

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



Демченко Ярослав Владиславович

**Крутильные аэроупругие колебания цилиндра в
газовом потоке**

Специальность 1.1.9.Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители

д.ф.-м.н., профессор В.В. Веденеев

к.ф.-м.н. О.О. Иванов

Москва — 2026

Оглавление

Введение	4
1 Обзор литературы	20
2 Вспомогательные методы: обработка и предсказание	29
2.1 Постановка задачи	29
2.2 Уравнения движения	30
2.3 Собственные частоты	34
2.4 Методы обработки экспериментальных данных	37
2.5 Вычисление сдвига фаз	40
3 Крутильные колебания цилиндра, закрепленного на конце упругой балки	45
3.1 Экспериментальная установка	45
3.2 Результаты	49
3.3 Обсуждение и выводы	58
4 Влияние коцевых эффектов на крутильные колебания цилиндра	60
4.1 Описание эксперимента	60
4.2 Результаты	63
4.3 Обсуждение и выводы	78
5 Влияние длины цилиндра на амплитуду крутильных <i>VIV</i>	80

5.1	Описание эксперимента	80
5.2	Результаты	81
5.3	Обсуждение и выводы	84
	Заключение	85
	Литература	87

Введение

Актуальность темы

Явление аэроупругих колебаний различных тел хорошо известно и изучается многими авторами по всему миру. Его можно наблюдать в авиационной технике, различных объектах гражданской инфраструктуры, включая здания, мостовые сооружения и т. д. Колебания могут достигать значительных амплитуд, что способно привести к усталостным повреждениям и даже к разрушению конструкции. В силу развития авиации и гражданских объектов задача предотвращения аэроупругих колебаний остаётся востребованной и актуальной.

В последние десятилетия всё более актуальными становятся работы по созданию новых типов ветрогенераторов, в том числе основанных на явлении резонансных аэроупругих колебаний цилиндра, известных в зарубежной литературе как *vortex-induced vibrations*, *VIV*. Такие колебания вызваны формированием дорожки Кармана, которая образуется позади плохо обтекаемых тел при обтекании их поперечным потоком газа или жидкости. Существенное увеличение амплитуд колебаний наблюдается в относительно узком диапазоне скоростей, начало которого обычно соответствует сближению частоты схода вихрей и собственной частоты колебаний тела.

Актуальность подобных исследований обусловлена возможностью использования такого типа ветрогенераторов в труднодоступных регионах — в зонах Крайнего Севера и пустынь, где эксплуатация традиционных роторных ветряков из-за наличия подшипников и трущихся частей затрудне-

на. Поскольку извлечение энергии приводит к дополнительному «эффективному» демпфированию в колебательной системе, возникает важная задача повышения интенсивности колебаний, что может быть достигнуто за счёт увеличения их амплитуды и частоты. Кроме того, расширение диапазона скоростей набегающего потока, в котором цилиндр совершает колебания, также может существенно увеличить эффективность ветроэнергетической установки при эксплуатации ветрогенератора.

В диссертации экспериментально изучается ранее не исследованный тип *VIV*, впервые открытый в настоящей работе. При этом наблюдается трёхмерная синхронизация вихрей, сходящих в разных поперечных сечениях цилиндра, колеблющихся с разной амплитудой. Данный тип ветрогенератора прост по своей конструкции и состоит из цилиндра, закреплённого на упругой балке поперек набегающего потока. Изучаемый тип *VIV*, по сравнению с классическим режимом двумерных колебаний, позволяет ветрогенератору работать в более широком диапазоне скоростей набегающего потока, а также колебаться с большей собственной частотой и амплитудой.

Цель и задачи работы

Целью работы является всестороннее исследование открытого типа автоколебаний. Для её достижения были поставлены **следующие задачи**:

1. Теоретически исследовать систему, состоящую из круглого цилиндра конечного размаха, закреплённого на консольной балке. Вывести уравнение поперечных и крутильных колебаний цилиндра для расчета собственных частот.

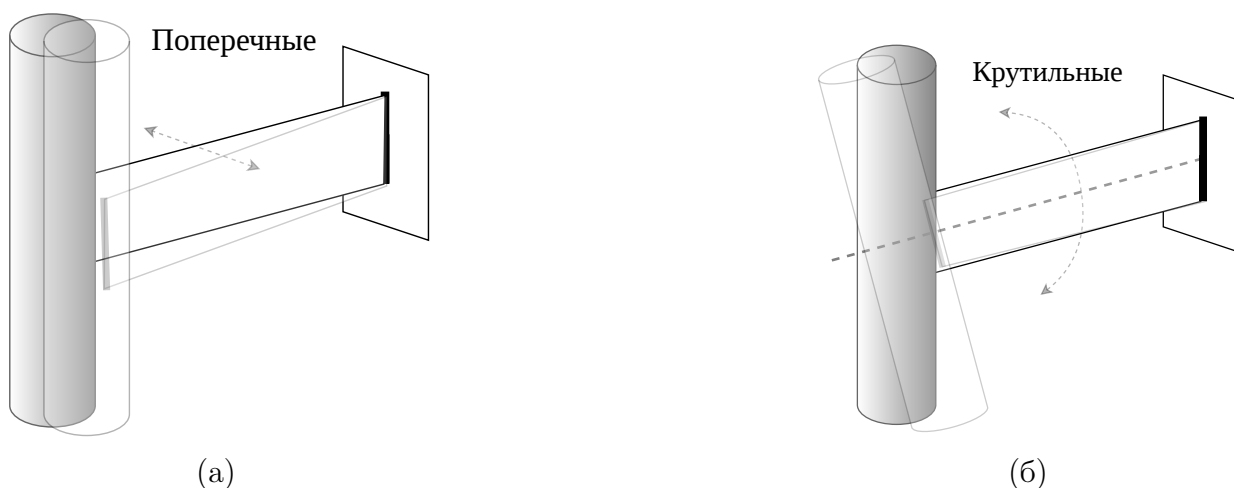


Рис. 0.1: Два типа колебаний: (а) поперечный (*translational*) и (б) крутильный (*rotational*).

2. Экспериментально подтвердить существование, помимо классических поперечных колебаний, крутильного типа колебаний. Выявить диапазон безразмерных скоростей потока, в котором существуют развитые автоколебания, определить их амплитуды.
3. Выявить характер схода вихрей в режиме крутильных колебаний. Изучить характер дорожек Кармана, сходящих в симметричных сечениях цилиндра относительно оси вращения цилиндра.
4. Исследовать структуру вихревого следа вдоль размаха цилиндра и её изменение при различных концевых условиях в режиме крутильных колебаний.
5. Исследовать влияние длины цилиндра на амплитуду крутильных колебаний.

Новизна работы

Явление аэроупругих колебаний различных тел активно исследуется в области извлечения энергии и разработки новых типов ветрогенераторов. В

частности, оно рассматривалось в исследованиях по извлечению энергии из колебаний, где использовался ветрогенератор, представляющий собой круглый цилиндр, закреплённый на упругой балке. В определённом диапазоне скоростей потока возбуждаются поперечные двумерные колебания, из которых извлекается электрическая энергия (рис. 0.1а). Обычно для этого использовался пьезоэлектрический элемент для преобразования энергии деформации в электрическую.

В диссертации рассмотрен ранее не встречавшийся в литературе тип колебаний, вызванный сходом вихрей. Он обусловлен резонансом аэродинамических сил с крутильными колебаниями цилиндра, при которых балка, играющая роль упругого закрепления, испытывает крутильную деформацию (рис. 0.1б). Экспериментально получен диапазон безразмерных скоростей потока, в котором существуют развитые автоколебания, и определены их амплитуды.

Отличительной особенностью данного режима является нетипичное формирование вихрей, сходящих с цилиндра. Оказалось, что вихревые дорожки Кармана, генерируемые верхней и нижней частями цилиндра, сходят в противофазе, т. е. сдвинуты по фазе на π . Также в рамках изучения нового типа аэроупругих колебаний исследовалась структура вихревого следа вдоль размаха цилиндра и её изменение при различных концевых условиях. Исследовано влияние длины цилиндра на амплитуду крутильных колебаний.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическое значение заключается в обнаружении и исследовании синхронизации вихревой дорожки Кармана при трёхмерном движении цилиндра, при которой возникает переменный во времени крутящий момент, возбуждающий крутильные колебания. Это может быть использовано для разработки новых экологически чистых источников энергии, актуальных для труднодоступных регионов, условий пустынь и Арктики.

Обнаруженный новый тип аэроупругих колебаний позволит расширить область применения рассматриваемого типа ветрогенератора на больший диапазон скоростей набегающего потока с более интенсивными колебаниями — большими амплитудами и частотами по сравнению с классическими поперечными колебаниями.

Положения выносимые на защиту

1. Экспериментально открыт новый тип крутильных автоколебаний цилиндра, вызванный сходом вихрей. Получен диапазон безразмерных скоростей потока, в котором существуют развитые автоколебания, и определены их амплитуды.
2. В режиме крутильных колебаний вихревые дорожки Кармана, генерируемые верхней и нижней частями цилиндра, сходят в противофазе. Фаза схода вихрей скачком меняется вблизи закрепления балки, которая ведёт себя как разделительная пластина, предотвращающая образование вихрей в сечениях вблизи оси вращения цилиндра.
3. Доказано наличие режима захвата частоты схода вихрей для исследо-

ванного типа колебаний.

4. Исследован характер схода вихрей по размаху цилиндра в зависимости от различных концевых условий.
5. Зависимость максимальной амплитуды крутильных колебаний от длины цилиндра немонотонна и имеет локальный минимум.

Методология и методы исследования

Для исследования колебаний цилиндра, закреплённого на упругой балке, использовались проверенные экспериментальные методы. Экспериментальная модель цилиндра помещалась в открытую рабочую часть аэродинамической трубы с камерой Эйфеля.

Для измерений скорости набегающего потока применялся термоанемометр, показания которого были предварительно откалиброваны с помощью термоанемометрической системы DISA 55DO5 с одноточечным датчиком 55P8. Эта система также использовалась для измерения пульсаций скорости в следе за цилиндром.

Количественное описание колебаний производилось с помощью триангуляционного лазерного датчика высокой точности. Для определения собственной частоты и коэффициента демпфирования свободных колебаний цилиндра без потока применялся метод затухающих колебаний.

Степень разработанности темы

Двумерные поперечные колебания упруго подвешенного или закреплённого цилиндра детально исследованы в литературе [11, 27, 30–32, 45, 54, 63]. В

частности, задача о колебаниях цилиндра, закреплённого на конце упругой балки, экспериментально исследовалась в нескольких работах зарубежных авторов [2, 4, 13, 60].

Азаде-Ранджбар и др. исследовали влияние длины цилиндра на амплитуду VIV [4]. Им удалось показать, что при уменьшении длины цилиндра амплитуда увеличивается, а диапазон амплитудного отклика смещается в сторону более высоких скоростей. Кроме того, авторы провели визуализацию течения в следе за цилиндром на различных высотах вдоль размаха цилиндра — она показала неоднородный характер схода вихрей вдоль его поверхности.

Морс, Говардхан и Уильямсон [36] изучили влияние концевых условий на колебания цилиндра. Они предположили негативное воздействие концевого эффекта на амплитудную характеристику VIV , но выяснили, что без аэродинамической шайбы амплитуда колебаний выше и колебания устойчивее во всём диапазоне.

Бурге и Матис [10] изучили влияние концевых условий (плоский/полусферический торец либо торец с аэродинамической шайбой) и трёх степеней турбулентности потока (ламинарное течение и два турбулентных режима, генерируемых сеткой) на поперечные колебания круглого цилиндра, вызванные сходом вихрей. Авторы выявили воздействие концевых условий на число Струхалия неподвижного цилиндра и положение кривой амплитудного отклика VIV . Также им выявлен более регулярный характер колебаний при свободном торце (по сравнению с вариантом с аэродинамической шайбой).

Ни в одной работе не наблюдалось возбуждение иного типа VIV с со-

ответствующим диапазоном захвата частоты, помимо классических поперечных колебаний. В связи с этим все представленные в работе результаты являются новыми.

Достоверность и апробация работы

Достоверность результатов работы обусловлена использованием классических методов исследования в аэрофизическом эксперименте; хорошей согласованностью результатов экспериментов, полученных лично автором с результатами других специалистов по аэроупругости в подобных экспериментальных работах; использованием откалиброванных и настроенных измерительных приборов и применением проверенных экспериментальных техник.

Результаты диссертационной работы были представлены на следующих научных семинарах и международных и всероссийских научных конференциях:

1. Семинар по механике сплошных сред имени А.Г. Куликовского и А.А. Бармина под руководством В.П. Карликова, А.Н. Осипцова, А.А. Афанасьева и Н.В. Никитина.
2. Семинар кафедры газовой и волновой динамики под руководством Р.И. Нигматулина, Н.Н. Смирнова, А.В. Звягина.
3. Научный семинар имени С.М. Белоцерковского под руководством В. В. Вышинского, А. В. Головнева, М. А. Киселёва, Г. А. Щеглова.
4. Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM (Сочи – 2023, 2024, 2025).

5. Ломоносовские чтения (Москва – 2023, 2024, 2025).
6. Конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва – 2024, 2025).
7. Конференция Ломоносов (Москва, виртуально – 2024, 2025).
8. Школа-конференция «Актуальные проблемы механики» (Петергоф – 2025).
9. Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике (Новосибирск – 2025).
10. Конференция — школа молодых ученых с международным участием «Многофазные системы модели, эксперимент, приложения» (Уфа – 2025).
11. Международная конференция – школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва – 2025).
12. Международная конференция – Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность (НеЗаТеГиУс) (Московская область – 2026).
13. XII International Conference on Structural Dynamics (EuroDyn 2023) (Нидерланды, Делфт, виртуально – 2023).
14. 10th International Conference on Vortex Flow Mechanics (ICVFM 2023) (Китай, Нанкин – 2023).
15. 10th International Symposium on Fluid-Structure Interactions, Flow-Sound Interactions, Flow-Induced Vibration & Noise (FIV 2024) (Бразилия, Игуасу – 2024).
16. the 26th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM 2024) (Южная Корея, Тэгу – 2024).

17. 7th Symposium on Fluid-Structure-Sound Interactions and Control (FSSIC 2025) (Канада, Ошава/Торонто – 2025).

Автор работы был отмечен двумя дипломами 1-ой степени (2024) и дипломом 2-ой степени за лучшую работу аспиранта (2025) на конференции-конкурсе молодых ученых НИИ механики МГУ; дипломом 1-ой степени за лучшую работу аспиранта на Всероссийской конференции молодых ученых-механиков (YSM-2025). Доклад на конференции «Ломоносов - 2025» секции «Математика и механика» был отмечен грамотой секции.

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы. Полный объём диссертации составляет 98 страницы, включая 32 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 79 наименований.

В Главе 1 приводится обзор литературы, посвященной изучению резонансных аэроупругих колебаний цилиндра, вызванных дорожкой Кармана (*VIV*) в потоке газа или жидкости.

В Главе 2 обсуждаются вспомогательные методы, которые использовались для предсказания, а также для обработки результатов экспериментов. В разделе 2.1 формулируется постановка задачи для описания математической модели цилиндра, закрепленного на упругой балке. В разделе 2.2 выводятся уравнения колебаний поперечного и крутильного типа для нахождения собственных частот колебаний цилиндра, которым посвящен раздел 2.3. В разделе 2.4 описываются, методы обработки результатов экспериментов, в том числе описывается сдвиг фаз между положением ци-

линдра и сходом вихрей, используемый в настоящей работе, для описания характера схода вихрей. В разделе 2.5 обсуждаются методы определения сдвига фаз между двумя периодическими сигналами для последующего их использования при анализе характера схода дорожек Кармана в следе за цилиндром.

В Глава 3 экспериментально исследуется крутильный тип *VIV*, изучаются основные его характеристики, в частности, характер схода дорожек Кармана.

Раздел 3.1 содержит описание экспериментальной установки. Исследования выполнялись в аэродинамической трубе А-10 с камерой Эйфеля и открытой рабочей частью, размещённой в НИИ механики МГУ.

Испытывались две стальные балки со следующими параметрами: сечение — 3×33 мм; плотность материала — $\rho = 7850$ кг/м³; модуль Юнга — $E = 224 \times 10^9$ Па; модуль сдвига — $G = 82 \times 10^9$ Па; длины — $l = 325$ мм и $l = 375$ мм, соответствующие безразмерным значениям $l/D = 6.5$ и $l/D = 7.5$ соответственно.

Цилиндр изготовлен из дюралюминия и имел следующие характеристики: масса — $m_s = 0.116$ кг; длина — $L = 500$ мм; внешний диаметр — $D = 25$ мм; внутренний диаметр — $D_{int} = 23$ мм.

Параметры собственных колебаний системы цилиндр-балка: для балки длиной 325 мм поперечная частота составляет $f_{tr} = 12.67$ Гц, крутильная частота — $f_{rot} = 27.62$ Гц; для балки длиной 375 мм поперечная частота равна $f_{tr} = 10.10$ Гц, крутильная частота — $f_{rot} = 25.60$ Гц.

Эксперименты проводились в рабочем диапазоне чисел Рейнольдса $(1 - 9.3) \times 10^3$. Для проведения измерений применялось следующее обо-

рудование: триангуляционный лазерный датчик Riftek RF-603 — для фиксации отклонений верхнего торца цилиндра от положения равновесия; термоанемометр Smart Sensor AR866 — для определения скорости набегающего потока; зеркало, установленное на балке, и лазерная указка — для выявления преобладающего типа колебаний (горизонтальная линия соответствовала изгибным деформациям, вертикальная — крутильным); термоанемометр постоянной температуры DISA 55DO5 с одноточечным датчиком 55P81 — для измерения пульсаций скорости в следе за цилиндром.

В разделе 3.2 обсуждаются результаты экспериментов первой части работы. Вначале были проведены измерения частот схода вихрей f_s для неподвижного цилиндра с длиной балки $l/D = 6.5$ в нескольких сечениях вдоль размаха цилиндра. Частота схода вихрей соответствует числу Струхалия $St \approx 0.16$, что меньше $St \approx 0.20$, характерного для цилиндра бесконечного размаха. Такое поведение связано с наличием концевых вихрей из-за сдвигового слоя, сходящего с торцов цилиндра [58].

В последующих экспериментах цилиндр свободно колебался. Были найдены зависимости амплитуды колебаний от скорости набегающего потока, на которых видно два четко выраженных режима колебаний. Диапазоны амплитудных откликов крутильных VIV по сравнению с поперечными VIV смещены в сторону более высоких скоростей набегающего потока из-за разницы в собственных частотах колебаний (собственные частоты крутильных колебаний более чем в два раза больше поперечных, и поэтому диапазоны не пересекаются). Но с точки зрения безразмерных приведенных скоростей $V_r = U_\infty / f_n D$ (где в качестве характерной частоты используются частоты свободных поперечных и крутильных колебаний, соответственно) пики ам-

плитуд соответствуют близким приведенным скоростям.

Следующая серия экспериментов была направлена на анализ потока в следе за цилиндром с использованием синхронных измерений амплитуды колебаний цилиндра триангуляционным лазерным датчиком и пульсаций скорости термоанемометром постоянной температуры. Было доказано, что для крутильных *VIV* также существует режим захвата частоты.

Далее для описания характера схода дорожек Кармана в обоих режимах *VIV* вычислялся фазовый сдвиг φ между положением цилиндра и сходом вихрей. Для этого сигнал термоанемометра фильтровался полосовым фильтром в диапазонах $f_{tr} \pm 0.1$ Гц и $f_{rot} \pm 0.1$ Гц (для случая поперечных или крутильных колебаний, соответственно), а после вычислялась корреляция между сигналами триангуляционного лазерного датчика и термоанемометра в зонах захвата частоты. Величина φ характеризует сдвиг фазы пульсации скорости $s_i = s_i^0 \cos(\omega t + \varphi)$ относительно фазы перемещения $w_i = w_i^0 \cos(\omega t)$. Используя полученные значения φ , были вычислены разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_{bottom} - \varphi_{top}$ между вихревыми дорожками Кармана в поперечных сечениях, расположенных симметрично относительно оси вращения цилиндра. Таким образом, было показано, что для поперечных *VIV* сдвиг фаз $\Delta\varphi \approx 0$, что свидетельствует о симметричном сходе дорожек Кармана в симметричных верхних и нижних сечениях. В то время как для крутильных *VIV* разница фаз $\Delta\varphi \approx \pi$, свидетельствующая о противофазном сходе дорожек Кармана в симметричных сечениях относительно оси вращения.

Глава 4 посвящена более детальному исследованию структуры вихревого следа вдоль размаха цилиндра и её изменению при различных концевых

условиях в режиме крутильных *VIV*. В разделе 4.1 представлено описание экспериментальной установки, использованной во второй части исследования. Эксперименты выполнялись на той же аэродинамической трубе с применением прежней экспериментальной модели. При этом цилиндр переместили ближе к выходной части конфузора, для нивелирования возможного влияния расширяющегося сдвигового слоя на границе равномерного потока в открытой рабочей части на описываемые далее концевые эффекты, а также модифицировали основание для крепления цилиндра. Длина балки оставалась неизменной и составляла $l/D = 6.5$. Измерительные приборы использовались те же, что и ранее, за исключением термоанемометра для измерения скорости набегающего потока: его заменили на модель Testo 405i. Для варьирования концевых условий использовались четыре типа торцевых насадок:

1. Свободный торец;
2. Полусферическая торцевая насадка;
3. Присоединённая круглая аэродинамическая шайба диаметром $3D$;
4. Отсоединённая аэродинамическая шайба диаметром $3D$, расположенная на расстоянии $G = 0.04D$ от торца цилиндра.

Присоединённые и отсоединённые аэродинамические шайбы имели одинаковую толщину $0.04D$.

В разделе 4.2 приводятся основные результаты данной части работы. Были построены графики для различных конечных условий безразмерной амплитуды A/D в зависимости от приведенной скорости $V_{r, tr}$, вычисленной с использованием только поперечной собственной частоты f_{tr} .

Для анализа характера схода вихрей в следе за цилиндром вычислялась разность фаз между движением цилиндра и сходом вихрей с использованием преобразования Гильберта. В результате были найдены зависимости изменения соответствующих сдвигов фаз φ и $\Delta\varphi$ по размаху цилиндра. Имеет место заметная неравномерность распределения фазы срыва вихрей вдоль цилиндра (для случаев свободного торца и полусферы). При поперечных колебаниях присоединенные и отсоединенные аэродинамические шайбы несколько сглаживают это распределение; при крутильных колебаниях их влияние значительно сильнее, в результате чего процесс срыва вихрей становится практически синхронным. Что касается $\Delta\varphi$, то в режиме крутильных *VIV* дорожки Кармана в симметричных сечениях сходят в противофазе для всех случаев торцевых насадок.

Глава 5 посвящена экспериментальному исследованию влияния длины цилиндра на амплитуду крутильных колебаний.

В разделе 5.1 представлена экспериментальная установка, использованная в третьей части исследования. Методика измерений и конфигурация оборудования полностью соответствовали тем, что применялись в разделе 4.1. Ключевое отличие заключалось в том, что в данном случае изучалась серия цилиндров различной длины. При этом концевые условия на торцах образцов соответствовали случаю свободного торца. Раздел 5.2 посвящён анализу основных результатов проведённой серии экспериментов. В рамках исследования режима крутильных *VIV* были построены графики, отражающие зависимость:

- безразмерной амплитуды A/D ;
- амплитуды угла поворота цилиндра θ

от приведённой скорости $V_{r, rot}$ для разных значений относительного удлинения цилиндра L/D .

