условия обычно возникают

в связи с ограниченностью ресурсов в реальных прототипах. Покажем, что увеличение времени движения на участках “разгона” и “торможения” (значений t_{sw} и $T - t_{sw}$) влечёт уменьшение максимального по модулю из всех шести управляющих напряжений U_i .

Рассмотрим два типа краевых задач: экипаж перемещается из начала координат и состояния покоя

$$\nu_i^0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad \theta^0 = 0$$

в состояние покоя в определённую точку плоскости

$$\nu_i^T = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad x^T = 10 \text{ м}, \quad y^T = 10 \text{ м}.$$

В первом случае он не меняет ориентацию:

$$\theta^T = 0; \tag{3.41}$$

а во втором совершает полный поворот вокруг своей оси:

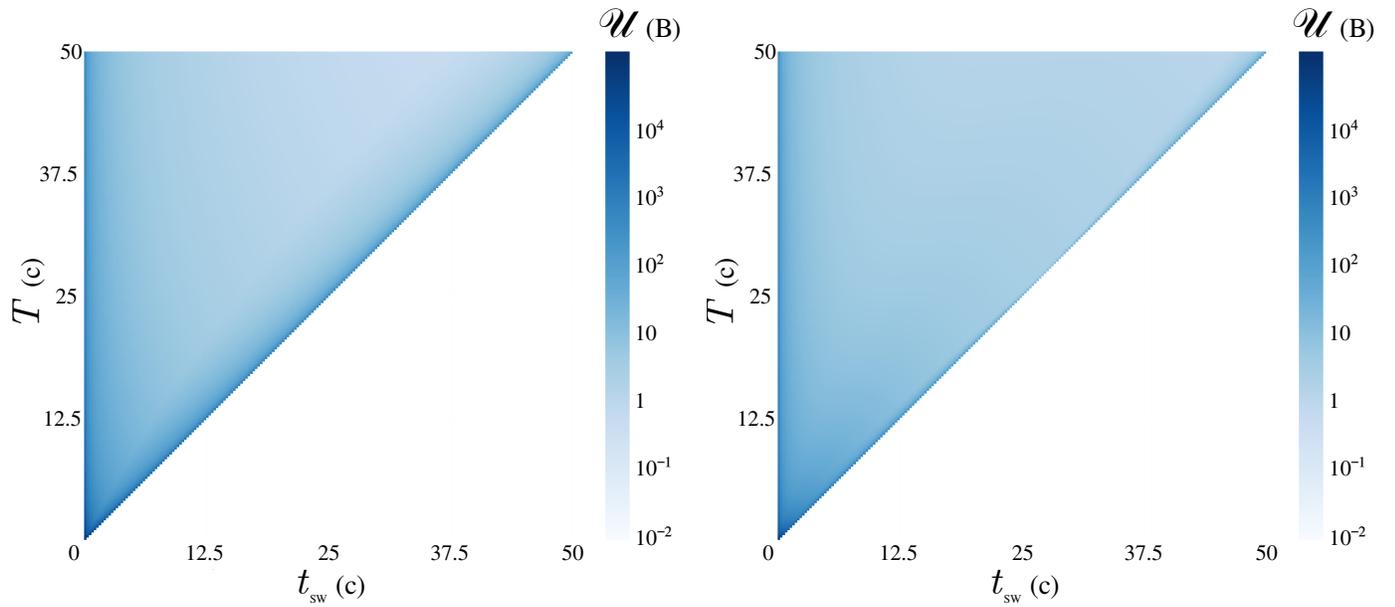
$$\theta^T = 2\pi. \tag{3.42}$$

Построим карту интенсивности для величины

$$\mathcal{U} = \max_{i=1,2,3; s=-,+} |U_i^s|.$$

Каждая точка (t_{sw}, T) на карте соответствует решению краевой задачи с заданными временами разгона и торможения, при этом более насыщенный цвет соответствует большему значению \mathcal{U} . Аналогичные карты получаются и в случае других краевых условий.

Карты на рис. 3.8 показывают, что \mathcal{U} тем меньше, чем больше t_{sw} и $T - t_{sw}$. При фиксированном T в представленных примерах минимальное \mathcal{U} достигается при $t_{sw} \simeq \frac{T}{2}$ с небольшим сдвигом вправо.



(a) Движение первого типа (3.41)

(b) Движение второго типа (3.42)

Рис. 3.8: Максимальное по модулю напряжение во время движения

3.4.5 Сравнение одноэтапной и двухэтапной стратегии управления

Рассмотрим задачу движения из состояния покоя и начала координат

$$\nu_i^0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad \theta^0 = 0$$

в состояние покоя в некоторую точку плоскости с поворотом

$$\nu_i^T = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad x^T = x^T, \quad y^T = y^T, \quad \theta^T = \theta^T.$$

В параграфе 3.3 мы показали, как перевести экипаж в произвольное состояние с помощью кусочно–постоянного управления с одним переключением. Возможен и другой подход: отдельно решать задачу поворота на нужный угол и перемещения экипажа в другую точку пространства [32, 33].

В пунктах 3.4.1 и 3.4.2 мы рассмотрели простые движения: поворот на месте и поступательное движение. Чтобы переместить экипаж в произвольное положение x^T, y^T, θ^T , мы можем сначала осуществить поворот на месте из $0, 0, 0$ в $0, 0, \theta^T$, а после поступательно переместиться в x^T, y^T, θ^T . Таким образом, для решения задачи будет использовано кусочно–постоянное управление с тремя переключениями. (Для удобства выберем начальные и конечные скорости

на обоих интервалах времени равными нулю.)

Исследуем энергетические затраты при одноэтапной и двухэтапной стратегии. Одноэтапная стратегия — это перемещение посредством кусочно–постоянного управления с одним переключением при заданном времени движения T и таком моменте переключения t_{sw} , что энергетические затраты минимальны с точки зрения функционала расхода энергии (3.21). Двухэтапная стратегия — это поворот посредством кусочно–постоянного управления с одним переключением за время T_1 с моментом переключения t_{sw1} и последующее поступательное движение посредством кусочно–постоянного управления с одним переключением за время $T - T_1$ с моментом переключения t_{sw2} , где параметры T_1 , t_{sw1} и t_{sw2} выбраны таким образом, чтобы минимизовать энергетические затраты с точки зрения функционала расхода энергии (3.21).

Рассмотрим движения для $T = 10$ с. В таб. 3.3 находятся результаты вычислений.

x^T	y^T	θ^T	Затраты при одноэтапной стратегии	Затраты при двухэтапной стратегии	Отношение затрат
м	м		$B^2 \cdot c$	$B^2 \cdot c$	
1	0	$\pi/4$	3.01305	8.54491	35.2613%
1	0	$\pi/2$	3.20521	12.3635	25.9248%
1	0	$3\pi/4$	3.53536	16.0789	21.9875%
1	0	π	4.01879	19.8047	20.2920%
1	0	$3\pi/2$	5.49509	27.4873	19.9914%
1	0	2π	6.86393	35.5709	19.2965%
5	5	$\pi/4$	149.361	227.524	65.6463%
5	5	$\pi/2$	155.094	268.641	57.7329%
5	5	$3\pi/4$	165.136	303.989	54.3230%
5	5	π	180.260	336.303	53.6005%
5	5	$3\pi/2$	219.681	396.256	55.4392%
5	5	2π	214.541	453.081	47.3516%
10	-10	$\pi/4$	597.365	806.381	74.0797%
10	-10	$\pi/2$	620.060	910.094	68.1314%
10	-10	$3\pi/4$	659.832	997.143	66.1723%
10	-10	π	719.774	1074.56	66.983%
10	-10	$3\pi/2$	874.997	1215.96	71.9595%
10	-10	2π	849.037	1345.21	63.1155%
10	10	15π	33311.8	4144.79	803.702%
10	10	30π	77843.8	7513.88	1036.00%

Таблица 3.3: Сравнение затрат энергии при одноэтапной и двухэтапной стратегии управления

Численные эксперименты показывают, что при повороте на небольшой угол $\theta^T \leq 2\pi$ одноэтапный подход более эффективен, чем двухэтапный. При повороте на большой угол при одноэтапном подходе траектория получается длинной и закрученной (рис. 3.9), поэтому здесь оказывается более эффективным двухэтапный подход.

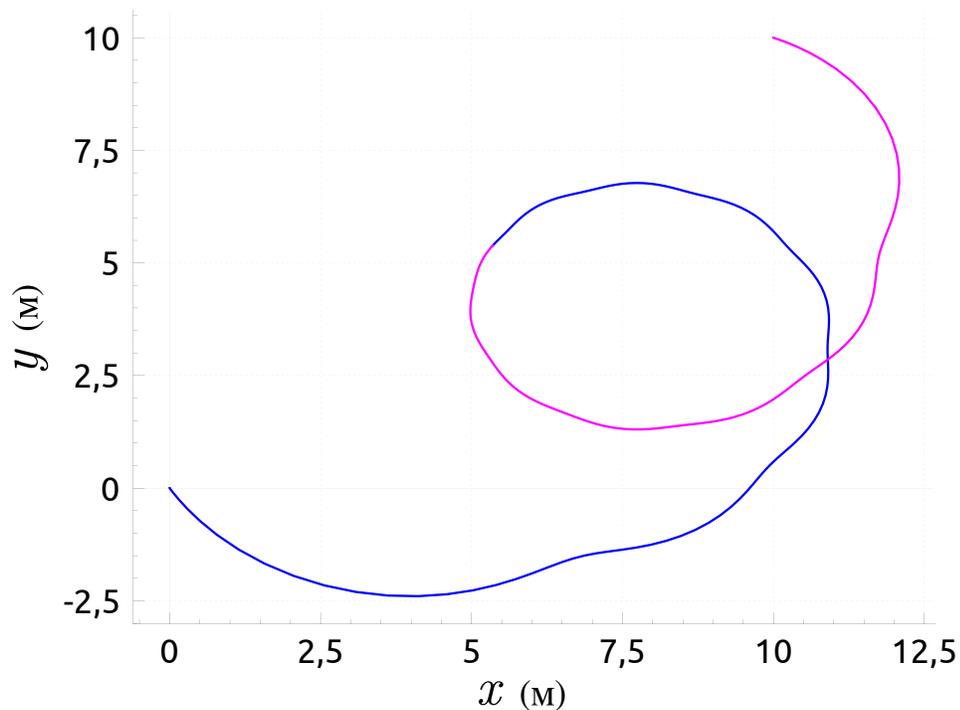


Рис. 3.9: Траектория центра масс
(Движение из покоя в покой в положение $x^T = 10$ м, $y^T = 10$ м, $\theta^T = 30\pi$ с помощью одноэтапной стратегии.)

3.5 Решение краевой задачи для омни-экипажа с параллельными колёсами

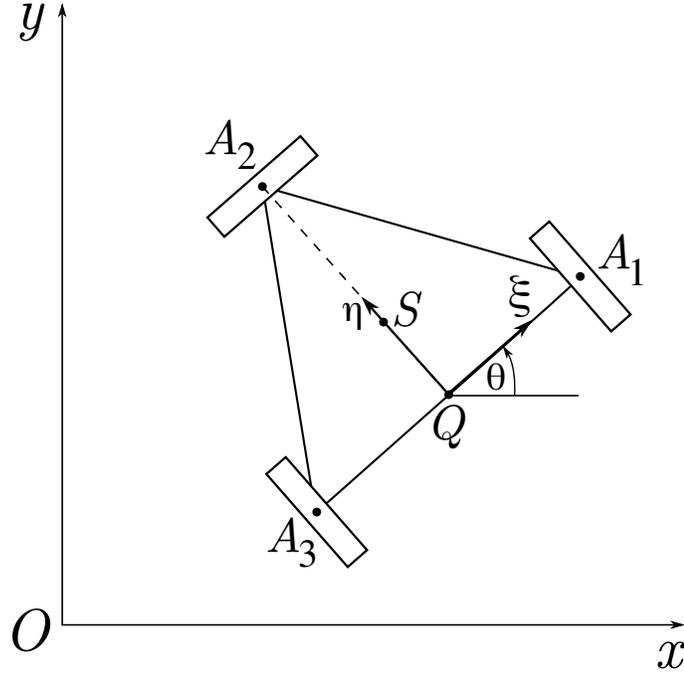


Рис. 3.10: Омни-экипаж с параллельными колёсами

Рассмотрим другую конфигурацию трёхколёсного омни-экипажа — экипаж с параллельными колёсами (см. параграф 1.5, рис. 3.10). Модель описывается следующими параметрами:

$$\delta_2 > \Delta > 0, \quad \delta_1 = \delta_3 = \delta_{||}, \quad \Lambda = \Lambda, \quad (3.43)$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \beta_3 = \pi, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{\pi}{2}. \quad (3.44)$$

Уравнения управляемого движения омни-экипажа с параллельными колёсами имеют вид

$$\mathbf{a}_1^\Delta \dot{\nu}_1 - \kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 = \frac{m}{\Lambda} \nu_2 \nu_3 - \frac{c_2}{r^2} \left(\nu_1 + \frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda} \nu_3 \right) - \frac{c_1}{r} U_2, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{a}_2^\Delta \dot{\nu}_2 = -\frac{m}{\Lambda} \nu_1 \nu_3 - \frac{2c_2}{r^2} \nu_2 + \frac{c_1}{r} (U_1 - U_3), \quad (3.46)$$

$$-\kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_1 + \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 = -\frac{c_2}{r^2} \left(\frac{\delta_2 - \Delta}{\Lambda} \nu_1 + \frac{2\delta_{||}^2 + (\delta_2 - \Delta)^2}{\Lambda^2} \nu_3 \right) + \frac{c_1}{r} \frac{\delta_{||} U_1 + (\delta_2 - \Delta) U_2 + \delta_{||} U_3}{\Lambda}, \quad (3.47)$$

где

$$\alpha_1^\Delta = m + \lambda^2 \frac{1}{r^2}, \quad \alpha_2^\Delta = m + \lambda^2 \frac{2}{r^2}, \quad \alpha_3^\Delta = 1 + \lambda^2 \frac{2\delta_{||}^2 + (\delta_2 - \Delta)^2}{\Lambda^2 r^2}, \quad \kappa = \frac{\lambda^2 \delta_2 - \Delta}{\alpha_3^\Delta \Lambda r^2}.$$

Для экипажа ставится задача управления из параграфа 3.1. Необходимо найти функции $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ на интервале $[0, T]$ для наперёд заданного T такие, что решение уравнений (1.16)–(1.18), (3.45)–(3.47) для начальных условий

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad \theta(0) = \theta^0, \quad \nu_1(0) = \nu_1^0, \quad \nu_2(0) = \nu_2^0, \quad \nu_3(0) = \nu_3^0$$

имеет на конце интервала заданные значения

$$x(T) = x^T, \quad y(T) = y^T, \quad \theta(T) = \theta^T, \quad \nu_1(T) = \nu_1^T, \quad \nu_2(T) = \nu_2^T, \quad \nu_3(T) = \nu_3^T.$$

В отличие от симметричного случая (3.1)–(3.3), при постоянном управлении не отделяется ни одно из уравнений системы (3.45)–(3.47). Поэтому здесь не выходит применить подход параграфа 3.3. Будем искать решение задачи управления в виде кусочно–постоянным управлением с одним переключением с помощью численного алгоритма.

Ставится задача поиска корней системы шести нелинейных уравнений относительно шести неизвестных напряжений U_i (три значения при разгоне $t \in [0, t_{sw})$, три — при торможении $t \in (t_{sw}, T]$). Нелинейные уравнения задаются неявно с помощью отображения управляющих напряжений $U_1^-, U_2^-, U_3^-, U_1^+, U_2^+, U_3^+$ в точку фазового пространства в конце интервала движения $x(T)$, $y(T)$, $\theta(T)$, $\nu_1(T)$, $\nu_2(T)$, $\nu_3(T)$ посредством интегрирования уравнений движения (3.45)–(3.47), (1.16)–(1.18). В качестве начального приближения для напряжений возьмем значения, получаемые из задачи управления симметричным экипажем с теми же краевыми условиями. Опыт вычислений показал, что прямой переход от симметричного экипажа к экипажу с параллельными колёсами зачастую не приводит к сходимости метода Ньютона.

Для решения задачи был написан численный алгоритм, вычисляющий напряжения для моторов произвольного экипажа (в данной работе представлены решения только для экипажа с параллельными колёсами) с использованием метода продолжения по параметрам $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, Δ , Λ . Продолжение осуществляется по очереди в перечисленной после-

довательности. Шаг динамический и уменьшается в случае расхождения метода Ньютона при попытке перехода. Для улучшения сходимости метода в процессе продолжения были использованы некоторые эмпирические поправки, ускоряющие процесс в случае перехода от симметричного экипажа к экипажу с параллельными колёсами:

- изменение α_i сопровождается изменением β_i на ту же величину ($i = 1, 2, 3$);
- изменение α_1 сопровождается изменением α_3 на ту же величину с противоположным знаком;
- изменение β_1 сопровождается изменением β_3 на ту же величину с противоположным знаком;
- изменение δ_1 сопровождается изменением δ_3 на ту же величину;
- изменение δ_2 сопровождается изменением Δ на ту же величину.

