

ОТЗЫВ
официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук Штерна Александра Исааковича
на тему: «Вопросы теории непрерывных представлений топологических
групп и их обобщений»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Актуальность темы.

Диссертация А.И. Штерна посвящена фундаментальным проблемам теории представлений топологических групп, находящимся на стыке функционального анализа, алгебры и геометрии. Исследование условий непрерывности гомоморфизмов, характеристика групп по свойствам их представлений, являются классическими задачами, восходящими к работам Банаха, Вейля и фон Неймана. Несмотря на долгую историю, многие из этих вопросов оставались открытыми, особенно в части отказа от предположений об измеримости или непрерывности. Автор решает ряд ключевых проблем, включая гипотезу Мищенко и проблему Каждана–Мильмана, что, безусловно, подтверждает актуальность диссертационного исследования. Изучаемые в диссертации вопросы находятся на пересечении теории групп, функционального анализа и геометрии, а их актуальность обусловлена как внутренней логикой развития математики, так и запросами смежных дисциплин, в первую очередь — квантовой физики.

Интерес к представлениям групп возник более века назад. Однако классическая теория, созданная Фробениусом, Шуром и Вейлем, в основном рассматривала *непрерывные* представления, что оправдано для многих приложений. В 1930-е годы Банах и его последователи поставили вопрос жестче: а обязательно ли гомоморфизм, сохраняющий алгебраическую структуру, автоматически оказывается непрерывным? С тех пор проблема непрерывности гомоморфизмов и представлений стала одной из центральных в теории топологических групп.

Автор диссертации предлагает принципиально новый подход к этой проблеме. Вместо того чтобы предполагать измеримость или борелевость отображения (что трудно проверить), он вводит понятие вариации (колебания) представления в точке. Это позволяет получить точные критерии непрерывности: если вариация представления меньше определенной константы, то представление обязано быть непрерывным. Таким образом, работа Штерна подводит итог многолетним усилиям по изучению автоматической непрерывности, давая окончательные критерии, не требующие никаких дополнительных предположений о регулярности.

Классическая теория представлений, по большей части, ориентирована на *локально компактные* группы и их *унитарные* представления в гильбертовых пространствах. Однако математическая реальность гораздо богаче. Существуют группы, не являющиеся локально компактными (например, бесконечномерные группы диффеоморфизмов), и естественные отображения, которые не являются точными представлениями, а лишь «почти» таковыми.

В диссертационной работе исследуются общие топологические группы (не являющиеся локально компактными) и устанавливаются связи между их свойствами (представимость в компактных полугруппах) и свойствами их представлений.

Интерес к изучению аппроксимаций представлений топологических групп привел к изучению отображений с близкими структурными свойствами. Отображения, близкие по своим свойствам к характерам, изучались Радемахером в 1930-е годы. «Почти» представления для компактных групп возникли у Брукса в 1970-е. Автором диссертации в 1980-е были введены понятия квази- и псевдопредставлений, квази- и псевдохарактеров и развиты методы описания их свойств и характеристики их приближения к обычным представлениям. В диссертации показана эффективность предложенного подхода при изучении аппроксимации бесконечномерных представлений.

Диссертация А.И. Штерна имеет потенциал для приложений в современной математической физике и теории операторов. Сочетание фундаментальности, новизны и связи с классическими проблемами делает тему диссертации актуальной.

Научная новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Наиболее значимыми новыми положениями диссертации, на мой взгляд, являются следующие.

1. Получена характеристика локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны (Теорема 1.5). Установлен аналог двойственности Понтрягина за пределами абелева случая (Теоремы 1.1, 1.2).
2. Получены критерии непрерывности представлений в терминах колебания (вариации) в точке. Принципиально новым является нахождение точных констант ($q < 2$), при которых представление обязано быть непрерывным (Глава 2).
3. Заложены основы теории топологических групп с точки зрения их отображений, для которых образы окрестностей предкомпактны. Введено понятие группы разрывов гомоморфизма и доказано, что для связных групп Ли эта группа является коммутативным тором (Теоремы 3.7, 3.9). На этой основе доказана гипотеза Мищенко о трех возможных значениях вариации $(0, 2, \infty)$ (Теорема 3.20).
4. Введены понятия квазипредставлений и псевдопредставления как отображений, для которых мультипликативность нарушена, но отличие от мультипликативности равномерно мало. Также введено родственное понятие квазихарактера (отображения группы в аддитивную группу вещественных чисел с ограниченной разностью между образом произведения и произведением образов) и псевдохарактера (квазихарактера, ограничения которого на

циклические подгруппы являются их характерами). Введен класс почти ограниченных (но не ограниченных) бесконечномерных $*$ -слабо непрерывных квазипредставлений аменабельных групп, которые, если их дефект мал, допускают наличие близкого непрерывного обычного представления группы.

5. Решена проблема Каждана–Мильмана: доказано, что любое ограниченное квазипредставление связной полупростой компактной группы Ли с достаточно малым дефектом близко к истинному непрерывному представлению (Теорема 5.2).
6. Получена полная классификация конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли (Теорема 5.10) и почти связных локально компактных групп, выраженная в терминах обычных представлений и псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на эрмитово-симметрических сомножителях.

Теоретическая и практическая значимость.