На основании полученных данных построена зависимость максимальной амплитуды A_{max}/D и максимального угла поворота θ_{max} от безразмерной длины L/D .

Выявленные закономерности характеризуются следующими особенностями:

- зависимости A_{max}/D и θ_{max} от L/D носят немонотонный характер и имеют локальные минимумы при $L/D = 20$;
- максимальное значение безразмерной амплитуды $A_{max}/D \approx 1.11$ достигается при $L/D = 12$ и $L/D = 14$;
- наибольшая амплитуда угла поворота $\theta_{max} \approx 0.37$ рад. наблюдается при $L/D = 12$.

Кроме того, для цилиндров с относительным удлинением $L/D = 24$ и $L/D = 28$ обнаружено следующее явление: в сравнительно узком диапазоне приведённых скоростей возникает незатухающий смешанный тип колебаний. Он проявляется как резонанс, обусловленный одновременным возбуждением поперечных и крутильных *VIV*.

1 Обзор литературы

Обтекаемое тело на упругом основании, помещённое в поток среды (жидкости или газа), подвергается воздействию аэродинамических (или гидродинамических) сил и в результате может испытывать вибрации, вызванные этим потоком. При приложении к конструкции аэродинамической силы происходит отклонение её от положения равновесия. Упругая сила стремится вернуть цилиндр в положение равновесия, в результате конструкция оказывает на жидкость воздействие, характеристики которого обусловлены внутренними свойствами конструкции. Как следствие, имеют место самовозбуждающиеся колебания, которые возникают из-за взаимодействия между этими двумя динамическими силами. Такие вибрации, индуцированные потоком, имеют название *flow-induced vibrations* (FIV) [9, 43, 78]. Их можно встретить при эксплуатации летательных аппаратов (флаттер, бафтинг) и различных гражданских сооружений, включая летательные аппараты, мосты, дымовые трубы и т. д. [41]. Колебания могут достигать значительных амплитуд, что способно привести к усталостным повреждениям и даже к разрушению конструкции. Поэтому существует целый класс задач, направленный на недопущение возникновения таких колебаний.

Однако, помимо изучения способов их предотвращения, на этом явлении основана технология разработки новых типов ветро- и гидрогенераторов [2, 7, 53, 59, 60]. В зависимости от амплитуды колебаний для преобразования механической энергии в электрическую применяют различные преобразователи. В исследованиях наиболее часто встречаются: электромагнитные [38], электростатические [35] и пьезоэлектрические преобразо-

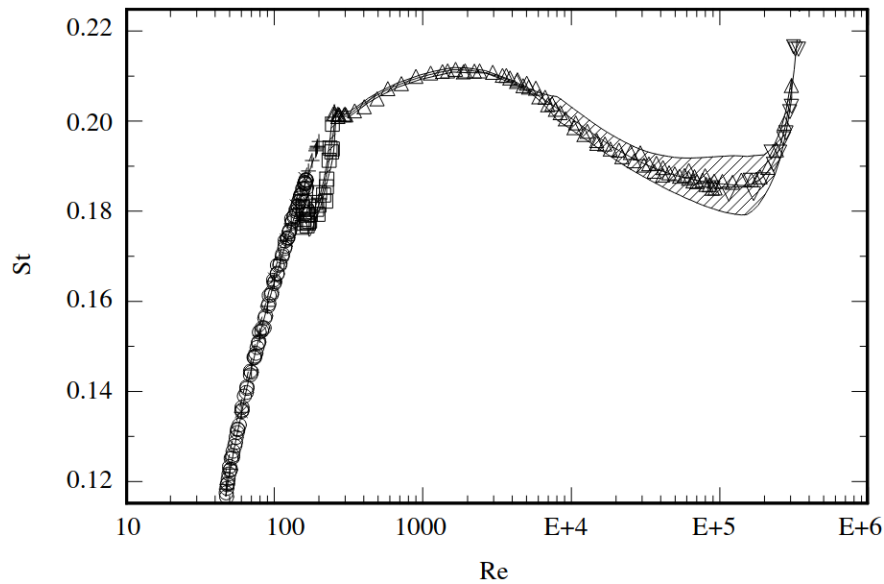


Рис. 1.1: Теоретические и экспериментальные данные различных авторов о зависимости числа Струхалия St от числа Рейнольдса Re [39].

ватели [62]. При этом среди трёх обозначенных преобразователей активнее всего применяются пьезоэлементы, т. к. они могут быть размещены на небольшой площади конструкции и позволяют преобразовывать энергию в широком диапазоне частот. Обзоры современных концепций извлечения энергии из таких колебаний представлены в работах [1, 21, 52, 62].

Частный случай явления FIV, известного в зарубежной литературе как *vortex-induced vibrations*, *VIV* [11, 27, 30–32, 45, 54, 63], возникает у продолговатых цилиндрических тел различного сечения, включая круговое, квадратное, эллиптическое, профиль крыла и т. д. [33, 34, 46, 53, 56]. Колебания тела возникают вследствие периодического срыва вихрей, приводящего к появлению периодической подъёмной силы. Для жёстких цилиндров (в отсутствие колебаний) в широком диапазоне чисел Рейнольдса

$$Re = \frac{U_{\infty} D}{\nu}$$

частота схода вихрей f_s удовлетворяет соотношению

$$St = \frac{f_s D}{U_\infty} \approx \text{const.}$$

Здесь: U_∞ — скорость потока; D — характерный размер поперечного сечения цилиндра; ν — кинематическая вязкость. В случае круговых цилиндров D — диаметр, и число Струхалия близко к 0.2 (Рис. 1.1) для диапазона чисел Рейнольдса от 300 до 2×10^5 , который соответствует докритическому режиму обтекания [12, 39].

Однако для упруго закреплённых цилиндров, когда частота схода вихрей близка к собственной частоте цилиндра f_n , наблюдается явление синхронизации или захвата частоты (*lock-in*) [27, 30, 45]. В этом режиме частота схода вихрей больше не удовлетворяет условию $St \approx \text{const}$ и остаётся близкой к собственной частоте колебаний цилиндра. Именно в этом режиме наблюдается возбуждение автоколебаний, вызванных сходом вихрей.

Помимо числа Струхалия, для описания *VIV* также используют безразмерную приведённую скорость, которая определяется как

$$V_r = \frac{U_\infty}{f_n D}.$$

Как правило, большие амплитуды колебаний приводят к более широким диапазонам захвата. Диапазон приведённых скоростей режима захвата частоты всегда включает значение, соответствующее обратному числу Струхалия, вблизи которого достигается максимальная амплитуда [6].

С увеличением скорости потока частота схода вихрей скачкообразно возвращается к значениям, соответствующим случаю обтекания жесткого

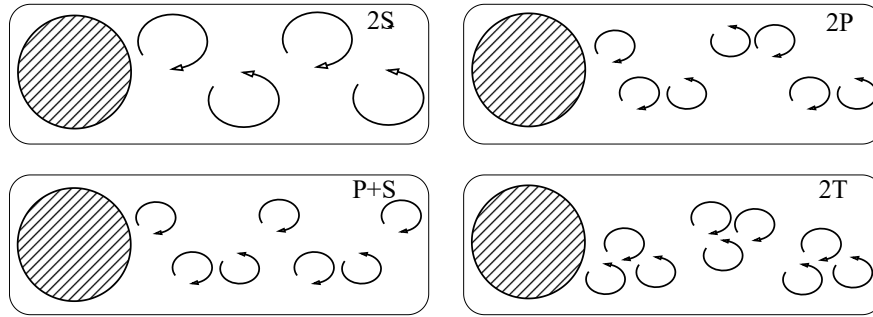


Рис. 1.2: Различные режимы схода вихрей с круглого цилиндра.

цилиндра $St \approx \text{const}$.

Срыва вихрей с колеблющихся тел является сложным явлением. Вихрь, образующийся за цилиндром, влияет на его движение, но в то же время движение цилиндра может изменить структуру вихревой дорожки Кармана. Уильямсон и Рошко [54] обнаружили три регулярных режима срыва вихрей и охарактеризовали каждый режим числом вихрей:

- 2S — за цикл колебаний с цилиндра срываются два отдельных вихря;
- 2P — за цикл срываются две пары вихрей;
- P+S — сходит одиночный вихрь и пара вихрей за цикл колебаний.

Ещё один режим срыва вихрей был описан в работе Жаувитса и Уильямсона [30] для цилиндра с двумя степенями свободы — со срывом двух троек вихрей за цикл, названный режимом 2Г. Различные режимы схода вихрей схематично изображены на рис. 1.2.

Для предсказания характеристик колебаний, вызванных сходом вихрей, включая амплитуду колебаний, Гриффин и Скоп [26], а также Баласубраманиян [49] по имеющимся на тот момент экспериментальным данным построили график зависимости безразмерного пика амплитуды A_{\max}/D по-

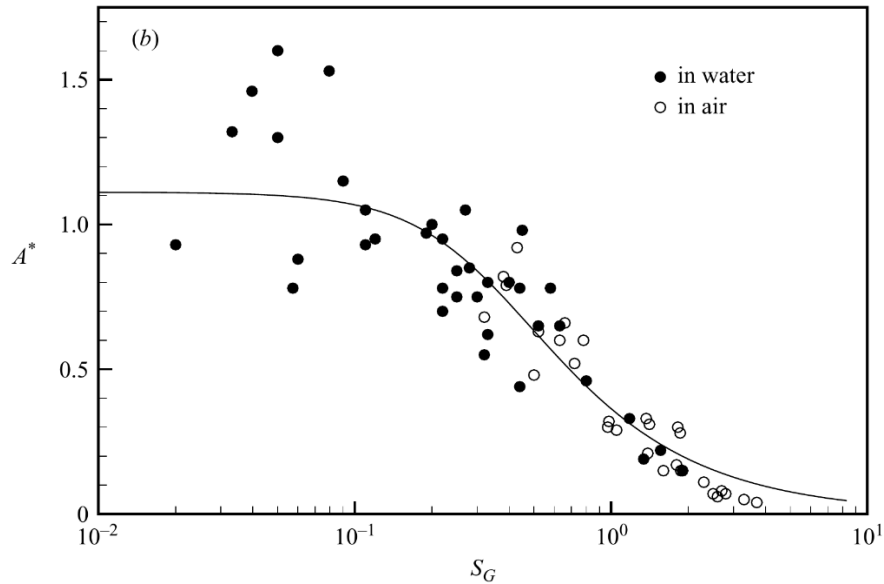


Рис. 1.3: График Гриффина, аппроксимирующий экспериментальные данные. Зависимость максимальной амплитуды колебаний $A^* = A_{\max}/D$ в зависимости от параметра Скопа–Гриффина S_G .

перечных колебаний от параметра Скопа–Гриффина [25]

$$S_G = 2\pi^3 m^* \zeta_s St^2,$$

известный как «график Гриффина» (рис. 1.3). Здесь: $\zeta_s = c/(2m_s(2\pi f_n))$ — коэффициент конструкционного демпфирования; c — конструкционное демпфирование; $m^* = m_s/m_a$ — приведённая масса; m_s — масса тела; m_a — масса вытесненной жидкости.

Для приложений в гражданском строительстве важно изучать задачи, отличные от обтекания изолированного цилиндра. К ним могут относиться задачи, связанные с колебаниями вблизи твёрдых поверхностей: плоских стенок [20]; стержней [61]; конечных в направлении потока тел [29, 47], а также в тандемных конфигурациях [3, 42] и т. д.

В данной работе рассматривается другой частный случай — обтекание цилиндров конечного размаха (или удлинения). В этом случае влияни-

ем свободного торца на течение в следе за цилиндром нельзя пренебречь. Частота схода вихрей ниже, чем для бесконечно длинного цилиндра, и уменьшается от центра к его концу [22, 58]. Например, из исследования Фаривара [22] известно, что для кругового цилиндра конечного размера число Струхаля равно 0.17 для центральных сечений и примерно 0.09 для сечений, близких к торцам.

Исследованию течения вблизи цилиндра конечной высоты, установленного на плоской поверхности со свободным концом, посвящено множество работ, с которыми можно ознакомиться в обзоре Самнера [48].

Для колеблющихся цилиндров эффект уменьшения числа Струхаля приводит к смещению режима захвата частоты в сторону более высоких приведённых скоростей [4, 16].

Азаде-Ранджбар и др. [4] исследовали *VIV* кругового цилиндра конечной длины с двумя свободными торцами и с различными относительными удлинениями (AR), определяемыми как длина цилиндра, отнесённая к его диаметру. Авторы обнаружили, что в режимах до захвата частоты (*pre-lock-in*) и после захвата частоты (*post-lock-in*) зависимость $St-Re$ с условием $St \approx const$ сохраняется, но значение числа Струхаля St оказывается меньше 0.2. При этом чем меньше значение AR , тем ниже число Струхаля. Число Струхаля остаётся практически неизменным вдоль размаха цилиндра, однако по мере приближения к его концам оно снижается. Кроме того, они выяснили, что значение приведённой скорости в точке пиковой амплитуды возрастает примерно с 6.7 до 10.5 при уменьшении AR с 28.8 до 5.0. Также область амплитудного отклика по приведённым скоростям расширяется по мере уменьшения AR .

Бишоп и Хассан [8] в своих экспериментах показали существование скачка разности фаз между действующей на цилиндр силой и движением цилиндра на определённой «критической» частоте.

Онгорен и Роквелл [40] исследовали фазовый сдвиг между скоростью потока в следе за цилиндром и его отклонениями при вибрациях. Рассматривались цилиндры различных сечений, в частности, круглое. Цилиндры вынужденно колебались в потоке; изменялась только частота вынужденных колебаний. До режима захвата частоты фаза увеличивалась с ростом частоты вынужденных колебаний. В начале режима захвата частоты фаза резко изменяется на π . Дальнейшее увеличение частоты вынужденных колебаний приводит лишь к незначительным изменениям фазы.

Кроме того, фазовый сдвиг между пульсацией скорости потока в следе за цилиндром и положением цилиндра был экспериментально исследован в аэродинамической трубе в работе Брики и Лейнвилла [11]. Они установили, что скачок на амплитудно-частотной характеристике и фазе связан с изменением схемы вихреобразования с $2S$ на $2P$.

Зависимость фазового угла между подъёмной силой и отклонением цилиндра от скорости потока была построена Гриффином и др. [24]. Они показали, что фазовый угол увеличивается с увеличением скорости потока. Бирман и Карри [5] впоследствии подтвердили их результаты.

Сарпкая [44] исследовал зависящую от времени силу, действующую на жёсткий круговой цилиндр, совершающий вынужденные поперечные колебания в равномерном потоке. Он определил синфазную и противофазную составляющие силы из экспериментов с числами Рейнольдса в диапазоне $(5-25) \times 10^3$.

Морзе, Говардхан и Уильямсон [36] изучали *VIV* цилиндра с тремя различными условиями на концах:

1. присоединённая аэродинамическая шайба (*attached end plate*);
2. отсоединённая аэродинамическая шайба (*unattached end plate*), прикреплённая к полу канала (с переменным зазором между цилиндром и шайбой);
3. условие со свободным плоским торцом цилиндра (*free end*).

Они предположили, что концевой эффект оказывает негативное влияние на амплитудный отклик *VIV*. Однако они обнаружили, что во всей области отклика амплитуда колебаний была выше при отсутствии аэродинамической шайбы (хотя пиковая амплитуда была почти такой же), а колебания были более устойчивыми. Кроме того, в случае отсоединённой аэродинамической шайбы при зазорах, превышающих 15 % диаметра, *VIV* цилиндра становится независимым от размера зазора. Наконец, вибрации в условиях со свободными торцами более регулярны (более близки к синусоидальным), чем в условиях с аэродинамическими шайбами.

Бурге и Матис [10] также изучали влияние различных концевых условий, рассматривая разные формы торцов цилиндра и различную интенсивность турбулентности набегающего потока на поперечные колебания круглого цилиндра, вызванные сходом вихрей. То есть они исследовали два концевых условия со свободным торцом — плоским или полусферическим — и концевое условие с присоединённой аэродинамической шайбой.

Кроме того, рассматривались три степени турбулентности: ламинарное течение и два турбулентных режима, генерируемых сеткой, с различными

уровнями интенсивности турбулентности. Авторы показали влияние различных концевых условий на число Струхаля неподвижного цилиндра и положение кривой амплитудного отклика *VIV*. Также они обнаружили, что колебания были более регулярны в условиях свободного торца, чем в условиях с аэродинамической шайбой.

2 Вспомогательные методы: обработка и предсказание¹

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную упругую балку длины l , ширины a и толщины b . Балка жёстко закреплена в массивном основании, как показано на рис. 2.1. Другой конец балки закреплён в круглом жёстком тонкостенном цилиндре длины L , с внешним диаметром D и внутренним диаметром D_{int} .

Введём систему координат, как показано на рис. 2.1. Цилиндр может совершать плоскопараллельное движение в плоскости Oxy , вызывая деформацию изгиба балки. Он также может вращаться вокруг оси Ox , вызывая деформацию кручения балки.

Таким образом, мы имеем два преобладающих типа колебаний цилиндра: поперечные и крутильные, как видно на рис. 0.1. Система обтекается равномерным набегающим потоком воздуха, движущимся противоположно направлению оси Ox .

Поскольку поперечный тип колебаний хорошо известен и детально изучен многими авторами, целью настоящей работы является изучение крутильных колебаний, которые ранее не исследовались.

¹При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [14], [16]

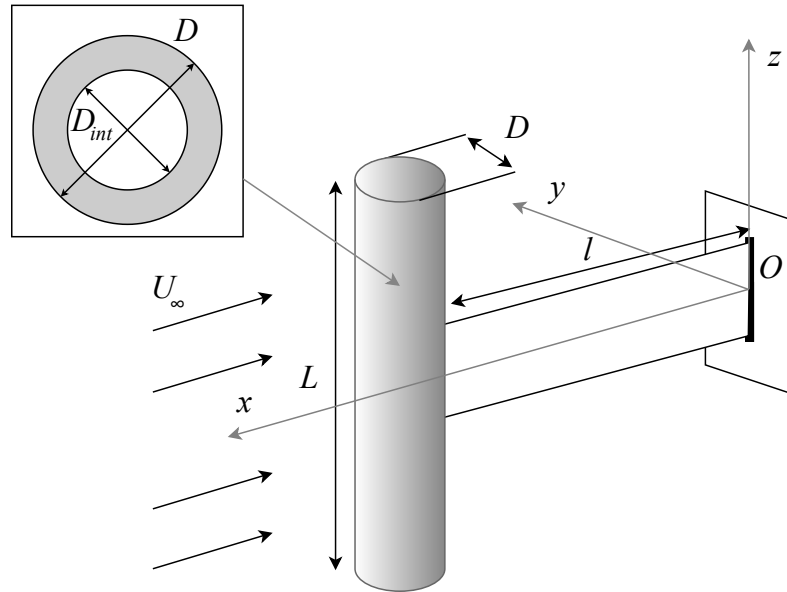


Рис. 2.1: Круглый цилиндр, закрепленный на конце упругой балки.

2.2 Уравнения движения

Крутильные колебания

Согласно теории балок Бернулли-Эйлера [50], уравнение свободных крутильных колебаний балки, в предположении малого угла закручивания и гипотезы плоских сечений, записывается в форме:

$$I_{m0} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0, \quad M_x = GI \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.1)$$

где Ox — упругая ось балки; x — координата поперечного сечения балки; t — время; G — модуль сдвига; $\theta(x, t)$ — угол закручивания (рис. 2.2); I_{m0} — полярный момент инерции поперечного сечения относительно упругой оси балки; M_x — крутящий момент; I — константа кручения; GI — жёсткость на кручение.

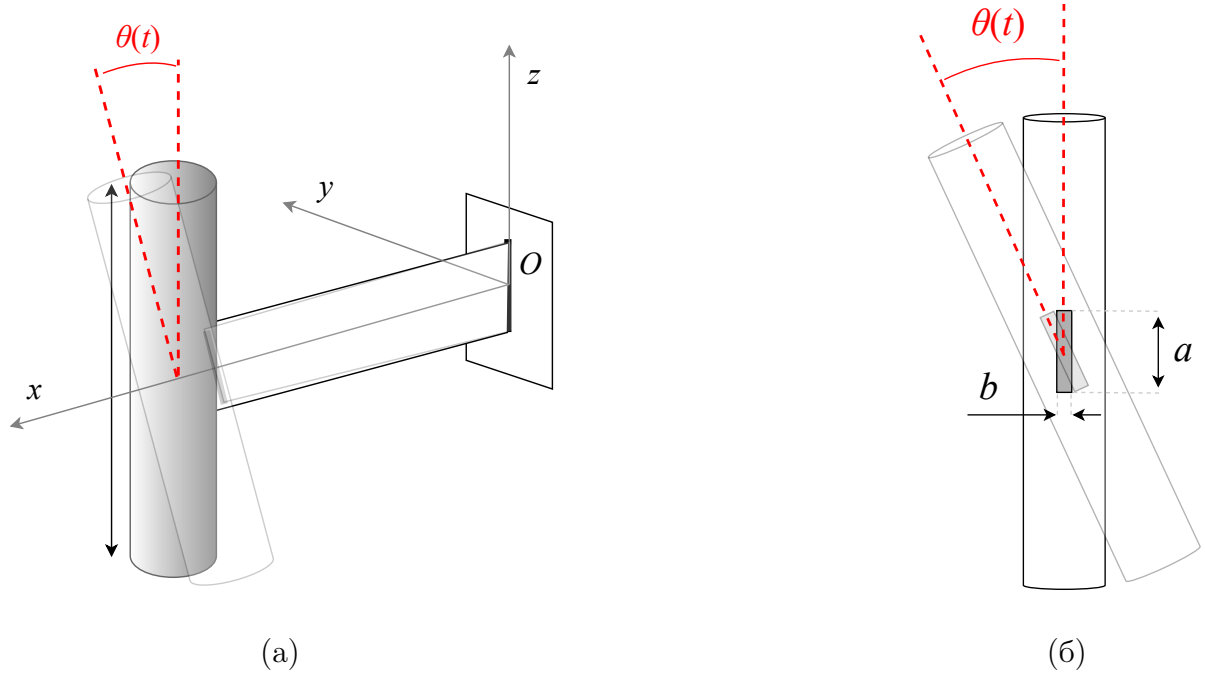


Рис. 2.2: Крутильные колебания кругового цилиндра закрепленного на конце прямоугольной балки.

В случае однородной балки прямоугольного поперечного сечения имеем

$$I_{m0} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - GI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad (2.2)$$

где $I = kab^3$ для $a \geq b$, $I_{m0} = \frac{1}{12} \rho ab (a^2 + b^2)$. На рис. 2.2 указаны a и b ; ρ — плотность материала балки. Значение параметра k для прямоугольной балки приводится в [51].