В рамках моделирования для интегрирования дифференциальных уравнений был реализован метод Рунге-Кутты 8 порядка с коэффициентами Дормана-Принса с автоматическим выбором шага интегрирования на основе [97], для решения систем линейных уравнений и матричных операций использовались методы библиотеки GSL [103]. Для создания графиков использовались библиотеки Qt [98] и QCustomPlot [99] (рис. 3.11). Для вычисления начального приближения используются параметры для симметричного экипажа из таб. 3.1. Экипаж с параллельными колёсами в вычислениях моделируется параметрами из таб. 3.4. Исходный код программы находится в открытом доступе (см. [23], директория *custom-configuration-control*).

Параметр	Значение	Единицы измерения	Параметр	Значение	Единицы измерения
$\delta_{ }$	0.10	м	λ^2	$5 \cdot 10^{-4}$	кг · м ²
δ_2	0.15	м	m	3	кг
Δ	0.05	м	c_1	10^{-2}	кг · м ² · с ⁻² · В ⁻¹
r	0.05	м	c_2	$2.5 \cdot 10^{-4}$	кг · м ² · с ⁻¹
Λ^2	$7 \cdot 10^{-2}$	кг · м ²			

Таблица 3.4: Параметры численного моделирования омни-экипажа с параллельными колёсами

Следующие движения (рис. 3.12–3.15) были получены при применении численного алгоритма к решению задачи управления. На графиках представлены траектория движения, угол курса, псевдоскорости и управляющие напряжения для нескольких примеров краевых задач.

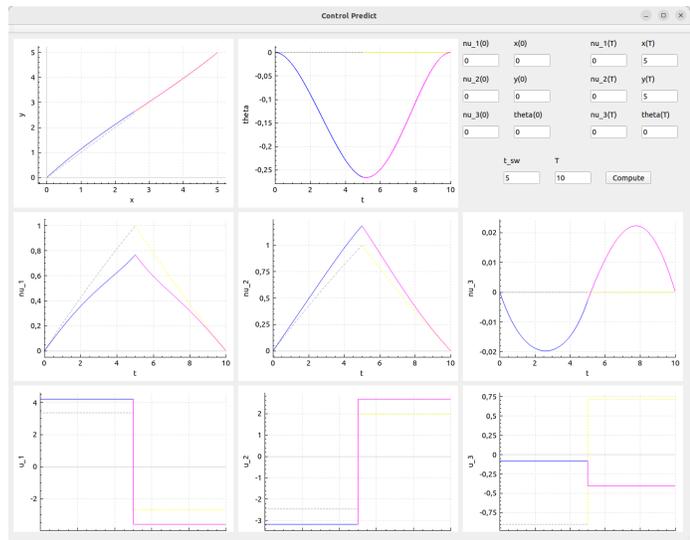


Рис. 3.11: Интерфейс программы

Начальные и конечные условия указаны на рисунках. Прерывистой линией обозначено движение симметричного экипажа — серым отмечен участок движения до переключения, жёлтым — после; сплошные синяя и пурпурная линии соответствуют движению экипажа с параллельными колёсами до и после переключения. Все движения рассматриваются на отрезке $[0, 10]$ (в секундах) с переключением в середине интервала $t_{sw} = 5$ с. На рис. 3.12g, 3.13g, 3.14g, 3.15g схематично (без соблюдения масштаба) показана ориентация экипажа в конце движения.

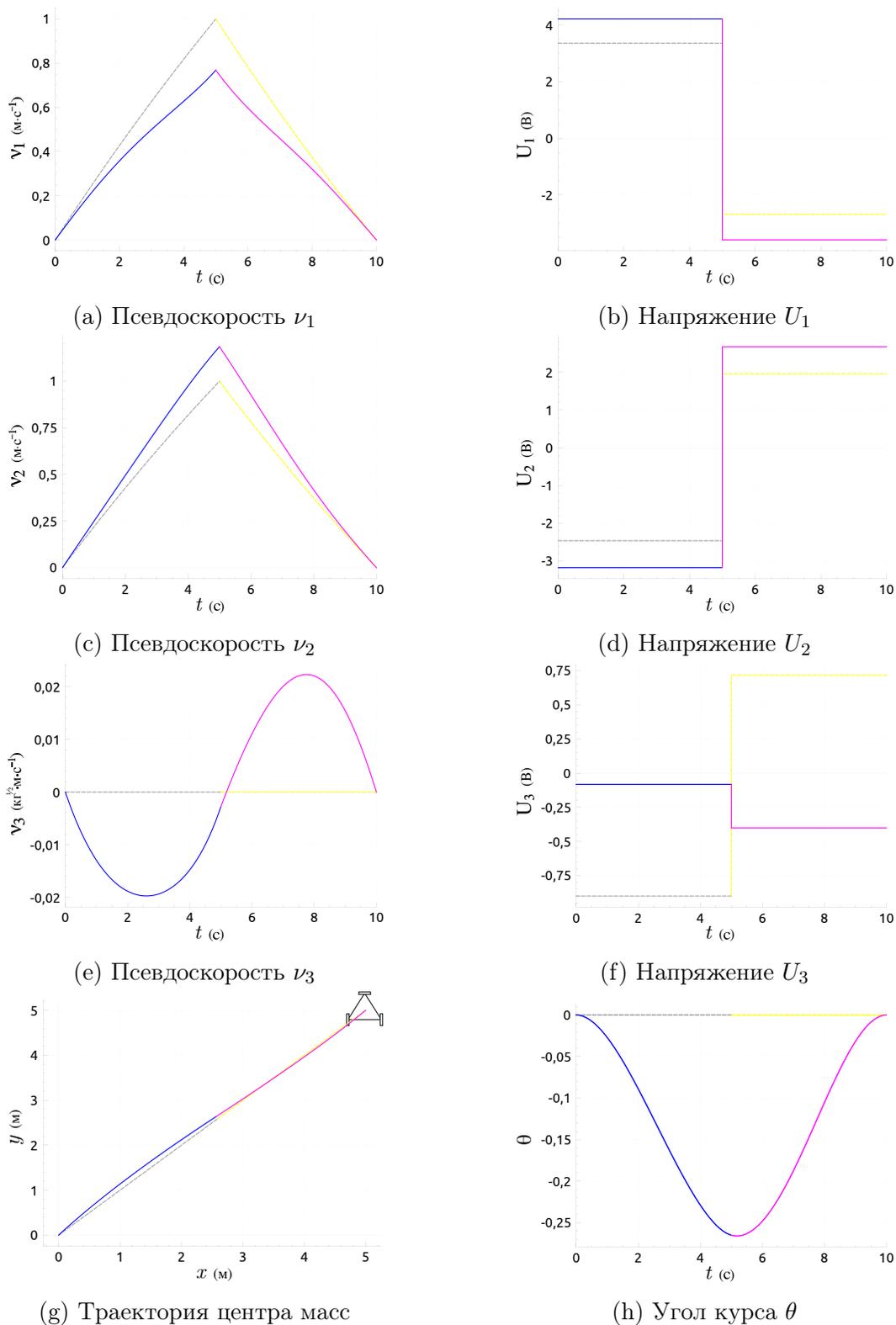


Рис. 3.12: Пример I: управляемое движение по диагонали без поворота (Сплошная линия соответствует экипажу с параллельными колёсами: синий цвет — этап до переключения, пурпурный — после. Пунктирная линия соответствует симметричному экипажу: серый цвет — этап до переключения, жёлтый — после.)

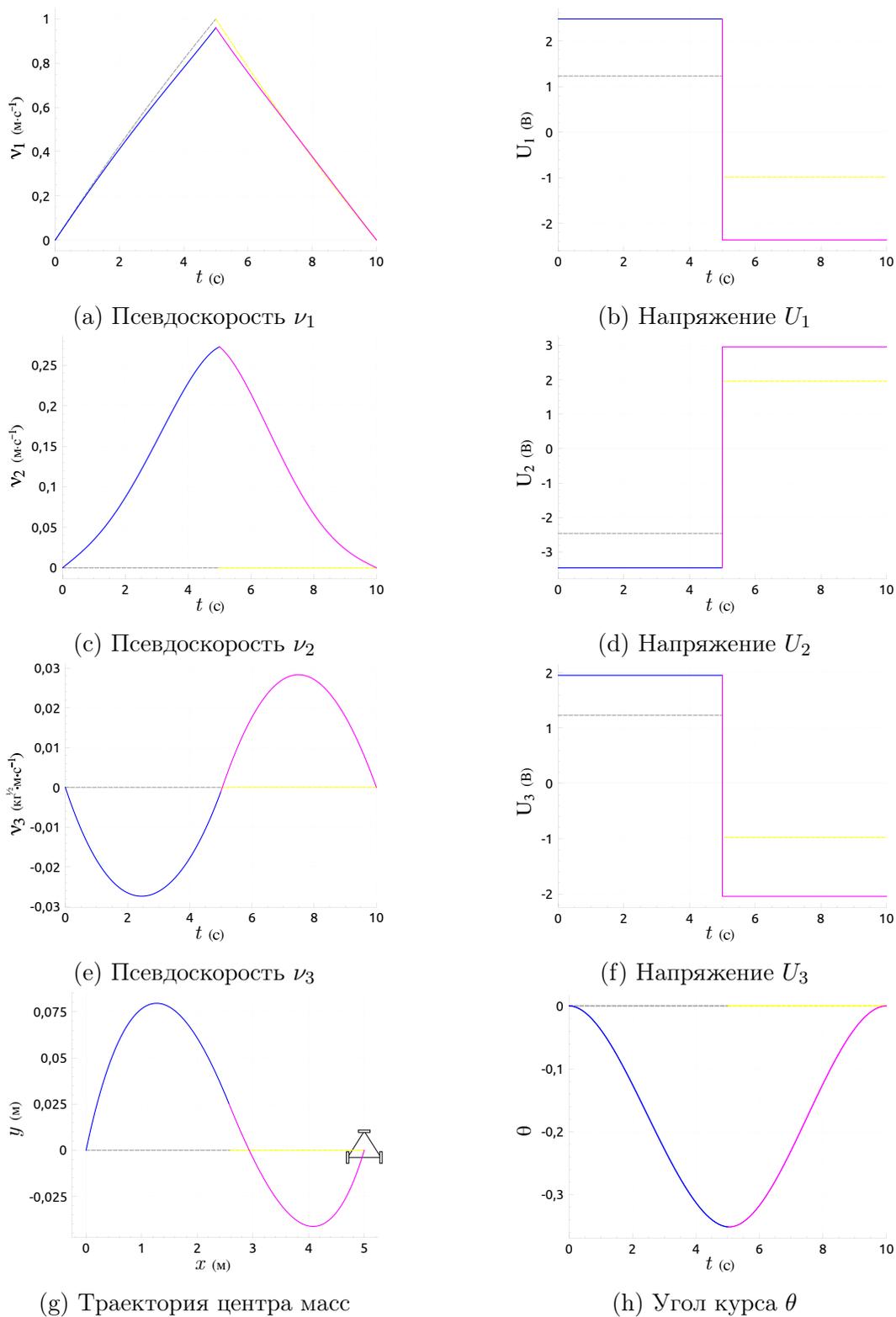


Рис. 3.13: Пример II: управляемое движение вбок без поворота

(Сплошная линия соответствует экипажу с параллельными колёсами: синий цвет — этап до переключения, пурпурный — после. Пунктирная линия соответствует симметричному экипажу: серый цвет — этап до переключения, жёлтый — после.)

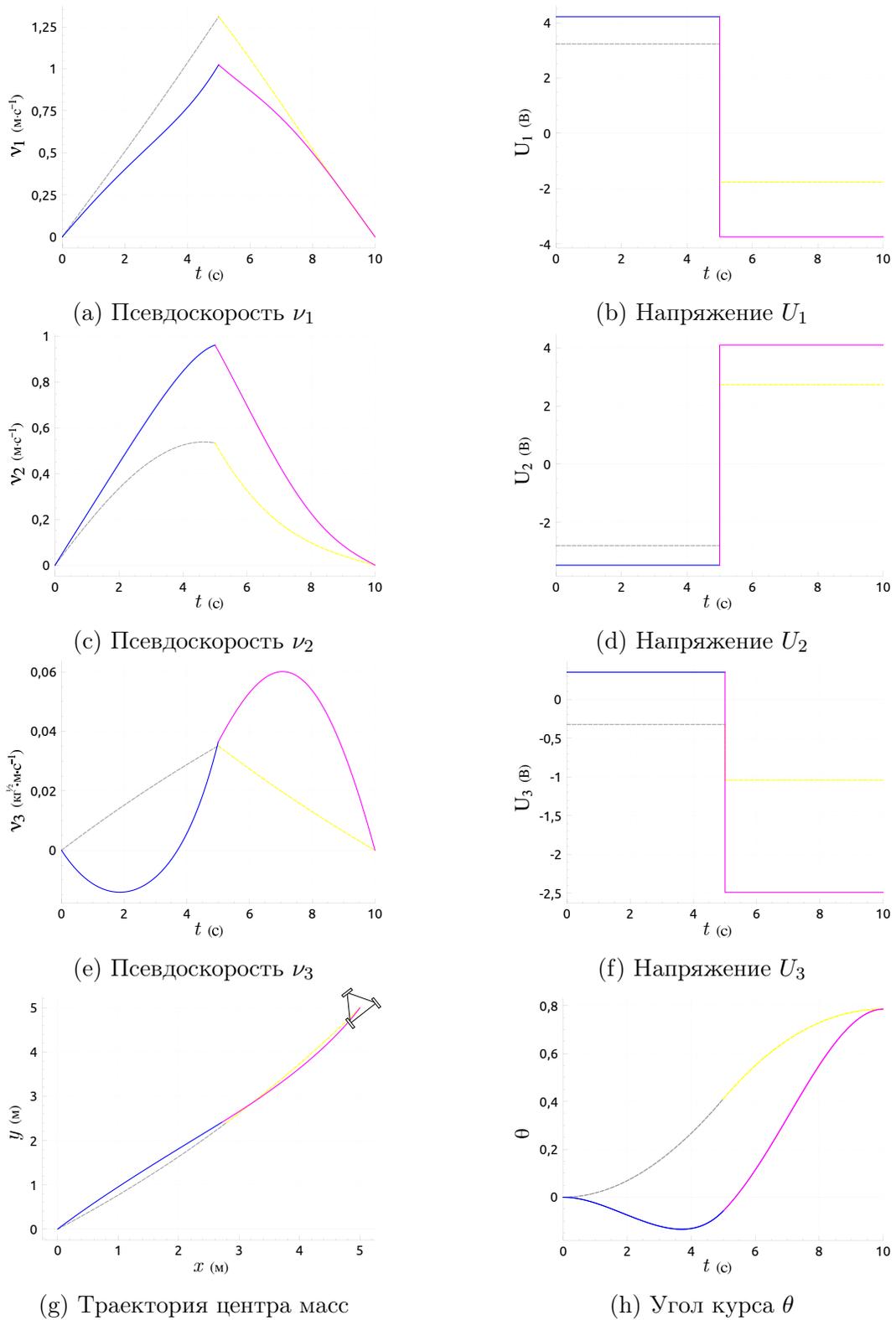


Рис. 3.14: Пример III: управляемое движение по диагонали с поворотом на угол $\frac{\pi}{4}$
 (Сплошная линия соответствует экипажу с параллельными колёсами: синий цвет — этап до переключения, пурпурный — после. Пунктирная линия соответствует симметричному экипажу: серый цвет — этап до переключения, жёлтый — после.)

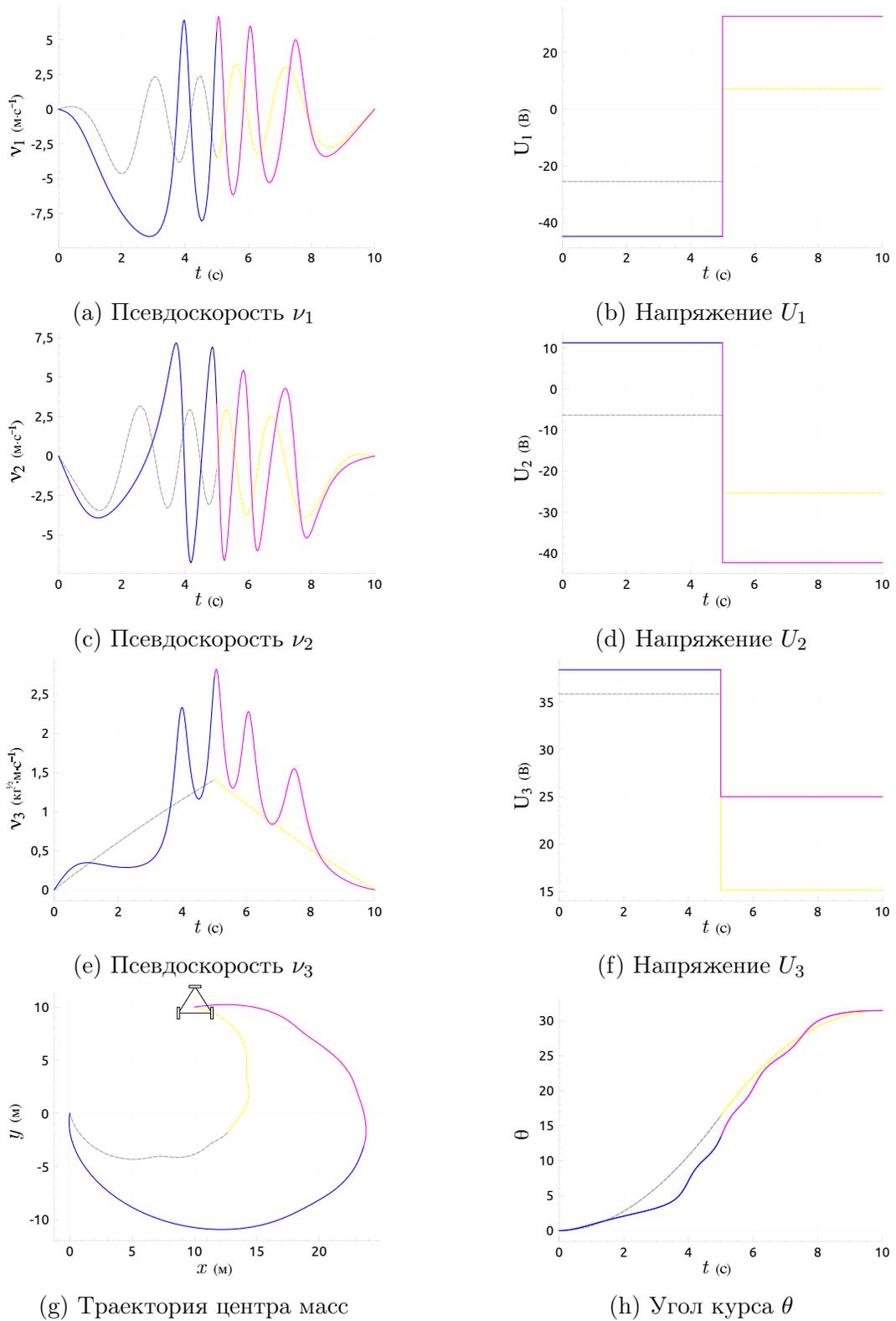


Рис. 3.15: Пример IV: управляемое движение по диагонали с поворотом на угол 10π (Сплошная линия соответствует экипажу с параллельными колёсами: синий цвет — этап до переключения, пурпурный — после. Пунктирная линия соответствует симметричному экипажу: серый цвет — этап до переключения, жёлтый — после.)

Отметим, что для экипажа с параллельными колёсами оказывается неверным следствие 3.1 о поступательном движении при $\nu_3^{0,T} = 0$, $\theta^0 = \theta^T$ (рис. 3.12–3.13). Графики на рис. 3.15 показывают, что для обеих конфигураций экипажей что при больших значениях θ^T происходит значительное отклонение траектории центра масс от прямой, соединяющей начальную и конечную точки на плоскости Oxy .

Глава 4. Условия безотрывного движения омни-экипажа

4.1 Нормальные реакции опоры омни-экипажа

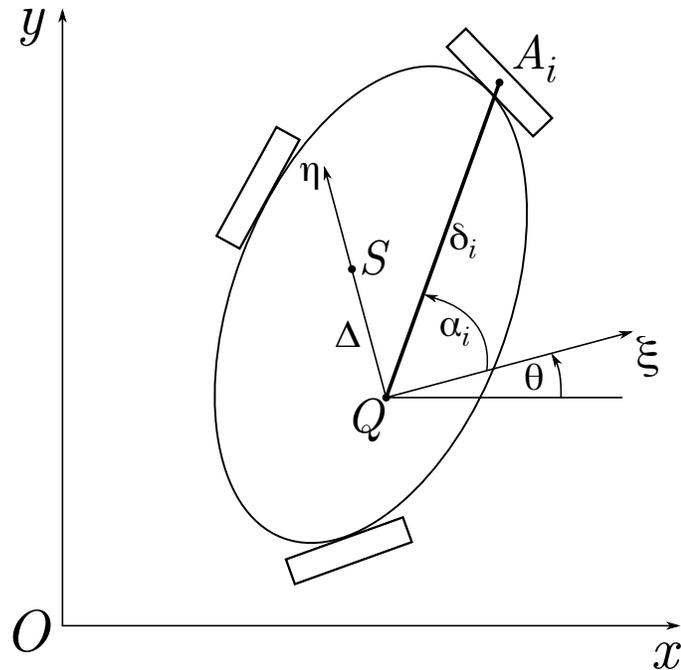


Рис. 4.1: Омни-экипаж

Рассматривается управляемое движение омни-экипажа по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Колёса моделируются без учёта инерционных свойств роликов (см. главу 1 и замечание 2.3). Уравнения движения экипажа имеют вид

$$\dot{\nu} = (\mathfrak{B}^\nu \nu) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \mathfrak{C}^\nu \nu + \mathfrak{U}^\nu U, \quad (4.1)$$

Данная глава посвящена исследованию нормальных реакций опоры омни-экипажей во время движения. При подготовке данной главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [20, 21, 27].

где матрицы \mathfrak{B}^ν , \mathfrak{C}^ν , \mathfrak{U}^ν определяются выражениями

$$\mathfrak{B}^\nu = \|\mathfrak{b}_{ij}^\nu\| = \frac{m}{\Lambda} \mathfrak{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathfrak{C}^\nu = \|\mathfrak{c}_{ij}^\nu\| = -c_2 \mathfrak{A}^{-1} \Xi^T \Xi, \quad (4.3)$$

$$\mathfrak{U}^\nu = \|\mathfrak{u}_{ij}^\nu\| = c_1 \mathfrak{A}^{-1} \Xi^T, \quad (4.4)$$

$$\mathfrak{A} = \|\mathfrak{a}_{ij}\| = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda^2 \Xi^T \Xi, \quad (4.5)$$

Ξ — матрица связей (1.20).

Верхний индекс \square^ν обозначает связь матриц и их компонентов с уравнениями движения системы.

Рассмотрим систему, в которой реакции связей можно свести к трём силам \mathbf{R}_i между i -ым колесом и плоскостью в точках контакта B_i . Пусть компоненты сил реакции \mathbf{R}_i имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = R_{1\xi} \mathbf{e}_\xi + R_{1\eta} \mathbf{e}_\eta + N_1 \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{R}_2 = R_{2\xi} \mathbf{e}_\xi + R_{2\eta} \mathbf{e}_\eta + N_2 \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{R}_3 = R_{3\xi} \mathbf{e}_\xi + R_{3\eta} \mathbf{e}_\eta + N_3 \mathbf{e}_z.$$

Получим вид нормальных реакций опоры (N_1, N_2, N_3).

Утверждение 4.1. *Нормальные реакции опоры N_i ($i = 1, 2, 3$) являются решением системы линейных уравнений*

$$\mathfrak{A}^{eq} \mathbf{N} = (\mathfrak{B}^{eq} \boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \mathfrak{C}^{eq} \boldsymbol{\nu} + \mathfrak{U}^{eq} \mathbf{U} + \mathfrak{g}^{eq} g, \quad (4.6)$$

$$zde \quad \mathfrak{A}^{eq} = \|\mathfrak{a}_{ij}^{eq}\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_1 \sin \alpha_1 - \Delta & \delta_2 \sin \alpha_2 - \Delta & \delta_3 \sin \alpha_3 - \Delta \\ -\delta_1 \cos \alpha_1 & -\delta_2 \cos \alpha_2 & -\delta_3 \cos \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{eq} = \|\mathfrak{b}_{ij}^{eq}\| = & -\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{B}^\nu - \frac{\lambda^2}{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & -\sin \beta_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \\ & - mh \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{B}^\nu - h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\mathfrak{C}^{eq} = \|\mathfrak{c}_{ij}^{eq}\| = -\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{C}^\nu - mh \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{C}^\nu, \quad (4.9)$$

$$\mathfrak{U}^{eq} = \|\mathfrak{u}_{ij}^{eq}\| = -\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{U}^\nu - mh \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{U}^\nu, \quad (4.10)$$

$$\mathfrak{g}^{eq} = \|\mathfrak{g}_{ij}^{eq}\| = m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Верхний индекс \square^{eq} обозначает связь матриц и их компонентов с уравнением относительно нормальных реакций опоры.

Доказательство. Теорема о движении центра масс омни-экипажа имеет вид

$$m \frac{d(\nu_1 \mathbf{e}_\xi + \nu_2 \mathbf{e}_\eta)}{dt} = m \mathbf{g} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i. \quad (4.12)$$

Согласно определению псевдоскоростей (1.16)–(1.18), имеем

$$\frac{d(\nu_1 \mathbf{e}_\xi + \nu_2 \mathbf{e}_\eta)}{dt} = \left(\dot{\nu}_1 - \frac{\nu_2 \nu_3}{\Lambda} \right) \mathbf{e}_\xi + \left(\dot{\nu}_2 + \frac{\nu_1 \nu_3}{\Lambda} \right) \mathbf{e}_\eta. \quad (4.13)$$

Подставив производные (4.13) в уравнение (4.12), получим три уравнения относительно компонент реакций:

$$R_{1\xi} + R_{2\xi} + R_{3\xi} = m\dot{\nu}_1 - \frac{m\nu_2\nu_3}{\Lambda}, \quad (4.14)$$

$$R_{1\eta} + R_{2\eta} + R_{3\eta} = m\dot{\nu}_2 + \frac{m\nu_1\nu_3}{\Lambda}, \quad (4.15)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = mg. \quad (4.16)$$

Подставив уравнения движения (4.1), получим окончательную форму уравнений (4.14) – (4.15):

$$R_{1\xi} + R_{2\xi} + R_{3\xi} = m \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{a}_{1j}^\nu \nu_j \right) \frac{m\nu_3}{\Lambda} - \frac{m\nu_2\nu_3}{\Lambda} + m \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}_{1j}^\nu \nu_j + m \sum_{j=1}^3 \mathbf{u}_{1j}^\nu U_j,$$

$$R_{1\eta} + R_{2\eta} + R_{3\eta} = m \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{a}_{2j}^\nu \nu_j \right) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \frac{m\nu_1\nu_3}{\Lambda} + m \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}_{2j}^\nu \nu_j + m \sum_{j=1}^3 \mathbf{u}_{2j}^\nu U_j,$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} R_{1\xi} + R_{2\xi} + R_{3\xi} \\ R_{1\eta} + R_{2\eta} + R_{3\eta} \end{pmatrix} = (\mathfrak{B}^R \boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \mathfrak{C}^R \boldsymbol{\nu} + \mathfrak{U}^R \mathbf{U}, \quad \text{где} \quad (4.17)$$

$$\mathfrak{B}^R = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{B}^\nu + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\mathfrak{C}^R = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{C}^\nu, \quad (4.19)$$

$$\mathfrak{U}^R = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{U}^\nu. \quad (4.20)$$

Верхний индекс \square^R обозначает связь матриц и их компонентом с реакциями опоры.

Теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс имеет вид

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (4.21)$$

где \mathbf{K} — кинетический момент всей системы относительно её центра масс S , \mathbf{M} — момент внешних сил относительно S .

Для кинетического момента всей системы относительно её центра масс S имеем

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{base}} + \mathbf{K}_{w_1} + \mathbf{K}_{w_2} + \mathbf{K}_{w_3}, \quad (4.22)$$

где \mathbf{K}_{base} — кинетический момент платформы относительно S , \mathbf{K}_{w_1} , \mathbf{K}_{w_2} , \mathbf{K}_{w_3} — кинетические моменты колёс относительно S . Для платформы имеем

$$\mathbf{K}_{\text{base}} = \dot{\theta} \Lambda_{\text{base}}^2 \mathbf{e}_z, \quad (4.23)$$

где Λ_{base}^2 — момент инерции платформы относительно вертикали Sz , проходящей через центр масс. Для колёс имеют место выражения

$$\mathbf{K}_{w_1} = \dot{\theta} \Lambda_w^2 \mathbf{e}_z - \lambda^2 \dot{\chi}_1 \mathbf{n}_1, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{K}_{w_2} = \dot{\theta} \Lambda_w^2 \mathbf{e}_z - \lambda^2 \dot{\chi}_2 \mathbf{n}_2, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{K}_{w_3} = \dot{\theta} \Lambda_w^2 \mathbf{e}_z - \lambda^2 \dot{\chi}_3 \mathbf{n}_3, \quad (4.26)$$

где Λ_w^2 — момент инерции колеса относительно вертикали Sz , λ^2 — момент инерции колеса относительно его оси вращения. Подставив выражения (4.23)–(4.26) в общий вид кинетического момента (4.22), получаем окончательную форму выражения:

$$\mathbf{K} = (\Lambda_{\text{base}}^2 + 3\Lambda_w^2) \dot{\theta} \mathbf{e}_z - \sum_{i=1}^3 \lambda^2 \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i = \Lambda^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z - \sum_{i=1}^3 \lambda^2 \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i.$$

Вычислим производную кинетического момента \mathbf{K} :

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \Lambda^2 \ddot{\theta} \mathbf{e}_z - \sum_{i=1}^3 \lambda^2 (\ddot{\chi}_i \mathbf{n}_i + \dot{\chi}_i \dot{\mathbf{n}}_i). \quad (4.27)$$

По определению (см. рис. 1.1b) для осей колёс верны выражения

$$\mathbf{n}_i = \cos \beta_i \mathbf{e}_\xi + \sin \beta_i \mathbf{e}_\eta, \quad \dot{\mathbf{n}}_i = \dot{\theta} \cos \beta_i \mathbf{e}_\eta - \dot{\theta} \sin \beta_i \mathbf{e}_\xi.$$

Тогда производную кинетического момента (4.27) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\lambda^2 \sum_{i=1}^3 \left(\cos \beta_i \ddot{\chi}_i - \sin \beta_i \dot{\theta} \dot{\chi}_i \right) \mathbf{e}_\xi - \lambda^2 \sum_{i=1}^3 \left(\sin \beta_i \ddot{\chi}_i + \cos \beta_i \dot{\theta} \dot{\chi}_i \right) \mathbf{e}_\eta + \Lambda^2 \ddot{\theta} \mathbf{e}_z.$$

В матричной форме первые два компонента производной (4.27) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}, \mathbf{e}_\xi \right) \\ \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}, \mathbf{e}_\eta \right) \end{pmatrix} = -\lambda^2 \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{\chi}} - \lambda^2 \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & -\sin \beta_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\chi}}. \quad (4.28)$$

Подставив определения псевдоскоростей (1.16)–(1.18), уравнения связей (1.20) и уравнения движения (4.1) в выражение для производной кинетического момента (4.28), получим окончательную форму компонентов производных:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}, \mathbf{e}_\xi \right) \\ \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}, \mathbf{e}_\eta \right) \end{pmatrix} = (\mathfrak{B}^K \boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + (\mathfrak{C}^K \boldsymbol{\nu}) + (\mathfrak{U}^K \mathbf{U}),$$

где

$$\mathfrak{B}^K = -\lambda^2 \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{B}^\nu - \frac{\lambda^2}{m} \begin{pmatrix} -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & -\sin \beta_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \end{pmatrix} \Xi, \quad (4.29)$$

$$\mathfrak{C}^K = -\lambda^2 \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{C}^\nu, \quad (4.30)$$

$$\mathfrak{U}^K = -\lambda^2 \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{U}^\nu. \quad (4.31)$$

Верхний индекс \square^K обозначает связь матриц и их компонентов с производной кинетического момента.

С другой стороны, для момента внешних сил относительно центра масс всей системы S имеем

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 [\overrightarrow{SB}_i, \mathbf{R}_i]. \quad (4.32)$$

По определению (см. рис. 1.1) имеем

$$\overrightarrow{SB}_i = \overrightarrow{QA}_i - \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{A_iB}_i = \delta_i \cos \alpha_i \mathbf{e}_\xi + (\delta_i \sin \alpha_i - \Delta) \mathbf{e}_\eta - h \mathbf{e}_z. \quad (4.33)$$

Первые два компонента момента внешних сил (4.32) имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}, \mathbf{e}_\xi) &= h (R_{1\eta} + R_{2\eta} + R_{3\eta}) + \sum_{i=1}^3 (\delta_i \sin \alpha_i - \Delta) N_i, \\ (\mathbf{M}, \mathbf{e}_\eta) &= -h (R_{1\xi} + R_{2\xi} + R_{3\xi}) - \sum_{i=1}^3 \delta_i \cos \alpha_i N_i, \end{aligned}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{M}, \mathbf{e}_\xi) \\ (\mathbf{M}, \mathbf{e}_\eta) \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{1\xi} + R_{2\xi} + R_{3\xi} \\ R_{1\eta} + R_{2\eta} + R_{3\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{21}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{22}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{23}^{\text{eq}} \\ \mathbf{a}_{31}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{32}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{33}^{\text{eq}} \end{pmatrix} \mathbf{N}, \quad (4.34)$$

$$\text{где } \mathbf{a}_{2i}^{\text{eq}} = \delta_i \sin \alpha_i - \Delta, \quad \mathbf{a}_{3i}^{\text{eq}} = -\delta_i \cos \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.35)$$

и $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ — нормальные реакции опоры.

Упростим выражение для момента внешних сил (4.34), подставив выражения для реакций (4.17):

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{M}, \mathbf{e}_\xi) \\ (\mathbf{M}, \mathbf{e}_\eta) \end{pmatrix} = (\mathfrak{B}^M \boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \mathfrak{C}^M \boldsymbol{\nu} + \mathfrak{U}^M \mathbf{U} + \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{21}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{22}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{23}^{\text{eq}} \\ \mathbf{a}_{31}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{32}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{33}^{\text{eq}} \end{pmatrix} \mathbf{N},$$

где

$$\mathfrak{B}^M = h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{B}^R = mh \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{B}^\nu + h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\mathfrak{C}^M = h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{C}^R = mh \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{C}^\nu, \quad (4.37)$$

$$\mathfrak{U}^M = h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{U}^R = mh \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{U}^\nu. \quad (4.38)$$

Верхний индекс \square^M обозначает связь матриц и их компонентов с моментов внешних сил.

Наконец, закон (4.21) даёт нам два оставшихся уравнения на нормальные реакции опоры \mathbf{N} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{21}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{22}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{23}^{\text{eq}} \\ \mathbf{a}_{31}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{32}^{\text{eq}} & \mathbf{a}_{33}^{\text{eq}} \end{pmatrix} \mathbf{N} = \frac{m\nu_3}{\Lambda} ((\mathfrak{B}^K - \mathfrak{B}^M) \boldsymbol{\nu}) + (\mathfrak{C}^K - \mathfrak{C}^M) \boldsymbol{\nu} + (\mathfrak{U}^K - \mathfrak{U}^M) \mathbf{U}. \quad (4.39)$$

Вместе уравнения (4.16) и (4.39), с учётом определений (4.18)–(4.20), (4.29)–(4.31), (4.35) и (4.36)–(4.38), формируют искомую систему (4.6)–(4.11):

$$\mathfrak{A}^{\text{eq}} \mathbf{N} = (\mathfrak{B}^{\text{eq}} \boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \mathfrak{C}^{\text{eq}} \boldsymbol{\nu} + \mathfrak{U}^{\text{eq}} \mathbf{U} + \mathfrak{g}^{\text{eq}} g,$$

$$\text{где } \mathfrak{A}^{\text{eq}} = \|\mathbf{a}_{ij}^{\text{eq}}\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_1 \sin \alpha_1 - \Delta & \delta_2 \sin \alpha_2 - \Delta & \delta_3 \sin \alpha_3 - \Delta \\ -\delta_1 \cos \alpha_1 & -\delta_2 \cos \alpha_2 & -\delta_3 \cos \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}^{\text{eq}} = \|\mathfrak{b}_{ij}^{\text{eq}}\| &= -\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{B}^\nu - \frac{\lambda^2}{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & -\sin \beta_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \\
&\quad - mh \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{B}^\nu - h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathfrak{C}^{\text{eq}} = \|\mathfrak{c}_{ij}^{\text{eq}}\| &= -\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{C}^\nu - mh \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{C}^\nu, \\
\mathfrak{U}^{\text{eq}} = \|\mathfrak{u}_{ij}^{\text{eq}}\| &= -\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{U}^\nu - mh \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{U}^\nu, \\
\mathfrak{g}^{\text{eq}} = \|\mathfrak{g}_{ij}^{\text{eq}}\| &= m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Определение 4.1. Будем называть трёхколёсный омни-экипаж *вырожденным*, если все три точки его контакта с плоскостью лежат на одной прямой (рис. 4.2) [34, 48, 49].

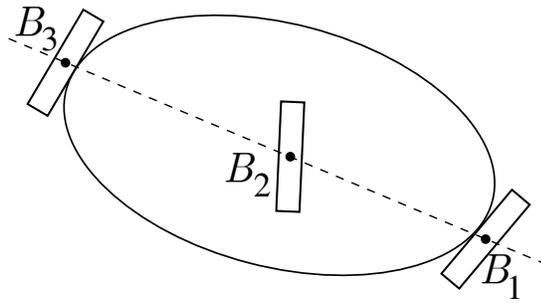


Рис. 4.2: Вырожденный омни-экипаж

Утверждение 4.2. Система уравнений относительно нормальных реакций опоры (4.6) всегда имеет единственное решение для невырожденного экипажа.

Доказательство. Точки контакта B_i лежат на одной прямой, если вектора $\overrightarrow{SB_1}$, $\overrightarrow{SB_2}$, $\overrightarrow{SB_3}$

линейно зависимы. С учётом выражений (4.33) это условие имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} \delta_1 \cos \alpha_1 & \delta_2 \cos \alpha_2 & \delta_3 \cos \alpha_3 \\ \delta_1 \sin \alpha_1 - \Delta & \delta_2 \sin \alpha_2 - \Delta & \delta_3 \sin \alpha_3 - \Delta \\ -h & -h & -h \end{pmatrix} \neq 0.$$

В то же время

$$\det \begin{pmatrix} \delta_1 \cos \alpha_1 & \delta_2 \cos \alpha_2 & \delta_3 \cos \alpha_3 \\ \delta_1 \sin \alpha_1 - \Delta & \delta_2 \sin \alpha_2 - \Delta & \delta_3 \sin \alpha_3 - \Delta \\ h & h & h \end{pmatrix} = -h \det \mathfrak{A}^{\text{eq}}.$$

Таким образом, условие $\det \mathfrak{A}^{\text{eq}} \neq 0$ эквивалентно линейной независимости $\overrightarrow{SB_1}$, $\overrightarrow{SB_2}$, $\overrightarrow{SB_3}$, и система (4.6) всегда имеет единственное решение, если экипаж не вырожден. ■

Далее для любого невырожденного омни-экипажа мы будем считать, что $\det \mathfrak{A}^{\text{eq}} > 0$. Это условие верно в случае, если колёса пронумерованы против часовой стрелки. Поэтому для любого невырожденного экипажа его всегда можно достичь перенумерованием колёс.

Решив систему уравнений для невырожденного экипажа (4.6), мы получим явный вид нормальных реакций опоры:

$$\mathbf{N} = (\mathfrak{B}^N \boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \boldsymbol{\epsilon}^N \boldsymbol{\nu} + \mathfrak{U}^N \mathbf{U} + \mathfrak{g}^N g, \quad (4.40)$$

где матрицы определяются следующими выражениями:

$$\mathfrak{B}^N = (\mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1} \mathfrak{B}^{\text{eq}}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^N = (\mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1} \boldsymbol{\epsilon}^{\text{eq}}, \quad \mathfrak{U}^N = (\mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1} \mathfrak{U}^{\text{eq}}, \quad \mathfrak{g}^N = (\mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1} \mathfrak{g}^{\text{eq}}. \quad (4.41)$$

Верхний индекс \square^N обозначает связь матриц и их компонентов с выражением для нормальных реакций опоры.

Все компоненты матриц \mathfrak{B}^N , $\boldsymbol{\epsilon}^N$, \mathfrak{U}^N , \mathfrak{g}^N постоянны и определяются конфигурацией экипажа и характеристиками мотора: α_i , β_i , γ_i , δ_i ($i = 1, 2, 3$), Δ , h , r , m , Λ , λ , c_1 , c_2 .

Аналогичное выражение для нормальных реакций опоры было получено в работе И.С. Ма-

маева, А.А. Килина и соавторов [52]. Модель данной статьи отличается от нашей тем, что в ней в качестве управлений использовались явно заданные функции $\chi_i(t)$ и не учитывается противоЭДС; при этом рассматриваемая конструкция экипажа позволяет иметь более чем три омни-колеса и модель учитывает сдвиг точки контакта.

4.2 Условия безотрывного движения омни-экипажа произвольной конфигурации

В главе 1 уравнения движения (1.44) построены в предположении, что неударживающие связи, выражающие условие нахождения экипажа над опорной горизонтальной плоскостью, напряжены. Это условие выполнено только в том случае, если нормальные реакции опоры положительны. В противном случае невозможно утверждать, что уравнения динамики описывают движение омни-экипажа: может начаться проскальзывание, произойти отрыв или переворот экипажа.

Определение 4.2. *Отрывом (переворачиванием)* будем называть ситуацию, когда для нормальных реакций опоры омни-экипажа нарушено хотя бы одно из условий $N_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$).

В данном параграфе мы получим условия, которые определяют, может ли произойти отрыв экипажа в его текущем состоянии. Некоторые условия предсказывают границы точно, а некоторые представляют собой лаконичные и ёмкие выражения.

4.2.1 Переворачивание в покое

Начнём с изучения состояния покоя:

$$\begin{aligned} \nu_1 &\equiv 0, & \nu_2 &\equiv 0, & \nu_3 &\equiv 0, \\ U_1 &\equiv 0, & U_2 &\equiv 0, & U_3 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Полученный здесь результат эквивалентен классической теореме статики (см., например, [105] с. 151).

Утверждение 4.3. *Омни-экипаж не переворачивается в покое, если центр масс системы*

находится внутри треугольника точек опоры, т.е.

$$\begin{cases} (\overrightarrow{B_2 B_3} \times \overrightarrow{B_3 S}, \mathbf{e}_z) \det \mathfrak{A}^{eq} > 0, \\ (\overrightarrow{B_3 B_1} \times \overrightarrow{B_1 S}, \mathbf{e}_z) \det \mathfrak{A}^{eq} > 0, \\ (\overrightarrow{B_1 B_2} \times \overrightarrow{B_2 S}, \mathbf{e}_z) \det \mathfrak{A}^{eq} > 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

(См. контрпример на рис. 4.3.)

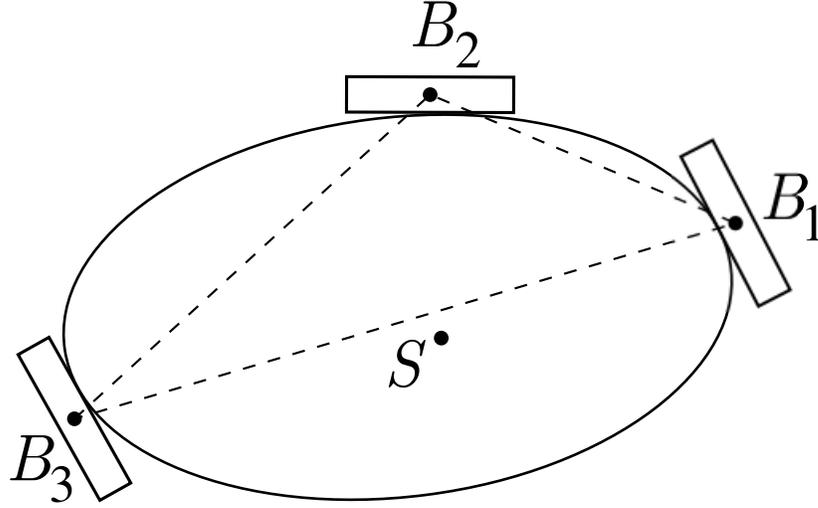


Рис. 4.3: Омни-экипаж, переворачивающийся в покое

Доказательство. Согласно решению (4.40), в покое имеем $N_i = \mathfrak{g}_i^N g$, то есть условие непереворачивания имеет вид

$$\mathfrak{g}_i^N > 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Обратная матрица $(\mathfrak{A}^{eq})^{-1}$ имеет вид:

$$(\mathfrak{A}^{eq})^{-1} = \frac{1}{\det \mathfrak{A}^{eq}} \begin{pmatrix} (\delta_2 \sin \alpha_2 - \Delta)(-\delta_3 \cos \alpha_3) - (\delta_3 \sin \alpha_3 - \Delta)(-\delta_2 \cos \alpha_2) & \square & \square \\ (\delta_3 \sin \alpha_3 - \Delta)(-\delta_1 \cos \alpha_1) - (\delta_1 \sin \alpha_1 - \Delta)(-\delta_3 \cos \alpha_3) & \square & \square \\ (\delta_1 \sin \alpha_1 - \Delta)(-\delta_2 \cos \alpha_2) - (\delta_2 \sin \alpha_2 - \Delta)(-\delta_1 \cos \alpha_1) & \square & \square \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первый компонент вектора \mathfrak{g}_1^N . По определению (4.11) имеем

$$\mathfrak{g}_1^N = m ((\delta_2 \sin \alpha_2 - \Delta)(-\delta_3 \cos \alpha_3) - (\delta_3 \sin \alpha_3 - \Delta)(-\delta_2 \cos \alpha_2)) (\mathfrak{A}^{eq})^{-1}.$$

С учётом выражений (4.33), имеем

$$\mathfrak{g}_1^N = m \left((\overrightarrow{QB_2} - \overrightarrow{QS}) \times (\overrightarrow{QB_3} - \overrightarrow{QS}), \mathbf{e}_z \right) (\det \mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1} = m \left(\overrightarrow{SB_2} \times \overrightarrow{SB_3}, \mathbf{e}_z \right) (\det \mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1}.$$

Так как имеет место $\overrightarrow{SB_2} \times \overrightarrow{SB_3} = (\overrightarrow{SB_2} - \overrightarrow{SB_3}) \times \overrightarrow{SB_3} = \overrightarrow{B_2B_3} \times \overrightarrow{SB_3}$, домножив условие $\mathfrak{g}_1^N > 0$ на положительный множитель $m (\det \mathfrak{A}^{\text{eq}})^2$, получим первое искомое условие (4.42). Оставшиеся два условия получаются тем же образом. ■

4.2.2 Условия безотрывности для произвольного движения

В общем случае условия отсутствия отрыва имеют следующий вид.

Теорема 4.1. Пусть в текущий момент времени омни-экипаж имеет псевдоскорости ν_1, ν_2, ν_3 . Если управляющие напряжения удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{11}^N U_1 + \mathbf{u}_{12}^N U_2 + \mathbf{u}_{13}^N U_3 + \mathbf{f}_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) > 0, \\ \mathbf{u}_{21}^N U_1 + \mathbf{u}_{22}^N U_2 + \mathbf{u}_{23}^N U_3 + \mathbf{f}_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) > 0, \\ \mathbf{u}_{31}^N U_1 + \mathbf{u}_{32}^N U_2 + \mathbf{u}_{33}^N U_3 + \mathbf{f}_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3) > 0, \end{cases} \quad (4.43)$$

где

$$\mathbf{f}_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{b}_{ij}^N \nu_j \right) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_{ij}^N \nu_j + \mathfrak{g}_i^N g \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.44)$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

Доказательство. Условия (4.43) представляют собой условия $N_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) после подстановки явного вида выражений (4.40). ■

Условия (4.43) являются точными: в случае, если хотя бы одно из них нарушено, хотя бы одна реакция неположительна. (Более строго, если хотя бы одно из выражений в левой части отрицательно, соответствующая нормальная реакция отрицательна.) Во многих случаях затруднительно анализировать или визуализировать выражения (4.43). Кроме того, необходимо явно указывать значения всех псевдоскоростей и напряжений для использования этих условий. Далее в пункте мы сформулируем несколько следствий с более лаконичными условиями отсутствия отрыва.

Теорема 4.2. Пусть в текущий момент времени омни-экипаж имеет псевдоскорости $\nu_1, \nu_2,$

ν_3 . Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \min_{i=1,2,3} \frac{f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\sqrt{(u_{i1}^N)^2 + (u_{i2}^N)^2 + (u_{i3}^N)^2}}, \quad (4.45)$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

Доказательство. В пространстве (U_1, U_2, U_3) условия (4.43) описывают пересечение трёх полупространств. Мгновенные значения псевдоскоростей описывают параллельные сдвиги плоскостей, задающих эти полупространства. В некоторых случаях возможно вписать в область, определяющую отсутствие отрыва, шар с центром в начале координат (рис. 4.4).

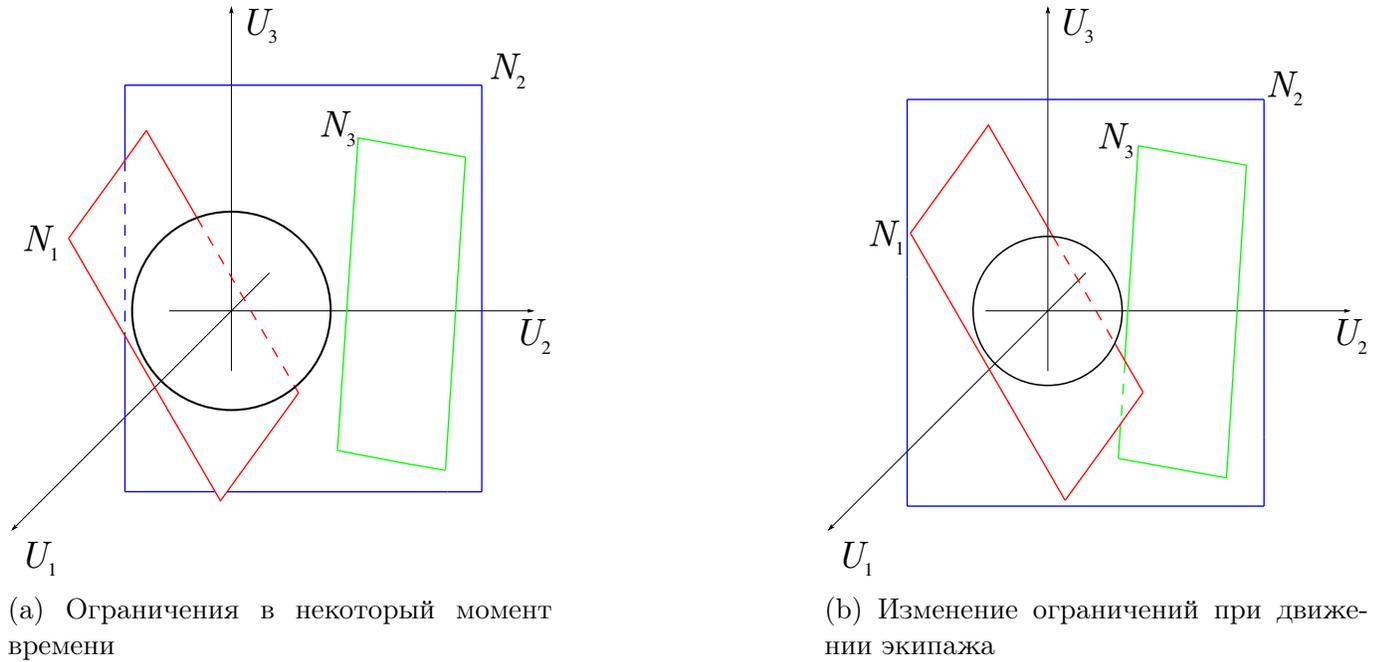


Рис. 4.4: Шар внутри области отсутствия отрыва

Из аналитической геометрии известно, что расстояние от начала координат до i -ой плоскости определяется как

$$\frac{|f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)|}{\sqrt{(u_{i1}^N)^2 + (u_{i2}^N)^2 + (u_{i3}^N)^2}}.$$

В данном контексте удобно ввести понятие расстояния со знаком, которое положительно в том случае, если начало координат входит в область отсутствия отрыва, и отрицательно в противном случае. Это условие совпадает со знаком $f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, поэтому такое расстояние со знаком имеет

вид

$$\frac{f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\sqrt{(\mathbf{u}_{i1}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i2}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i3}^N)^2}}.$$

Таким образом, условия теоремы (4.45) определяют шар, вписанный в область отсутствия отрыва. В случае, если такого шара не существует, как минимум одно из значений $f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ отрицательно, поэтому условие описывает пустое множество. В случае, если такой шар существует, он касается ближайшей (или ближайших) из плоскостей. ■

Условие теоремы является достаточным, но не является необходимым, так как шар — это подмножество области отсутствия отрыва. В то же время шар касается границ области, поэтому если мощность напряжений нарушает условие теоремы 4.2, всегда существуют такие напряжения, при которых происходит отрыв.