Работа носит фундаментальный теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории представлений, теории групп Ли, некоммутативной геометрии и математической физики (в частности, в теориях калибровочных полей и квантовых групп). Предложенные методы (группа разрывов, вариация в точке, техника квазипредставлений) могут быть применены к широкому кругу задач об автоматической непрерывности гомоморфизмов.

Структура и содержание работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и обширного списка литературы (276 наименований, включая 53 работы автора). Структура диссертации такова:

Глава 1 посвящена изучению свойств локально компактных групп через их дуальные пространства. В ней устанавливается аналог двойственности

Понтрягина для некоммутативных групп, все неприводимые представления которых конечномерны, и дается полная характеристика таких групп. Кроме того, получен критерий гильбертовой представимости топологической группы в терминах её вложения в компактную полутопологическую полугруппу.

Глава 2 вводит ключевое понятие вариации (сильной и слабой) представления в единице группы. Главный результат — точные критерии непрерывности: если вариация меньше 1 (для банаховых пространств и пространств Фреше) или меньше 2 (для конечномерных представлений), то представление автоматически непрерывно. Эти результаты дополняются аналогом классической теоремы Ли о треугольной форме представлений разрешимых групп.

Глава 3 вводит фундаментальное понятие группы разрывов гомоморфизма и подробно изучает её свойства. Доказывается, что для связных групп Ли группа разрывов является тором, а любой локально ограниченный гомоморфизм автоматически непрерывен на коммутанте. В этой же главе дается полное доказательство гипотезы Мищенко (вариация может принимать только значения 0, 2 или ∞) и обобщается теорема Фрейденталя–Вейля на случай не обязательно непрерывных вложений.

Глава 4 переходит к изучению квазипредставлений и псевдохарактеров — отображений, для которых мультипликативность нарушена, но отличие равномерно мало. Устанавливается глубокая связь между псевдохарактерами и второй ограниченной группой когомологий, доказывается её конечномерность для почти связных групп. Для аменабельных групп показано, что любое «почти ограниченное» квазипредставление с малым дефектом близко к обычному представлению.

Глава 5 содержит главные классификационные результаты всей диссертации. На основе полученных в главе 2 результатов решается проблема Каждана–Мильмана: для полупростых компактных групп Ли любое ограниченное квазипредставление с малым дефектом близко к

конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, псевдохарактеров Гишарде–Вигнера и квазициклов.

Достоверность и апробация.

Достоверность результатов не вызывает сомнений, так как все утверждения строго обоснованы. Результаты многократно докладывались на престижных международных и всероссийских конференциях (включая Международный конгресс математиков в Берлине-1998), а также на семинарах ведущих научных школ (МГУ, МИАН, Гумбольдт-университет и др.).

Замечания и вопросы.

Несмотря на высокую оценку работы, можно высказать следующие замечания и пожелания:

1. В теоремах 2.5 и 2.9 показана точность констант $(2 \text{ и } (3)^{1/2})$. Однако в тексте не хватает явного развернутого примера связной группы Ли и ее разрывного представления, для которого $\omega(\pi)=2\omega(\pi)=2$, но $\epsilon(\pi)\neq 0$, чтобы наглядно продемонстрировать разницу между слабой и сильной вариацией (хотя ссылка на Пример 2.3 есть, его стоило бы разобрать подробнее применительно к группам Ли).
2. В Теореме 5.10 (iv) утверждается, что аппроксимирующее отображение Θ является чистым псевдопредставлением. Показано, что любое конечномерное квазипредставление связной группы Ли аппроксимируется чистым. Чем вызвана необходимость введения понятия «чистоты» именно в таком виде (совпадение с представлением на аменабельных подгруппах), и каковы примеры «нечистых» квазипредставлений, не аппроксимируемых чистыми при малом дефекте?

3. В Заключении и Введении заявлено о возможных приложениях в математической физике. Хотелось бы видеть чуть более конкретный комментарий (хотя бы на перспективу), какие именно физические модели (например, теории с аномалиями или эффективные квантовые теории поля) могут быть описаны полученными квазипредставлениями эрмитово-симметрических групп.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования.

Заключение.

Диссертационная работа Штерна Александра Исааковича «Вопросы теории непрерывных представлений топологических групп и их обобщений» является завершенной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение крупной научной проблемы в области геометрии и топологии, а именно: получена полная классификация конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли и доказан ряд теорем об автоматической непрерывности гомоморфизмов, включая решение проблем Каждана–Мильмана и Мищенко.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. – «Геометрия и топология», а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Штерн Александр Исаакович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 — «Геометрия и топология».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
отдела вычислительной физики и кинетических уравнений
Федерального государственного учреждения
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

САКБАЕВ Всеволод Жанович

 / *В.М. Сакбаев*

19 мая 2026 г.

Контактные данные:

тел.: 7(499)978-13-14, e-mail: office@keldysh.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

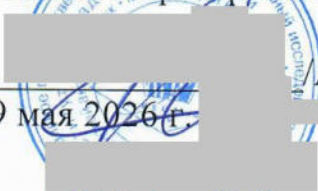
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы,
оптимальное управление

Адрес места работы:

125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4,
Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша Российской академии наук»
Отдел вычислительной физики и кинетических уравнений
Тел.: 7(499)978-13-14, e-mail: office@keldysh.ru

Подпись ведущего научного сотрудника
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН Сакбаева В.Ж. удостоверяю.

Ученый секретарь ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

 / А.А. Давыдов
19 мая 2026 г.