Иным способом, константа кручения I для $a \geq b$ может быть вычислена с ошибкой не более 4% по формуле [57]:

$$I \approx \frac{ab^3}{16} \left(\frac{16}{3} - 3,36 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right) \quad (2.3)$$

Уравнение движения дополняется граничными условиями. Условие жёсткого закрепления равносильно нулевому углу закручивания в точке

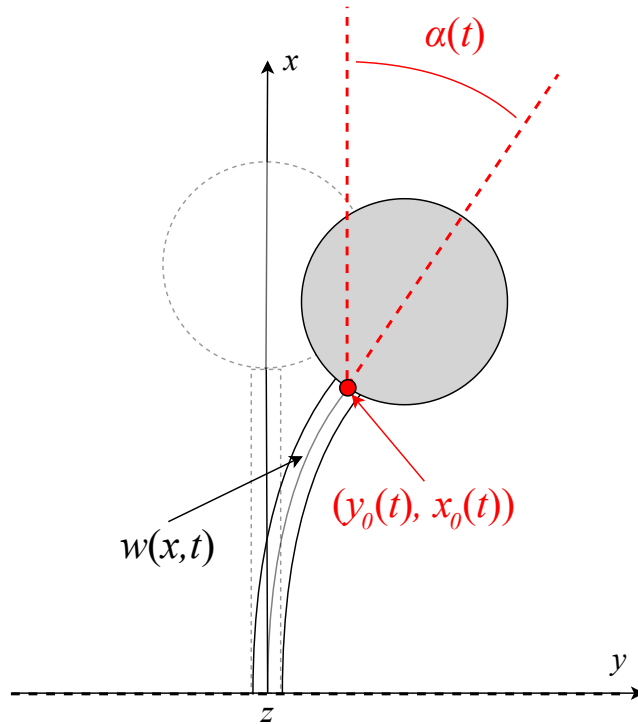


Рис. 2.3: Поперечные колебания кругового цилиндра закрепленного на конце прямоугольной балки.

закрепления. Условие на другом конце описывается уравнением момента цилиндра [50]. Таким образом, для цилиндра с одним жёстко заделанным концом и закреплённым твёрдым телом на другом имеем:

$$\theta(0, t) = 0, \left[I_{\text{cyl}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + M_x \right] \Big|_{x=l} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь $I_{\text{cyl}} = m \cdot (R^2 - R_{\text{int}}^2)/4 + m \cdot L^2/12$ — момент инерции цилиндра относительно оси Ox ; m — масса цилиндра; $R = D/2$ и $R_{\text{int}} = D_{\text{int}}/2$ — его внешний и внутренний радиусы соответственно.

Поперечные колебания

Мы предполагаем, что все отклонения от положения равновесия малы. Положение цилиндра описывается углом поворота $\alpha(t)$ относительно оси Ox и координатами $x_0(t)$, $y_0(t)$ мгновенного положения подвижного конца цилиндра. Таким образом, имеем

$$x_0(t) = l, \quad y_0(t) = w(l, t), \quad (2.5)$$

где $w(x, t)$ — поперечное отклонение нейтральной линии балки от оси Ox . В точке $x = l$, где балка жёстко закреплена к цилиндру, угол отклонения $\alpha(t)$ в любой момент времени должен совпадать с касательной к балке в точке их крепления, что описывается соотношением

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=l} = \alpha(t). \quad (2.6)$$

Согласно [50], уравнение свободных изгибных колебаний балки записывается в виде

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2.7)$$

где E — модуль Юнга; J — геометрический момент инерции балки относительно нейтральной оси, перпендикулярной плоскости Oxy ; $S = ab$ — площадь поперечного сечения балки.

Уравнение движения дополняется граничными условиями. Условие жёсткого закрепления конца равносильно отсутствию отклонений и нулевому углу поворота в месте закрепления. Условие на другом конце описывается уравнением движения и момента цилиндра. Уравнение (2.8) для

проекции вдоль оси y скорости центра масс цилиндра v_{cyl} получается по формуле Эйлера для твердого тела

$$v_{\text{cyl}}(t) = \dot{w}|_{x=l} + \dot{\alpha}(t)R. \quad (2.8)$$

Изгибающий момент M и перерезывающая сила Q , действующие на цилиндр, определяются по следующим уравнениям [23]:

$$M = EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad Q = -EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (2.9)$$

Таким образом, согласно (2.8) и (2.9), получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ x = l : \quad m\dot{v}_{\text{cyl}} = -Q, \quad J_0\ddot{\alpha}(t) = -M - RQ, \\ J_0 = \frac{m}{2} (R^2 + R_{\text{int}}^2), \quad J = \frac{ab^3}{12}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где J_0 — момент инерции цилиндра относительно оси цилиндра.

2.3 Собственные частоты

Решим однородные уравнения (2.2) и (2.7) методом разделения переменных. Будем искать решения в виде

$$\theta(x, t) = T_{\text{rot}}(t)X_{\text{rot}}(x), \quad w(x, t) = T_{\text{tr}}(t)X_{\text{tr}}(x). \quad (2.11)$$

В результате имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{\text{rot}}(t) + \omega_{\text{rot}}^2 T_{\text{rot}}(t) &= 0, & \ddot{T}_{\text{tr}}(t) + \omega_{\text{tr}}^2 T_{\text{tr}}(t) &= 0, \\ X_{\text{rot}}''(x) + n^2 X_{\text{rot}}(x) &= 0, & X_{\text{tr}}^{\text{IV}}(x) - k^4 X_{\text{tr}}(x) &= 0, \\ n &= \omega_{\text{rot}} \sqrt{\frac{I_{m0}}{GI}}, & k &= \sqrt{\omega_{\text{tr}}^4 \frac{\rho S}{EJ}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решая вторые уравнения, имеем

$$\begin{aligned} X_{\text{rot}}(x) &= A \cos(nx) + B \sin(nx), \\ X_{\text{bend}}(x) &= C \operatorname{ch}(kx) + D \operatorname{sh}(kx) + E \cos(kx) + F \sin(kx). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подстановка первого соотношения уравнения (2.13) в граничные условия (2.4) приводит к уравнению на поиск собственных чисел для неизвестного параметра n :

$$\cos(nl) - n \frac{I_{\text{cyl}}}{I_{m0}} \sin(nl) = 0, \quad A = 0, \quad B \neq 0. \quad (2.14)$$

Решением уравнения является дискретный набор собственных чисел:

$$n = n_1, \quad n_2, \quad n_3, \dots \quad (2.15)$$

Подстановка второго соотношения уравнения (2.13) в граничные условия (2.10) приводит к однородной системе линейных уравнений относительно коэффициентов C , D , E и F . Для существования нетривиального решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен

нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

Здесь элементы матрицы можно определить как:

$$\begin{aligned} a_{31} &= \operatorname{ch}(kl) + \left[kR + \frac{\rho S}{mk} \right] \operatorname{sh}(kl), \\ a_{32} &= \operatorname{sh}(kl) + \left[kR + \frac{\rho S}{mk} \right] \operatorname{ch}(kl), \\ a_{33} &= \cos(kl) - \left[kR - \frac{\rho S}{mk} \right] \sin(kl), \\ a_{34} &= \sin(kl) + \left[kR - \frac{\rho S}{mk} \right] \cos(kl), \\ a_{41} &= \operatorname{ch}(kl) - \left[kR + \frac{J_0}{\rho S} k^3 \right] \operatorname{sh}(kl), \\ a_{42} &= \operatorname{sh}(kl) - \left[kR + \frac{J_0}{\rho S} k^3 \right] \operatorname{ch}(kl), \\ a_{43} &= -\cos(kl) - \left[kR - \frac{J_0}{\rho S} k^3 \right] \sin(kl), \\ a_{44} &= -\sin(kl) + \left[kR + \frac{J_0}{\rho S} k^3 \right] \cos(kl). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем уравнение (2.16) с неизвестным параметром k . Решением уравнения является дискретный набор собственных чисел:

$$k = k_1, \quad k_2, \quad k_3, \dots \quad (2.17)$$

Собственные частоты системы определяются с помощью последнего соотношения уравнения (2.12). Для интересующих нас первых мод поперечных и крутильных круговых ω и физических σ собственных частот полу-

чаем:

$$\begin{aligned}\omega_{tr} &= k_1^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}, & \sigma_{tr} &= \frac{k_1^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}, \\ \omega_{rot} &= n_1 \sqrt{\frac{GI}{I_{m0}}}, & \sigma_{rot} &= \frac{n_1}{2\pi} \sqrt{\frac{GI}{I_{m0}}}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

2.4 Методы обработки экспериментальных данных

Для вычисления спектра сигнала, а также частот схода вихрей f_s и собственных частот f_{tr} и f_{rot} было применено дискретное преобразование Фурье. Указанные частоты были определены по значению максимального пика в полученном спектре. Частоты f_{tr} и f_{rot} и коэффициенты демпфирования ζ_{tr} , ζ_{rot} обоих типов колебаний были измерены с помощью экспериментов по затухающим свободным колебаниям в неподвижном воздухе.

Для вычисления коэффициентов демпфирования использовалась модель гармонического осциллятора с вязким трением. В силу малости углов поворота в режиме крутильных колебаний данная модель использовалась для описания как поперечных, так и крутильных колебаний.

$$\begin{aligned}\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2y &= 0, \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m_0}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km_0}},\end{aligned}\tag{2.19}$$

где $m_0 = m_s + m_{add}$ — масса цилиндра с учётом присоединённой массы m_{add} среды; но, поскольку в настоящем исследовании цилиндр находится в воздухе, и $m^* \gg 1$, можно считать, что $m_0 \approx m_s$; y — смещение верхнего торца цилиндра из положения равновесия; c — конструкционное демпфирование; k — коэффициент упругой силы.

Зависимость смещения y от времени измеряется в режиме затухающих колебаний в отсутствии набегающего потока, и затем, сопоставляя его с решением уравнения (2.19), коэффициент демпфирования ζ вычисляется методом наименьших квадратов.

Для описания колебаний цилиндра в данном исследовании используются показания триангуляционного лазерного датчика, который производил измерения отклонений верхнего торца цилиндра. Колебания описывались безразмерной амплитудой A/D . Для случая крутильных VIV также была рассчитана амплитуда угла поворота цилиндра θ , поскольку угол поворота цилиндра более показателен, чем амплитуда колебаний A/D на конце цилиндра. Угол поворота вычисляется по формуле

$$\theta = \arctan \left(\frac{A}{0.5L - \delta_m} \right), \quad (2.20)$$

где δ_m — расстояние от точки измерения до торца цилиндра. Для поперечных колебаний параметр θ не рассчитывался, поскольку в этом режиме он практически не отклоняется от нулевого значения.

Поскольку в данном исследовании изучается два различных режима VIV , возникающие на одной экспериментальной модели, приведённая скорость вычисляется с использованием двух частот f_{tr} (поперечных колебаний) и f_{rot} (крутильных колебаний):

$$V_{r, tr} = U_\infty / f_{tr} D, \quad V_{r, rot} = U_\infty / f_{rot} D. \quad (2.21)$$

В тех случаях, когда на графиках отображаются одновременно параметры, соответствующие поперечным и крутильным колебаниям, приведённая

скорость обозначается как V_r (2.22), понимая под этим, что она вычислена для соответствующих режимов VIV по формулам (2.21):

$$V_r = \begin{cases} V_{r, tr} & \text{для поперечных } VIV, \\ V_{r, rot} & \text{для крутильных } VIV. \end{cases} \quad (2.22)$$

Основной целью диссертации является изучение схода вихрей за цилиндром в режиме возбуждения различных мод колебаний. Одним из важных параметров для понимания того, как система ведёт себя при резонансе, является сдвиг фаз между перемещением цилиндра и возбуждающей (подъёмной) силой. Т. к. последняя не измерялась в данных экспериментах, было решено находить аналог этой величины: для описания процесса вычислялся фазовый сдвиг φ между движением цилиндра и пульсациями скорости потока в следе за цилиндром, которые описываются временными рядами, полученными в экспериментах с помощью измерительных датчиков. Временные ряды фильтровались полосовым фильтром в диапазоне $f_{tr} \pm 0.1$ Гц и $f_{rot} \pm 0.1$ Гц в соответствующих режимах захвата частоты, где f_{tr} и f_{rot} — собственные частоты поперечных и крутильных движений цилиндра соответственно.

Предполагалось, что доминирующее движение описывается зависимостями

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t), \quad v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.23)$$

где $y(t)$ и $v(t)$ — отфильтрованные временные ряды отклонений цилиндра от положения равновесия и пульсаций скорости потока соответственно; ω — круговая частота соответствующего режима захвата частоты. При та-

ком подходе $v(t)$ характеризует пульсации скорости в следе за цилиндром, генерируемые дорожкой Кармана. Параметр $v(t)$ также может быть представлен как волна, проходящая через точку измерения и характеризующая положение сошедшего вихря относительно цилиндра.

На основе уравнения (2.23) значения φ , рассчитанные для разных поперечных сечений, могут быть корректно сопоставлены. Более того, если в разных сечениях 1 и 2 выполняется условие $\varphi_1 > \varphi_2$, то вихрь, соответствующий сечению 1, находится дальше от цилиндра, чем вихрь, соответствующий сечению 2. Таким образом, φ позволяет определить, как формировался срыв вихрей относительно движения цилиндра, т. е. движение цилиндра действует как синхронизатор для фазового анализа.

Для сравнения поведения схода вихрей в симметричных сечениях относительно оси вращения цилиндра использовалась разность фазовых сдвигов $\Delta\varphi = \varphi_{\text{bottom}} - \varphi_{\text{top}}$ между вихревыми дорожками Кармана в поперечных сечениях, расположенных симметрично относительно плоскости Oxy . Здесь φ_{bottom} и φ_{top} соответствуют значениям φ в поперечных сечениях нижней и верхней частей цилиндра соответственно. Методы вычисления сдвига фаз описаны далее в подсекции 2.5.

2.5 Вычисление сдвига фаз

Рассмотрим два метода определения фазового сдвига и особенности их применения. Пусть имеются две функции времени: $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$ и $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где $t \in [0, T]$, $\omega, \varphi \in \mathbb{R}$. Задача состоит в том, чтобы восстановить фазовый сдвиг φ по заданным функциям $u(t)$ и $v(t)$.

Первый метод предполагает использование корреляции между двумя

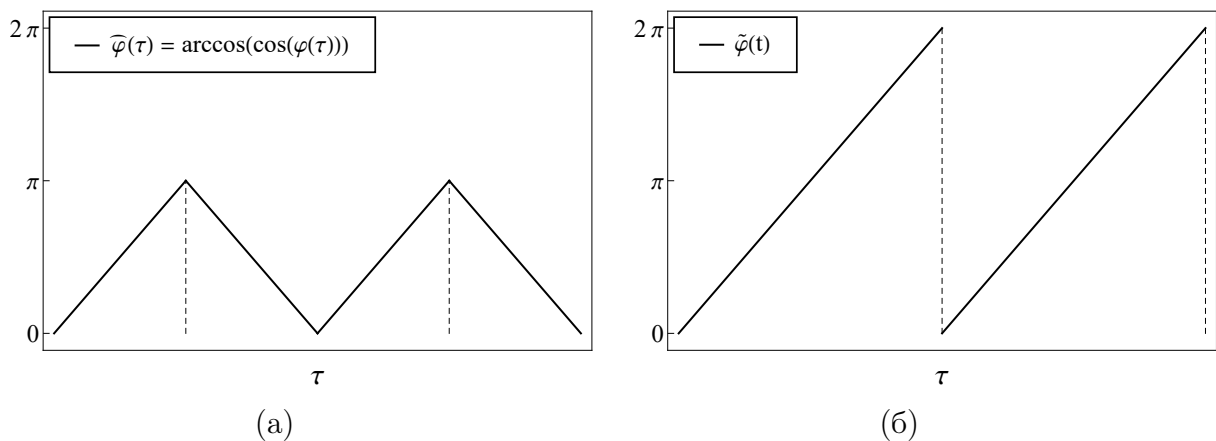


Рис. 2.4: Поведение восстановленной линейной функции φ , полученной методом корреляции (а) и методом Гильберта (б).

функциями:

$$\text{corr}(u(t), v(t)) = \frac{\int_0^T u(t)v(t) dt}{\sqrt{\int_0^T u^2(t) dt \int_0^T v^2(t) dt}} \rightarrow \cos \varphi, \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Для вычисления фазового сдвига φ используется функция $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. Предположим, что фазовый сдвиг $\varphi = \varphi(\tau) \in [0, 2\pi]$ является функцией параметра τ и подчиняется линейному закону. Тогда $\widehat{\varphi}(\tau) = \arccos(\cos(\varphi(\tau)))$ принимает форму кусочно-линейной функции (рис. 2.4а). Точка перегиба находится в точке $\widehat{\varphi} = \pi$, т. е. для функции \arccos , и точки, симметричные относительно вертикальной оси, проходящей через точку перегиба, эквивалентны. Таким образом, $\widehat{\varphi} \in [0, 2\pi]$ может быть восстановлена согласно правилу:

$$\widehat{\varphi} = \begin{cases} \arccos(\text{corr}(u, v)) & \text{слева от точки перегиба,} \\ 2\pi - \arccos(\text{corr}(u, v)) & \text{справа от точки перегиба.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Основная проблема однозначного вычисления фазового сдвига таким способом заключается в определении того, к какой из частей принадле-

жит исследуемая точка. В некоторых частных случаях этот метод можно применять, например, когда заранее известно, что фазовый сдвиг изменяется монотонно. В этом случае диапазон значений φ можно расширить, используя уравнение (2.25) и перенеся соответствующий диапазон графика на кратное 2π .

Второй метод вычисления фазового сдвига основан на преобразовании Гильберта (см., например, Хуанг и Шен [28]):

$$H[q(t)] = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.26)$$

Интеграл вычисляется в смысле главного значения по Коши. Для заданной функции $q(t)$ строится комплексная функция $z_q(t)$, которая называется аналитическим сигналом:

$$z_q(t) = q(t) + iH[q(t)] = a_q(t)e^{i\theta_q(t)}, \quad (2.27)$$

где $a_q(t) = \sqrt{q^2(t) + H^2[q(t)]}$ — амплитуда аналитического сигнала, а $\theta_q(t) = \arg z_q(t)$ — фаза аналитического сигнала, которая вычисляется как аргумент комплексного числа $z_q(t)$.

Преобразование Гильберта обладает следующим свойством:

$$H[\cos(\omega t + \varphi)] = \text{sgn}(\omega) \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.28)$$

т. е. для функции $q(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega > 0$, $A = \text{const}$, аналитический

сигнал имеет вид:

$$z_q(t) = A(\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (2.29)$$

Тогда аналитические сигналы, соответствующие функциям $u(t)$, $v(t)$, имеют вид:

$$\begin{aligned} z_u(t) &= u_0 e^{i(\omega t)}, \\ z_v(t) &= v_0 e^{i(\omega t + \varphi)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Для определения фазового сдвига между сигналами строится аналитическая функция $z_{vu}(t) = z_v(t) \overline{z_u(t)}$, где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Имеем:

$$z_{vu}(t) = v_0 u_0 e^{i\varphi}. \quad (2.31)$$

Затем восстановленную разность фаз $\tilde{\varphi}(t) \in [0, 2\pi]$ можно вычислить, используя следующее правило:

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{H[z_{vu}(t)]}{z_{vu}(t)} & \operatorname{Re} z_{vu} > 0, \operatorname{Im} z_{vu} > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{H[z_{vu}(t)]}{z_{vu}(t)} & \operatorname{Re} z_{vu} < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{H[z_{vu}(t)]}{z_{vu}(t)} & \operatorname{Re} z_{vu} > 0, \operatorname{Im} z_{vu} < 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

В результате этот метод позволяет определить разность фаз $\tilde{\varphi}(t)$ в интервале $[0, 2\pi]$. Для наглядности предположим, что φ является функцией параметра τ и подчиняется линейному закону. При выходе за пределы интервала $[0, 2\pi]$ разность фаз $\tilde{\varphi}(t)$ резко изменяется на 2π (рис. 2.4б). Этот метод позволяет расширить диапазон значений $\tilde{\varphi}(t)$ путём переноса соответствующего диапазона графика на кратное 2π , зная, что фаза выходит

за пределы сегмента $[0, 2\pi]$, когда $\tilde{\varphi}(t)$ изменяется на 2π .

В отличие от корреляционного метода, значение $\tilde{\varphi}(t)$ вычисляется в каждый момент времени $t \in [0, T]$. Для минимизации ошибки вычислений берётся интегральная величина φ , усреднённая по времени записи сигналов $u(t)$ и $v(t)$:

$$\varphi = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \varphi(t_k), \quad t_k \in [0, T], \quad (2.33)$$

где $\{t_k\}$ — множество временных интервалов дискретизации размером N элементов.

Подводя итог вышесказанному, можно выделить два способа вычисления фазового сдвига. Метод, основанный на корреляции, был использован в главе 3, в то время как метод, основанный на преобразовании Гильберта, использовался в главе 4.

3 Резонансные колебания цилиндра в потоке воздуха¹

3.1 Экспериментальная установка

В данной части работы исследуется ранее не изученный крутильный тип *VIV*, изучаются их основные характеристики и проводится их сравнение с поперечным типом колебаний.

Эксперименты проводились в НИИ механики МГУ в аэродинамической трубе А-10 с камерой Эйфеля и открытой рабочей частью. Рабочая часть восьмиугольного сечения (рис. 3.1) имела высоту 800 мм и длину 1360 мм. Степень турбулентности в набегающем потоке составляла примерно 0.3%. Балка сечением 3×33 мм была изготовлена из стали плотностью $\rho = 7850$ кг/м³, модулем Юнга $E = 224 \times 10^9$ Па и модулем сдвига $G = 82 \times 10^9$ Па. Испытывались две балки длиной $l = 325$ мм и $l = 375$ мм. Цилиндр был изготовлен из дюралюминия массой $m_s = 0.116$ кг (соответствующая относительная масса $m^* \approx 386$), длиной $L = 500$ мм, с внешним диаметром $D = 25$ мм и внутренним диаметром $D_{\text{int}} = 23$ мм. Рабочий диапазон чисел Рейнольдса составлял $(1-9.3) \times 10^3$.

Для измерения отклонений верхнего торца цилиндра из положения равновесия использовался треуголяционный лазерный датчик Riftek RF-603 (рис. 3.1б и 3.2а). Датчик производил измерения с частотой дискретизации 8 кГц. Отметим, что в режиме крутильных колебаний торец цилиндра дви-

¹При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [14–16, 18, 64–69].

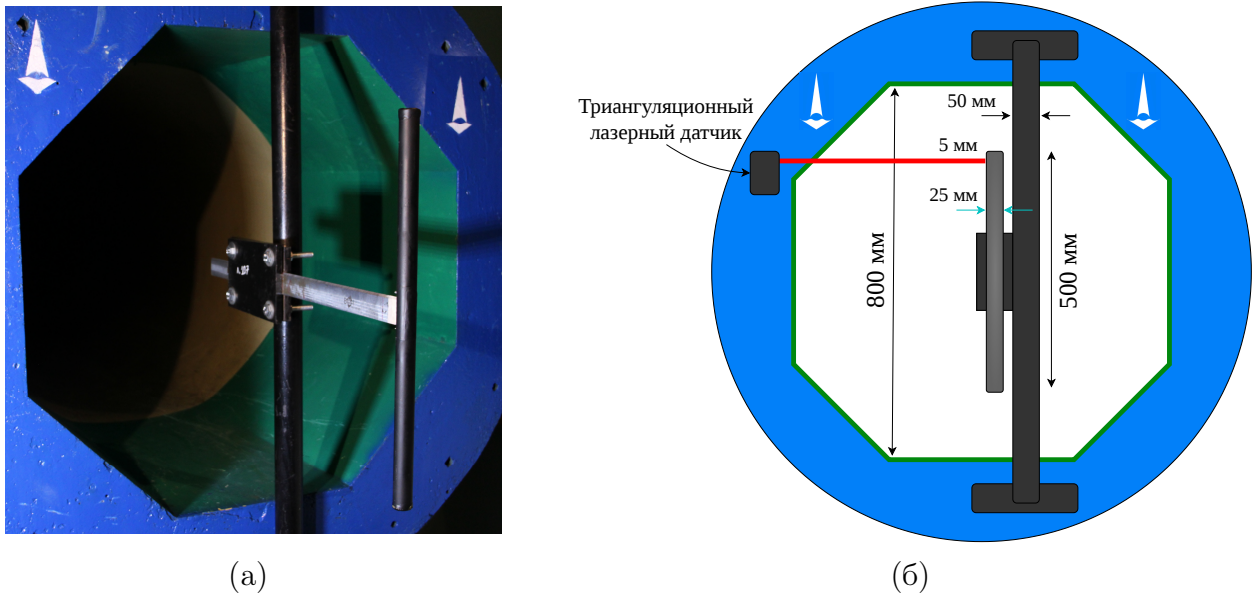


Рис. 3.1: Модель цилиндра на упругой балке, заземленной в массивное основание. (а) Круговой цилиндр на поперечной прямоугольной балке в аэродинамической трубе, (б) геометрические свойства экспериментальной установки.

