

ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Макаровой Юлии Константиновны
на тему: «Многотипные ветвящиеся случайные блуждания
при отсутствии и наличии иммиграции»
по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая
статистика

Диссертация Ю. К. Макаровой «Многотипные ветвящиеся случайные блуждания при отсутствии и наличии иммиграции» посвящена исследованию одного из актуальных направлений современной теории вероятностей — анализу многотипных ветвящихся случайных блужданий на решётках с учетом пространственного перемещения частиц, механизмов размножения, иммиграции и возможной смены типа частицы. Тема является актуальной как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. С математической стороны диссертационная работа развивает модели ветвящихся случайных блужданий, распространяя их на существенно более сложные многотипные системы; с прикладной стороны – рассматриваемые конструкции естественным образом связаны с задачами популяционной динамики, распространения эпидемий, генетики, теории случайных сред и стохастического моделирования сложных систем. Существенным достоинством работы является рассмотрение всевозможных значений параметров, возникающих в исследуемых моделях, и получение асимптотического поведения моментов ~~члена~~ численностей частиц в каждом из изучаемых случаев.

Структурно диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографического списка.

В первой главе Ю. К. Макарова исследует ветвящиеся случайные блуждания с двумя типами частиц. Основным объектом исследования являются

субпопуляции частиц $n_i(t, x, y) = [n_{i1}(t, x, y), n_{i2}(t, x, y)]^T, i = 1, 2$, каждого из двух типов в точке решетки y в момент времени t при однородных начальных условиях. Получены выражения для величин среднего числа частиц каждой субпопуляции m_{ij} , найдено асимптотическое поведение данных величин и их преобразований Лапласа при $t \rightarrow \infty$ при различных параметрах модели. В частности, детально рассмотрены два принципиально различных случая расположения источников ветвления: источники находятся в каждой точке решетки, а также имеется единственный источник ветвления. Для случая источников в каждой точке получены точные решения для первых моментов при совпадающих механизмах блужданий частиц обоих типов, а также асимптотические представления при больших временах для ситуаций, когда генераторы блужданий имеют конечную и бесконечную дисперсию скачков. Для модели с одним источником ветвления с помощью преобразования Лапласа и функций Грина найдены асимптотики первых моментов в зависимости от размерности решетки и показателя степени «хвостов распределения» скачков. Кроме того, в первой главе выведены дифференциальные уравнения для вторых моментов и факториальных моментов старших порядков, что позволяет в перспективе исследовать поведение высших моментов численностей частиц.

Вторая глава посвящена моделям с иммиграцией. Ю. К. Макарова исследует модель, где возможен приток частиц как первого, так и второго типа в каждую из точек многомерной решетки \mathbb{Z}^d . Объектом изучения является поле частиц $n(t, x)$, то есть общее число частиц в момент времени t в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Получены предельные теоремы для первого и второго момента величины $n(t, x)$. Рассмотрен как однородный случай, когда интенсивности рождения, гибели и иммиграции не зависят от положения частицы, так и неоднородный случай, когда описанные параметры являются функциями, зависящими от положения частицы на решетке. Для однородного докритического ветвящегося случайного блуждания с постоянной иммиграцией получено явное асимптотическое выражение для второго момента числа частиц, включающее свертки вероятностей прыжков. Для неоднородного случая, когда интенсивности

рождения, гибели и иммиграции являются ограниченными функциями на решётке, доказана устойчивость первого и второго моментов по Ляпунову: показано, что при малых возмущениях параметров решения остаются вблизи стационарных значений. В заключительной части главы проведён сравнительный анализ дуальности моделей ветвящихся случайных блужданий с разными начальными условиями (одна начальная частица против бесконечного поля частиц). Продемонстрировано, что для первых моментов дуальность имеет место, однако для старших моментов она нарушается, а добавление иммиграции также разрушает дуальность.

В третьей главе изучается модель, в которой частицы могут менять тип, что существенно усложняет структуру процесса. Ю. К. Макарова вновь исследует субпопуляции частиц. Для такой системы при условии конечной дисперсии скачков случайных блужданий обоих типов получены асимптотики первых моментов численностей частиц каждого типа. Для второго момента численности «заражённых» частиц найдены асимптотические представления, зависящие от размерности решётки, и установлено явление перемежаемости в критическом случае. Для частиц второго типа также получены асимптотики второго момента, различающиеся в случае конечной дисперсии скачков для размерностей $d = 1, 2, 3, 4$ и $d \geq 5$.