Теорема 4.3. Пусть в данный момент времени омни-экипаж имеет величину скорости центра масс $v_S \geq 0$ и угловую скорость платформы $\omega \mathbf{e}_z$. Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \min_{i=1,2,3} \frac{\mathfrak{V}_i(v_S, \omega)}{\sqrt{(\mathbf{u}_{i1}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i2}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i3}^N)^2}},$$

где

$$\mathfrak{V}_i(v_S, \omega) = \left\{ \min f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \mid \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} = v_S, \nu_3 = \Lambda \omega \right\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

Теорема 4.4. Пусть в данный момент времени омни-экипаж имеет кинетическую энергию $T = H$. Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \min_{i=1,2,3} \frac{\mathfrak{H}_i(H)}{\sqrt{(\mathbf{u}_{i1}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i2}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i3}^N)^2}},$$

где

$$\mathfrak{H}_i(H) = \{ \min f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \mid T(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = H \} \quad (i = 1, 2, 3),$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

Доказательство. Аналогично теореме 4.2, данные условия определяют набор параллельных

плоскостей. В некоторых случаях возможно вписать шар в область отсутствия отрыва, которую определяют эти плоскости. Чтобы удовлетворить всем возможным случаям, мы должны выбрать условия, которые определяются минимальным расстоянием со знаком для каждого i .

■

Аналогично, условия теорем не являются необходимыми, но являются достаточными. Если мощность напряжений нарушает условие теоремы 4.3 или 4.4, всегда существуют такие напряжения, при которых происходит отрыв.

4.2.3 Вычисление условий безотрывного движения

Для поиска функций $\mathfrak{V}_i(v_S, \omega)$ и $\mathfrak{H}_i(H)$ из теорем 4.3 и 4.4 можно воспользоваться методом множителей Лагранжа.

Утверждение 4.4. Следующее выражение определяет функцию $\mathfrak{V}_i(v_S, \omega)$ из теоремы 4.3:

$$\mathfrak{V}_i(v_S, \omega) = -v_S \sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N \omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N \omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2} + (m\mathbf{b}_{i3}^N \omega + \mathbf{c}_{i3}^N) \Lambda \omega + \mathfrak{g}_i^N g, \quad (4.46)$$

для $i = 1, 2, 3$.

Наиболее опасным с точки зрения минимума величины нормальной реакции опоры N_i является движение вида

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m\mathbf{b}_{i1}^N \omega + \mathbf{c}_{i1}^N}{\sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N \omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N \omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2}} v_S \\ -\frac{m\mathbf{b}_{i2}^N \omega + \mathbf{c}_{i2}^N}{\sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N \omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N \omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2}} v_S \end{pmatrix}.$$

Доказательство. По определению псевдоскорости (1.18) вместо ν_3 в выражения (4.44) можно подставить $\Lambda \omega$.

Стационарные точки (ν_1, ν_2) можно найти из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} m\mathbf{b}_{i1}^N \omega + \mathbf{c}_{i1}^N + 2\kappa \nu_1 = 0, \\ m\mathbf{b}_{i2}^N \omega + \mathbf{c}_{i2}^N + 2\kappa \nu_2 = 0, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 = v_S^2, \end{cases} \quad (4.47)$$

где \varkappa – множитель Лагранжа, для $i = 1, 2, 3$.

Система (4.47) имеет два решения:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m\mathbf{b}_{i1}^N\omega + \mathbf{c}_{i1}^N}{\sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N\omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N\omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2}}v_S \\ \frac{m\mathbf{b}_{i2}^N\omega + \mathbf{c}_{i2}^N}{\sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N\omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N\omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2}}v_S \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m\mathbf{b}_{i1}^N\omega + \mathbf{c}_{i1}^N}{\sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N\omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N\omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2}}v_S \\ -\frac{m\mathbf{b}_{i2}^N\omega + \mathbf{c}_{i2}^N}{\sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N\omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N\omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2}}v_S \end{pmatrix},$$

в случае, если знаменатель не равен нулю.

Экстремальные значения \mathfrak{V}_i имеют вид

$$\mathfrak{V}_i(v_S, \omega) = \pm v_S \sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N\omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N\omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2} + (m\mathbf{b}_{i3}^N\omega + \mathbf{c}_{i3}^N) \Lambda\omega + \mathbf{g}_i^N g.$$

Так как по определению $v_S \geq 0$, отрицательное значение доставляет минимум \mathfrak{V}_i

$$\mathfrak{V}_i(v_S, \omega) = -v_S \sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N\omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N\omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2} + (m\mathbf{b}_{i3}^N\omega + \mathbf{c}_{i3}^N) \Lambda\omega + \mathbf{g}_i^N g$$

для всех $i = 1, 2, 3$, что приводит к искомому выражению (4.46). При этом отрицательное решение системы (4.47) минимум величины нормальной реакции опоры N_i .

Наконец, если знаменатель равен нулю, имеем $\mathbf{b}_{i1}^N = \mathbf{c}_{i1}^N = \mathbf{b}_{i2}^N = \mathbf{c}_{i2}^N = 0$ и $\mathfrak{V}_i(v_S, \omega)$ не зависит от v_S . Таким образом, искомое выражение (4.46) также имеет место. ■

Утверждение 4.5. *Решение следующей системы уравнений определяет стационарные точки функции $\mathfrak{H}_i(H)$ из теоремы 4.4:*

$$\begin{cases} \mathfrak{B}_{df_i} \boldsymbol{\nu} + \varkappa \mathfrak{A} \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{c}_i^N, \\ \boldsymbol{\nu}^T \mathfrak{A} \boldsymbol{\nu} = 2H. \end{cases} \quad (4.48)$$

где

$$B_{d\dot{i}} = \frac{m}{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{b}_{i1}^N \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_{i2}^N \\ \mathbf{b}_{i1}^N & \mathbf{b}_{i2}^N & 2\mathbf{b}_{i3}^N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_i^N = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{i1}^N \\ \mathbf{c}_{i2}^N \\ \mathbf{c}_{i3}^N \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

\mathfrak{A} — матрица кинетической энергии с подставленными связями, \varkappa — множитель Лагранжа, для $i = 1, 2, 3$.

Поиск общего решения уравнения (4.48) является трудоёмкой задачей, но его возможно найти в некоторых конкретных случаях, что будет продемонстрировано в параграфе 4.3.

Соберём результаты пунктов 4.1–4.2.3 в пошаговый алгоритм вычисления условий отсутствия отрыва на основе теоремы 4.1.

1. Описать параметры экипажа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ ($i = 1, 2, 3$), $\Delta, h, r, m, \Lambda, \lambda$ и характеристики моторов c_1, c_2 .
2. Убедиться, что нумерация колёс удовлетворяет условию $\det \mathfrak{A}^{\text{eq}} > 0$. См. определение (4.7).
3. Вычислить матрицу связей Ξ . См. определение (1.20).
4. Вычислить матрицы, определяющие производные псевдоскоростей: $\mathbf{b}_{ij}^\nu, \mathbf{c}_{ij}^\nu, \mathbf{u}_{ij}^\nu$ ($i, j = 1, 2, 3$). См. определение (4.2)–(4.5).
5. Вычислить матрицы, определяющие уравнение относительно нормальных компонентов реакций: $\mathbf{b}_{ij}^\nu, \mathbf{c}_{ij}^\nu, \mathbf{u}_{ij}^\nu, \mathbf{g}_i^\nu$ ($i, j = 1, 2, 3$). См. определение (4.8)–(4.11).
6. Вычислить матрицы, определяющие нормальные компоненты реакций: $\mathbf{b}_{ij}^N, \mathbf{c}_{ij}^N, \mathbf{u}_{ij}^N, \mathbf{g}_i^N$ ($i, j = 1, 2, 3$). См. определение (4.41).
7. Подставить нормальные компоненты реакций в условия отсутствия отрыва. См. определение (4.43)–(4.44).

Теоремы 4.2–4.4 предоставляют одно лаконичное условие вместо системы условий.

Чтобы найти условие отсутствия отрыва из теоремы 4.2, необходим следующий дополнительный шаг.

- 1[†]. Найти минимальное значение $\frac{f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\sqrt{(\mathbf{u}_{i1}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i2}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i3}^N)^2}}$ среди $i = 1, 2, 3$ для заданных ν_1, ν_2, ν_3 .

Чтобы найти условие отсутствия отрыва из теоремы 4.3, необходимы следующие дополнительные шаги.

1^{††}. Вычислить значения функций $\mathfrak{V}_i(v_S, \omega)$ ($i = 1, 2, 3$). См. определение (4.46).

2^{††}. Найти минимальное значение $\frac{\mathfrak{V}_i(v_S, \omega)}{\sqrt{(u_{i1}^N)^2 + (u_{i2}^N)^2 + (u_{i3}^N)^2}}$ среди $i = 1, 2, 3$ для заданных v_S, ω .

Чтобы найти условие отсутствия отрыва из теоремы 4.4, необходимы следующие дополнительные шаги.

1^{†††}. Найти стационарные точки, решив систему (4.48) для $i = 1, 2, 3$. См. определение в (4.49).

2^{†††}. Определить функции $\mathfrak{H}_i(H)$ поиском минимального значения $f_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ среди стационарных точек, полученных в (4.48).

3^{†††}. Найти минимальное значение $\frac{\mathfrak{H}_i(H)}{\sqrt{(u_{i1}^N)^2 + (u_{i2}^N)^2 + (u_{i3}^N)^2}}$ среди $i = 1, 2, 3$ для заданного H .

4.3 Условия безотрывного движения симметричного омни-экипажа

4.3.1 Вычисление условий безотрывного движения

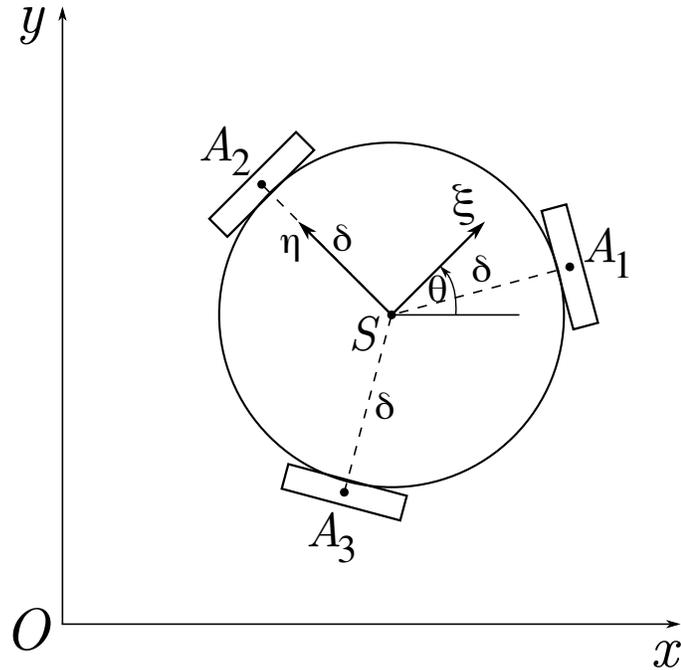


Рис. 4.5: Симметричный омни-экипаж

Воспользуемся алгоритмом из пункта 4.2.3 для формирования условий безотрывного движения для симметричного омни-экипажа (рис. 4.5, см. параграф 1.4).

Симметричный экипаж характеризуется следующим набором параметров:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 0, & \delta_1 &= \delta_2 = \delta_3 = \delta > 0, \\
 R &= R > 0, & h &= h > 0, \\
 \alpha_1 = \beta_1 &= -\frac{\pi}{6}, & \alpha_2 = \beta_2 &= \frac{\pi}{2}, & \alpha_3 = \beta_3 &= \frac{7\pi}{6}, \\
 \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 &= \frac{\pi}{2}, \\
 m &= m > 0, & \Lambda &= \Lambda > 0, & \lambda &= \lambda > 0, \\
 c_1 &= c_1 > 0, & c_2 &= c_2 > 0.
 \end{aligned}$$

Матрица \mathfrak{A}^{eq} из определения (4.7) имеет вид:

$$\mathfrak{A}^{\text{eq}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\delta}{2} & \delta & -\frac{\delta}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}\delta}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}\delta}{2} \end{pmatrix}$$

Её определитель равен $\frac{3\sqrt{3}\delta^2}{2} > 0$. Таким образом, экипаж не переворачивается в покое и колёса пронумерованы правильным образом.

Матрица связей экипажа Ξ из определения (1.20) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2r} & \frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{\delta}{\Lambda r} \\ -\frac{1}{r} & 0 & \frac{\delta}{\Lambda r} \\ \frac{1}{2r} & -\frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{\delta}{\Lambda r} \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения симметричного экипажа имеют вид (4.1)

$$\dot{\nu}_1 = \frac{2mr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \frac{\nu_2\nu_3}{\Lambda} - \frac{3c_2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \nu_1 + \frac{c_1 r}{2mr^2 + 3\lambda^2} (U_1 - 2U_2 + U_3), \quad (4.50)$$

$$\dot{\nu}_2 = -\frac{2mr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \frac{\nu_1\nu_3}{\Lambda} - \frac{3c_2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \nu_2 + \frac{\sqrt{3}c_1 r}{2mr^2 + 3\lambda^2} (U_1 - U_3), \quad (4.51)$$

$$\dot{\nu}_3 = -\frac{3c_2\delta^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2\delta^2} \nu_3 + \frac{c_1\Lambda\delta r}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2\delta^2} (U_1 + U_2 + U_3). \quad (4.52)$$

Нормальные реакции симметричного экипажа (4.40) имеют вид

$$N_1 = \frac{2mhr + 3\lambda^2}{\delta(2mr^2 + 3\lambda^2)} \left(\frac{\lambda^2}{\Lambda r} \frac{\nu_1 + \sqrt{3}\nu_2}{2} \nu_3 + \frac{c_2}{r} \frac{\sqrt{3}\nu_1 - \nu_2}{2} + c_1 \frac{U_2 - U_3}{\sqrt{3}} \right) + \frac{mg}{3}, \quad (4.53)$$

$$N_2 = \frac{(2mhr + 3\lambda^2)}{\delta(2mr^2 + 3\lambda^2)} \left(-\frac{\lambda^2}{\Lambda r} \nu_1\nu_3 + \frac{c_2}{r} \nu_2 + c_1 \frac{U_3 - U_1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{mg}{3}, \quad (4.54)$$

$$N_3 = \frac{(2mhr + 3\lambda^2)}{\delta(2mr^2 + 3\lambda^2)} \left(\frac{\lambda^2}{\Lambda r} \frac{\nu_1 - \sqrt{3}\nu_2}{2} \nu_3 + \frac{c_2}{r} \frac{-\sqrt{3}\nu_1 - \nu_2}{2} + c_1 \frac{U_1 - U_2}{\sqrt{3}} \right) + \frac{mg}{3}. \quad (4.55)$$

Следствие 4.1. Пусть в данный момент времени симметричный экипаж имеет псевдоскорости ν_1, ν_2, ν_3 . Если управляющие напряжения удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} U_2 - U_3 > -\mathfrak{d}_2 \frac{\nu_1 + \sqrt{3}\nu_2}{2} \nu_3 - \mathfrak{d}_1 \frac{\sqrt{3}\nu_1 - \nu_2}{2} - \mathfrak{d}_0, \\ U_3 - U_1 > \mathfrak{d}_2 \nu_1\nu_3 - \mathfrak{d}_1 \nu_2 - \mathfrak{d}_0, \\ U_1 - U_2 > -\mathfrak{d}_2 \frac{\nu_1 - \sqrt{3}\nu_2}{2} \nu_3 - \mathfrak{d}_1 \frac{-\sqrt{3}\nu_1 - \nu_2}{2} - \mathfrak{d}_0, \end{cases} \quad (4.56)$$

где

$$\mathfrak{d}_2 = \frac{\sqrt{3}\lambda^2}{c_1\Lambda r}, \quad \mathfrak{d}_1 = \frac{\sqrt{3}c_2}{c_1 r}, \quad \mathfrak{d}_0 = \frac{\sqrt{3}m\delta g}{3c_1} \frac{2mr^2 + 3\lambda^2}{2mhr + 3\lambda^2}, \quad (4.57)$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

Доказательство. Условия получаются непосредственным вычислением шагов из раздела 4.2.3 для теоремы 4.1. ■

Следствие 4.2. Пусть в данный момент времени симметричный экипаж имеет псевдоскорости ν_1, ν_2, ν_3 . Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \min \{ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \}, \quad (4.58)$$

где

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \mathfrak{d}_2 \frac{\nu_1 + \sqrt{3}\nu_2}{2} \nu_3 + \mathfrak{d}_1 \frac{\sqrt{3}\nu_1 - \nu_2}{2} + \mathfrak{d}_0, \\ \epsilon_2 &= -\mathfrak{d}_2\nu_1\nu_3 + \mathfrak{d}_1\nu_2 + \mathfrak{d}_0, \\ \epsilon_3 &= \mathfrak{d}_2 \frac{\nu_1 - \sqrt{3}\nu_2}{2} \nu_3 + \mathfrak{d}_1 \frac{-\sqrt{3}\nu_1 - \nu_2}{2} + \mathfrak{d}_0,\end{aligned}$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

Доказательство. Условия получаются непосредственным вычислением шагов из раздела 4.2.3 для теоремы 4.2. ■

Следствие 4.3. Пусть в данный момент времени симметричный экипаж имеет величину скорости центра масс $v_S \geq 0$ и угловую скорость платформы $\omega \mathbf{e}_z$. Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \frac{\sqrt{2}\mathfrak{d}_0}{2} - \frac{\sqrt{2}v_S}{2} \sqrt{\mathfrak{d}_2^2 \Lambda^2 \omega^2 + \mathfrak{d}_1^2}, \quad (4.59)$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

Доказательство. Условия получаются непосредственным вычислением шагов из раздела 4.2.3 для теоремы 4.3. В этом случае $\mathfrak{V}_1(v_S, \omega) = \mathfrak{V}_2(v_S, \omega) = \mathfrak{V}_3(v_S, \omega)$, и дополнительных действий для поиска минимальной $\mathfrak{V}_i(v_S, \omega)$ предпринимать не требуется. ■

Следствие 4.4. Пусть в данный момент времени экипаж имеет кинетическую энергию $T = H$. Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \mathfrak{H}(H), \quad (4.60)$$

где

$$\mathfrak{H}(H) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}\mathfrak{d}_0}{2} - \frac{\sqrt{6}c_2}{c_1} \sqrt{\frac{H}{2mr^2 + 3\lambda^2}}, & \text{для } H \leq \frac{c_2^2 (\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2)}{2\lambda^4 r^2}, \\ \frac{\sqrt{2}\mathfrak{d}_0}{2} - \frac{\sqrt{3}}{c_1 r} \sqrt{\frac{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \left(\frac{\lambda^2 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2} H + \frac{c_2^2}{2\lambda^2} \right), & \text{для } H \geq \frac{c_2^2 (\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2)}{2\lambda^4}. \end{cases}$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

Доказательство. Условия получаются непосредственным вычислением шагов из пункта 4.2.3 для теоремы 4.4.

Система (4.48) имеет вид

$$\begin{cases} \mathfrak{B}_{df_i} \boldsymbol{\nu} + \varkappa \mathfrak{A} \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{c}_i^N, \\ \boldsymbol{\nu}^T \mathfrak{A} \boldsymbol{\nu} = 2H. \end{cases}$$

Рассмотрим группу уравнений для реакции первого колеса N_1 . Для симметричного экипажа компоненты (4.49) имеют вид

$$\mathfrak{B}_{df_i} = \frac{\lambda^2}{\Lambda \delta r} \frac{2mhr + 3\lambda^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} m + \frac{3\lambda^2}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & m + \frac{3\lambda^2}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 3\frac{\delta^2 \lambda^2}{\Lambda^2 r^2} \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

$$\mathbf{c}_1^N = \frac{c_2}{\delta r} \frac{2mhr + 3\lambda^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Случай I. Рассмотрим ситуацию, в которой матрица $\mathfrak{B}_{df_1} + \varkappa \mathfrak{A}$ невырождена. Тогда множитель Лагранжа \varkappa можно получить из следующего уравнения:

$$((\mathfrak{B}_{df_1} + \varkappa \mathfrak{A})^{-1} \mathbf{c}_1^N)^* \mathfrak{A} (\mathfrak{B}_{df_1} + \varkappa \mathfrak{A})^{-1} \mathbf{c}_1^N = 2H. \quad (4.64)$$

После подстановки (4.61)–(4.63) в (4.64), получаем следующее уравнение:

$$\frac{2c_2^2 (2mhr + 3\lambda^2)^2}{\varkappa^2 \delta^2 (2mr^2 + 3\lambda^2)^3} = 2H. \quad (4.65)$$

Получив пару множителей Лагранжа из решением уравнения (4.65), из решения систе-

мы (4.48) получаем две стационарных точки:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \pm \sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

В этих стационарных точках значения искомой функции $f_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ равны

$$f_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{mg}{3} \mp 2 \frac{c_2}{\delta r} \frac{2mhr + 3\lambda^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}}. \quad (4.67)$$

Значение (4.67) со знаком минус — первый кандидат на минимальное значение функции для формирования искомой $\mathfrak{H}_1(H)$:

$$f_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{mg}{3} - 2 \frac{c_2}{\delta r} \frac{2mhr + 3\lambda^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}}. \quad (4.68)$$

Случай II. Теперь рассмотрим ситуацию, в которой матрица $\mathfrak{B}_{df_1} + \varkappa \mathfrak{A}$ вырождена. Тогда множитель Лагранжа \varkappa можно получить из следующего уравнения:

$$\det(\mathfrak{B}_{df_1} + \varkappa \mathfrak{A}) = 0. \quad (4.69)$$

Подставив (4.61)–(4.63) в (4.69), получаем следующее уравнение:

$$\left\{ \left(m + \frac{3\lambda^2}{2r^2} \right) \left(1 + 3 \frac{\delta^2 \lambda^2}{\Lambda^2 r^2} \right) \varkappa^2 - \left(\frac{\lambda^2}{m \delta r \Lambda} \frac{2mhr + 3\lambda^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \right)^2 \right\} \left(m + \frac{3\lambda^2}{2r^2} \right) \varkappa = 0. \quad (4.70)$$

Для $\varkappa = 0$ не существует решения уравнения (4.48). Два ненулевых значения множителя \varkappa дают следующее семейство решений для первого уравнения системы (4.48):

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2\lambda^2 \Lambda} \sqrt{\frac{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \begin{pmatrix} \lambda^2 \nu_3^H + \sqrt{3} c_2 \Lambda \\ \sqrt{3} \lambda^2 \nu_3^H - c_2 \Lambda \end{pmatrix}, \quad \nu_3 = \nu_3^H. \quad (4.71)$$

Из второго уравнения системы (4.48) получаем недостающий компонент решения:

$$\nu_3^H = \pm \frac{\sqrt{2}\Lambda}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{2H\lambda^4 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2} - c_2^2}. \quad (4.72)$$

Заметим, что знаки \pm в (4.71) и (4.72) независимы. Решение существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{2H\lambda^4 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2} - c_2^2 \geq 0.$$

Если $\frac{2H\lambda^4 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2} - c_2^2 = 0$, то мы имеем то же решение, что и в (4.66). Если $\frac{2H\lambda^4 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2} - c_2^2 > 0$, то мы имеем четыре дополнительных стационарных точки.

В этих точках значения искомой функции $f_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ равны

$$f_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{mg}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta r} \frac{2mhr + 3\lambda^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \sqrt{\frac{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \left(\frac{\lambda^2 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2} H + \frac{c_2^2}{2\lambda^2} \right). \quad (4.73)$$

Значение (4.67) со знаком минус — второй кандидат на минимальное значение функции для формирования искомой $\mathfrak{H}_1(H)$:

$$f_1^{\text{II}}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{mg}{3} - \frac{\sqrt{2}}{\delta r} \frac{2mhr + 3\lambda^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \sqrt{\frac{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \left(\frac{\lambda^2 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2} H + \frac{c_2^2}{2\lambda^2} \right). \quad (4.74)$$

Наконец, так как следующее неравенство всегда имеет место

$$f_1^{\text{I}} - f_1^{\text{II}} = \frac{\sqrt{2}}{\delta r} \frac{2mhr + 3\lambda^2}{2mr^2 + 3\lambda^2} \sqrt{\frac{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \left(\sqrt{\frac{\lambda^2 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2}} H - \sqrt{\frac{c_2^2}{2\lambda^2}} \right)^2 \geq 0,$$

корень f_1^{II} доставляет минимум функции $\mathfrak{H}_1(H)$, если он существует, иначе f_1^{I} доставляет минимум функции $\mathfrak{H}_1(H)$.

Так как имеет место симметрия, для остальных двух колёс получаем то же решение и $\mathfrak{H}_1(H) = \mathfrak{H}_2(H) = \mathfrak{H}_3(H)$. Тогда (4.60) определяет искомое условие. ■

Одним из результатов 4.3 и 4.4 являются наиболее опасные с точки зрения отрыва движения в соответствующих семействах движений.

Следствие 4.5. Для движений с фиксированной величиной скорости центра масс $v_S \geq 0$ и угловой скоростью платформы ωe_z имеют место следующие утверждения:

- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2\omega + \sqrt{3}c_2}{2\sqrt{\lambda^4\omega^2 + c_2^2}}v_S \\ -\frac{\sqrt{3}\lambda^2\omega - c_2}{2\sqrt{\lambda^4\omega^2 + c_2^2}}v_S \end{pmatrix}$ доставляет минимум нормальной реакции опоры N_1 ,
- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2\omega}{\sqrt{\lambda^4\omega^2 + c_2^2}}v_S \\ -\frac{c_2}{\sqrt{\lambda^4\omega^2 + c_2^2}}v_S \end{pmatrix}$ доставляет минимум нормальной реакции опоры N_2 ,
- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2\omega - \sqrt{3}c_2}{2\sqrt{\lambda^4\omega^2 + c_2^2}}v_S \\ \frac{\sqrt{3}\lambda^2\omega + c_2}{2\sqrt{\lambda^4\omega^2 + c_2^2}}v_S \end{pmatrix}$ доставляет минимум нормальной реакции опоры N_3 .

Следствие 4.6. Среди всех движений без поворота ($\nu_3 = 0$), движение, при котором скорость центра масс направлена из центра i -го колеса в центр масс (направление вектора $\overrightarrow{A_i S}$, см. рис. 4.5), доставляет минимум нормальной реакции опоры N_i ($i = 1, 2, 3$).

Следствие 4.7. Для движений с фиксированной кинетической энергией $H \leq \frac{c_2^2(\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2)}{2\lambda^4 r^2}$ имеют место следующие утверждения:

- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \\ \sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ доставляет минимум нормальной реакции опоры N_1 ,
- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ доставляет минимум нормальной реакции опоры N_2 ,
- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \\ \sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ доставляет минимум нормальной реакции опоры N_3 .

Следствие 4.8. Для движений с фиксированной кинетической энергией $H \geq \frac{c_2^2(\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2)}{2\lambda^4 r^2}$ имеют место следующие утверждения:

$$\bullet \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2 \nu_3^H + \sqrt{3} c_2 \Lambda}{2c^\ominus} \\ -\frac{\sqrt{3} \lambda^2 \nu_3^H - c_2 \Lambda}{2c^\ominus} \\ \nu_3^H \end{pmatrix} \text{ доставляет минимум нормальной реакции опоры } N_1,$$

$$\bullet \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 \nu_3^H}{c^\ominus} \\ -\frac{c_2 \Lambda}{c^\ominus} \\ \nu_3^H \end{pmatrix} \text{ доставляет минимум нормальной реакции опоры } N_2,$$

$$\bullet \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2 \nu_3^H - \sqrt{3} c_2 \Lambda}{2c^\ominus} \\ \frac{\sqrt{3} \lambda^2 \nu_3^H - c_2 \Lambda}{2c^\ominus} \\ \nu_3^H \end{pmatrix} \text{ доставляет минимум нормальной реакции опоры } N_3,$$

$$\text{где } c^\ominus = \frac{\sqrt{2} \lambda^2 \Lambda}{2} \sqrt{\frac{\Lambda^2 r^2 + 3 \lambda^2 \delta^2}{2 m r^2 + 3 \lambda^2}} \text{ и } \nu_3^H = \pm \frac{\sqrt{2} \Lambda}{2 \lambda^2} \sqrt{\frac{2 H \lambda^4 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3 \lambda^2 \delta^2} - c_2^2}.$$

Следующие результаты можно использовать при выборе конфигурации экипажа.

Следствие 4.9. *Нормальные реакции опоры симметричного омни-экипажа не зависят от вертикального момента инерции системы Λ^2 .*

Доказательство. Только одно слагаемое реакций (4.53)–(4.55) зависит от Λ и ν_3 . Так как в это слагаемое момент инерции и псевдоскорость входят только в виде отношения $\frac{\nu_3}{\Lambda}$, что по сути есть $\dot{\theta}$, выражения не зависят от вертикального момента инерции системы Λ^2 . ■

Следствие 4.10. *Если центр масс симметричного экипажа находится на той же высоте, что и центры колёс ($h = r$), а движение происходит без поворота ($\nu_3 = 0$), то нормальные реакции опоры не зависят от момента инерции колёс относительно оси вращения λ^2 .*

Доказательство. См. (4.53)–(4.55). ■

Следствие 4.11. *Для симметричного экипажа имеют место следующие утверждения:*

- чем тяжелее экипаж (больше m),
- чем шире платформа (больше δ),
- чем ниже центр масс (меньше h),
- чем меньше сопротивление в осях колёс и роликов (меньше c_2),

тем менее строгими являются ограничения на мощность управляющих напряжений.

Доказательство. См. (4.59)–(4.60). ■

Следствие 4.12. Для симметричного экипажа с “выключенными моторами”

($U_1 = U_2 = U_3 = 0$) имеет место следующее утверждение: чем больше скорость центра масс v_S , тем меньше дозволённая величина угловой скорости ω , и наоборот.

Доказательство. В случае $U_1 = U_2 = U_3 = 0$, условия отсутствия отрыва (4.59) имеют вид

$$v_S < \frac{\mathfrak{d}_0}{\sqrt{\mathfrak{d}_2^2 \Lambda^2 \omega^2 + \mathfrak{d}_1^2}}.$$
■

4.3.2 Анализ условий безотрывности на примерах движений

Рассмотрим два управляемых движения симметричного омни-экипажа. Мы будем рассматривать экипаж с завышенным центром масс, так как в этом случае проще демонстрировать отрыв во время движения. (В приложениях это может быть экипаж с установленным на платформе манипулятором или грузом с высоким положением центра масс.)

Для создания графиков используем библиотеки Qt [98] и QCustomPlot [99]. Для моделирования экипажа используем параметры, описанные в таб. 4.1. Выбор параметров основан на реальных моделях [1, 100, 102] и численном моделировании в работах [55, 66, 70]. Исходный код программы находится в открытом доступе (см. [23], директория *no-overturn-analysis*).

Параметр	Значение	Единицы измерения	Параметр	Значение	Единицы измерения
m	3	кг	Λ^2	$5 \cdot 10^{-2}$	кг · м ²
δ	0.15	м	λ^2	$5 \cdot 10^{-4}$	кг · м ²
h	0.20	м	c_1	10^{-2}	кг · м ² · с ⁻² · В ⁻¹
r	0.05	м	c_2	$2.5 \cdot 10^{-4}$	кг · м ² · с ⁻¹

Таблица 4.1: Параметры численного моделирования симметричного омни-экипажа

Пример I (рис. 4.6). Будем двигаться из состояния покоя с явно заданными постоянными

управлениями

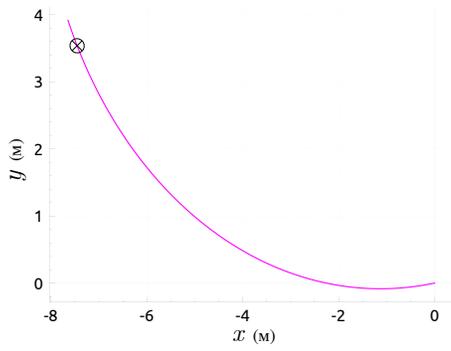
$$U_1(t) = -20 \text{ В},$$

$$U_2(t) = 30 \text{ В},$$

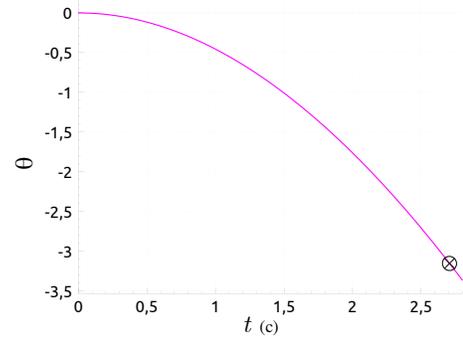
$$U_3(t) = -12 \text{ В}$$

(см. рис. 4.6f).

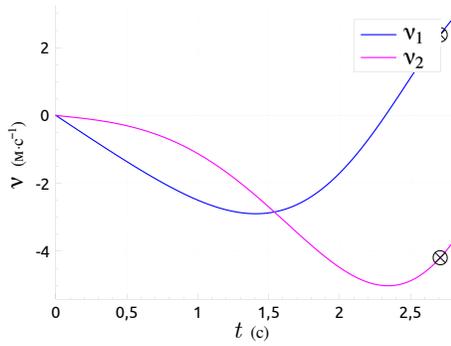
Имеем следующий результат. После момента $t = 0.4$ с условие на мощность из следствия 4.4 для кинетической энергии H нарушено (рис. 4.6h). После момента $t = 2$ с нарушено условие на мощность из следствия 4.3 для скорости центра масс v_S и угловой скорости ω (рис. 4.6g). Далее в момент $t = 2.7$ с (изображён знаком \otimes на графиках) нормальная реакция N_3 становится отрицательной и происходит отрыв (рис. 4.6e).



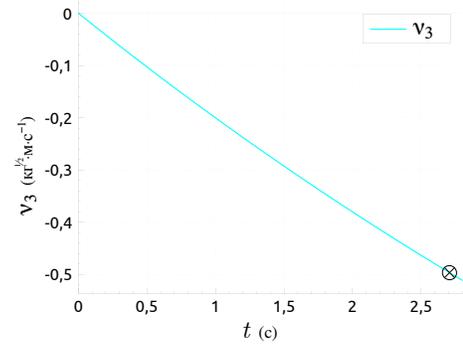
(a) Траектория центра масс



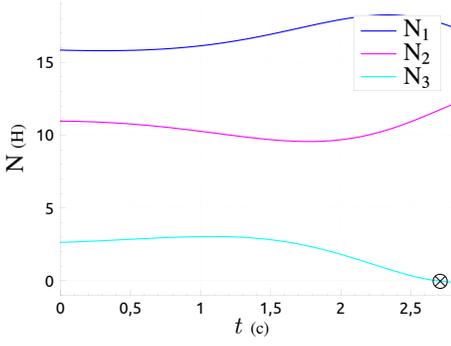
(b) Угол курса θ



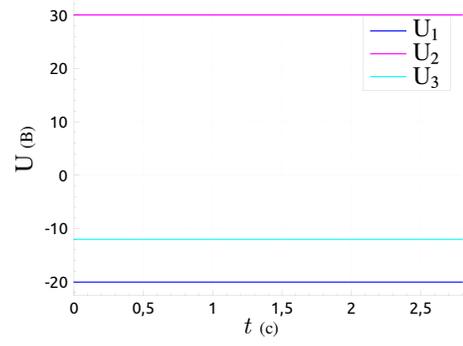
(c) Псевдоскорости ν_1, ν_2



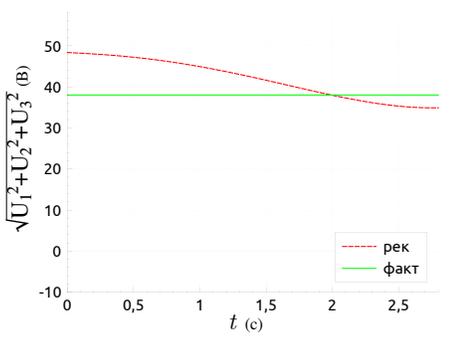
(d) Псевдоскорость ν_3



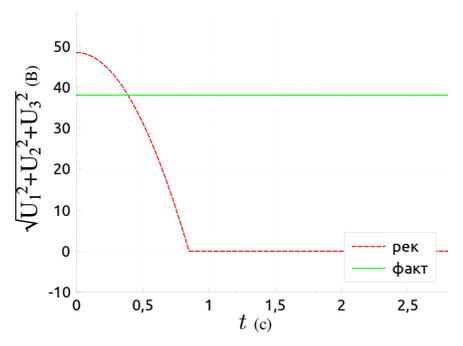
(e) Нормальные реакции опоры



(f) Напряжения



(g) Ограничения на мощность по скоростям v_S, ω



(h) Ограничения на мощность по кинетической энергии H

Рис. 4.6: Пример I: движение с явным управлением
(Знаком \otimes обозначен момент отрыва. “рек” — граница рекомендуемых напряжений, “факт” — фактические напряжения.)

Пример II (рис. 4.7). Пусть экипаж движется по окружности с ускорением (рис. 4.7а).

Требуемое движение задаётся следующими псевдоскоростями:

$$\nu_1(t) = 0, \quad (4.75)$$

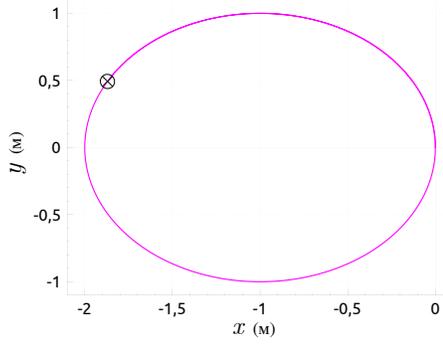
$$\nu_2(t) = \frac{r_{\text{traj}}}{\Lambda} \nu_3(t), \quad (4.76)$$

$$\nu_3(t) = 2\pi\Lambda\varepsilon_{\text{traj}}t, \quad (4.77)$$

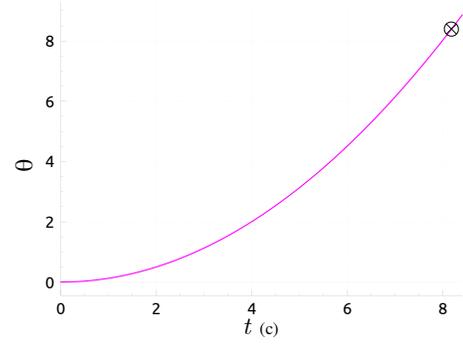
где r_{traj} — радиус окружности и $\varepsilon_{\text{traj}}$ — величина углового ускорения (см. рис. 4.7с, рис. 4.7d).

Для управления используются напряжения, полученные подстановкой псевдоскоростей (4.75)–(4.77) в уравнения движения (4.50)–(4.52) (см. рис. 4.7f).

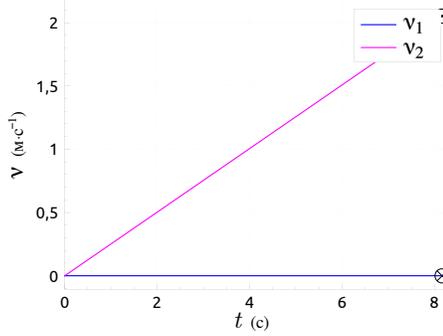
Для окружности радиусом $r_{\text{traj}} = 1$ м и величины углового ускорения $\varepsilon_{\text{traj}} = 0.04$ с⁻² имеем следующий результат. После момента $t = 6$ с условие на мощность из следствия 4.4 для кинетической энергии H нарушено (рис. 4.7h). После момента $t = 7.5$ с нарушено условие на мощность из следствия 4.3 для скорости центра масс v_S и угловой скорости ω (рис. 4.7g). Далее в момент $t = 8.2$ с (изображён знаком \otimes на графиках) на втором круге нормальная реакция N_3 становится отрицательной и происходит отрыв (рис. 4.7e).



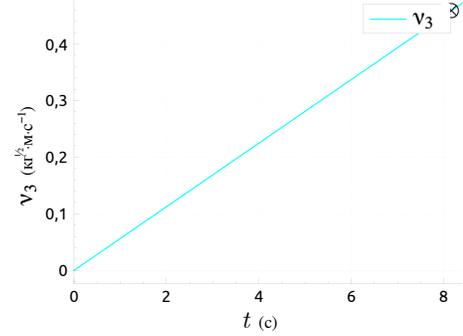
(a) Траектория центра масс



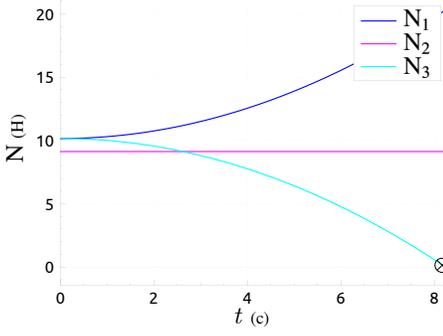
(b) Угол курса θ



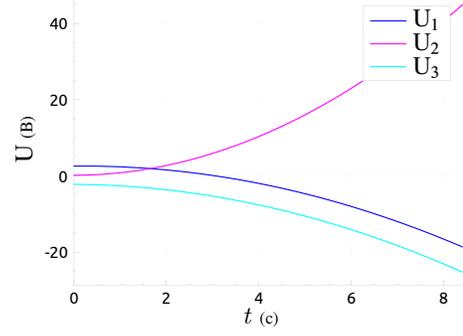
(c) Псевдоскорости ν_1, ν_2



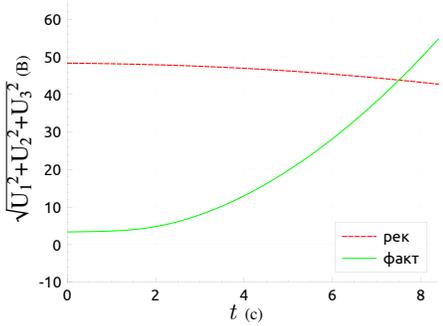
(d) Псевдоскорость ν_3



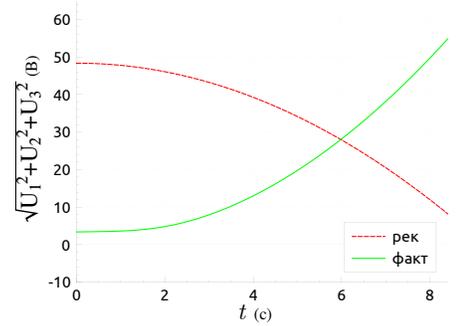
(e) Нормальные реакции опоры



(f) Напряжения



(g) Ограничения на мощность по скоростям v_S, ω



(h) Ограничения на мощность по кинетической энергии H

Рис. 4.7: Пример II: управляемое движение по окружности с ускорением (Знаком \otimes обозначен момент отрыва. “рек” — граница рекомендуемых напряжений, “факт” — фактические напряжения.)

Данные примеры демонстрируют границы применимости условий отсутствия отрыва. Условия из теоремы 4.3 для скорости центра масс v_S и угловой скорости ω более точны, чем условия из теоремы 4.4 для кинетической энергии H , что ожидаемо, так как у последнего есть меньше информации. Аналогичным образом и по той же причине полные условия на реакции из теоремы 4.1 более точны, чем условия из теоремы 4.3 для скорости центра масс v_S и угловой скорости ω .

Заключение

В заключение перечислим основные результаты исследований, представленных в настоящей диссертации.

1. Построены динамические уравнения трёхколёсного омни-экипажа с параллельными колёсами (экипажа с вертикальной плоскостью симметрии, у которого оси двух задних омни-колёс, вращающихся независимо, совпадают и перпендикулярны плоскости симметрии, а ось вращения переднего омни-колеса лежит в той же плоскости симметрии) с учётом инерционных свойств опорного ролика переднего колеса. Показано существование стационарных по псевдоскоростям и углу поворота переднего колеса прямолинейных движений в направлении оси переднего колеса. Показано, что учёт инерционных свойств опорного ролика переднего колеса не влияет на условия устойчивости по псевдоскоростям стационарных прямолинейных движений в направлении оси переднего колеса, но меняет вид финальных движений в устойчивом случае: возмущённые движения стремятся к некоторому стационарному прямолинейному движению, на котором скорость центра масс коллинеарна оси переднего колеса, тогда как в модели, не учитывающей массивность опорного ролика, они могут стремиться к стационарным прямолинейным движениям, на которых эта скорость может составлять с указанной осью ненулевой угол.
2. Показано, что в динамических уравнениях линейное вязкое трение в осях колёс и эффект противоЭДС в модели электромотора постоянного тока описываются совпадающими по форме слагаемыми; тот же факт установлен и в случае линейного вязкого трения в осях роликов омни-колёс с большим числом роликов для симметричной конфигурации экипажа.
3. Рассмотрена задача управления симметричным омни-экипажем (экипажем, омни-колёса которого расположены в вершинах правильного треугольника, центр которого является центром масс системы, а биссектрисы совпадают с осями колёс), в которой за заданное время из заданного начального положения системы с заданными начальными псевдоскоростями необходимо достичь заданного конечного положения с заданными конечными псевдоскоростями без ограничений на управления. Предложено решение данной зада-

чи в форме кусочно–постоянного управления с одним переключением (управления вида “разгон–торможение”), где момент переключения выступает в качестве наперёд заданного параметра. Решение задачи управления с помощью предложенного подхода сведено к решению двух систем линейных алгебраических уравнений. Доказано, что первая система линейных алгебраических уравнений всегда имеет единственное решение; аналогичное свойство второй системы доказано аналитически в ряде частных случаев и продемонстрировано в численных экспериментах для движений общего вида. В явном виде построены простейшие программные движения (поступательное движение и вращение на месте) и исследованы их свойства. В численных экспериментах рассмотрена возможность оптимизации управления для функционала, пропорционального затраченной на движении моторами энергии, и удовлетворения возможных ограничений на максимальное по модулю значение управлений посредством изменения времени движения на каждой стадии. Для движений, в которых поворот осуществляется на угол, меньший полного угла 2π , показано преимущество предложенных программных движений по сравнению с подходом, при котором поступательное движение и вращение осуществляются последовательно.

4. Представлена программа для численного решения аналогичной задачи управления для трёхколёсного омни–экипажа произвольной конфигурации. Работа программы продемонстрирована на примере решения нескольких краевых задач для омни–экипажа с параллельными колёсами.
5. Получен явный вид нормальных реакций опоры для управляемых движений трёхколёсного омни–экипажа произвольной конфигурации. Сформулированы достаточные условия положительности нормальных реакций опоры относительно мощностей управляющих напряжений при известных псевдоскоростях системы, скорости центра масс системы и угловой скорости платформы, кинетической энергии системы. Указаны наиболее “опасные” с точки зрения нарушения представленных достаточных условий движения в двух случаях: в классе движений с фиксированной скоростью центра масс системы и угловой скоростью платформы для экипажа произвольной конфигурации и в классе движений с фиксированной кинетической энергией для симметричного омни–экипажа. Исследовано влияние конкретных параметров конструкции симметричного омни–экипажа на условия положительности нормальных реакций опоры.

Также перечислим возможные направления дальнейших исследований, основывающиеся на результатах настоящей диссертации.

1. Формирование стратегий приближения программных траекторий омни-экипажа с помощью сегментов с кусочно-постоянным управлением.
2. Создание алгоритма для построения программных управлений омни-экипажа, движущегося по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости, с учётом инерционных свойств роликов.
3. Создание алгоритма для построения программных управлений омни-экипажа, движущегося по горизонтальной плоскости с учётом сухого трения Кулона.
4. Построение конфигурации трёхколёсного омни-экипажа, наименее склонной к отрыву на управляемых движениях.

Список литературы

- [1] Робот 3WD 48mm Omni Wheel Robot Platform Chassis with Encoder — 15001S [Электронный ресурс] // Oz Robotics Shop. Режим доступа: <https://ozrobotics.com/shop/3wd-48mm-omni-wheel-robot-platform-chassis-with-encoder-black-15001s/> (дата обращения: 24.02.2026).
- [2] Колесо 3606 Series Mecanum Wheel [Электронный ресурс] // goBILDA. Режим доступа: <https://www.gobilda.com/3606-series-mecanum-wheel-right-slant-bearing-supported-rollers-100mm-diameter/> (дата обращения: 24.02.2026).
- [3] Колесо The Rotacaster 35mm Omni-wheel [Электронный ресурс] // Omnia. Режим доступа: <https://www.rotacaster.com.au/shop/90mm-omni-wheels/index> (дата обращения: 24.02.2026).
- [4] Ilon B. Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base. U.S. Patent № 3,876,255. 1972.
- [5] Grabowfecki J. Vehicle wheel. U.S. Patent № 1,305,535. 1918.
- [6] Blumrich J. Omnidirectional wheel. U.S. Patent № 3,789,947. 1972.
- [7] Ransom S., Krömer O., Lückemeier M. Planetary Rovers fitted with Omni-Directional/Mecanum Wheels // Proceedings ISTVS 16th International Conference, Torino, Italy. 2008.
- [8] Кресло-коляска Omni-Wheel Robot Power Chair Electric Wheelchair for Disabled/Handicapped Elderly Person [Электронный ресурс] // Carer Medical Equipment Co., Ltd, Made-in-China. Режим доступа: <https://carermedical.en.made-in-china.com/product/uJErYhFUuAWd/China-Omni-Wheel-Robot-Power-Chair-Electric-Wheelchair-for-Disabled-Handicapped-Elderly-Person.html> (дата обращения: 24.02.2026).
- [9] Автопогрузчик SIDEWINDER Lift Truck [Электронный ресурс] // Vehicle Technologies Incorporated. Режим доступа: <http://www.vetexinc.com/vehicles/sidewinder.html> (дата обращения: 24.02.2026).

- [10] Подвижная платформа KUKA omniMove [Электронный ресурс] // Vehicle Technologies Incorporated. Режим доступа: <https://www.kuka.com/en-de/products/amr-autonomous-mobile-robotics/mobile-platforms/kuka-omnimove> (дата обращения: 24.02.2026).
- [11] Large aircraft component transport based on omni-directional mobile and multi-point supporting / Yao D., She J., Huang X. et al. // Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. 2012. Vol. 44. Pp. 73–78.
- [12] Робот Nexus Robot 3WD Triangular 3.9 Inch 100mm Omni-directional Robot Car 10003 [Электронный ресурс] // noDNA. Режим доступа: <https://www.nodna.de/Nexus-Robot-3WD-Triangular-39-Inch-100mm-Omni-directional-Robot-Car-10003> (дата обращения: 24.02.2026).
- [13] KUKA youBot at the RoboCup 2016 [Электронный ресурс] // KUKA. Режим доступа: <https://www.kuka.com/en-at/future-production/innovation-and-research/current-topics-from-the-world-of-research/events/robocup/robocup-2016> (дата обращения: 24.02.2026).
- [14] Floor-cleaning robot using omni-directional wheels / Gao X., Wang Y., Zhou D. et al. // Industrial Robot: An International Journal. 2009. Vol. 36, № 2. Pp. 157–164.
- [15] Kim H., Sung J., Kim S. A Development of Home Service Robot using Omni-Wheeled Mobility and Task-Based Manipulation // International Journal of Electronics and Electrical Engineering. 2012. Vol. 6. Pp. 198–201.
- [16] Зобова А.А., Моисеев Г.Н. Применение уравнений Я.В. Татаринова в динамике экипажа с омни-колесами с учетом массивности ролика // Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, 17–26 апреля 2017: тезисы докладов. 2017. С. 97.
- [17] Моисеев Г.Н., Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа с омни-колесами с учетом массы роликов // Всероссийская конференция молодых-ученых механиков, 5–15 сентября 2017: тезисы докладов. 2017. С. 65.
- [18] Моисеев Г.Н. Исследование управляемых движений омни-экипажа с кусочно-гладким управлением // Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНОСОВ-2018 [Электронный ресурс]. 2018. Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13568/70626_uid238575_report.pdf (дата обращения: 24.02.2026).

- [19] Зобова А.А., Моисеев Г.Н. Управляемые движения омни-экипажа вида разгон-торможение // Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, 15–25 апреля 2019: тезисы докладов. 2019. С. 108.
- [20] Зобова А.А., Моисеев Г.Н. Движение омниэкипажа по плоскости с сухим трением // Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, 18–22 апреля 2022: тезисы докладов. 2022. С. 83.
- [21] Моисеев Г.Н. Анализ условий отрыва управляемого омни-экипажа // Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНОСОВ–2023 [Электронный ресурс]. 2023. Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2023/data/28496/153159_uid238575_report.pdf (дата обращения: 24.02.2026).
- [22] Моисеев Г.Н., Зобова А.А. Динамика и управление мобильным омни-экипажем // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: сборник тезисов докладов в 4 томах. Т. 1. 2023. С. 118–119.
- [23] Моисеев Г.Н. Исходный код программ диссертации [Электронный ресурс] // GitHub. Режим доступа: <https://github.com/DifferentialOrange/omni-vehicle-dynamics-control> (дата обращения: 24.02.2026).
- [24] Моисеев Г.Н., Зобова А.А. Устойчивость прямолинейных движений омни-экипажа с учетом инерционности роликов колес // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. № 6. С. 78–82.
- [25] Moiseev G., Zobova A. Stability of the Rectilinear Motion of an Omni Vehicle with Consideration of Wheel Roller Inertia // Moscow University Mechanics Bulletin. 2018. Vol. 73, № 6. Pp. 145–148.
- [26] Moiseev G., Zobova A. Dynamics-based piecewise constant control of an omnivehicle // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 18, № 4. Pp. 661–680.
- [27] Moiseev G. No-overturn conditions for omnivehicle motion // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024. Vol. 20, № 2. Pp. 311–336.
- [28] Татаринов Я.В. Уравнения классической механики в лаконичных формах. Москва: Изд-во

- Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. 88 с.
- [29] Зобова А.А., Татаринов Я.В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2008. № 6. С. 62–65.
- [30] Зобова А.А., Татаринов Я.В. Динамика экипажа с роликонесущими колёсами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.
- [31] Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 142–149.
- [32] Zeidis I., Zimmermann K. Dynamics of a four-wheeled mobile robot with Mecanum wheels // Z Angew Math Mech. 2019. № 6. Pp. 99:e201900173.
- [33] System and design of an omni-directional vehicle / Qian H., Lam T., Li W. et al. // 2008 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. 2009. Pp. 389–394.
- [34] Campion G., Bastin G., D’Andrea-Novel B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots // IEEE Transactions on robotics and automation. 1996. Vol. 12, № 1. Pp. 47–62.
- [35] Leow Y., Low K., Loh W. Kinematic modelling and analysis of mobile robots with omni-directional wheels // 7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, IEEE. Vol. 2. 2002. Pp. 820–825.
- [36] Татаринов Я.В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2003. № 3. С. 67–76.
- [37] Зобова А.А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 771–783.
- [38] Косенко И.И., Герасимов К.В. Физически-ориентированное моделирование динамики омитележки // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 251–262.
- [39] Virtual testbench for the omni wheel dynamics simulation: New contact tracking algorithm / Kosenko I., Stepanov S., Gerasimov K. et al. // ECCOMAS Congress 2016 — Proceedings of

- the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. 2016. Pp. 4553–4571.
- [40] Kosenko I., Stepanov S., Gerasimov K. Contact tracking algorithms in case of the omnidirectional wheel rolling on the horizontal surface // *Multibody System Dynamics*. 2019. Vol. 45, № 3. Pp. 273–292.
- [41] Объектно-ориентированный язык программирования Modelica [Электронный ресурс] // Modelica. Режим доступа: <https://modelica.org/> (дата обращения: 24.02.2026).
- [42] Герасимов К.В., Зобова А.А. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82, № 4. С. 427–440.
- [43] Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа на омни-колесах с массивными роликами с учетом смены ролика в контакте с опорной плоскостью // *Труды МАИ*. 2018. Т. 101. С. 1.
- [44] Gferrer A. Geometry and Kinematics of the Mecanum Wheel // *Computer Aided Geometric Design*. 2008. Vol. 25. Pp. 784–791.
- [45] Герасимов К.В. Динамика роликонесущего экипажа с учётом инерции роликов и трения. Диссертация на соискание уч.ст. к.ф.-м.н.: МГУ им. М.В. Ломоносова. 2018. 106 с.
- [46] Зобова А.А. Динамика систем твёрдых тел с контактным взаимодействием. Диссертация на соискание уч.ст. д.ф.-м.н.: МГУ им. М.В. Ломоносова. 2020. 259 с.
- [47] Мартыненко Ю.Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колёсами и смещённым центром масс // *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.
- [48] Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7, № 4. С. 785–801.
- [49] Килин А.А., Бобыкин А.Д. Управление тележкой с омниколесами на плоскости // *Нелинейная динамика*. 2014. Т. 10, № 4. С. 473–481.
- [50] Borisov A., Kilin A., Mamaev I. Dynamics and Control of an Omniwheel Vehicle // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. Vol. 20, № 2. Pp. 153–172.

- [51] International Journal of Advanced Robotic Systems / Kilin A., Bozek P., Karavaev Y. et al. // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. Vol. 14, № 6. Pp. 1729881417744570.
- [52] Criteria of Motion Without Slipping for an Omnidirectional Mobile Robot / Mamaev I., Kilin A., Karavaev Y. et al. // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 17, № 4. Pp. 527–546.
- [53] Wheeled omni-directional robot dynamics including slip / Williams R., Carter B., Gallina P. et al. // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. 2002. Pp. 201–207.
- [54] Adamov B. A study of the controlled motion of a four-wheeled mecanum platform // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, № 2. Pp. 265–290.
- [55] Adamov B., Saipulaev G. Research on the Dynamics of an Omnidirectional Platform Taking into Account Real Design of Mecanum Wheels (as Exemplified by KUKA youBot) // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 16, № 2. Pp. 291–307.
- [56] Saipulaev G., Adamov B., Kobrin A. A dynamicly consistent model of normal reactions at points of a mobile platform contact with a surface taking into account of the design of mecanum wheels and multicomponent friction // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, № 5. Pp. 1447–1457.
- [57] Сайпулаев Г.Р. Исследование динамики всенаправленной платформы с учётом конструкции меканум-колёс и поликомпонентного контактного трения. Диссертация на соискание уч.ст. к.т.н.: НИУ МЭИ. 2024. 175 с.
- [58] Damoto R., Cheng W., Hirose S. Holonomic omnidirectional vehicle with new omni-wheel mechanism // In Proceedings 2001 ICRA, IEEE International Conference on Robotics and Automation. No. 1. 2001. Pp. 773–778.
- [59] Taheri H., Zhao C. Omnidirectional mobile robots, mechanisms and navigation approaches // Mechanism and Machine Theory. 2020. № 153. Pp. 103958.
- [60] Active omni wheel possessing seamless periphery and omnidirectional vehicle using it / Terakawa T., Komori M., Yamaguchi Y. et al. // Precision Engineering. 2019. № 56. Pp. 466–475.
- [61] Shen J., Hong D. OmBURo: A Novel Unicycle Robot with Active Omnidirectional Wheel //

- In 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2020. Pp. 8237–8243.
- [62] Real-time navigation of mecanum wheel-based mobile robot in a dynamic environment / Shafiq M., Imran A., Maznoor S. et al. // *Heliyon*. 2024. Vol. 10, № 5. Pp. e26829.
- [63] Motion control of omni-directional type cane robot based on human intention / Huang J., Di P., Fukuda T. et al. // 2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2008. Pp. 273–278.
- [64] Kalmár-Nagy T., D’Andrea R., Ganguly P. Near-optimal dynamic trajectory generation and control of an omnidirectional vehicle // *Robotics and Autonomous Systems*. 2004. Vol. 46, № 1. Pp. 47–64.
- [65] Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization / Liu Y., Zhu J., Williams R. et al. // *Robotics and Autonomous Systems*. 2008. Vol. 56, № 5. Pp. 461–477.
- [66] Andreev A., Peregudova O. On Global Trajectory Tracking Control for an Omnidirectional Mobile Robot with a Displaced Center of Mass // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 16, № 1. Pp. 115–131.
- [67] Ман Н.Н. Разработка математической модели погрузочно-разгрузочного устройства с все-направленными колесами // *Труды МАИ*. 2012. Т. 58. С. 2.
- [68] Development of a step-climbing omni-directional mobile robot / Yamashita A., Asama H., Kaetsu H. et al. // *Proceedings of the International Conference on Field and Service Robotics*. 2001. Pp. 327–332.
- [69] Development of a control system for an omni-directional vehicle with step-climbing ability / Chugo D., Kawabata K., Kaetsu H. et al. // *Advanced Robotics*. 2005. Vol. 19, № 1. Pp. 245–254.
- [70] Е.Ю. Колесниченко. Кинематическое управление движением шестиколесного механум-робота. № 127. Москва: Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2016. 26 с.
- [71] MPC control and path planning of Omni-directional mobile robot with potential field method / Liu X., Chen H., Wang C. et al. // *In International Conference on Intelligent Robotics and Applications*, Springer. 2018. Pp. 170–181.

- [72] Motion planning and control of nonholonomic mobile robot using flatness and fuzzy logic concepts / Khesrani S., Hassam A., Boutalbi O. et al. // International Journal of Dynamics and Control. 2021. № 9. Pp. 1660–1671.
- [73] An approach to the kinematics and dynamics of a four-wheel mecanum vehicle / Becker F., Bondarev O., Zeidis I. et al. // Special issue of Scientific Journal of IFToMM “Problems of Mechanics”. 2014. Vol. 55, № 2. Pp. 013132.
- [74] A description of the dynamics of a four-wheel mecanum mobile system as a basis for a platform concept for special purpose vehicles for disabled persons / Abdelrahman M., Zeidis I., Bondarev O. et al. // S58th Ilmenau Scientific Colloquium. 2014. 10 pp.
- [75] Mechanics of mobile robots with mecanum wheels / Zimmermann K., Zeidis I., Schale F. et al. // ROMANSY 21 — Robot Design, Dynamics and Control. 2016. Pp. 103–111.
- [76] Zimmermann K., Zeidis I., Abdelrahman M. Dynamics of mechanical systems with mecanum wheels // Applied Non-Linear Dynamical Systems. 2014. Pp. 269–279.
- [77] Hendzel Z., Rykala L. Modeling of dynamics of a wheeled mobile robot with mecanum wheels with the use of Lagrange equations of the second kind // International Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2017. Vol. 22, № 1. Pp. 81–99.
- [78] Hendzel Z., Rykala L. Description of kinematics of a wheeled mobile robot with mecanum wheels // Modeling in Engineering. 2015. № 57. Pp. 5–12.
- [79] Hendzel Z. A description of the motion of a mobile robot with mecanum wheels — dynamics // Automation 2019. Vol. 920. 2020. Pp. 337–345.
- [80] Hendzel Z., Kolodziej M. Robust tracking control of Omni-Mecanum wheeled robot // Automation 2021: recent achievements in automation, robotics and measurements techniques. 2021. Pp. 219–229.
- [81] Hendzel Z., Penar P. Application of differential games in mechatronic control system // International Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2016. Vol. 21, № 4. Pp. 867–878.
- [82] Nascimento T., Dórea C., Gonçalves L. Nonholonomic mobile robots’ trajectory tracking model predictive control: a survey // Robotica. 2018. Vol. 5, № 36. Pp. 676–696.
- [83] Rani M., Kumar N., Singh H. Force/motion control of constrained mobile manipulators

- including actuator dynamics // International Journal of Dynamics and Control. 2019. № 7. Pp. 940–954.
- [84] Galicki M. Collision-free control of an omni-directional vehicle // Robotics and Autonomous Systems. 2009. Vol. 57. Pp. 889–900.
- [85] Modeling and kinematics simulation of a mecanum wheel platform in RecurDyn / Li Y., Dai S., Zheng Y. et al. // Journal of Robotics. 2018. 7 pp.
- [86] Navigation simulation of a mecanum wheel mobile robot based on an improved A* Algorithm in Unity3D / Li Y., Dai S., Shi Y. et al. // Sensors. 2019. Vol. 19, № 13. Pp. 2976.
- [87] Szeremeta M., Szuster M. Neural tracking control of a four-wheeled mobile robot with mecanum wheels // Applied Sciences. 2022. Vol. 12, № 11. Pp. 5322.
- [88] A nonlinear model predictive control of an omni-directional mobile robot / Conceição A., Oliveira H., e Silva A. et al. // 2007 IEEE international symposium on industrial electronics. 2007. Pp. 2161–2166.
- [89] Saypulaev G., Adamov B., Kobrin A. Comparative analysis of the dynamics of a spherical robot with a balanced internal platform taking into account different models of contact friction // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 18, № 5. Pp. 803–815.
- [90] Adamov B. Geometry and Kinematics of the Mecanum Wheel on a Plane and a Sphere // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024. Vol. 20, № 1. Pp. 43–78.
- [91] Modeling and assessing of omni-directional robots with three and four wheels / Oliveira H., Sousa A., Moreira A. et al. // Contemporary Robotics: Challenges and Solutions. 2009. Pp. 109–138.
- [92] Akkad H., Almusawi H. A Comparative Review of Omnidirectional Wheel Types for Mobile Robotics. New York: Rochester, 2023. 20 pp.
- [93] Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. Москва: Издательство “Наука”, 1967. 520 с.
- [94] Буданов В.М., Девянин Е.А. О движении колесных роботов // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, № 2. С. 244–255.

- [95] Теоретическая механика / Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И. [и др.]. Москва: Издательский центр “Академия”, 2010. 432 с.
- [96] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Москва: Издательство “Наука”, 1966. 530 с.
- [97] Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи (пер. с англ.). Москва: Мир, 1990. 512 с.
- [98] Платформа разработки Qt Framework [Электронный ресурс] // Qt Group. Режим доступа: <https://www.qt.io/qt-framework> (дата обращения: 24.02.2026).
- [99] Библиотека Qt Plotting Widget QCustomPlot [Электронный ресурс] // QCustomPlot. Режим доступа: <https://www.qcustomplot.com> (дата обращения: 24.02.2026).
- [100] Робот Omni Wheel Robot Platform Chassis with Encoder — Black — 15001B [Электронный ресурс] // Oz Robotics Shop. Режим доступа: <https://ozrobotics.com/shop/omni-wheel-robot-platform-chassis-with-encoder-black-15001b/> (дата обращения: 24.02.2026).
- [101] Колесо DAUERHAFT Omni Wheel 14049 [Электронный ресурс] // Amazon. Режим доступа: <https://www.amazon.com/DAUERHAFT-Wheel-14049-Plastic-Racing/dp/B09Q2HVX3L> (дата обращения: 24.02.2026).
- [102] Каталог Drivers & Systems Махон [Электронный ресурс] // Махон. Режим доступа: <https://www.maxongroup.com/drives-and-systems> (дата обращения: 24.02.2026).
- [103] Библиотека GSL — GNU Scientific Library [Электронный ресурс] // GNU. Режим доступа: <https://www.gnu.org/software/gsl/> (дата обращения: 24.02.2026).
- [104] Библиотека seaborn: statistical data visualization [Электронный ресурс] // GNU. Режим доступа: <https://seaborn.pydata.org/> (дата обращения: 24.02.2026).
- [105] Appell P. Traité de mécanique rationnelle. В двух томах: том 1. Париж: Gauthier–Villars, 1893. 626 pp.