жется по дуге, в связи с чем точка измерения слегка изменялась за цикл колебаний. Но поскольку угол поворота мал, ошибка измерений амплитуд составляла не более 1%.

Ручной термоанемометр Smart Sensor AR866 использовался для измерения скорости набегающего потока. Ошибка в измерениях для обоих датчиков составляла не более 1%.

Для определения преобладающего типа колебаний на балку было установлено зеркало. На основе траектории движения лазерного луча, отражённого от зеркала, определялся преобладающий тип колебаний (рис. 3.2а): горизонтальный или вертикальный след лазера вызван изгибными или крутильными деформациями соответственно.

Для измерения пульсаций скорости в следе за цилиндром использовался термоанемометр постоянной температуры (СТА) DISA 55DO5 с одноточечным датчиком 55P81 (рис. 3.2б) с частотой дискретизации 8 кГц и временем

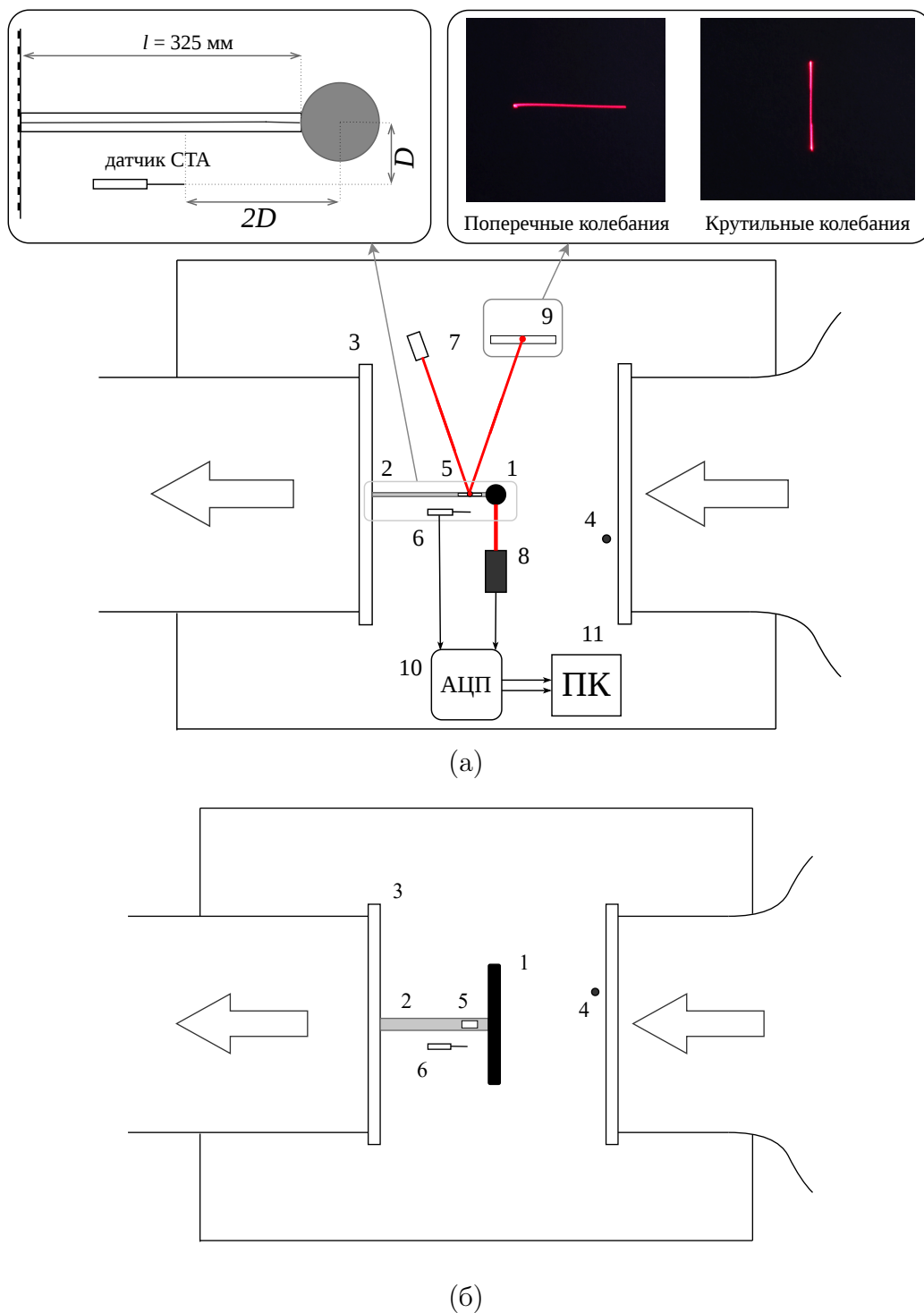


Рис. 3.2: Схема эксперимента: (а) вид сверху, (б) вид сбоку. (1) Круговой цилиндр, (2) жёстко закреплённая балка, (3) жёсткое массивное основание, (4) ручной термоанемометр, (5) зеркало, (6) датчик СТА, (7) лазерная указка, (8) триангуляционный лазерный датчик, (9) экран, (10) аналого-цифровой преобразователь (АЦП), (11) ПК. Тип колебаний определяется траекторией лазерной указки, отраженной в зеркале.

Таблица 1: Параметры собственных колебаний. f_{tr} , f_{rot} — измеренные собственные частоты; σ_{tr} , σ_{rot} — теоретически вычисленные частоты (2.18); ζ_{tr} , ζ_{rot} — измеренные коэффициенты демпфирования.

l , мм	f_{tr} , Гц	σ_{tr} , Гц	ζ_{tr}	f_{rot} , Гц	σ_{rot} , Гц	ζ_{rot}
325	12.67	14.46	0.011	27.62	27.93	0.012
375	10.10	11.37	0.011	25.60	25.99	0.011

записи 20 с. Датчик был расположен на расстоянии двух диаметров вдоль потока и на расстоянии одного диаметра поперёк относительно центральной оси цилиндра (рис. 3.2а).

Пульсации скорости измерялись с использованием одного датчика термоанемометра, последовательно в различных сечениях на расстояниях ± 25 , ± 50 , ± 100 и ± 150 мм относительно оси Oz , которым соответствуют безразмерные расстояния $z/L = \pm 0.05$, ± 0.1 , ± 0.2 и ± 0.3 .

Собственные частоты и коэффициенты демпфирования для обоих типов колебаний измерялись при свободных колебаниях цилиндра в отсутствии набегающего потока. Измеренные поперечные и крутильные собственные частоты f_{tr} и f_{rot} составили 12.67 Гц и 27.62 Гц для балки длиной 325 мм и 10.10 Гц и 25.60 Гц для балки длиной 375 мм соответственно.

Коэффициенты демпфирования ζ_{tr} и ζ_{rot} , соответствующие поперечным и крутильным колебаниям, также были измерены для обеих длин балки. Теоретические собственные частоты σ_{tr} , σ_{rot} были вычислены по формуле (2.18). Значения этих величин приводятся в табл. 1. Видно, что теоретически вычисленные значения близки к измеренным экспериментально.

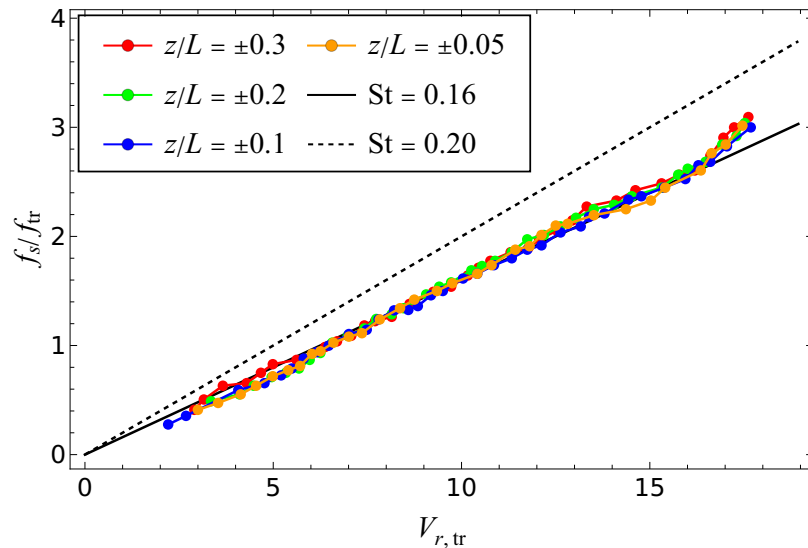


Рис. 3.3: Частоты схода вихрей f_s/f_{tr} для неподвижного цилиндра в зависимости от приведенной скорости $V_{r, tr}$ для различных положений датчика СТА на разной высоте относительно оси вращения: $z/L = \pm 0.05$, ± 0.1 , ± 0.2 и ± 0.3 .

3.2 Результаты

Анализ частоты схода вихрей для неподвижного цилиндра

В первой серии экспериментов частота схода вихрей f_s измерялась для неподвижного цилиндра с длиной балки $l/D = 6.5$ последовательно на высотах $z/L = \pm 0.05$, ± 0.1 , ± 0.2 и ± 0.3 . На рис. 3.3 приводится частота схода вихрей f_s/f_{tr} , которая удовлетворяет $St \approx 0.16$, что хорошо коррелирует с экспериментальными результатами [4]. Уменьшение числа Струхала по сравнению с цилиндром бесконечного размаха связано с наличием концевых вихрей из-за сдвигового слоя, сходящего с торцов цилиндра [58].

Амплитуды колебаний для обоих режимов *VIV*

В последующих экспериментах цилиндр свободно двигался. Во второй серии экспериментов для двух длин балки были построены зависимости без-

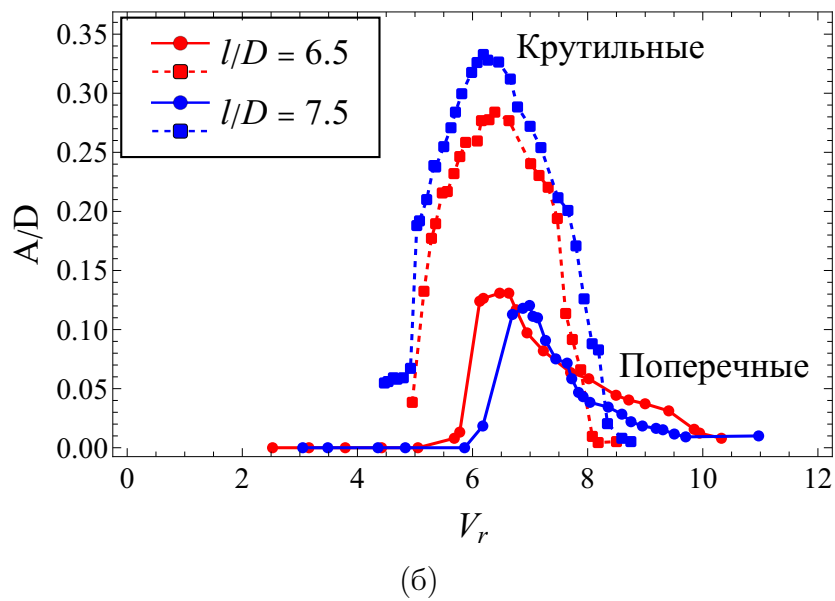
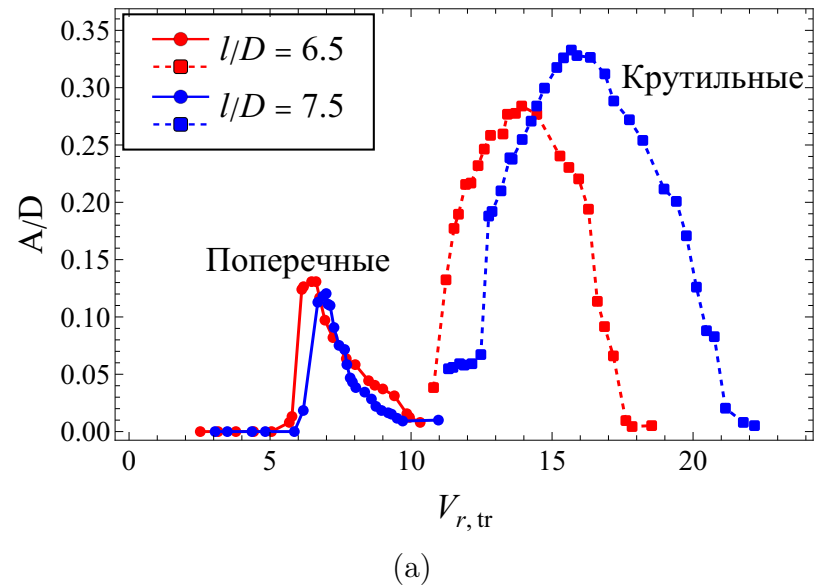
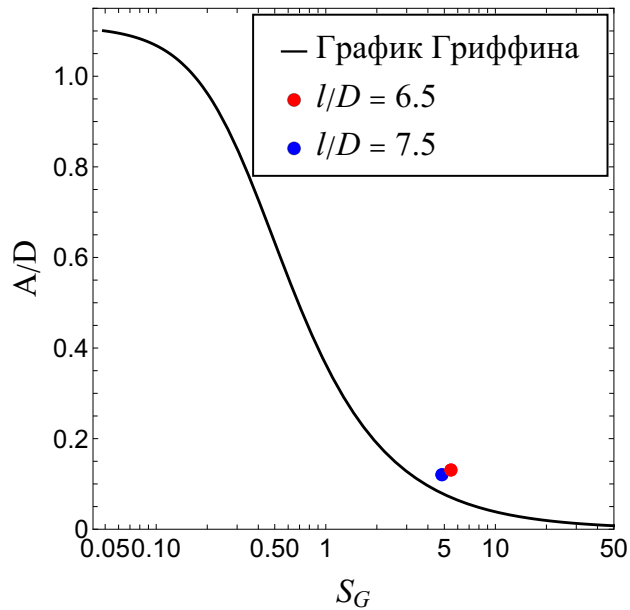


Рис. 3.4: (а) Безразмерная амплитуда колебаний A/D в зависимости от приведенной скорости $V_{r, tr}$ и (б) в зависимости от приведенной скорости V_r . Круглые и квадратные маркеры соответствуют поперечным и крутильным колебаниям соответственно.



(a)

Рис. 3.5: График Гриффина с точками, соответствующими пиковым амплитудам поперечных колебаний. Круглые и квадратные маркеры соответствуют поперечным и вращательным колебаниям соответственно.

размерной амплитуды A/D от двух приведённых скоростей: $V_{r, tr}$ (для демонстрации перехода из одного режима колебаний в другой) и V_r . Приведённые скорости $V_{r, tr}$ и V_r рассчитывались по формулам (2.21) и (2.22), в которых использовались две собственные частоты — f_{tr} (поперечные VIV) и f_{rot} (крутильные VIV), — приведённые в табл. 1.

Первоначально, с увеличением скорости потока, возбуждались поперечные колебания; с последующим увеличением скорости колебания становились крутильными (рис. 3.4а). Диапазоны амплитудных откликов крутильных VIV по сравнению с поперечными VIV смещены в сторону более высоких скоростей набегающего потока из-за разницы в собственных частотах колебаний (собственные частоты крутильных колебаний более чем в два раза превышают поперечные, и поэтому диапазоны не пересекаются).

Амплитудный отклик показывает максимальную амплитуду колебаний

для обоих типов колебаний в диапазоне приведённых скоростей 6.1–7.2 (рис. 3.4б), что соответствует числам Струхала 0.164–0.139. Эти значения хорошо согласуются с результатами [4] для поперечных *VIV* при использовании аналогичной экспериментальной модели.

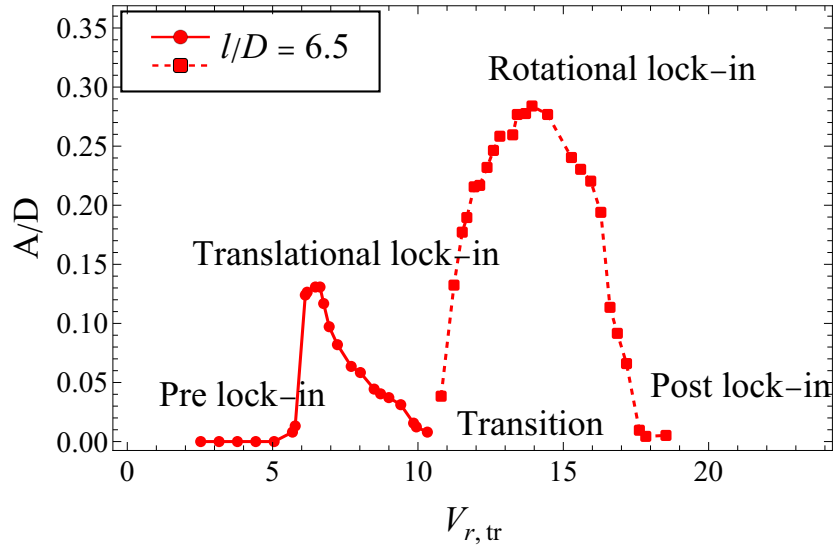
Видно, что амплитуда крутильных *VIV* оказалась более чем в два раза больше, чем у поперечных *VIV*. Амплитудные пики классических квазидвумерных поперечных колебаний в зависимости от S_G представлены на рис. 3.5; они достаточно хорошо согласуются с графиком Гриффина [26,49].

Следует отметить, что амплитуда крутильных *VIV* является функцией координаты поперечного сечения цилиндра z . Чтобы избежать зависимости от z , угол поворота цилиндра θ , определяемый уравнением (2.20), можно принять в качестве характеристики амплитуды крутильных *VIV*. Максимальная амплитуда крутильных *VIV* соответствует углу 0.029 рад. для длины балки $l/D = 6.5$ и 0.034 рад. для длины балки $l/D = 7.5$. Однако этот параметр не использовался на рис. 3.4 и 3.7, поскольку не имеет смысла для поперечных *VIV*.

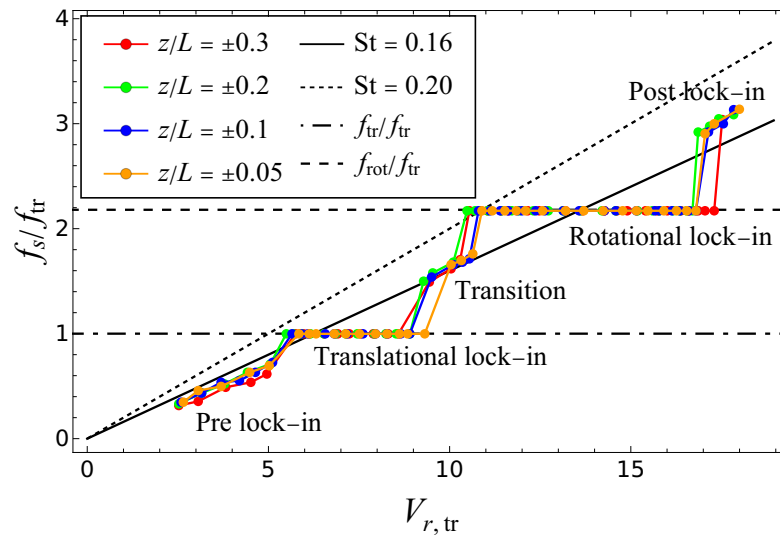
Режим захвата частоты

Третья серия экспериментов была направлена на анализ потока в следе за цилиндром для обоих типов *VIV* с использованием синхронных записей сигналов триангуляционного лазерного датчика и термоанемометра постоянной температуры. Длина балки составляла $l/D = 6.5$, а датчик располагался последовательно на высотах $z/L = \pm 0.05, \pm 0.1, \pm 0.2$ и ± 0.3 .

Этот эксперимент демонстрирует существование пяти режимов (рис. 3.6б). Режимы до (*pre-lock-in*) и после захвата частоты (*post-lock-*

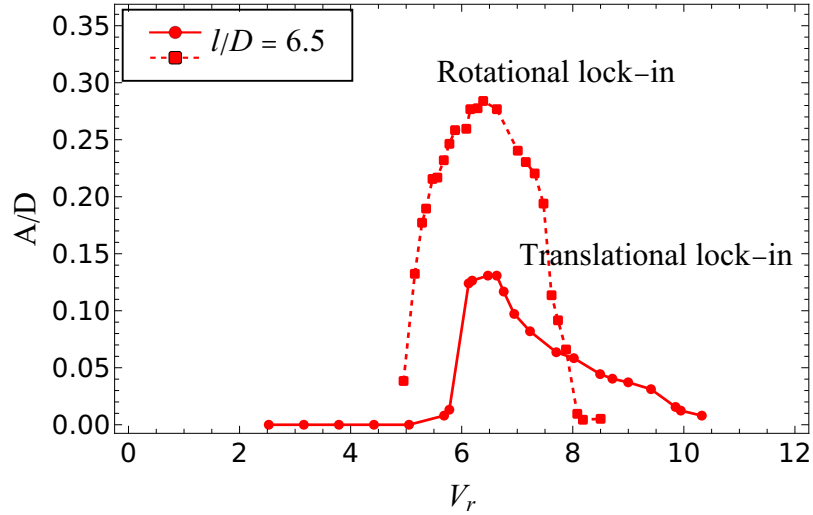


(a)

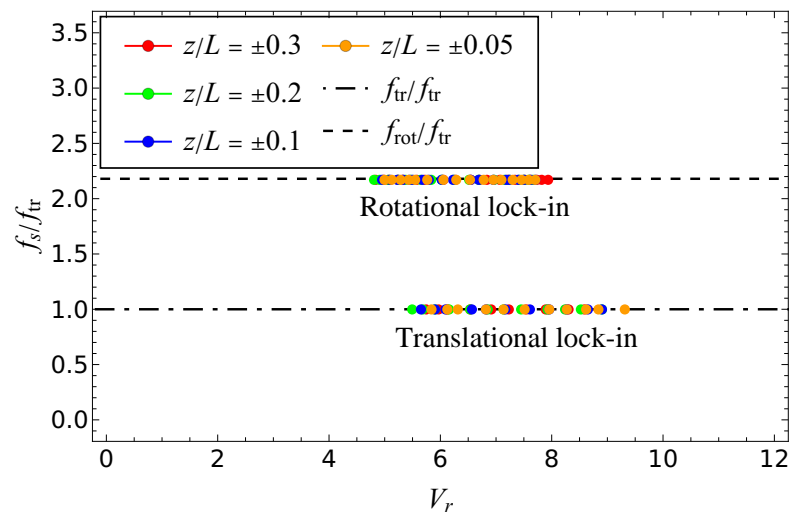


(б)

Рис. 3.6: Амплитудный отклик и изменение частоты схода вихрей для балки длиной 325 мм. (а) Безразмерная амплитуда колебаний A/D и (б) Частота схода вихрей f_s/f_{tr} в зависимости от приведенной скорости $V_{r, tr}$. Маркеры для графиков амплитудного отклика аналогичны Рис 3.4.



(a)



(б)

Рис. 3.7: Амплитудный отклик и изменение частоты схода вихрей для балки длиной 325 мм. (а) Безразмерная амплитуда A/D и (б) частота схода вихрей f_s/f_{tr} в зависимости от приведённой скорости V_r в областях захвата частоты. Маркеры для графиков амплитудного отклика аналогичны Рис 3.4.

in) соответствуют режимам, для которых частота схода вихрей почти удовлетворяет условию $St \approx 0.16$. Режим захвата частоты поперечных *VIV* (*translational lock-in*) соответствует классическому *VIV*, наблюдавшемуся в [4].

Как видно из рис. 3.6б и 3.7б, для крутильных *VIV* также существует режим захвата частоты, который был назван в данном исследовании «захват частоты крутильных *VIV*» (*rotational lock-in*). В этом режиме амплитуда колебаний торцов цилиндра больше, чем при поперечных *VIV*.

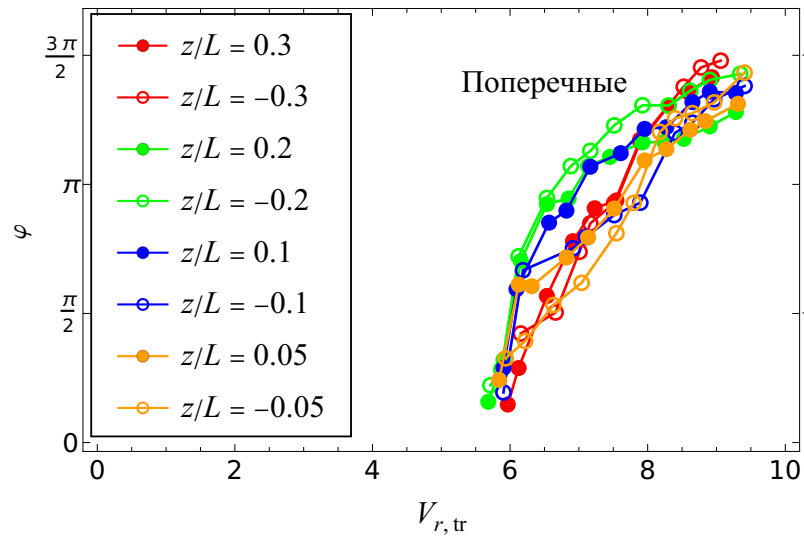
Наличие двух режимов *VIV* может быть полезно при проектировании ветроэнергетических установок на основе *VIV*. Наконец, переходный режим (*transition*) соответствует режиму между поперечными и крутильными *VIV*, где частота схода вихрей удовлетворяет условию $St \approx \text{const}$.

В терминах безразмерных параметров данные из областей захвата частоты (рис. 3.6б) можно представить следующим образом: отношение f_s/f_{tr} в зависимости от приведённой скорости V_r , как показано на рис. 3.7б.

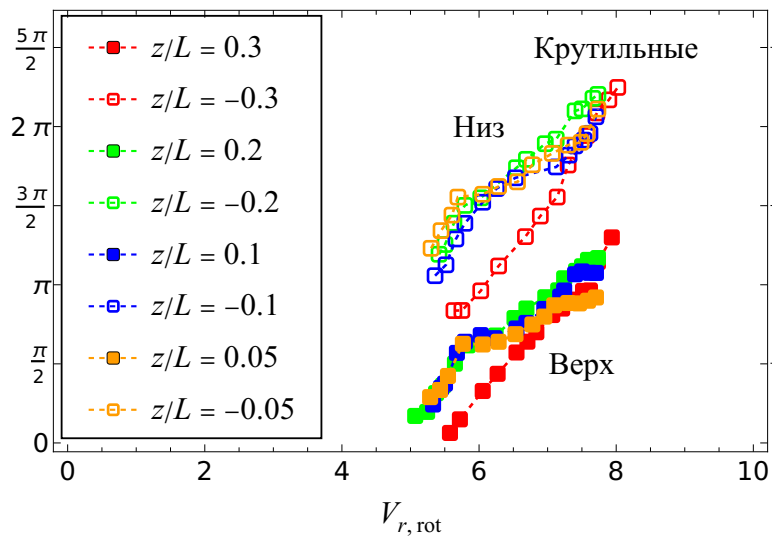
Видно, что частота схода вихрей при крутильных *VIV* более чем в два раза выше, чем при захвате частоты поперечных *VIV*, тогда как диапазоны V_r режимов захвата частоты близки. Спектральный анализ сигнала СТА показал, что в области захвата преобладающая частота практически совпадает с собственной частотой, и удвоенная частота отсутствует. Таким образом, срыв вихрей соответствует режиму 2S [54].

Анализ сдвига фаз

Третья серия экспериментов также была посвящена анализу фазового сдвига между положением цилиндра и сходом вихрей, которые описыва-



(a)



(б)

Рис. 3.8: Фазовый сдвиг φ между перемещениями цилиндра и пульсацией скорости в следе за ним в зависимости от приведённой скорости V_r при длине балки 325 мм и на высоте анемометра $z/L = \pm 0.05, \pm 0.1, \pm 0.2$ и ± 0.3 от оси вращения. (а) Поперечные VIV, (б) крутильные VIV. Круглые и квадратные маркеры соответствуют поступательным и вращательным колебаниям соответственно; заполненные и пустые маркеры соответствуют верхнему и нижнему сечениям соответственно.

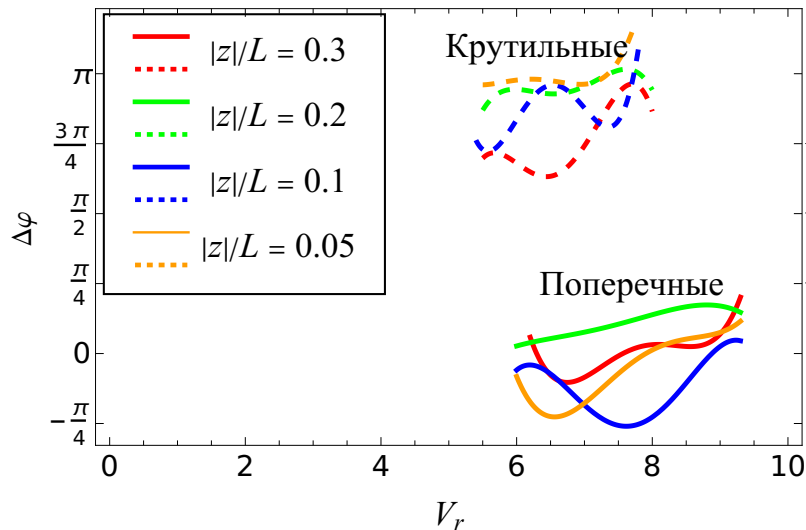


Рис. 3.9: Разности фазовых сдвигов $\Delta\varphi = \varphi_{bottom} - \varphi_{top}$ для сечений, расположенных на одинаковом расстоянии от оси вращения, в зависимости от приведенной скорости V_r .

ются сигналами тригуляционного лазерного датчика и термоанемометра постоянной температуры. Для расчёта фазового сдвига φ между пульсациями скорости потока и отклонением цилиндра использовалась корреляция между этими сигналами, определяемая уравнением (3.1):

$$\text{corr} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i s_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N w_i^2 \sum_{i=1}^N s_i^2}}, \quad (3.1)$$

которая является дискретным представлением формулы (2.24). Здесь w_i — временной ряд отклонений цилиндра от положения равновесия, s_i — временной ряд пульсаций скорости потока, а N — количество измерений. Оба временных ряда фильтровались полосовым фильтром в диапазоне $f_{tr} \pm 0.1$ Гц и $f_{rot} \pm 0.1$ Гц, где f_{tr} , f_{rot} брались из табл. 1.

Функция \arccos используется для вычисления фазового сдвига φ между двумя функциями. Поскольку знак φ этим методом не восстанавливается, предполагается, что $w_i = w_i^0 \cos(\omega t_i)$, $s_i = s_i^0 \cos(\omega t_i + \varphi)$, а знак определя-

ется прямым сравнением этих двух отфильтрованных сигналов.

Результирующий фазовый сдвиг показан на рис. 3.8. Затем эти наборы данных были аппроксимированы полиномом четвёртой степени методом наименьших квадратов. Наконец, были рассчитаны разности фазовых сдвигов $\Delta\varphi = \varphi_{\text{bottom}} - \varphi_{\text{top}}$ между вихревыми дорожками Кармана в поперечных сечениях, расположенных симметрично относительно оси Oz (рис. 3.9).

Как видно на рис. 3.8, фазовый сдвиг увеличивается с уменьшением скорости для обоих типов колебаний. Для поперечных *VIV* фазовые сдвиги практически одинаковы для симметричных сечений относительно оси вращения в области амплитудного отклика (рис. 3.8 и 3.9). Однако для крутильных *VIV* фаза в верхней и нижней частях цилиндра смещена примерно на π , т. е. вихри сходят в противофазе.

3.3 Обсуждение и выводы

Мы исследовали динамику жёсткого тонкостенного цилиндра конечного размаха, закреплённого на упругой консольной балке, в аэродинамической трубе. Были обнаружены два режима *VIV*: классический квазидвумерный *VIV* и ранее неизвестный крутильный тип.

В первом режиме балка испытывает изгибные колебания, а цилиндр совершает двумерное поступательное движение. Второй режим обусловлен резонансом вихревой дорожки с вращательными колебаниями цилиндра, при котором балка совершает крутильное движение.

Насколько известно, крутильные *VIV* в подобной экспериментальной схеме ранее в литературе не наблюдались, поэтому это открытие является

основным результатом данной части исследования. Во время этих трёхмерных *VIV* существует режим захвата частоты. Вихревые дорожки Кармана в различных сечениях, имеющих разную амплитуду колебаний, синхронизируются в единую трёхмерную структуру, при этом вихри, сходящие с верхней и нижней частей цилиндра, сдвинуты по фазе примерно на π .

В настоящих экспериментах была получена максимальная амплитуда крутильных *VIV* на концах цилиндра $A/D = 0.34$, что соответствует максимальному углу поворота $\theta = 0.034$ рад. В этом режиме характерный диапазон приведённых скоростей составляет 6–7.2, что соответствует числам Струхала 0.139–0.166. Эти значения меньше, чем $St \approx 0.2$ для двумерного схода вихрей, что объясняется конечным размахом цилиндра в настоящих экспериментах.

Амплитуда крутильных *VIV* оказалась более чем в два раза больше, чем у классических квазидвумерных поперечных *VIV*, что может быть использовано для более эффективного отбора энергии из данной системы.

4 Влияние коцевых эффектов на крутильные колебания цилиндра¹

4.1 Описание эксперимента

Следующая часть работы посвящена более детальному исследованию структуры вихревого следа вдоль размаха цилиндра и его изменению при различных коцевых условиях в режиме крутильных VIV . Как уже отмечалось, наличие свободных торцов при обтекании неподвижного цилиндра приводит к существенному изменению обтекания его потоком среды. Основное отличие связано с появлением рециркуляционной зоны у свободного торца, в районе которой не наблюдается периодический сход вихрей [36]. Для упруго подвешенного цилиндра, испытывающего горизонтальные колебания, также было отмечено влияние коцевых условий на его обтекание [4]. Поэтому представлялось важным проверить этот фактор и для крутильных колебаний, ведь то, что происходит на концах цилиндра, даёт большой вклад в момент сил, раскачивающий цилиндр относительно оси вращения.

Эксперименты проводились на той же аэродинамической трубе с той же экспериментальной моделью, описанной в главе 3. Однако цилиндр был перемещен ближе к выходной части конфузора (рис. 4.2) для нивелирования возможного влияния расширяющегося сдвигового слоя на границе равномерного потока в открытой рабочей части на описываемые далее коцевые

¹При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [17, 19, 70–76].

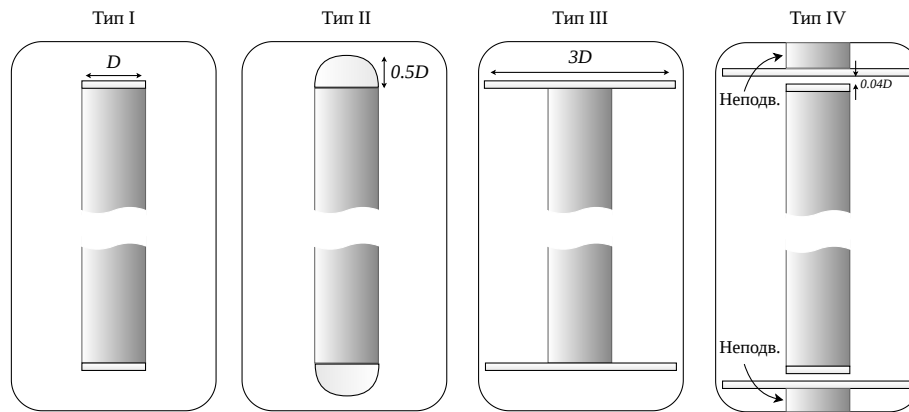


Рис. 4.1: Четыре типа торцевых насадок для создания разных концевых условий.

эффекты. Также было модифицировано основание для крепления цилиндра. Длина балки была фиксирована и составляла $l/D = 6.5$.

Приборы для измерений остались прежними, за исключением термоанемометра, который был заменён на модель Testo 405i. Для варьирования концевых условий использовались четыре типа формы торцевых насадок (рис. 4.1):

1. Свободный торец (*free end*);
2. Полусферическая торцевая насадка (*hemisphere*);
3. Присоединённая круглая аэродинамическая шайба диаметром $3D$ (*attached 3D*);
4. Отсоединённая аэродинамическая шайба диаметром $3D$, расположенная на расстоянии $G = 0.04D$ от торца цилиндра (*unattached 3D*) (рис. 4.1).

Присоединённые и отсоединённые аэродинамические шайбы имеют одинаковую толщину $0.04D$.

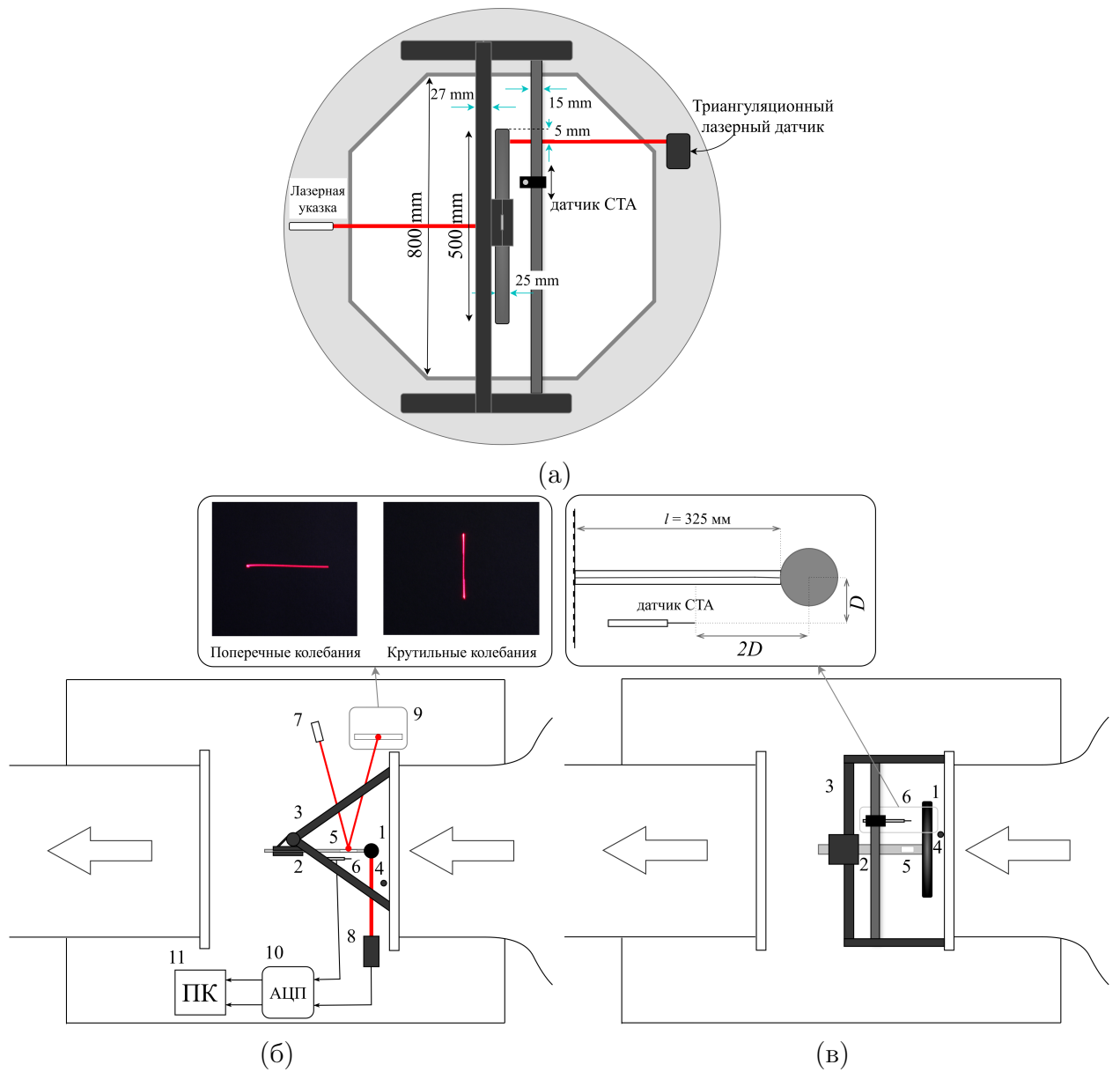


Рис. 4.2: (а) Геометрические характеристики экспериментальной установки; экспериментальная схема: (б) вид сверху, (в) вид сбоку. (1) Круглый цилиндр, (2) жестко закрепленная опорная балка, (3) жесткое основание, (4) ручной термоанемометр, (5) зеркало, (6) датчик СТА, (7) лазерная указка, (8) триангуляционный лазерный датчик, (9) экран, (10) аналого-цифровой преобразователь (АЦП), (11) ПК. Тип колебаний определяется траекторией лазерной указки, отраженной в зеркале.

Таблица 2: Геометрические и инерционные характеристики формы торцов, а также общие массовые соотношения.

Форма торца	Диаметр, мм	Толщина, мм	Масса, г	m^*
<i>free end</i>	25	1	1.7	397
<i>hemisphere</i>	25	12.5	4.9	419
<i>attached 3D</i>	75	1	7.5	436
<i>unattached 3D</i>	75	1	1.7	397

Таблица 3: Инерционные характеристики цилиндра при различных концевых условиях.

Форма торцов	f_{tr} , Гц	f_{rot} , Гц	ζ_{tr}	ζ_{rot}
<i>free end</i>	12.7	27.4	0.010	0.015
<i>hemisphere</i>	12.5	25.4	0.012	0.017
<i>attached 3D</i>	12.3	24.1	0.011	0.017
<i>unattached 3D</i>	12.7	27.4	0.010	0.016

4.2 Результаты

Неподвижный цилиндр

В первой серии экспериментов частота схода вихрей f_s измерялась для неподвижного цилиндра последовательно на высотах $|z|/L = 0.1, 0.2, 0.3$ и 0.4 для различных условий на концах (рис. 4.3).

Частота схода вихрей f_s удовлетворяет условию $St \approx \text{const}$ для всех типов условий на концах, но значение St зависит от его типа, как видно из таблицы 4. Для свободного конца и полусферы St уменьшается примерно до 0.08 для участков $|z|/L = 0.4$ вблизи свободных концов [22, 58].

Уменьшение числа Струхалия по сравнению с цилиндрами бесконечного размаха связано с наличием вихрей на концах из-за сдвигового слоя, сходящего с торцов цилиндра. Эти зоны чётко видны на графике распределения числа Струхалия вдоль цилиндра (рис. 4.4).

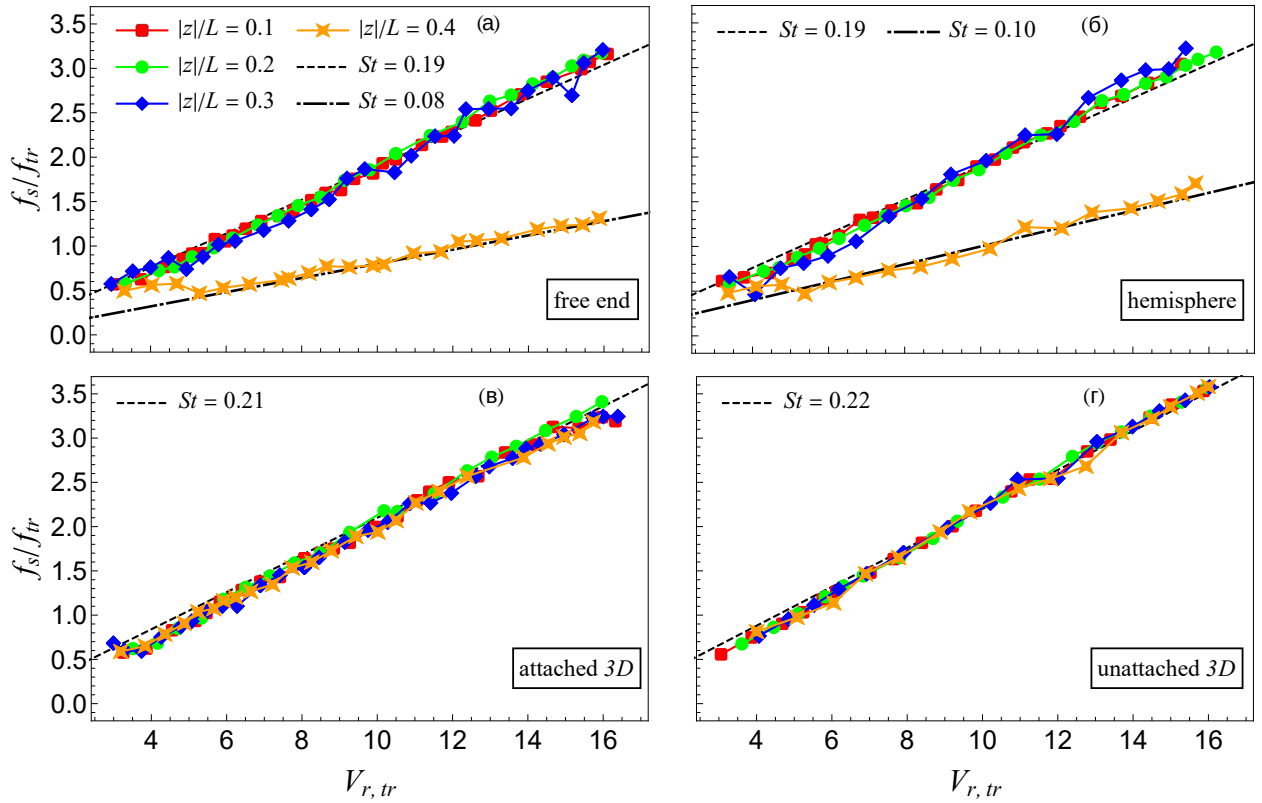


Рис. 4.3: Частоты схода вихрей f_s/f_{tr} для неподвижного цилиндра в зависимости от приведенной скорости $V_{r, tr}$ для различных положений датчика СТА на разной высоте относительно оси вращения. Формы торцов: (а) свободный торец; (б) полусфера; (в) присоединенная аэродинамическая шайба; (г) отсоединенная аэродинамическая шайба.

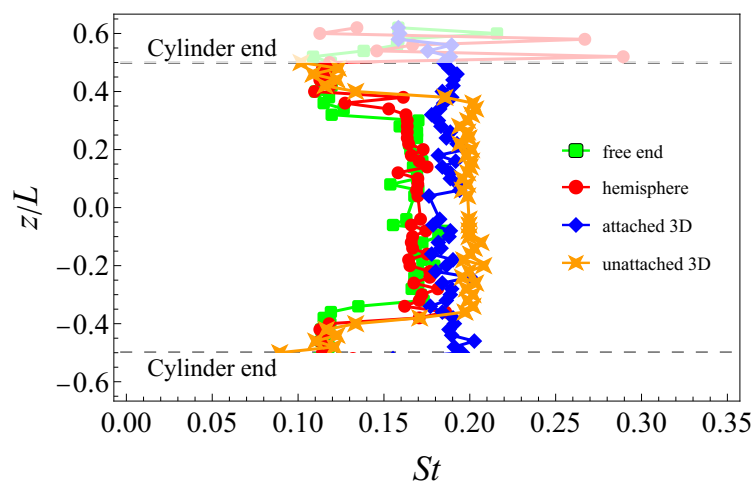


Рис. 4.4: Число Струхалия St в зависимости от поперечного сечения цилиндра z/D для неподвижного цилиндра при различных условиях на концах. Полупрозрачные части относятся к областям за пределами цилиндра.

Таблица 4: Число Струхалия для центральных сечений цилиндра $St_{central}$ и для сечений, близких к торцам St_{end} , при различных концевых условиях.

Форма торцов	$St_{central}$	St_{end}
<i>free end</i>	0.19	0.08
<i>hemisphere</i>	0.19	0.10
<i>attached 3D</i>	0.21	0.21
<i>unattached 3D</i>	0.21	0.22

Амплитудный отклик

Как и в главе 3, приведённая скорость была вычислена с использованием двух разных собственных частот f_{tr} и f_{rot} , соответствующих поперечным и крутильным колебаниям (2.21).

Безразмерная амплитуда колебаний A/D в зависимости от приведённой скорости V_r (рис. 4.5а) и в зависимости от приведённых скоростей $V_{r, tr}$ и $V_{r, rot}$, соответствующих поперечным VIV и крутильным VIV соответственно (рис. 4.5б), была построена для различных концевых условий. Для случая крутильных VIV также была рассчитана амплитуда угла поворота цилиндра θ , который вычисляется по формуле (2.20).

Цилиндр со свободным торцом служит эталонным случаем, и результаты с другими условиями на конце будут сравниваться с ним ниже. Угол поворота показан в правой части графика на рис. 4.5б. Первоначально, с увеличением скорости потока, происходило возбуждение поперечных колебаний; при последующем увеличении скорости колебания становились крутильными (рис. 4.5а).

Однако, если рассматривать крутильные и поперечные колебания как два самостоятельных режима VIV и вычислять приведенную скорость с использованием соответствующих собственных частот f_{tr} и f_{rot} то получа-

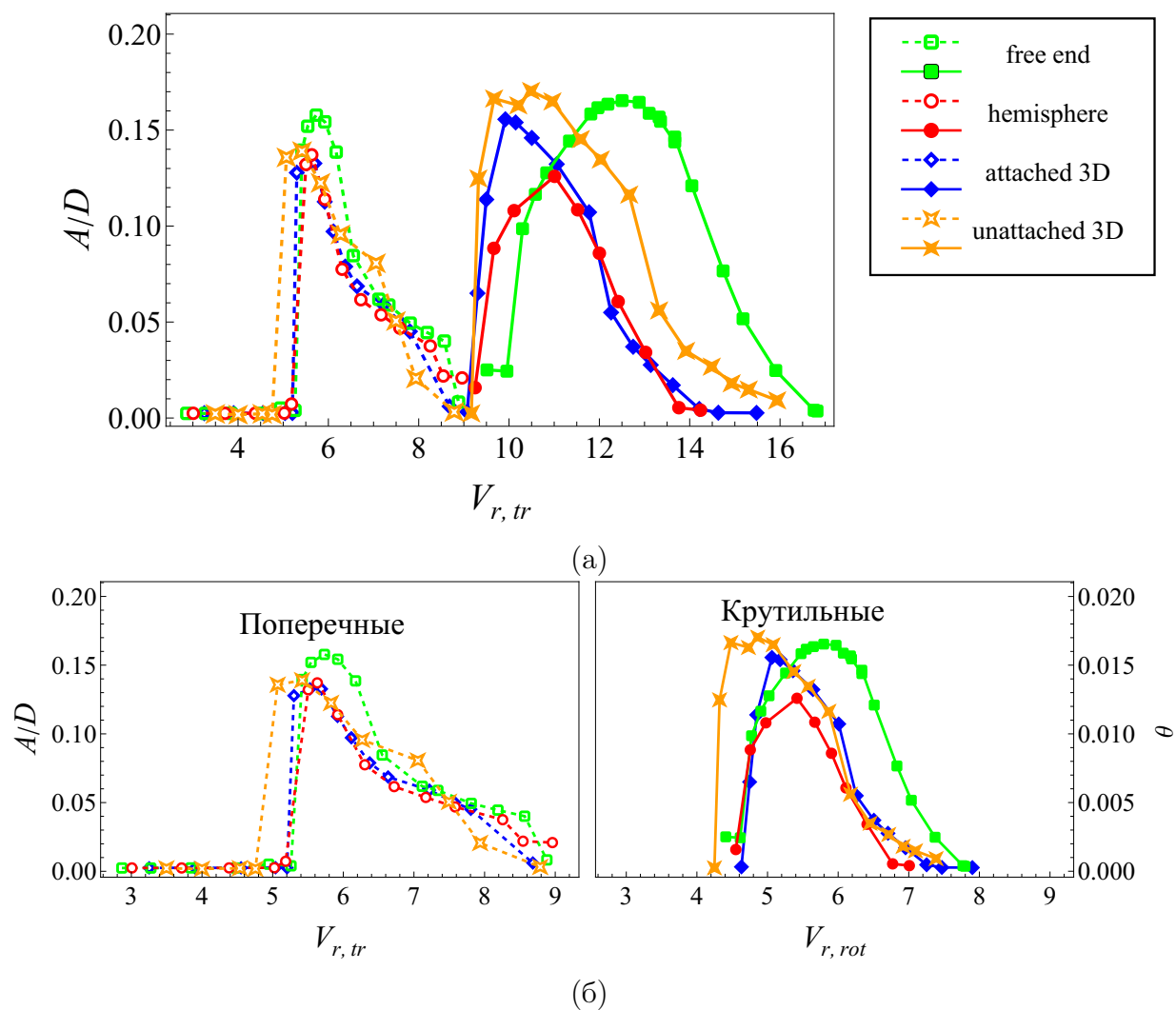


Рис. 4.5: Зависимость амплитуды колебаний от скорости потока. (а) Безразмерная амплитуда колебаний A/D в зависимости от приведенной скорости $V_{r, tr}$ и (б) в зависимости от приведенных скоростей $V_{r, tr}$ и $V_{r, rot}$, соответствующим поперечным VIV и крутильным VIV , соответственно. Заполненные и пустые маркеры соответствуют крутильным и поперечным VIV соответственно.

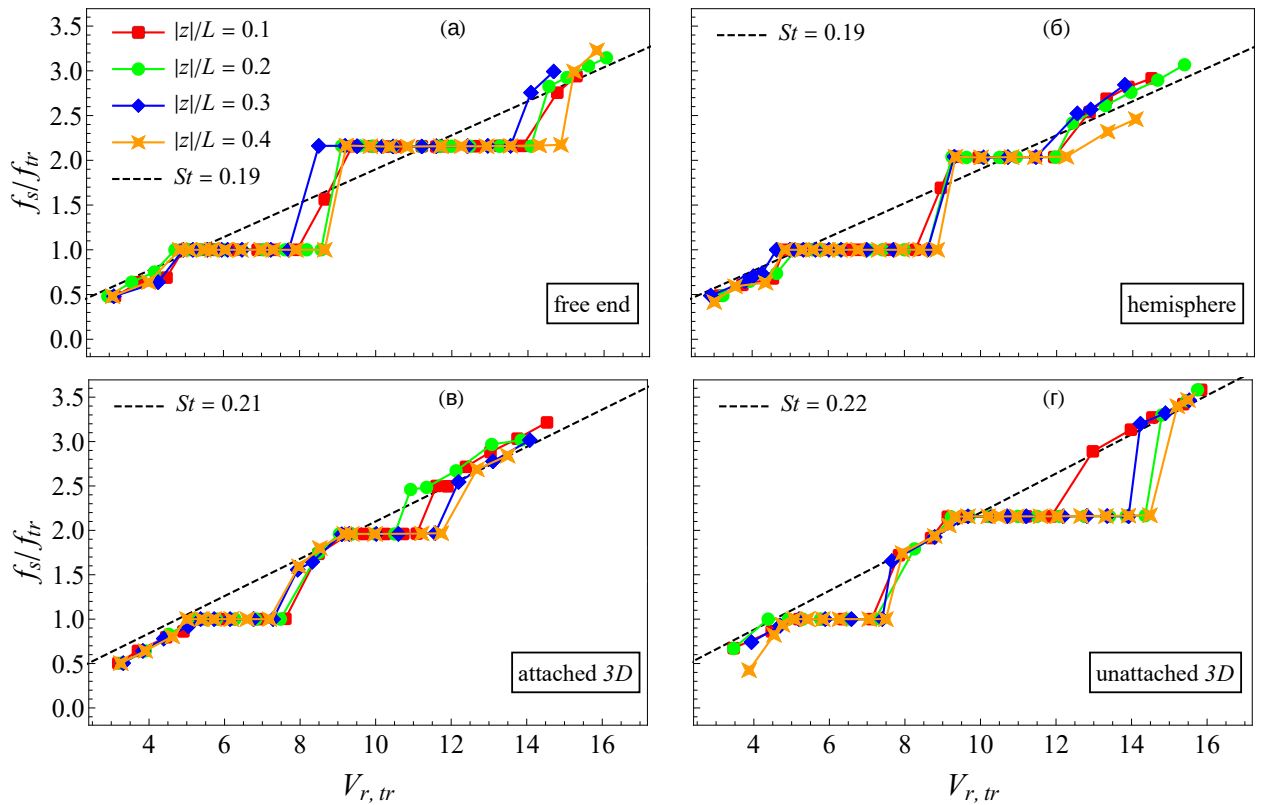


Рис. 4.6: Частота схода вихрей f_s/f_{tr} в зависимости от приведенной скорости $V_{r, tr}$ для различных конечных условий. Формы торцов: (а) свободный торец; (б) полусфера; (в) присоединенная аэродинамическая шайба; (г) отсоединенная аэродинамическая шайба.

ется, что пики амплитуды соответствуют близким приведённым скоростям, как видно на рис. 4.5б. Все граничные условия приводят к уменьшению амплитуды пиков поперечных колебаний (относительно случая свободного торца), в то время как для крутильных колебаний заметное уменьшение наблюдается только в случае полусферы. Можно заметить смещение пиковых амплитуд в сторону меньших приведённых скоростей V_r во всех случаях.

Захват частоты

Была измерена частота схода вихрей вдоль размаха цилиндра для колеблющегося цилиндра, которая оказалась равномерной и соответствовала значению в режиме захвата частоты.

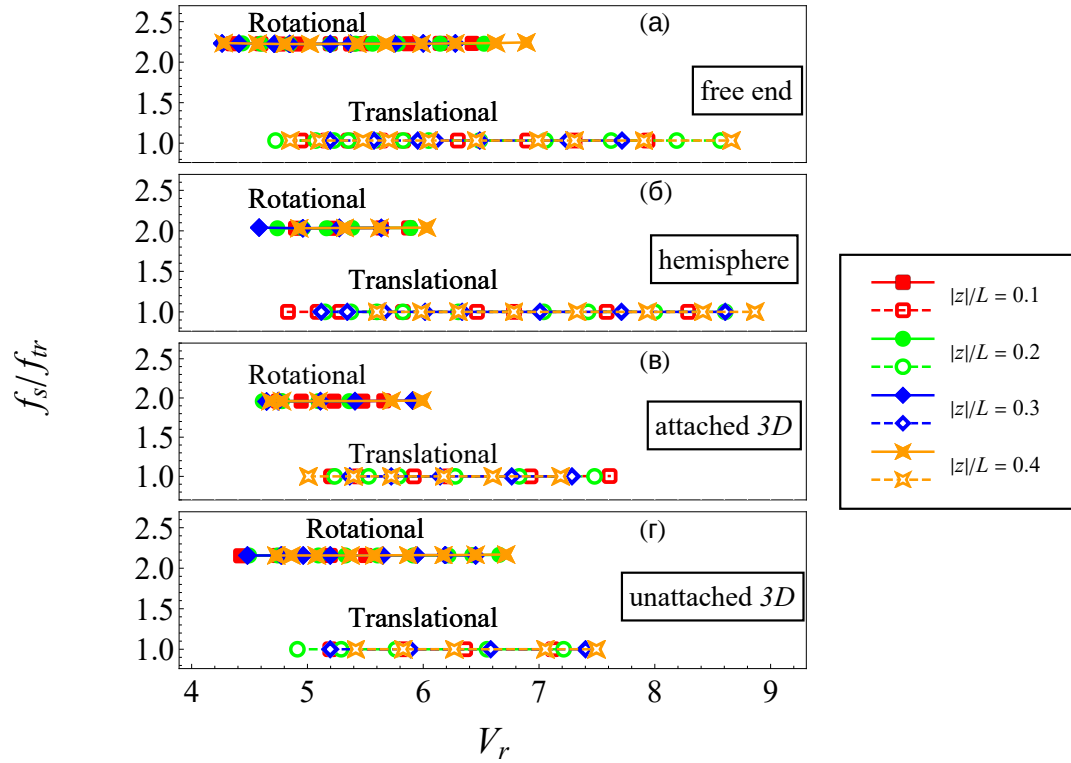


Рис. 4.7: Частота схода вихрей f_s/f_{tr} в зависимости от приведенной скорости V_r в зонах захвата частоты для различных конечных условий. Формы торцов: (а) свободный торец; (б) полусфера; (в) присоединенная аэродинамическая шайба; (г) отсоединенная аэродинамическая шайба. Значение V_r рассчитывалось по-разному для поперечных и крутильных колебаний, при этом в качестве частотной шкалы использовались соответствующие собственные частоты. Заполненные и пустые маркеры соответствуют поперечным и крутильным колебаниям, соответственно.

Таблица 5: Диапазоны захвата частоты для различных концевых условий. Конечные точки диапазонов захватов частоты $[a, b]$ были рассчитаны с использованием данных с рис. 4.7 в качестве среднего значения для всех участков.

Форма торцов	Поперечный <i>lock-in</i>		
	Левая точка (a)	Правая точка (b)	Длина отрезка ($b - a$)
<i>free end</i>	4.93	8.22	3.29
<i>hemisphere</i>	5.18	8.59	3.41
<i>attached 3D</i>	5.20	7.39	2.19
<i>unattached 3D</i>	5.18	7.31	2.13
Форма торцов	Крутильный <i>lock-in</i>		
	Левая точка (a)	Правая точка (b)	Длина отрезка ($b - a$)
<i>free end</i>	4.33	6.53	2.20
<i>hemisphere</i>	4.79	5.86	1.07
<i>attached 3D</i>	4.67	5.73	1.06
<i>unattached 3D</i>	4.53	6.33	1.80

Отношение частоты схода вихрей f_s/f_{tr} в зависимости от приведённой скорости V_r для различных граничных условий показано на рис. 4.6 и 4.7.

На графиках рис. 4.6 использовалась приведённая скорость $V_{r, tr}$, рассчитанная с использованием собственной частоты f_{tr} , тогда как на рис. 4.7 приведённая скорость была рассчитана по-разному для соответствующих диапазонов поперечных и крутильных VIV — с использованием соответствующих собственных частот.

На рис. 4.6 показаны частотные характеристики, демонстрирующие изменение частоты схода вихрей для различных положений по размаху. На рис. 4.7 показаны диапазоны V_r , в которых происходит захват частоты, если рассматривать эти два типа колебаний как независимые.

Наблюдается пять режимов схода вихрей. Режимы до и после захвата частоты соответствуют режимам, для которых частота схода вихрей удовлетворяет соотношению $St \approx 0.19$ для свободного торца и полусферы,

$St \approx 0.21$ для присоединённой аэродинамической шайбы и $St \approx 0.22$ для отсоединённой аэродинамической шайбы.

Для $V_{r, tr} \sim 5-10$ существует режим захвата частоты поперечных VIV . При больших значениях V_r появляется режим захвата частоты крутильных VIV .

Наконец, переходный режим соответствует режиму между захватами частоты поперечных и крутильных VIV , где частота схода вихрей удовлетворяет соотношению $St \approx \text{const}$. Его длина зависит от отношения f_{tr}/f_{rot} и может быть близка к нулю, как видно в случаях свободных торцов (рис. 4.6а). Диапазоны захвата частоты для различных условий на концах можно найти в таблице 5.

В общем случае все рассматриваемые концевые условия, за исключением полусферы для поперечных VIV , приводят к уменьшению диапазонов захвата частоты. Также диапазоны захвата частоты для крутильных VIV короче, чем для поперечных VIV , если их длины вычисляются в соответствующих диапазонах $V_{r, tr}$ и $V_{r, rot}$.

Сдвиг фаз вдоль размаха цилиндра

В следующих двух разделах анализируется фазовый сдвиг φ между положением цилиндра и пульсацией скорости потока в следе за цилиндром, а также разность фазовых сдвигов $\Delta\varphi = \varphi_{\text{bottom}} - \varphi_{\text{top}}$ между вихревыми дорожками Кармана в поперечных сечениях, расположенных симметрично относительно оси Ox .

Фазовый сдвиг φ для поперечных VIV (рис. 4.8а) и крутильных VIV (рис. 4.8б), а также разность фазовых сдвигов $\Delta\varphi$ (рис. 4.9) в зависимости

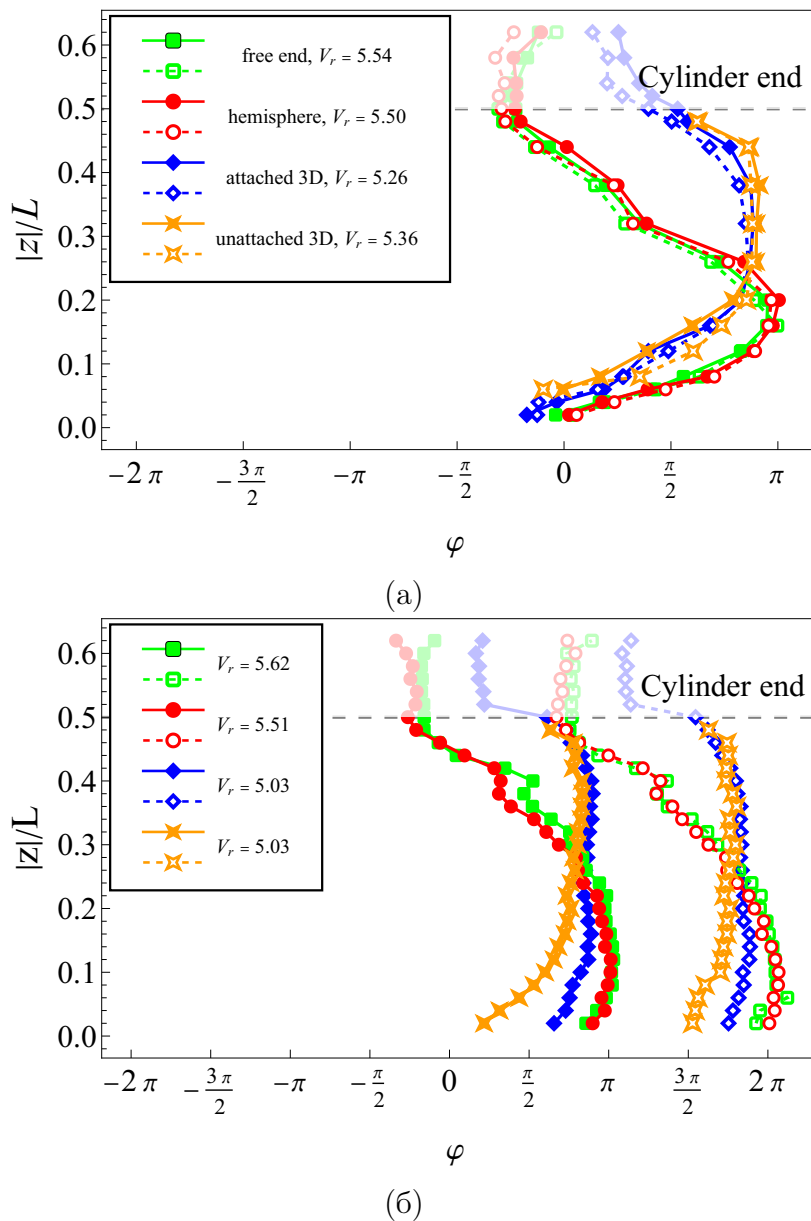


Рис. 4.8: Фазовый сдвиг φ для (а) поперечных VIV и для (б) крутильных VIV в зависимости от расстояния от поперечного сечения цилиндра до оси вращения $|z|/L$. Данные на графиках получены при постоянных скоростях потока, которые соответствуют пику амплитуды A/D для обоих типов VIV и для каждого типа конечных условий. На графиках заполненные и незаполненные маркеры соответствуют верхнему и нижнему поперечным сечениям, соответственно.

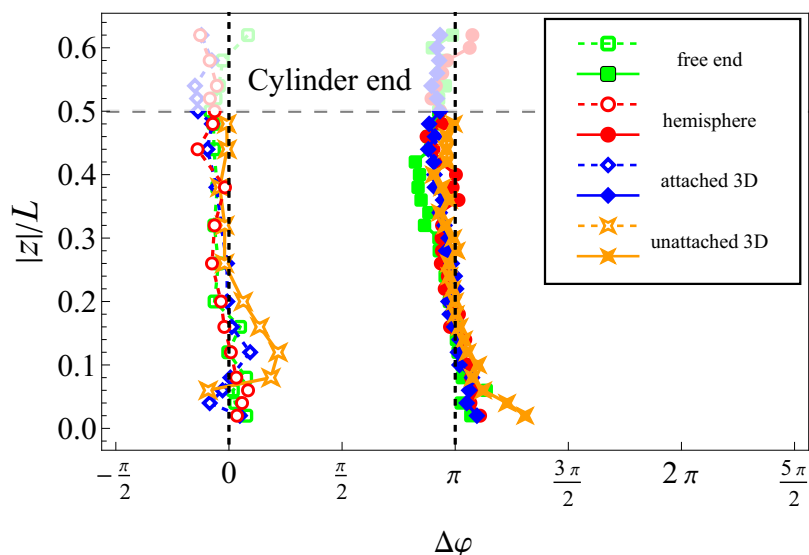


Рис. 4.9: Разница фазовых сдвигов $\Delta\varphi$ в зависимости от расстояния от поперечного сечения цилиндра до оси вращения $|z|/L$. Данные на графиках получены при постоянных скоростях потока, которые соответствуют пику амплитуды A/D для обоих типов VIV и для каждого типа конечных условий. Заполненные и незаполненные маркеры соответствуют крутильным и поперечным VIV , соответственно.

от расстояния от поперечного сечения цилиндра до оси вращения $|z|/L$ были построены для каждого конечного условия. Данные на графиках были получены при постоянных скоростях потока, соответствующих пику амплитуды A/D для обоих типов VIV для каждого из конечных условий. Вихревые дорожки Кармана за пределами цилиндра не были синхронизированы с движением цилиндра в случае отсоединённых аэродинамических шайб, поэтому измерения проводились только в пределах размаха цилиндра ($|z|/L < 0.5$, см. горизонтальную пунктирную линию на рис. 4.8), тогда как для других случаев данные также приведены за пределами конца цилиндра (полупрозрачная область).

На рис. 4.8а, 4.8б сдвиг фаз φ близок для случаев свободного торца и полусферы, а также для присоединённых и отсоединённых аэродинамических шайб. Наличие присоединённых и отсоединённых аэродинамических

шайб приводит к частичному выравниванию φ . Явная неравномерность вдоль размаха цилиндра обусловлена концевым эффектом, а также влиянием упругой балки, поддерживающей цилиндр. Эта балка играет роль разделительной пластины (*splitter plate*), которая подавляет сход вихрей в соответствующих её расположению сечениях.

Распределение φ вдоль размаха цилиндра (верхней или нижней половины) в режиме крутильных колебаний более равномерное, чем в режиме поперечных колебаний. Более того, в режиме крутильных VIV значение φ резко изменяется вблизи области закрепления балки. Это различие в поведении φ вблизи точки крепления балки и цилиндра между режимами поперечных и крутильных VIV может быть связано с движением балки. Во время поперечных колебаний балка изгибается, как крыло, с большой амплитудой вблизи точки крепления, влияя на поток. В случае же крутильных колебаний балка практически не оказывает влияния на поток из-за своей малой ширины и малого угла поворота.

Далее изучается поведение разности фаз $\Delta\varphi$ при различных концевых условиях (рис. 4.9). Она близка к нулю для поперечных VIV и близка к π для крутильных VIV , как и ранее было получено в главе 3. В общем случае зависимость $\Delta\varphi$ вдоль размаха цилиндра незначительно различается для всех рассмотренных граничных условий.

Сдвиг фаз при различных скоростях набегающего потока

В этом разделе были построены графики фазового сдвига φ для поперечных VIV (рис. 4.10) и крутильных VIV (рис. 4.11), а также разности фазовых сдвигов $\Delta\varphi$ (рис. 4.12) в зависимости от приведённой скорости V_r для

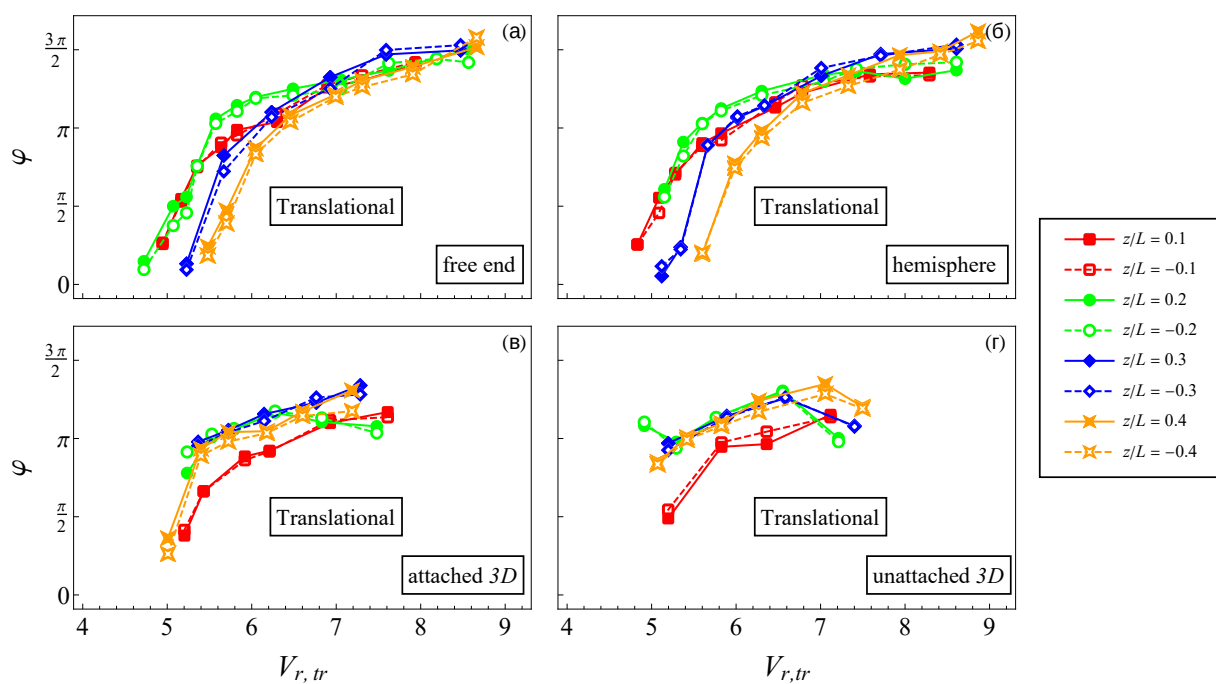


Рис. 4.10: Фазовый сдвиг φ между движением цилиндра и пульсацией скорости в следе за цилиндром в зависимости от приведенной скорости $V_{r, tr}$ для различных концевых условий. Формы торцов: (а) свободный торец; (б) полусфера; (в) присоединенная аэродинамическая шайба; (г) отсоединенная аэродинамическая шайба. Заполненные и пустые маркеры соответствуют верхним и нижним сечениям, соответственно.

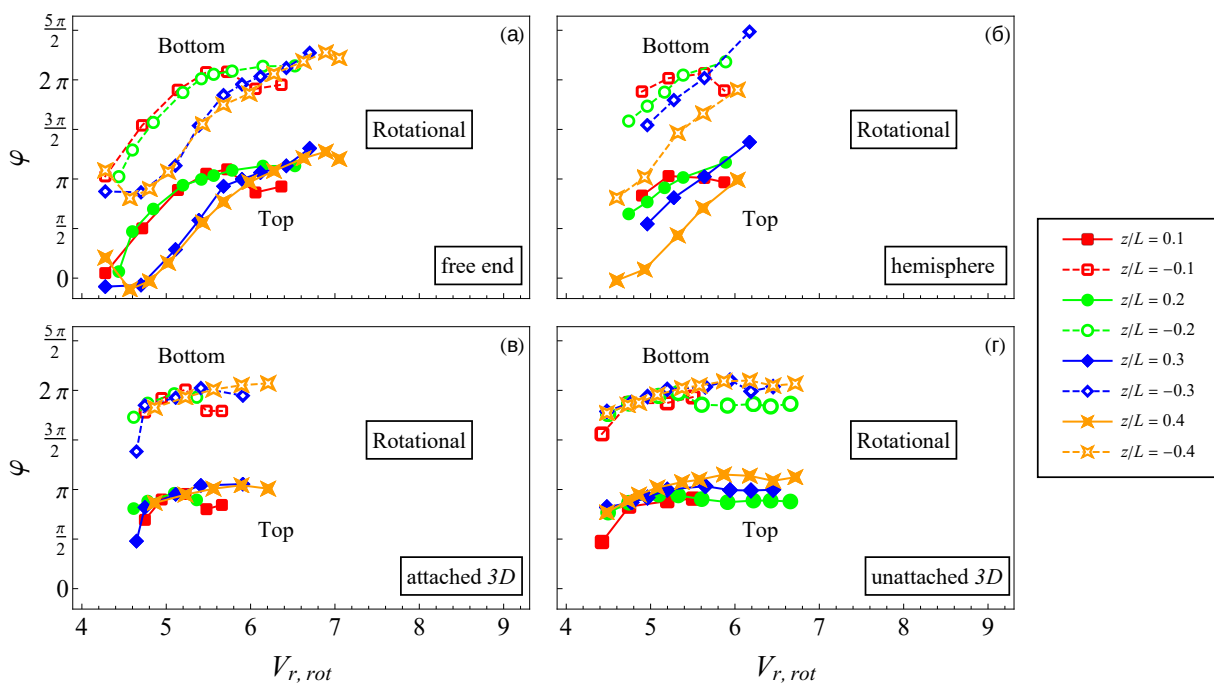


Рис. 4.11: Фазовый сдвиг φ между движением цилиндра и пульсацией скорости в следе за цилиндром в зависимости от приведенной скорости $V_{r, rot}$ для различных концевых условий. Формы торцов: (а) свободный торец; (б) полусфера; (в) присоединенная аэродинамическая шайба; (г) отсоединенная аэродинамическая шайба. Заполненные и пустые маркеры соответствуют верхним и нижним сечениям, соответственно.

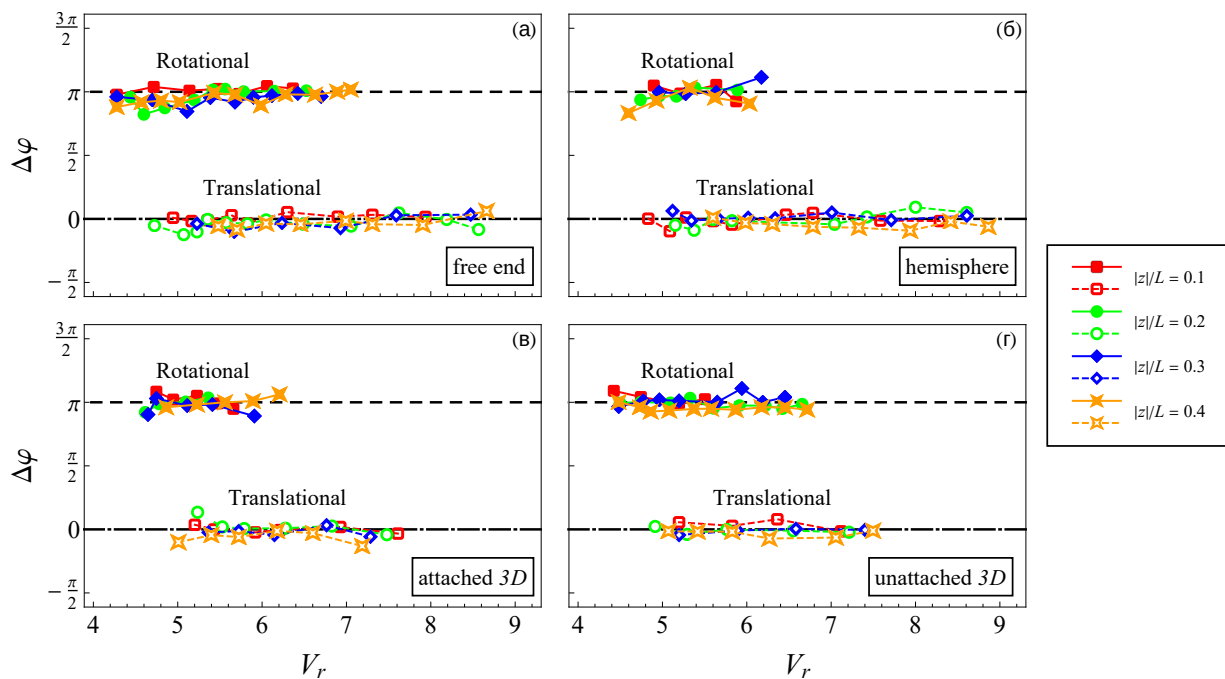


Рис. 4.12: Разница фазовых сдвигов $\Delta\varphi = \varphi_{bottom} - \varphi_{top}$ в зависимости от приведенной скорости V_r в зонах захвата частоты для различных конечных условий. Формы торцов: (а) свободный торец; (б) полусфера; (в) присоединенная аэродинамическая шайба; (г) отсоединенная аэродинамическая шайба. Значение V_r рассчитывалось по-разному для поперечных и крутильных колебаний, при этом в качестве частотной шкалы использовались соответствующие собственные частоты. Заполненные и пустые маркеры соответствуют поперечным и крутильным колебаниям, соответственно.

различных поперечных сечений и для каждого концевое условия. Оба параметра, φ и $\Delta\varphi$, были рассчитаны в соответствующих областях захвата частоты.

Для случая свободного торца наблюдается монотонное увеличение (за исключением небольшой области в конце синхронизации) фазового сдвига φ более чем на π по всему диапазону синхронизации для обоих режимов *VIV*. Для поперечных *VIV* сдвиг фаз изменяется от 0 до $3\pi/2$ для всех сечений. Для крутильных *VIV* он изменяется от 0 до приблизительно π для верхних сечений и от π до приблизительно 2π для нижних сечений.

В случае крутильных колебаний (рис. 4.11) поведение фазового сдвига практически идентично для парных поперечных сечений $|z|/L$, равных 0.1 и 0.2, а также для 0.3 и 0.4. Концевой эффект приводит к уменьшению значения φ для поперечных сечений 0.3 и 0.4 по сравнению с поперечными сечениями, близкими к центру. Поведение фазовых сдвигов идентично результатам, полученным в главе 3.

Теперь рассмотрим случай полусферической насадки на торце. В случае поперечных *VIV* поведение фазы практически идентично случаю свободного торца. Фаза монотонно возрастает более чем на π для поперечных сечений 0.3 и 0.4. Для сечений 0.1 и 0.2 фазы близки к значениям π для верхних сечений и 2π для нижних.

Наличие присоединённых и отсоединённых аэродинамических шайб приводит к меньшему отклонению сдвига фазы от постоянного значения π для поперечных *VIV*. Это поведение аналогично тому, что наблюдалось в исследовании Онгорена и Роквелла [40]. В случае крутильных колебаний φ стремится к π для верхних поперечных сечений и к 2π для нижних

поперечных сечений соответственно.

В целом для всех типов концевых условий разность фаз $\Delta\varphi$ имеет одинаковое поведение. Разница фаз $\Delta\varphi$ для симметричных сечений близка к 0 для поперечных *VIV* и к π для крутильных *VIV* (рис. 4.12). Это ещё раз подтверждает тот факт, что вихри отрываются симметрично в случае поперечных *VIV* и антисимметрично в случае крутильных *VIV*.

4.3 Обсуждение и выводы

Был экспериментально исследован характер схода вихрей вдоль размаха цилиндра и его изменение при различных концевых условиях. В настоящем исследовании изучалось влияние четырёх типов условий на концах (свободный торец, полусфера, а также прикреплённые и неприкреплённые аэродинамические шайбы) на возбуждение крутильных *VIV*, а также на характер схода вихрей в следе за цилиндром.

Подробно измерены частоты схода вихрей для неподвижного цилиндра. Результаты показывают, что число Струхалия зависит от типа условий на концах. Для свободного конца и полусферы наблюдается скачок числа Струхалия от 0.19–0.22 до 0.08, в то время как для присоединённых и отсоединённых аэродинамических шайб частота остаётся практически постоянной вдоль цилиндра.

Для колеблющегося цилиндра существуют два различных диапазона захвата частот, соответствующих поперечным и крутильным частотам. Форма кривых амплитудной и частотной характеристик зависит от условий на торцах. Их размеры зависят от условий на торцах. Диапазон захвата частоты для присоединённых или отсоединённых аэродинамических шайб, а

также для полусферы, смещён в сторону более низких скоростей по сравнению со случаем свободного торца — как для поперечных, так и для крутильных колебаний. Пиковая амплитуда приблизительно одинакова для всех случаев, за исключением полусферы, где наблюдается её уменьшение.

Для анализа вихреобразования вдоль цилиндра также измерялась фаза между колебаниями цилиндра и скоростью потока в его следе. Измерения проводились при скоростях, соответствующих пиковым амплитудам. Была выявлена значительная неравномерность в распределении фазы схода вихрей вдоль цилиндра. При поперечных колебаниях присоединённые и отсоединённые аэродинамические шайбы слегка сглаживают это распределение; при крутильных колебаниях их влияние значительно сильнее, в результате чего процесс схода вихрей становится практически двумерным (вдоль верхней и нижней половины цилиндра).

Была рассчитана разность фаз в симметричных сечениях относительно оси вращения цилиндра. При поперечных колебаниях разность фаз близка к нулю, что означает, что сход вихрей происходит симметрично в нижней и верхней частях цилиндра, тогда как при крутильных колебаниях она равна π , что означает, что сход вихрей происходит антисимметрично.

В режиме крутильных *VIV* значение фазового сдвига резко изменяется вблизи области закрепления балки, которая действует как разделительная пластина, предотвращая формирование вихрей и разделяя поток на два подпотока, в которых сход вихрей происходит в противофазе. Эти выводы справедливы для всех скоростей в соответствующих диапазонах синхронизации.

5 Влияние длины цилиндра на амплитуду крутильных VIV ¹

5.1 Описание эксперимента

В заключительной части исследования эксперименты проводились в той же аэродинамической трубе с использованием той же экспериментальной модели, описанных в главах 3 и 4. Однако теперь последовательно рассматривались несколько цилиндров разной длины с одинаковыми внешним D и внутренним D_{int} диаметрами. Длины цилиндров рассматривались: $L = 250, 300, \dots, 700$ мм, соответствующие приведённым длинам $L/D = 10, 12, \dots, 28$. Условия на торцах цилиндра соответствовали

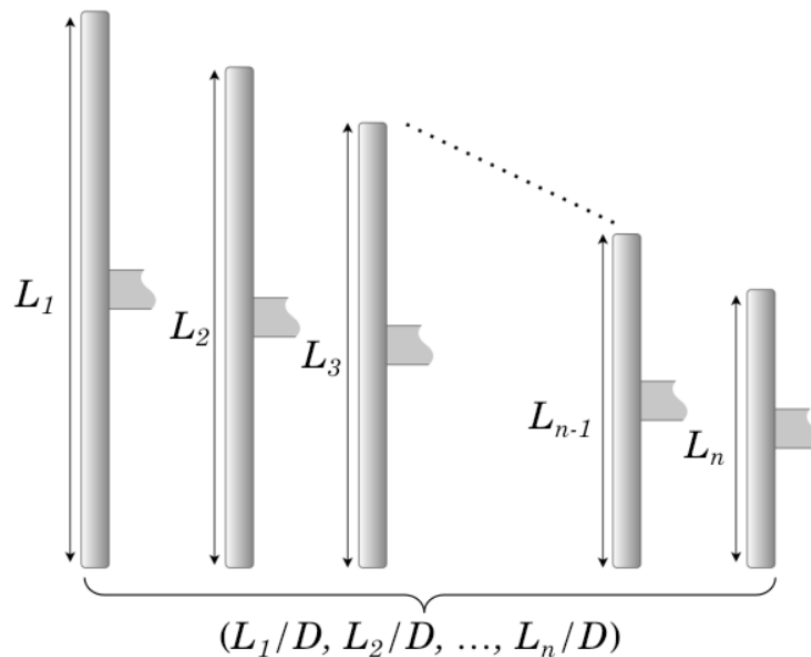
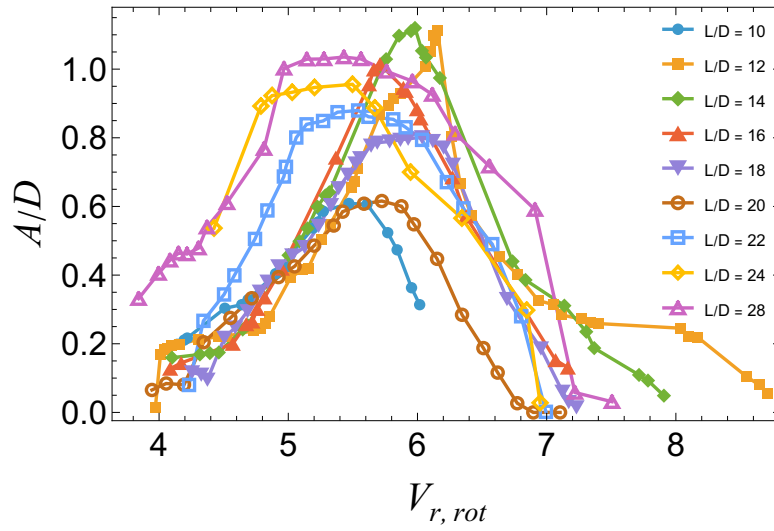
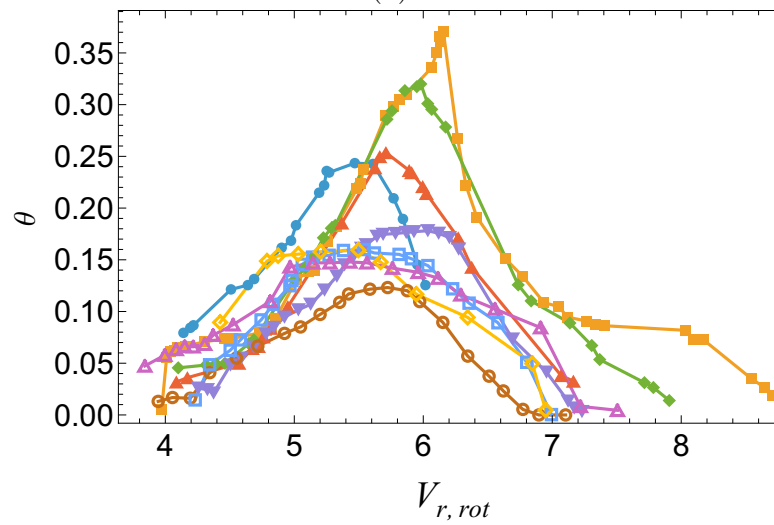


Рис. 5.1: Цилиндры различной длины.

¹При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [14, 77]



(a)



(б)

Рис. 5.2: (а) Зависимость амплитуды угла поворота θ и (б) безразмерной амплитуды A/D колебаний цилиндра от приведенной скорости $V_{r, rot}$ для различных относительных удлинений цилиндра L/D .

случаю свободного торца. Длина балки была фиксирована и составляла $l/D = 6.5$. Приборы для измерений остались прежними.

5.2 Результаты

Для исследования динамики режима крутильных VIV были построены зависимости безразмерной амплитуды A/D и амплитуды угла поворота цилиндра θ от приведённой скорости $V_{r, rot}$ при различных значениях от-

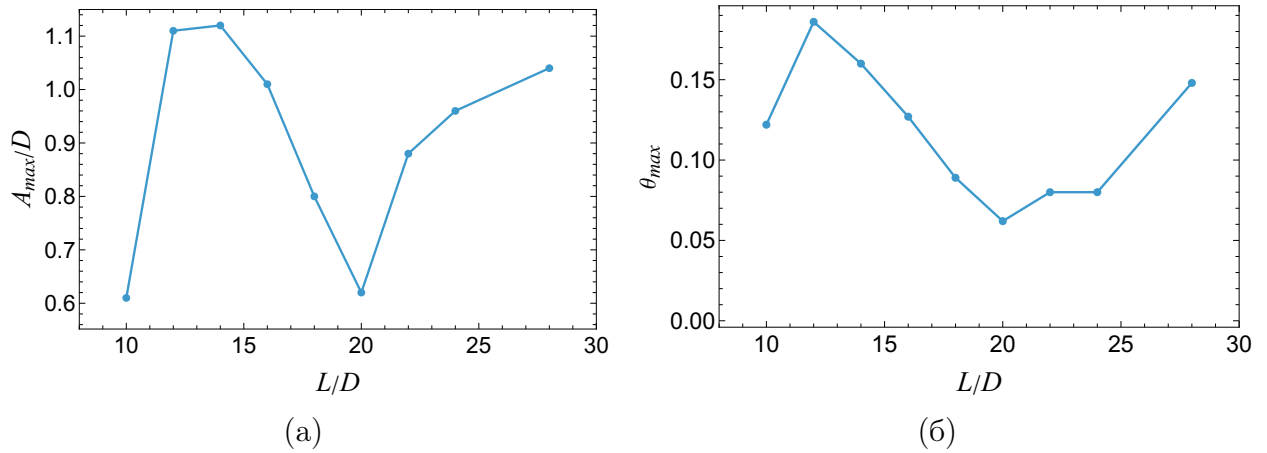


Рис. 5.3: Зависимость максимальной амплитуды колебаний торца цилиндра A_{max}/D (а) и максимального угла поворота θ_{max} (рад) цилиндра (б) от относительного удлинения L/D .

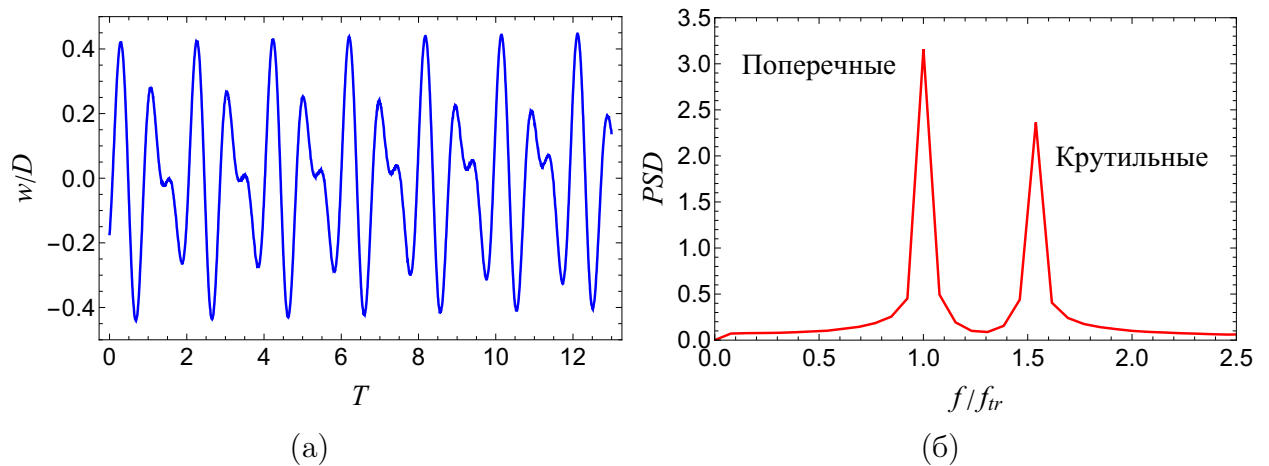


Рис. 5.4: Режим незатухающего смешанного типа колебаний. (а) Зависимость смещения верхнего торца цилиндра от положения равновесия w/D от безразмерного времени $T = tf_{tr}$; (б) Зависимость спектральной плотности записанного сигнала (PSD) от безразмерной частоты f/f_{tr} .

носительного удлинения цилиндра $L/D = 10, 12, \dots, 28$ (рис. 5.2).

На основе полученных данных была сформирована зависимость максимальных значений — безразмерной амплитуды A_{\max}/D и максимального угла поворота θ_{\max} — от безразмерной длины L/D (рис. 5.3). Такой переход к экстремальным характеристикам позволяет выделить ключевые закономерности отклика системы при вариации удлинения цилиндра.

Анализ построенных зависимостей выявил их немонотонный характер. В частности, обе зависимости содержат локальные минимумы при $L/D = 20$. Максимальные значения безразмерной амплитуды $A_{\max}/D \approx 1.11$ достигаются при $L/D = 12$ и $L/D = 14$. Этот факт указывает на существование «оптимальной» относительной длины цилиндра, при которой возбуждение крутильных VIV оказывается наиболее благоприятным с точки зрения получения максимальных амплитуд колебаний. Аналогичным образом, наибольшая амплитуда угла поворота $\theta_{\max} \approx 0.37$ рад наблюдается при $L/D = 12$.

Особого внимания заслуживает поведение системы при бóльших относительных удлинениях: для $L/D = 24$ и $L/D = 28$ в сравнительно узком диапазоне приведённых скоростей был обнаружен незатухающий смешанный тип колебаний (рис. 5.4). В этом режиме резонанс возникает вследствие одновременного возбуждения поперечных и крутильных VIV . Данный факт свидетельствует о том, что диапазоны захвата частоты, соответствующие поперечным и крутильным VIV , пересеклись. Можно также отметить, что смешанный режим может быть достигнут и при других длинах цилиндров, если сблизить вышеупомянутые частоты, например, изменив поперечное сечение балки.

Наличие такого режима смешанных колебаний подчёркивает сложность динамики схода вихрей и их синхронизацию с движением цилиндра, а также указывает на необходимость учёта взаимовлияния поперечных и крутильных *VIV*.

5.3 Обсуждение и выводы

Экспериментально исследован режим крутильных колебаний, вызванных сходом вихрей, при различных относительных удлинениях цилиндра ($L/D = 10, 12, \dots, 28$). Построены зависимости амплитуд колебаний и максимального угла поворота от относительного удлинения цилиндра. Результаты выявили немонотонный характер этих зависимостей.

Обнаружен незатухающий смешанный тип колебаний. В этом режиме резонанс возникает вследствие одновременного возбуждения поперечных и крутильных *VIV*. Данный факт свидетельствует о пересечении диапазонов захвата частоты, соответствующих поперечным и крутильным *VIV*.

В случае смешанного типа колебаний, вызванных сходом вихрей, срыв вихрей, по-видимому, отличается от классического режима $2S$, при котором за цикл сходит два вихря. Это объясняется одновременным возникновением двух режимов захвата частоты, а также различием амплитуд крутильных колебаний по размаху цилиндра. Наличие такого режима подчёркивает сложность явления синхронизации схода вихрей с движением цилиндра.

Заключение

Основные результаты и выводы диссертации:

1. Экспериментально открыт новый тип крутильных *VIV*. Получен диапазон безразмерных скоростей потока, в котором существуют развитые автоколебания, и определены их амплитуды.
2. В режиме крутильных *VIV* дорожки Кармана, сходящие в различных сечениях цилиндра, имеющих разную амплитуду колебаний, синхронизируются в единую трёхмерную структуру. При этом вихревые дорожки Кармана, генерируемые верхней и нижней частями цилиндра, сходят синхронно в противофазе.
3. Доказано наличие режима захвата частоты для исследованного типа крутильных колебаний.
4. Характер схода вихрей по размаху цилиндра существенно определяется концевыми условиями и типом резонансных колебаний. Для типов «Свободный торец» и «Полусфера» выявлена заметная неравномерность распределения фазы схода вихрей. При поперечных колебаниях аэродинамические шайбы умеренно сглаживают это распределение, а при крутильных — их влияние резко усиливается, делая процесс схода вихрей практически синхронным (вдоль верхней и нижней половин цилиндра).
5. Фаза схода вихрей скачком меняется вблизи закрепления балки, которая ведёт себя как разделительная пластина (*splitter plate*), предотвра-

щающая образование вихрей в сечениях вблизи оси вращения цилиндра.

6. Исследовано влияние длины цилиндра на крутильные автоколебания. Наибольшая амплитуда $A_{max}/D \approx 1.11$ достигается при $L/D = 12$ и $L/D = 14$; амплитуда угла поворота $\theta_{max} \approx 0.37$ рад. достигается при $L/D = 12$. Зависимости имеют локальные минимумы, достигающиеся при $L/D = 20$.
7. Впервые экспериментально обнаружен режим незатухающего смешанного типа *VIV*, когда резонанс наступает в результате одновременного возбуждения поперечных и крутильных *VIV*.

Литература

1. Abdelkefi A. Aeroelastic energy harvesting: A review //International Journal of Engineering Science. – 2016. – Т. 100. – С. 112-135.
2. Adhikari S., Rastogi A., Bhattacharya B. Piezoelectric vortex induced vibration energy harvesting in a random flow field //Smart Materials and Structures. – 2020. – Т. 29. – №. 3. – С. 035034.
3. Assi G. R. S., Bearman P. W., Meneghini J. R. On the wake-induced vibration of tandem circular cylinders: the vortex interaction excitation mechanism //Journal of Fluid Mechanics. – 2010. – Т. 661. – С. 365-401.
4. Azadeh-Ranjbar V., Elvin N., Andreopoulos Y. Vortex-induced vibration of finite-length circular cylinders with spanwise free-ends: Broadening the lock-in envelope //Physics of Fluids. – 2018. – Т. 30. – №. 10.
5. Bearman P. W., Currie I. G. Pressure-fluctuation measurements on an oscillating circular cylinder //Journal of Fluid Mechanics. – 1979. – Т. 91. – №. 4. – С. 661-677.
6. Bearman P. W. Vortex shedding from oscillating bluff bodies //Annual review of fluid mechanics. – 1984. – Т. 16. – С. 195-222.

7. Bernitsas M. M. et al. VIVACE (Vortex Induced Vibration Aquatic Clean Energy): A new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow. – 2008.
8. Bishop R. E. D., Hassan A. Y. The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing fluid //Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1964. – T. 277. – №. 1368. – C. 32-50.
9. Blevins R. D. Flow-induced vibration //New York. – 1977.
10. Bourguet R., Mathis R. A wind tunnel investigation of the effects of end and laminar/turbulent inflow conditions on cylinder vortex-induced vibrations //Journal of Fluids and Structures. – 2023. – T. 123. – C. 104015.
11. Brika D., Laneville A. Vortex-induced vibrations of a long flexible circular cylinder //Journal of fluid mechanics. – 1993. – T. 250. – C. 481-508.
12. Chen S. S. Flow-induced vibration of circular cylindrical structures. – Argonne National Lab.(ANL), Argonne, IL (United States), 1985. – №. ANL-85-51.
13. Dai H. L., Abdelkefi A., Wang L. Piezoelectric energy harvesting from concurrent vortex-induced vibrations and base excitations //Nonlinear Dynamics. – 2014. – T. 77. – №. 3. – C. 967-981.
14. Demchenko Y., Vedeneev V., Zubkov A. Torsional aero-elastic oscillations of an elastically mounted circular cylinder //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2024. – T. 2647. – №. 11. – C. 112004.

15. Demchenko Y., Ivanov O., Zubkov A. Torsional aero-elastic oscillations of a circular cylinder attached to the end of an elastic beam // FIV 2024: FSI2&FIV+N 10th International Symposium on Fluid -Structure Interactions, Flow -Sound Interactions, Flow - Induced Vibration&Noises. — 2024. — FIV2024-0083.
16. Demchenko Y., Ivanov O., Vedeneev V. Experimental investigation of rotational vortex-induced vibrations of a circular cylinder attached to an elastic beam //Journal of Fluids and Structures. — 2025. — T. 133. — C. 104266.
17. Demchenko Y., Ivanov O. The effect of end conditions on rotational vortex-induced vibrations // Physics of Fluids. — 2026. — Vol. 38, no. 2. — P. 024108.
18. Demchenko Y.V., Ivanov O.O., Vedeneev V.V. Experimental investigation of torsional vortex-induced vibrations of a circular cylinder attached to the end of an elastic beam. Book of abstracts. The 26th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, ICTAM 2024 Daegu, Korea, 25-30 August, 2024., 2024 — C. 2071.
19. Demchenko Y.V., Ivanov O.O., Vedeneev V.V. Experimental investigation of torsional vortex-induced vibrations of a circular cylinder attached to the end of an elastic beam. Book of abstracts. 7th Symposium on Fluid-Structure-Sound Interactions and Control, Oshawa/Toronto, Canada, 2025.

20. Duranay A. et al. A review on vortex-induced vibrations in confined flows //Ocean Engineering. – 2023. – T. 285. – C. 115309.
21. Elahi H., Eugeni M., Gaudenzi P. A review on mechanisms for piezoelectric-based energy harvesters //Energies. – 2018. – T. 11. – №. 7. – C. 1850.
22. Farivar D. J. Turbulent uniform flow around cylinders of finite length //AIAA journal. – 1981. – T. 19. – №. 3. – C. 275-281.
23. Gere J. M., Timoshenko S. P. Mechanics of Materials. ed //Boston, MA: PWS. – 1997.
24. Griffin O. M., Skop R. A., Koopmann G. H. Measurements of the response of bluff cylinders to flow-induced vortex shedding //Offshore Technology Conference. – OTC, 1973. – C. OTC-1814-MS.
25. Griffin O. M., Skop R. A., Ramberg S. E. The resonant, vortex-excited vibrations of structures and cable systems //Offshore Technology Conference. – OTC, 1975. – C. OTC-2319-MS.
26. Griffin O. M. Vortex-excited cross-flow vibrations of a single cylindrical tube. – 1980.
27. Griffin O. M. Vortex shedding from bluff bodies in a shear flow: a review. – 1985.
28. Huang N. E. et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis //Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical,

- physical and engineering sciences. – 1998. – T. 454. – №. 1971. – C. 903-995.
29. Ivanov O., Vedeneev V. Vortex-induced vibrations of an elastic cylinder near a finite-length plate //Journal of Fluids and Structures. – 2021. – T. 107. – C. 103393.
 30. Jauvtis N. A., Williamson C. H. K. The effect of two degrees of freedom on vortex-induced vibration at low mass and damping //Journal of Fluid Mechanics. – 2004. – T. 509. – C. 23-62.
 31. Khalak A., Williamson C. H. K. Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping //Journal of fluids and structures. – 1996. – T. 10. – №. 5. – C. 455-472.
 32. Khalak A., Williamson C. H. K. Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping //Journal of fluids and Structures. – 1999. – T. 13. – №. 7-8. – C. 813-851.
 33. Lian, J., Yan, X., Liu, F., Zhang, J. Analysis on flow induced motion of cylinders with different cross sections and the potential capacity of energy transference from the flow //Shock and vibration. – 2017. – T. 2017. – №. 1. – C. 4356367.
 34. Marchevskii I. K., Shcheglov G. A. On the dynamic stability of an elastically fixed high-drag airfoil under vortical parametric excitations //Mechanics of solids. – 2016. – T. 51. – №. 3. – C. 349-356.

35. Mitcheson P. D. et al. MEMS electrostatic micropower generator for low frequency operation //Sensors and Actuators A: Physical. – 2004. – T. 115. – №. 2-3. – C. 523-529.
36. Morse T. L., Govardhan R. N., Williamson C. H. K. The effect of end conditions on the vortex-induced vibration of cylinders //Journal of Fluids and Structures. – 2008. – T. 24. – №. 8. – C. 1227-1239.
37. Morse T. L., Williamson C. H. K. Prediction of vortex-induced vibration response by employing controlled motion //Journal of Fluid Mechanics. – 2009. – T. 634. – C. 5-39.
38. Muscat A., Bhattacharya S., Zhu Y. Electromagnetic vibrational energy harvesters: A review //Sensors. – 2022. – T. 22. – №. 15. – C. 5555.
39. Norberg C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements //Journal of Fluids and Structures. – 2003. – T. 17. – №. 1. – C. 57-96.
40. Ongoren A., Rockwell D. Flow structure from an oscillating cylinder Part 1. Mechanisms of phase shift and recovery in the near wake //Journal of fluid Mechanics. – 1988. – T. 191. – C. 197-223.
41. Païdoussis M. P., Price S. J., De Langre E. Fluid-structure interactions: cross-flow-induced instabilities. – Cambridge University Press, 2010.
42. Papaioannou G. V. et al. On the effect of spacing on the vortex-induced vibrations of two tandem cylinders //Journal of Fluids and Structures. – 2008. – T. 24. – №. 6. – C. 833-854.

43. Ryabinin A. N., Veligzhanin A. A. Rotational and translational oscillations of small-aspect-ratio cylinders in an air flow //Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. – 2022. – T. 55. – №. 4. – C. 489-496.
44. Sarpkaya T. Fluid forces on oscillating cylinders //Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division. – 1978. – T. 104. – №. 3. – C. 275-290.
45. Sarpkaya T. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations //Journal of fluids and structures. – 2004. – T. 19. – №. 4. – C. 389-447.
46. Seyed-Aghazadeh B., Carlson D. W., Modarres-Sadeghi Y. Vortex-induced vibration and galloping of prisms with triangular cross-sections //Journal of Fluid Mechanics. – 2017. – T. 817. – C. 590-618.
47. Shishaeva A., Ivanov O. Numerical simulation of flow-induced vibration of a cylinder near a finite-length plate //Physics of Fluids. – 2024. – T. 36. – №. 12.
48. Sumner D. Flow above the free end of a surface-mounted finite-height circular cylinder: A review //Journal of Fluids and Structures. – 2013. – T. 43. – C. 41-63.
49. Skop R. A., Balasubramanian S. A new twist on an old model for vortex-excited vibrations //Journal of Fluids and Structures. – 1997. – T. 11. – №. 4. – C. 395-412.
50. Weaver Jr W., Timoshenko S. P., Young D. H. Vibration problems in engineering. – John Wiley & Sons, 1991.

51. Ugural A. C., Fenster S. K. Advanced strength and applied elasticity. – Pearson education, 2003.
52. Wang J. et al. The state-of-the-art review on energy harvesting from flow-induced vibrations //Applied Energy. – 2020. – T. 267. – C. 114902.
53. Wang J. et al. Enhancing piezoelectric energy harvesting from the flow-induced vibration of a circular cylinder using dual splitters //Smart Materials and Structures. – 2021. – T. 30. – №. 5. – C. 05LT01.
54. Williamson C. H. K., Roshko A. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder //Journal of fluids and structures. – 1988. – T. 2. – №. 4. – C. 355-381.
55. Williamson C. H. K., Govardhan R. Vortex-induced vibrations //Annu. Rev. Fluid Mech. – 2004. – T. 36. – №. 1. – C. 413-455.
56. Yang Y., Zhao L., Tang L. Comparative study of tip cross-sections for efficient galloping energy harvesting //Applied Physics Letters. – 2013. – T. 102. – №. 6.
57. Young W. C. et al. Roark's formulas for stress and strain. – New York : McGraw-hill, 2002. – T. 7. – C. 125-127.
58. Zdravkovich M. M. et al. Flow past short circular cylinders with two free ends //Journal of fluid mechanics. – 1989. – T. 203. – C. 557-575.
59. Zhang M., Wang J. Experimental Study on Piezoelectric Energy Harvesting from Vortex-Induced Vibrations and Wake-Induced Vibrations //Journal of Sensors. – 2016. – T. 2016. – №. 1. – C. 2673292.

60. Zhang M. et al. Piezoelectric energy harvesting from vortex-induced vibration of a circular cylinder: Effect of Reynolds number //Ocean engineering. – 2021. – Т. 235. – С. 109378.
61. Zhao M. A review of recent studies on the control of vortex-induced vibration of circular cylinders //Ocean Engineering. – 2023. – Т. 285. – С. 115389.
62. Zheng X. et al. A review of piezoelectric energy harvesters for harvesting wind energy //Sensors and Actuators A: Physical. – 2023. – Т. 352. – С. 114190.
63. Zhou C. Y., So R. M. C., Lam K. Vortex-induced vibrations of an elastic circular cylinder //Journal of Fluids and Structures. – 1999. – Т. 13. – №. 2. – С. 165-189.
64. Демченко Я. В., Веденеев В. В., Зубков А. Ф. Резонансные крутильные аэроупругие колебания кругового цилиндра конечного размаха в упругом подвесе //Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2023. Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых-механиков 4 – 14 сентября 2023, Сочи, Буревестник МГУ. – 2023. – С. 41-41.
65. Демченко Я.В., Зубков А.Ф. Резонансные крутильные аэроупругие колебания кругового цилиндра конечного размаха в упругом подвесе. Тезисы докладов конференции Ломоносовские чтения. Секция механики 4 – 23 апреля 2023, Москва, НИИ механики МГУ., 2023 — С. 62.

66. Демченко Я.В., Иванов О.О. Экспериментальное исследование вихревых структур за круглым цилиндром в режиме трехмерных аэроупругих колебаний. Тезисы докладов конференции Ломоносовские чтения. Секция механики 20 марта – 4 апреля 2024, Москва, НИИ механики МГУ., 2024 — С. 14.
67. Демченко Я.В. Экспериментальное исследование крутильных аэроупругих колебаний круглого цилиндра, закреплённого на конце упругой балки. Тезисы докладов Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2024», Москва, МГУ, 2024.
68. Демченко Я.В., Иванов О.О., Веденеев В.В. Резонансные крутильные аэроупругие колебания кругового цилиндра конечного размаха в упругом подвесе. Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых-механиков 4 – 14 сентября 2024, Сочи, Буревестник МГУ., 2024 — С. 53.
69. Демченко Я.В. Исследование крутильных аэроупругих колебаний цилиндра в аэрофизическом эксперименте. Тезисы Конференции-конкурса молодых ученых Научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова, 14 – 15 октября 2024 года, 2024 — С. 14.
70. Демченко Я.В., Иванов О.О. Экспериментальное изучение влияния концевых эффектов на поперечные и крутильные колебания упруго-закрепленного цилиндра в потоке воздуха. Тезисы докладов конференции Ломоносовские чтения. Секция механики 24 марта – 4 апреля 2025, Москва, НИИ механики МГУ., 2025.

71. Демченко Я.В. Экспериментальное изучение влияния концевых эффектов на крутильные колебания упруго закрепленного цилиндра в потоке воздуха. Тезисы докладов Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2025», Москва, МГУ, 2025.
72. Демченко Я.В., Иванов О.О., Веденеев В.В. Экспериментальное изучение влияния концевых эффектов на аэроупругие крутильные колебания цилиндра. Тезисы докладов 52 школы-конференции «Актуальные проблемы механики» 23 – 27 июня 2025, Санкт-Петербург, Россия, 2025 — С. 197.
73. Демченко Я.В., Иванов О.О., Веденеев В.В. Экспериментальное исследование влияния аэродинамических шайб на аэроупругие колебания цилиндра. Тезисы докладов конференции Сборник трудов IX Российской конференции — школы молодых ученых с международным участием «Многофазные системы модели, эксперимент, приложения», Уфа, 2025.
74. Демченко Я.В., Иванов О.О. Экспериментальное изучение влияния концевых эффектов на аэроупругие крутильные колебания цилиндра. Тезисы докладов X Всероссийская конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», 25 – 29 августа 2025., Новосибирск, НГУ, 2025 — С. 12.
75. Демченко Я.В. Исследование влияния концевых эффектов на крутильные аэроупругие колебания цилиндра. Тезисы Конференции-конкурса молодых ученых Научно-исследовательского института ме-

ханики МГУ имени М.В. Ломоносова, 13 – 15 октября 2025 года, 2025 – С. 12.

76. Демченко Я.В., Иванов О.О. Исследование влияния концевых эффектов на крутильные аэроупругие колебания цилиндра. Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых-механиков 4 – 14 сентября 2025, Сочи, Буревестник МГУ., 2025.
77. Демченко Я. В. Влияние длины цилиндра на крутильные аэроупругие колебания // Волны и вихри в сложных средах: 16-ая международная конференция–школа молодых ученых; 2 – 5 декабря 2025 г., Москва: Сборник материалов школы. 315 с. – 2025.
78. Рябинин А. Н., Киселев Н. А. Влияние положения оси вращения цилиндра на его вращательные колебания в воздушном потоке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2016. – Т. 3. – №. 2. – С. 315-323.