К числу наиболее значимых научных результатов диссертации относятся вывод систем дифференциальных уравнений для производящих функций и моментов многотипных процессов, исследование их решений, получение асимптотик первых и вторых моментов в различных постановках, анализ устойчивости моделей с иммиграцией и изучение влияния смены типа на структуру процесса. Работа демонстрирует заметную исследовательскую новизну за счет объединения нескольких направлений исследования в рамках единой постановки, а также расширения ряда известных результатов на многотипный случай. Полученные результаты вносят весомый вклад в развитие теории ветвящихся случайных блужданий.

Результаты диссертации прошли широкую апробацию на международных конгрессах, конференциях и научных семинарах, в том числе на Большом семинаре кафедры теории вероятностей (руководитель академик А. Н. Ширяев). Результаты работы опубликованы в десяти статьях, из которых четыре в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Хотелось бы отметить, что у меня нет существенных претензий к содержательной стороне работы, однако имеются незначительные замечания и неточности:

- 1) На стр. 12 в пункте 3 и на стр. 60 в пункте 1 следует пояснить, что $z \neq 0$, а случай $z = 0$ рассмотреть отдельно.
- 2) На стр. 15 в промежуточной формуле вывода производящей функции пропущен множитель dt .
- 3) На стр. 19 следует более аккуратно определить обратное преобразование Фурье и сразу ввести для него символ, как это сделано в 3 главе. В свою очередь, на стр. 93 следует напомнить определение обратного преобразования Фурье, которое вводилось в главе 1. Лучше определить обратное преобразование Фурье от f , а не от преобразования Фурье f .
- 4) На стр. 20 в формуле 1.13 c не должно зависеть от θ , а d должно зависеть от θ . В целом, символ d сильно перегружен: он является константой, зависящей от θ и одновременно размерностью пространства, в то же время присутствуют дифференциальные уравнения, где d трактуем как дифференциал.
- 5) На стр. 42 в определении полинома Белла нижний индекс у j_1 написан не в том месте.
- 6) На стр. 49 в формуле для $Lm_{22}(t, 0, 0)$ неверно написаны индексы у функции Грина. Далее эта неточность следует в аналогичных формулах.

- 7) На стр. 58 в формуле для частной производной $M_1(t, x)$ по t в одном из слагаемых правой части присутствует посторонний множитель dt .
- 8) На стр. 61 в формуле производящей функции $F(z)$ пропущен множитель z^n внутри суммы.
- 9) На стр. 62 в пункте 2 уже использовано соглашение $dt^2 = 0$, но написано оно лишь в следующем пункте. Аналогично на стр. 73 вводится обозначение волны над переменной x_i , но пояснение данного символа даётся значительно ниже. В одной из сумм знак волны заменён на знак \wedge . В пункте 3 следует заменить «корреляция» на «совместный момент».
- 10) На стр. 77 следует пояснить, что для решения уравнений для $m_r(t, x)$ требуется другая (более сложная) техника.
- 11) В параграфе 2.3 требуется указать, что $O(\varepsilon)$ не зависят от t , но зависят от k_0, u_0, v_0 .
- 12) На стр. 99 лучше использовать определённый интеграл, так как иначе f представляет из себя множество. Стремление t к бесконечности в определении f не требуется. На асимптотические соотношения далее это не повлияет.

Имеются некоторые языковые, стилистические и редакционные ошибки, не влияющие на суть повествования. Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой

степени кандидата наук Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Макарова Юлия Константиновна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник лаборатории прикладных
вероятностных и алгоритмических методов

Санкт-Петербургского отделения

Математического института имени В.А. Стеклова РАН

Люлинцев Андрей Валерьевич

06.05.2026

Контактные данные:

тел.: 7(812)312-40-58, e-mail: lyulintsev@pdmi.ras.ru.

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:

191023, Российская Федерация, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27

Тел.: 7(812)312-40-58; e-mail: admin@pdmi.ras.ru

Подпись сотрудника Санкт-Петербургского отделения Математического
института им. В.А. Стеклова РАН А.В. Люлинцева удостоверяю: