

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Соколов Антон Иванович

**Проекции трехосного эллипсоида
для отображения рельефа на картах небесных тел**

1.6.20. Геоинформатика, картография

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата географических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
доцент, профессор РАН
Нырцов Максим Валерьевич

Москва – 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Картографирование небесных тел в проекциях трёхосного эллипсоида	11
1.1. Карты небесных тел в равноугольных, равновеликих и произвольных проекциях	11
1.1.1. Некоторые особенности небесных тел как объектов картографирования	11
1.1.2. Карты небесных тел в различных проекциях	14
1.1.3. Особенности выбора проекций для карт небесных тел	19
1.2. Обзор разработки и исследования проекций трёхосного эллипсоида	20
1.2.1. Несферические небесные тела.....	20
1.2.2. История разработки проекций трёхосного эллипсоида.....	23
1.2.3. Исследование проекций. Выбор наилучших проекций	33
1.3. Получение проекций трёхосного эллипсоида с заданным характером искажений.....	38
1.3.1. Трёхосный эллипсоид: системы координат и первая квадратичная форма.....	38
1.3.2. Условия для получения цилиндрических, азимутальных и конических проекций	40
1.3.3. Квазиравноугольные проекции трёхосного эллипсоида	45
Выводы к главе 1	47
Глава 2. Получение формул и определение свойств проекций трёхосного эллипсоида	49
2.1. Получение формул проекций	49
2.1.1. Горизонтальная координата в цилиндрических проекциях	49
2.1.2. Полярный угол в конических проекциях	50
2.1.3. Проекции меридианного сечения	50
2.1.4. Проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью ...	52
2.1.5. Проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов	56
2.1.6. Равновеликие проекции	57
2.1.7. Равноугольная проекция Якоби	59
2.2. Вычисление координат в проекциях и показателей искажений	60
2.2.1. Вычисление координат	60
2.2.2. Вычисление показателей искажений	61
2.3. Определение свойств проекций и составление карт	68
2.3.1. Обоснование выбора небесных тел для исследования проекций	68

2.3.2. Обоснование выбора способов оценки искажений в проекциях	71
2.3.3. Построение изокол	74
2.3.4. Трансформирование фотомозаик и составление фотокарт	75
2.3.5. Вычисление высот и составление гипсометрических карт	76
Выводы к главе 2	77
Глава 3. Выбор наилучших проекций трёхосного эллипсоида для отображения рельефа на картах небесных тел	79
3.1. Наилучшие проекции для фотокарт и карт поверхности глобального охвата	79
3.2. Наилучшие проекции для гипсометрических карт глобального охвата	88
3.3. Наилучшие проекции для карт поверхности и гипсометрических карт регионального охвата	92
Выводы к главе 3	95
Заключение	97
Список литературы.....	99
Приложение 1. Изоколы частных масштабов длин вдоль меридианов, вдоль параллелей, площадей и наибольшего искажения углов в цилиндрических, азимутальных, конических проекциях и в проекции Якоби (спутник Марса Фобос, спутник Сатурна Гиперион, астероид 433 Эрос).....	108
Приложение 2. Фотокарты поверхности и гипсометрические карты небесных тел (спутник Марса Фобос, спутник Сатурна Гиперион, астероид 433 Эрос)	149

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Картографирование небесных тел является важнейшей и неотъемлемой частью их исследования. Для представления научной информации о небесном теле и формирования впечатления об устройстве его поверхности часто используются карты поверхности и гипсометрические карты. Под *картой поверхности* понимается общегеографическая карта небесного тела, т.е. карта, на которой отображены видимые элементы местности. Это понятие вводится, чтобы избежать использования термина «общегеографическая карта» во внеземном картографировании. Основным содержанием карт поверхности и гипсометрических карт небесных тел чаще всего является рельеф, поскольку другие видимые элементы местности практически не представлены.

Отличие других небесных тел от Земли в качестве объекта картографирования проявляется и в содержании карт, и в их математической основе. Для таких карт характерно разнообразие *референц-поверхностей* (математическая поверхность, аппроксимирующая физическую поверхность небесного тела) вследствие различий формы объектов. При этом, как правило, используется не такое большое число *картографических проекций* (в основном потому, что количество этих карт гораздо меньше, чем карт Земли). Карты поверхности и гипсометрические карты небесных тел составляют в различных по характеру искажений проекциях. При отображении рельефа на таких картах может требоваться как минимизация искажений форм объектов (для передачи очертаний горизонталей, морфологических характеристик кратеров и т.д.), так и сохранение их площадей.

Как стало ясно к концу 80-х гг. XX в., многие небесные тела в Солнечной системе имеют сложную нерегулярную поверхность, что привело к появлению рекомендаций Международного астрономического союза использовать трёхосный эллипсоид в качестве референц-поверхности для их картографирования. Под *трёхосным эллипсоидом* в геодезии и картографии понимается эллипсоид, у которого все три полуоси различны. Таким образом, возникла необходимость получения проекций трёхосного эллипсоида с заданным характером искажений. И если в то время из тел сложной формы космическими аппаратами исследовались только спутники Марса, то к 20-м гг. XXI в. накоплен большой объём данных для

картографирования спутников планет-гигантов, астероидов, ядер комет. Это определяет актуальность задач по разработке проекций трёхосного эллипсоида и определению свойств этих проекций. Разнообразие референц-поверхностей и влияние их параметров на свойства проекций обуславливают важность обоснованного выбора проекций при создании карт небесных тел. Выбор проекций тесно связан с таким направлением математической картографии, как получение так называемых *наилучших проекций*, т.е. проекций, в которых минимизированы все искажения или некоторые их виды.

К 20-м гг. XXI в. возросла роль геоинформационных технологий в картографировании, однако вследствие сложности расчётных формул проекции трёхосного эллипсоида отсутствуют в математических модулях распространённых ГИС-пакетов. Поэтому при картографировании небесных тел, фигуры которых предпочтительно аппроксимировать трёхосным эллипсоидом, нередко делается выбор в пользу более простого варианта (сфера или эллипсоид вращения). Это обуславливает актуальность задачи по разработке инструментария для работы с проекциями трёхосного эллипсоида, в том числе получению конечных формул для упрощения вычислений.

Цель исследования – получить формулы и определить свойства проекций трёхосного эллипсоида, наилучших с точки зрения минимизации искажений для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах небесных тел.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи исследования**:

- на основе опыта картографирования небесных тел выявить проекции, используемые для отображения рельефа на картах поверхности и гипсометрических картах;
- получить конечные формулы аналогичных проекций для трёхосного эллипсоида или простые аппроксимирующие зависимости;
- разработать инструментарий по вычислению прямоугольных координат в этих проекциях и показателей искажений;
- определить свойства проекций трёхосного эллипсоида, прежде всего величину и распределение основных видов искажений;

– выбрать наилучшие проекции для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах небесных тел с точки зрения минимизации искажений.

Объектом исследования являются проекции трёхосного эллипсоида с различным характером искажений. **Предмет** исследования – свойства проекций трёхосного эллипсоида (величина и распределение искажений) и их влияние на отображение рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах небесных тел.

Фактический материал и личный вклад автора. Работа отражает результаты исследований аспиранта за период с 2017 г., выполненных на кафедре картографии и геоинформатики географического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Автором получены *конечные формулы* цилиндрических, азимутальных и конических проекций трёхосного эллипсоида, а при невозможности их получения – *простые аппроксимирующие зависимости* для вычисления координат в проекциях. Также автором на основе исследования распределения искажений в проекциях трёхосного эллипсоида выбраны наилучшие из них для отображения рельефа на картах небесных тел с точки зрения минимизации искажений. Основные исходные материалы – глобальные фотомозаики небесных тел, созданные проф. Ф. Стуком (Stooke Small Bodies Maps), и цифровые модели поверхности, доступные в системе планетных данных (Planetary Data System). Параметры эллипсоидов устанавливаются в соответствии с отчётом рабочей группы Международного астрономического союза по картографическим координатам и элементам вращения планет и спутников. Программные комплексы для построения изокон и составления карт – Golden Software Surfer и QGIS.

Методология и методика. Методологическую базу работы составляют методы моделирования, математические методы, картографический метод исследования, который заключается в представлении свойств объектов и явлений с помощью картографических изображений, а также сравнительный метод. В основе работы лежит традиционная методика исследования картографических проекций, разработанная К. Якоби, Г.А. Гинзбургом, Л.М. Бугаевским, распространённая на проекции трёхосного эллипсоида. Она заключается в определении величин и

распределения искажений в проекциях по *изоколам* и выборе наилучших проекций с точки зрения минимизации искажений. Получение формул проекций трёхосного эллипсоида является продолжением и углублением изысканий Л.М. Бугаевского, Б.Б. Серапинаса, Дж. Снайдера, М.Э. Флейс, М.В. Нырцова. При выводе формул проекций интегралы, соответствующие заданному характеру искажений, выражаются через аналитические функции (конечные формулы) либо сводятся к эллиптическим интегралам. Для выбора наилучших проекций сравнивается распределение искажений в разных проекциях и для разных эллипсоидов.

Научную новизну работы определяют следующие результаты:

- впервые получены конечные формулы ряда проекций трёхосного эллипсоида, предназначенных для отображения рельефа на картах поверхностей, фотокартах и гипсометрических картах небесных тел, удобные для их включения в математический модуль геоинформационных систем и для упрощения расчёта показателей искажений;
- разработан новый инструментарий в виде программы на языке JavaScript и графического интерфейса к ней на HTML по вычислению прямоугольных координат в цилиндрических, азимутальных, конических проекциях трёхосного эллипсоида и в проекции Якоби, а также показателей искажений, включающий полученные конечные формулы.

Научная и практическая значимость работы. Исследование расширяет теорию проекций трёхосного эллипсоида, получаемых на основе векторного описания самого трёхосного эллипсоида радиус-вектором, а также касательной к эллипсоиду плоскости, содержащей приращение радиус-вектора. Выведенные формулы проекций дополняют систему цилиндрических, азимутальных и конических проекций в нормальной ориентировке, разрабатываемых в рамках этой теории.

Выбранные наилучшие проекции трёхосного эллипсоида для отображения рельефа рекомендуются к использованию для карт поверхностей и гипсометрических карт небесных тел, фигуры которых целесообразно аппроксимировать этой математической поверхностью. Разработанный инструментарий по вычислению координат в проекциях упрощает процесс составления карт таких небесных тел. Алгоритмы расчёта показателей искажений,

включённые в упомянутый инструментарий, могут быть использованы при выборе проекций для карт небесных тел, также как и построенные изоколы.

Инструментарий по вычислению прямоугольных координат проекций трёхосного эллипсоида используется в лабораторных работах студентов по учебным курсам на кафедре картографии и геоинформатики географического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Основные защищаемые положения:

1. Для отображения рельефа на картах глобального охвата при условии комбинирования азимутальной и цилиндрической проекций в рамках единой компоновки и выбора переходной области в зависимости от эксцентриситетов эллипсоида наилучшими являются: для карт поверхности и фотокарт – *проекция меридианного сечения*, для гипсометрических карт – *проекция, сохраняющие длины вдоль меридианов*.
2. *Конические проекции* целесообразно использовать для отображения рельефа на картах поверхности и гипсометрических картах регионального охвата, при этом расположение области с минимальными искажениями тем ближе к субширотному, чем меньше экваториальное сжатие эллипсоида.
3. Для исследования поверхностей небесных тел с точки зрения соотношения площадей различных объектов и отклонения референц-поверхности от физической поверхности пригодны разработанные *равновеликие проекции*.

Степень достоверности. Корректность полученных конечных формул проекций проверяется путём сравнения рассчитанных координат с результатами вычислений определённых интегралов, входящих в эти формулы, численными методами. Также для контроля правильности формул используется тот факт, что азимутальные проекции являются частным случаем, а цилиндрические – предельным случаем конических проекций. Выводы о распределении искажений в проекциях, сделанные по построенным изоколам, проверяются путём оценки искажений на примере отдельных форм рельефа и их сопоставления с составленными фотокартами и гипсометрическими картами небесных тел.

Апробация работы. Результаты исследования были представлены на международных конференциях: «*Practical Geography and XXI Century Challenges*» (Москва, 2018), «*14th Moscow International Solar System Symposium*» (Москва, 2023),

«15th Moscow International Solar System Symposium» (Москва, 2024), «Lunar and Planetary Science Conference» (Вудлендс, 2025).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 научных работ, в том числе 6 статей в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базе ядра Российского индекса научного цитирования «eLibrary Science Index». Во всех работах вклад автора является существенным. Постановка научных задач, вывод формул, подготовка текста и иллюстраций, включая карты, осуществлялись при активном участии соискателя. При подготовке текста диссертации использован текст всех 6 публикаций, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базе ядра Российского индекса научного цитирования «eLibrary Science Index»:

1. **Sokolov A.I., Nyrtsov M.V., Fleis M.E., Nadezhkina I.E.** Investigation and cartographic representation of Hyperion space images photogrammetric processing results // Planetary and Space Science. – 2024. – Vol. 249. – 105945. EDN: GYXPGD / 0,41 п.л. *Импакт-фактор 1,800 (JIF). Вклад соискателя 60%.*

2. **Соколов А.И., Надеждина И.Е., Нырцов М.В., Зубарев А.Э., Флейс М.Э., Козлова Н.А.** Картографирование Гипериона в проекциях трехосного эллипсоида на основе новой опорной сети и цифровой модели рельефа // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. – 2024. – Т. 58. – № 1. – С. 118-128. EDN: OGQNVN / 0,59 п.л. *Импакт-фактор 1,136 (РИНЦ). Вклад соискателя 60%. [Англоязычная версия: Sokolov A.I., Nadezhkina I.E., Nyrtsov M.V., Zubarev A.E., Fleis M.E., Kozlova N.A. Mapping Hyperion in Projections of the Triaxial Ellipsoid Based on a New Reference Network and a Digital Terrain Model // Solar System Research. – 2024. – Vol. 58. – No. 1. – pp. 112-121. EDN: PCXXAT / 0,59 п.л. Импакт-фактор 0,600 (JIF). Вклад соискателя 60%.]*

3. **Fleis M.E., Nyrtsov M.V., Sokolov A.I., Stooke P.J.** Errors in the Introduction of Isometric Coordinates and Violation of the Property of Conformality of the Triaxial Ellipsoid Projections // Cartographica. – 2024. – Vol. 59. – No. 2. – pp. 67-76. EDN: HTVHZI / 0,59 п.л. *Импакт-фактор 0,700 (JIF). Вклад соискателя 30%.*

4. *Флейс М.Э., Нырцов М.В., Соколов А.И.* Цилиндрические проекции трёхосного эллипсоида: точные формулы и эллиптические интегралы // Геодезия и картография. – 2022.– № 4. – С. 26-38. EDN: FVLKFG / 0,81 п.л. *Импакт-фактор 0,225 (SJR). Вклад соискателя 30%.*

5. *Нырцов М.В., Флейс М.Э., Соколов А.И.* Проекция меридианного сечения: новый класс проекций для трёхосного эллипсоида // Геодезия и картография. – 2021.– № 2. – С. 11-22. EDN: XHPCZT / 0,75 п.л. *Импакт-фактор 0,225 (SJR). Вклад соискателя 30%.*

6. *Флейс М.Э., Нырцов М.В., Борисов М.М., Соколов А.И.* Точное определение геодезических высот точек небесного тела относительно трёхосного эллипсоида // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 486. – № 4. – С. 489-493. EDN: WNMDFW / 0,35 п.л. *Импакт-фактор 1,370 (РИНЦ). Вклад соискателя 20%.* [Англоязычная версия: *Fleis M.E., Nyrtsov M.V., Borisov M.M., Sokolov A.I.* Accurate calculation of geodetic heights of a celestial body's surface points relative to the triaxial ellipsoid // Doklady Earth Sciences. – 2019. – Vol. 486. – No. 2. – pp. 663-668. EDN: FANVUF / 0,35 п.л. *Импакт-фактор 0,700 (JIF). Вклад соискателя 20%.*].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Работа включает 31 рисунок и 7 таблиц. Объём диссертации составляет 160 страниц, основной текст изложен на 107 страницах. Список литературы содержит 102 наименования, в том числе 48 – на иностранном языке.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору РАН, д.т.н. М.В. Нырцову за научное руководство и за неоценимую помощь при планировании и осуществлении исследования. Также автор благодарен с.н.с. Института географии РАН, к.т.н. М.Э. Флейс за ценные консультации, сотрудникам кафедры картографии и геоинформатики доц., к.г.н. Н.А. Алексеенко, в.н.с., к.г.н. С.М. Кошелю, в.н.с., д.г.н. В.И. Кравцовой, в.н.с., д.г.н. Т.Е. Самсонову, с.н.с., к.г.н. А.Л. Энтину и всему коллективу кафедры за конструктивные замечания и важные советы в рамках аттестации работы.

ГЛАВА 1. КАРТОГРАФИРОВАНИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ В ПРОЕКЦИЯХ ТРЁХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

1.1. Карты небесных тел в равноугольных, равновеликих и произвольных проекциях

1.1.1. Некоторые особенности небесных тел как объектов картографирования

Диссертационное исследование посвящено отображению рельефа на картах поверхности и гипсометрических картах. Создание таких карт предполагается возможным для небесных тел, обладающих твёрдой поверхностью. Ещё одним ограничением является степень изученности небесного тела. Исходные данные, необходимые для составления карт поверхности и гипсометрических карт, как правило, получают в результате исследования небесных тел автоматическими межпланетными станциями (АМС). Основные цели полётов АМС – планеты земной группы, их спутники, околоземные астероиды, реже – планеты-гиганты, их спутники, астероиды главного пояса, кометы и другие объекты.

Основным содержанием карт поверхности и гипсометрических карт небесных тел чаще всего является рельеф, поскольку антропогенное воздействие на них минимизировано, а из других видимых элементов местности можно отметить разве что гидрографические объекты спутника Сатурна Титан (*Stofan et al., 2007*). Среди трудов, содержащих сведения о рельефе небесных тел, в качестве наиболее значимого отметим учебное пособие «Рельеф планетных тел» (*Лукашов, 1996*). Под *планетными телами* понимаются планеты и их расслоённые на оболочки шарообразные спутники. В пособии рассматриваются только те из них, которые имеют твёрдую, в том числе ледяную поверхность. Описываются типы рельефа планетных тел – кратерный (импактный), вулкано-тектонический, вулканический, флювиальный, гравитационный, гравитационно-тектонический, эоловый, рельеф полярных шапок.

Для небесных тел Солнечной системы, не являющихся планетными телами, может использоваться понятие *малые тела*. Они обладают неправильной фигурой, т.е. имеют вид обломка или глыбы. К ним относятся небольшие спутники планет, астероиды, кометы и малые объекты из пояса Койпера. Малые тела в силу своей

недостаточной массы так и не стали планетными телами (Слюта, Воронаев, 1993). Деление небесных тел Солнечной системы (исключая Солнце) на планетные тела и малые тела весьма удобно. Однако ситуацию осложняет данное в 2006 г. Международным астрономическим союзом определение, согласно которому к малым телам Солнечной системы относятся все небесные тела, кроме планет, карликовых планет и естественных спутников (*Resolutions adopted at the General Assemblies*, URL: https://www.iau.org/static/resolutions/Resolution_GA26-5-6.pdf). В соответствии с этим, небольшие спутники, не являющиеся планетными телами, не являются также и малыми телами.

Рельеф небольших спутников, астероидов, комет и других небесных тел Солнечной системы, не относящихся к планетным телам, отличается меньшим разнообразием. Вулканизм, а также вода и атмосферная циркуляция на них отсутствуют, поэтому основные рельефообразующие процессы для поверхностей таких небесных тел – ударное кратерообразование и гравитационные процессы. В статье (Лазарев и др., 2014) показывается, что среди тех форм рельефа планет земной группы и Луны, которым присвоены названия, наиболее распространены кратеры; с учётом вышесказанного, допустимо применение этого вывода и к небесным телам неправильной формы. Хотя форма ударного кратера (в геометрическом смысле, т.е. форма в плане) зависит от угла падения образовавшего его тела (ударника), большинство кратеров имеют округлую форму или близкую к таковой, поскольку образование кратера – процесс в большей степени взрывного, а не механического характера. Только удары под очень малым углом приводят к образованию кратеров эллиптической формы (Melosh, 1996). Помимо кратеров, для рассматриваемых небесных тел характерны равнины, гряды, борозды, области. Меньшее число присвоенных таким объектам названий может указывать на их меньшую распространённость, по сравнению с кратерами.

Также следует отметить особенности отсчёта высот для создания карт небесных тел. Определение высот для внеземных объектов представляет сложность по ряду причин. Уровенные поверхности планет и других крупных небесных тел Солнечной системы близки к эллипсоидам вращения, а их физические поверхности отличается от уровенных весьма незначительно. Однако для этих тел отсутствует вещественная уровенная поверхность (такая, как уровень моря, по которому

определяется земной геоид) (*Огородова и др., 2012*). Кроме того, современное состояние науки и техники не предполагает проведение массовых измерений на физической поверхности небесного тела. Таким образом, введение для небесных тел систем высот, подобных ортометрическим и нормальным, с одной стороны, практически неосуществимо, а с другой стороны, не является необходимым.

Ситуация усложняется, если мы имеем дело с небесными телами, имеющими нерегулярную фигуру, отличную от сферы и эллипсоида вращения. Наиболее часто для картографирования таких небесных тел используется трёхосный эллипсоид, однако даже он не всегда близок к физической поверхности; так, весьма распространены небесные тела, поверхность которых несимметрична относительно экватора и начального меридиана (*Огородова и др., 2012*). Уровенная поверхность небесных тел неправильной формы сложна, и её нельзя описать простым аналитическим выражением. Поэтому в качестве поверхности отсчёта высот для таких тел применяется трёхосный эллипсоид (*Melosh, 2011*). В частности, при построении цифровой модели рельефа Фобоса по результатам его телевизионных исследований с АМС «Фобос» в 1989 году высоты отсчитывались от трёхосного эллипсоида с полуосями $a = 13,5$ км, $b = 10,7$ км и $c = 9,6$ км (*Аванесов и др., 1994*).

При исследовании небесных тел с АМС информация о высотах обычно представляется в виде длин радиус-векторов. Радиус-вектор – отрезок, соединяющий центр масс тела и точку на его поверхности, которая имеет определённые планетоцентрические координаты – широту и долготу. «Высота» может быть вычислена как разность длин двух радиус-векторов: к точке физической поверхности и к соответствующей точке отсчётной поверхности. Обращаясь вновь к телевизионным исследованиям Фобоса, отметим, что высоты над трёхосным эллипсоидом отсчитывались именно по радиус-векторам (*Аванесов и др., 1994*). Однако в статье (*Огородова и др., 2012*) указывается, что такая величина не может считаться высотой, поскольку она не определяет расстояние между уровенными поверхностями, проходящими через точку физической поверхности и точку с теми же координатами на отсчётной поверхности.

Расстояние между уровенными поверхностями (которые параллельны между собой) определяется длиной перпендикуляра к любой из них. Таким

образом, в качестве высот целесообразно использовать превышения физической поверхности над отсчётной поверхностью не по радиус-векторам, а по нормальям к отсчётной поверхности. Для Земли высоты, отсчитываемые по нормальям к эллипсоиду вращения, называют геодезическими. Ортометрические и нормальные высоты также отсчитываются по нормальям к эллипсоиду вращения, но отсчётными поверхностями для них являются геоид и квазигеоид соответственно. Один из возможных способов вычисления высот по нормальям к трёхосному эллипсоиду основан на методе приближений (*Огородова и др., 2012*). Другой способ, предоставляющий возможность точного определения геодезических высот (*Флейс и др., 2019*), разработан М.Э. Флейс, М.В. Нырцовым и М.М. Борисовым совместно с автором диссертации.

Таким образом, важная особенность рельефа внеземных объектов – преобладание кратеров в облике местности вследствие ведущей роли процесса кратерообразования. Это обуславливает значимость исследования кратеров, в том числе с помощью карт. Отсутствие вещественной уровенной поверхности и невозможность непосредственного измерения высот приводит к необходимости использования референц-поверхности в качестве уровенной. Для тел с нерегулярной фигурой такой поверхностью может быть трёхосный эллипсоид.

1.1.2. Карты небесных тел в различных проекциях

Картографирование небесных тел осуществлялось по результатам телескопических наблюдений с XVII в. Первые карты небесных тел, детали поверхностей которых можно различить при использовании телескопов, составлялись в тех же проекциях, что и для Земли. Для карт мира до XIX века нередко использовалась знаменитая *равноугольная цилиндрическая проекция Меркатора*, изначально предназначенная для морской навигации. Она была впервые представлена фламандским картографом Г. Меркатором в 1569 году без объяснения способа построения. Математические выкладки были опубликованы лишь к середине XVII века (*Monmonier, 2004*). В первоначальном варианте это была проекция сферы, поскольку теоретическое обоснование полярного сжатия Земли и параметры земного сфероида стали известны несколько позднее. Склонность к использованию проекции Меркатора проявилась и для первых карт ближайших к нам космических объектов. В качестве примера можно привести

карты Марса, составленные итальянским астрономом Джованни Скиапарелли по наблюдениям во время великого противостояния 1877 г. и последующих противостояний. Для этих карт Дж. Скиапарелли использовал проекцию Меркатора и *азимутальную стереографическую проекцию*. Одна из карт представлена на рисунке 1 (*Mars Maps by Schiaparelli (1877-1890)*, URL: https://planetarymapping.elte.hu/wp-content/uploads/2016/02/schiaparelli__1881.jpg). Отметим, что карта ориентирована в соответствии с тем, как наблюдалось изображение в телескоп – южный полюс находится сверху.

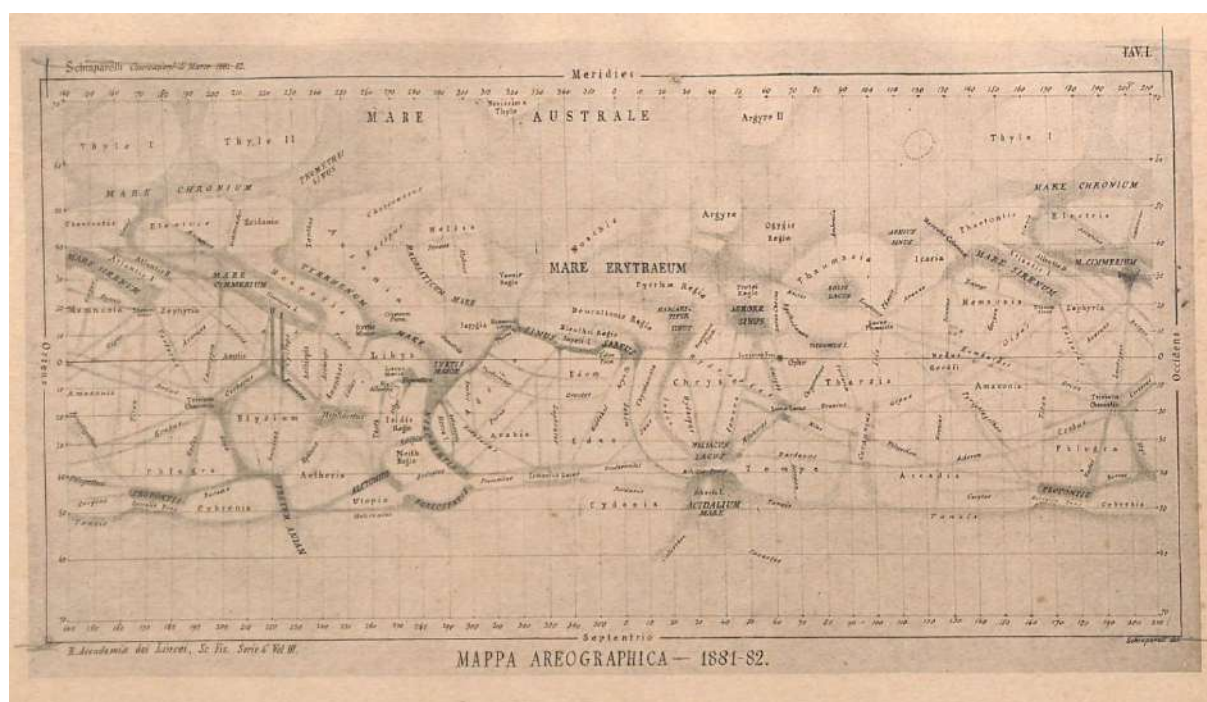


Рисунок 1. Карта Марса в проекции Меркатора, составленная Дж. Скиапарелли

Начало космической эры открыло новый этап в исследовании внеземных объектов. Уже в 1959 г. советской АМС «Луна-3» были получены снимки обратной стороны Луны, что сделало этот спутник первым внеземным объектом космического картографирования (Родионова и др., 2022). Составленная по этим изображениям карта (в *поперечной ортографической проекции*) показана на рисунке 2 (*International Catalog of Planetary Maps*, URL: <https://planetarymapping.elte.hu/wp-content/uploads/2015/11/lipsky1960.jpg>). Первый в мире «Атлас обратной стороны Луны» (Барабашов, 1960) был также составлен и опубликован в СССР. В последующие годы полёты АМС к планетам земной группы – Меркурию, Венере, Марсу – позволяют получить изображения и составить первые карты этих небесных тел.

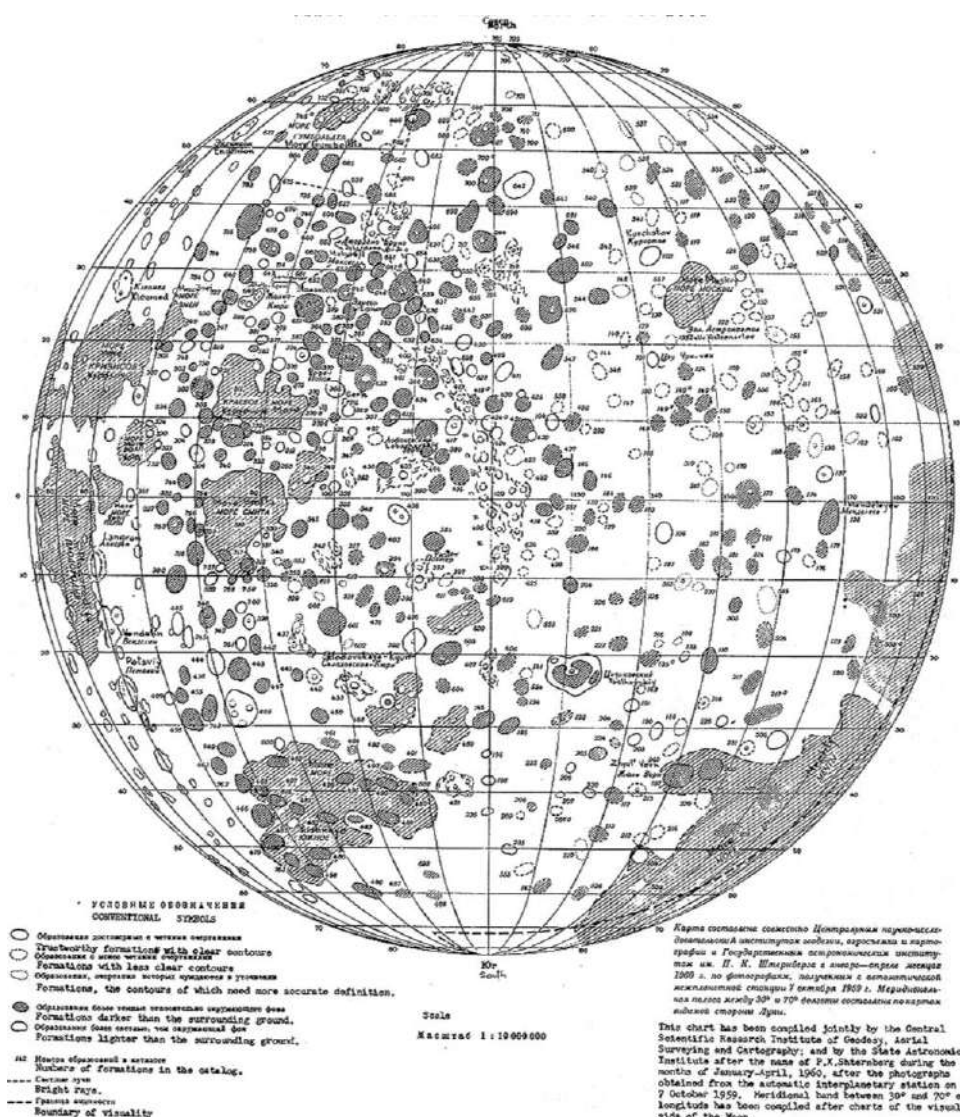


Рисунок 2. Карта обратной стороны Луны (International Catalog of Planetary Maps, URL: <https://planetarymapping.elte.hu/wp-content/uploads/2015/11/lipsky1960.jpg>)

Таким образом, в последние три десятилетия XX века происходил рост степени изученности небесных тел, в первую очередь планет земной группы и их спутников. Появление подробных сведений о различных характеристиках исследуемых объектов способствовало увеличению масштаба картографирования. Следует отметить, что для крупномасштабных карт предпочтительными являются *равноугольные проекции* (Гинзбург и др., 1955). Б.Б. Серапинас указывает на тенденцию их использования при масштабах 1:1 000 000 и крупнее (в случае карт земной поверхности) (Серапинас, 2005). Для топографических карт разных стран также постепенно были введены равноугольные проекции. Так, для карт СССР в 1928 г. решено использовать проекцию Гаусса-Крюгера (Гинзбург и др., 1955), для карт США несколько позднее принята проекция UTM (Snyder, 1987).

Продолжением указанной тенденции является ввод равноугольных проекций для карт поверхностей планет земной группы и Луны. В частности, поверхность Марса была разделена геологической службой США на 30 частей: 16 в приэкваториальных широтах, 12 в средних и 2 в приполярных. В этих диапазонах широт используются проекция Меркатора, *равноугольная коническая проекция Ламберта* и азимутальная стереографическая проекция (*Map of Mars*, URL: <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA03467>). В случае других небесных тел принцип разграфки и набор проекций аналогичный. Введение такой системы для карт поверхности способствовало использованию равноугольных проекций и при составлении тематических карт, в частности, геологических. Отметим, что для геологических карт Земли принято заимствовать математическую основу топографических карт – аналогичный процесс наблюдается и в картографировании внеземных объектов. На рисунке 3 представлен лист геологической карты области Дискавери (Discovery) на поверхности Меркурия (*Geologic map of the Discovery Quadrangle of Mercury*, URL: <https://pubs.usgs.gov/imap/1658/plate-1.pdf>) в равноугольной конической проекции Ламберта.

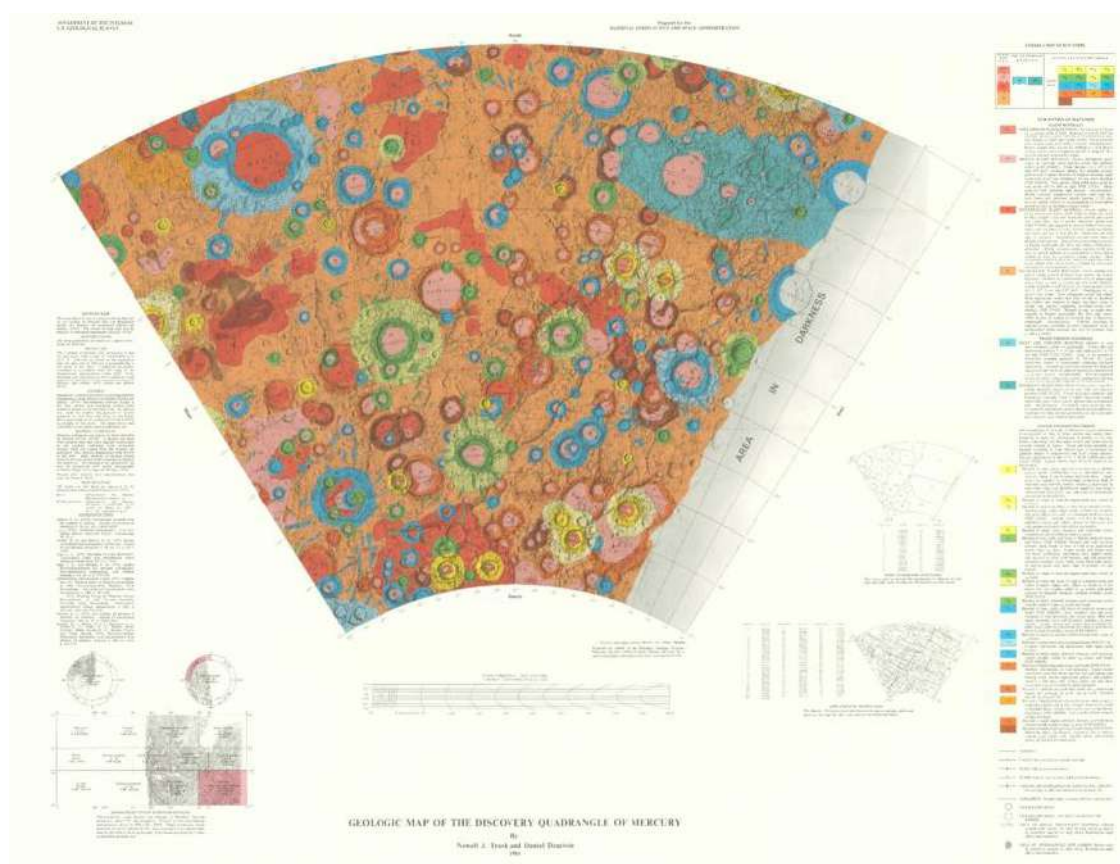
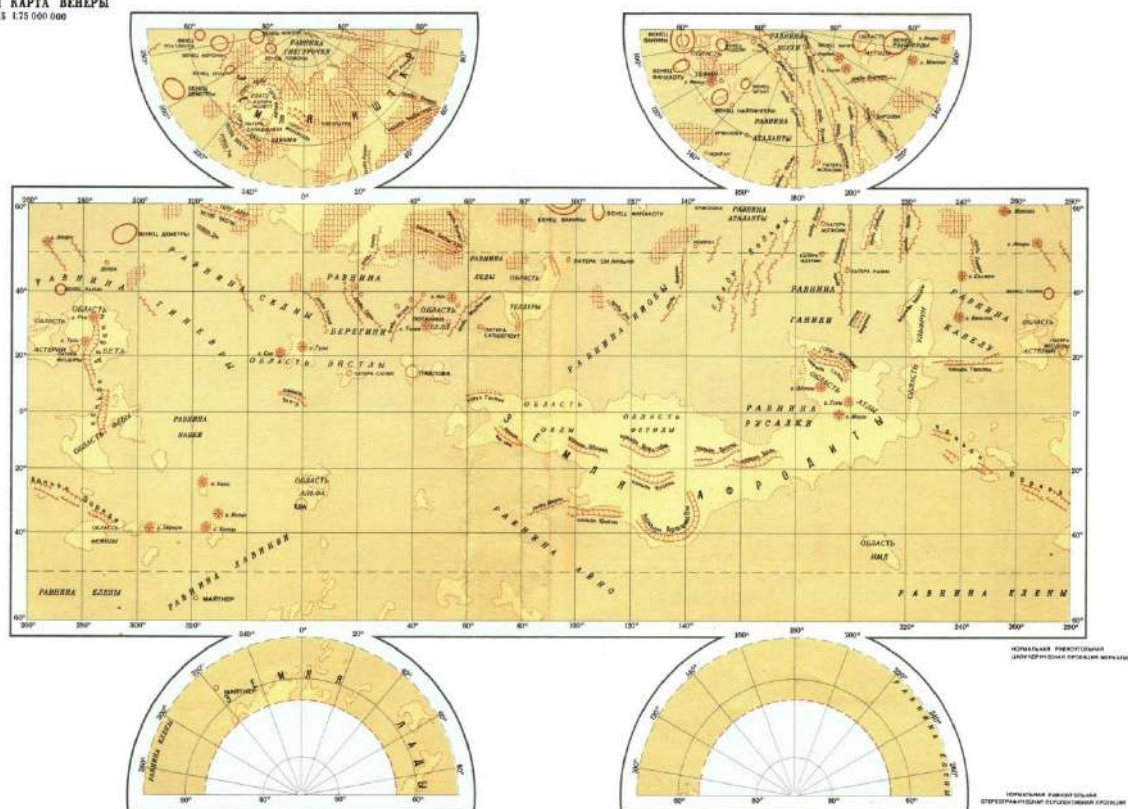


Рисунок 3. Лист геологической карты Меркурия (*Geologic map of the Discovery Quadrangle of Mercury*, URL: <https://pubs.usgs.gov/imap/1658/plate-1.pdf>)

3. БЛАНКОВАЯ КАРТА ВЕНЕРЫ
МАСШТАБ 1:75 000 000



18

В «Атласе Фобоса» (2015) проекция Меркатора и азимутальная стереографическая проекция используются для многолистной базовой карты поверхности и для гипсометрической карты, а рельеф отдельных кратеров показывается в *косой стереографической проекции*. Обзорная карта поверхности в этом атласе составлена в «*простой цилиндрической*» (*равнопромежуточной вдоль меридианов квадратной цилиндрической*) проекции сферы. Вообще, использование сферы для атласного картографирования этого небесного тела видится не вполне корректным. Однако такое решение было принято вследствие недоступности проекций трёхосного эллипсоида в наиболее распространённых ГИС-пакетах, а одна из главных причин этого – сложность расчётных формул.

Таким образом, наиболее часто используются при составлении карт небесных тел проекция Меркатора, азимутальная стереографическая проекция и поперечная равновеликая азимутальная проекция Ламберта. Система разграфки карт регионального охвата предполагает использование равноугольных проекций – цилиндрической, азимутальной и конической. В последнее время большее распространение получает равнопромежуточная вдоль меридианов квадратная цилиндрическая проекция.

1.1.3. Особенности выбора проекций для карт небесных тел

Приведённые выше примеры показывают, что карты поверхности и гипсометрические карты могут составляться в различных по характеру искажений проекциях, т.е. связи выбора проекции с содержанием карты небесного тела практически не наблюдается. Так, в «Атласе планет земной группы и их спутников» для гипсометрических карт используется равновеликая проекция, а в «Атласе Фобоса» – равноугольная. Поэтому для обоснования выбора проекций обратимся к «Атласу для выбора картографических проекций» (Гинзбург, Салманова, 1957). Рекомендации в этом атласе разработаны с учётом важности минимизации искажений разных типов на картах различного содержания. Основные типы искажений – искажения площадей, углов, длин и форм. Искажения площадей отсутствуют в равновеликих проекциях, искажения углов – в равноугольных проекциях, другие два типа искажений присутствуют во всех проекциях. Рекомендации в атласе даны для земных карт, однако в большинстве случаев они могут быть распространены и на другие небесные тела, поскольку

принцип отображения объектов на карте не изменяется. При этом необходимо учитывать возможные различия в содержании карт Земли и внеземных объектов.

Для гипсометрических карт в «Атласе для выбора картографических проекций» рекомендуются проекции, по характеру искажений занимающие место посередине между равнопромежуточными и равновеликими (*Гинзбург, Салманова, 1957*). В этом случае присутствует необходимость сохранения площадей, занятых различными высотными уровнями, не пренебрегая полностью искажениями других видов. Эта необходимость не зависит от уровенной поверхности и способа расчёта высот, поэтому далее в диссертационном исследовании будем исходить из того, что рекомендация может быть распространена на другие небесные тела.

Для общегеографических карт, особенно обзорных, в «Атласе для выбора картографических проекций» признаётся важным передать как формы, так и площади с наименьшими искажениями. В диссертационном исследовании при рассмотрении карт поверхности основной акцент делается на сохранении очертаний и форм объектов, поскольку предполагается, что это более значимо для представления научной информации о небесном теле и формирования впечатления об устройстве его поверхности. В этом случае рекомендуется применять проекции, в которых минимизированы или полностью устранены искажения углов (*Гинзбург, Салманова, 1957*).

Также при выборе проекций в диссертационном исследовании предполагается, что для представления научной информации о небесном теле наиболее удобны карты глобального и регионального охвата. В соответствии с этим при анализе свойств проекций и их влияния на отображение рельефа из рассмотрения исключаются мелкие кратеры, валуны и другие формы рельефа, имеющие небольшие размеры.

1.2. Обзор разработки и исследования проекций трёхосного эллипсоида

1.2.1. Несферические небесные тела

Необходимость использования различных референц-поверхностей и разработки их проекций становилась результатом развития представлений о фигурах небесных тел. Так, о шарообразности Земли было известно ещё с

античных времён (*Щетников, 2012*). В XVII веке И. Ньютон первым установил, что сферическая жидкая Земля под воздействием гравитационных и центробежных сил должна преобразоваться в слегка сжатый у полюсов сфероид вращения. К середине XIX века теоретические исследования математиков К. Маклорена и К. Якоби показали, что фигурами равновесия вращающейся однородной жидкости могут быть сжатые эллипсоиды вращения и трёхосные эллипсоиды (*Ляпунов, 1930; Chandrasekhar, 1969*). Это неявно указывало, что и в действительности небесные тела способны принимать подобную форму в результате эволюции. Наблюдения подтверждали такие предположения: даже в телескоп при достаточном увеличении заметно, что Юпитер и Сатурн сплюснуты у полюсов (*Холшевиков, 2008*).

Однако в XX веке распространились несколько иные представления. Как утверждал И.Д. Лукашевич, шарообразная форма Земли не является доказательством того, что она была когда-то в жидком состоянии. Он подчёркивал, что в «столь больших накоплениях материи, как наш земной шар, силы, зависящие от гравитации материи, по закону Ньютона, достигают огромного напряжения и дают место явлениям, которые носят название процессов планетарных» (*Лукашевич, 1911*). Таким образом, начинает преобладать гравитационная гипотеза, согласно которой, шарообразная равновесная форма тела – результат преобразования неравновесной фигуры твёрдого упругого тела под воздействием его собственной массы. «Форма Земли, сферическая или эллипсоидальная, близкая к шарообразной, для своего объяснения не нуждается в каком-либо обосновании теорией происхождения нашей планеты. Независимо от какой бы то ни было теории Земля при данной своей величине должна принять эту форму и на ней не могут не начаться геотектонические явления» (*Личков, 1965*).

К этому времени уже было хорошо известно, что метеориты и астероиды тесно связаны и имеют угловатую, а не шарообразную форму. Небольшие астероиды представляют собой гигантские метеориты, а крупные метеориты являются малыми астероидами. Но уже становилось очевидным, что если между метеоритами и астероидами никакой границы не было, то между астероидами и планетами такая граница должна быть явной. Заключается она в «планетарности», отличающей планеты от астероидов, которые «...представляют собой глыбы или камни в десятки и более километров в поперечнике» (*Кринов, 1951*). Таким

образом, возникает проблема границы между планетами и астероидами, или, в соответствии с понятиями, рассмотренными в разделе 1.1.1, между планетными телами и малыми телами.

Накопление сведений, полученных в ходе дистанционного зондирования с космических аппаратов, привело к осознанию того, что математические поверхности сферы или эллипсоида вращения не всегда корректно аппроксимируют фигуры небольших спутников и астероидов. Так, канадский учёный Ф. Стук установил, что для небесных тел, у которых разница в осях составляет более 10%, необходимо применять поверхности, отличающиеся от сферы (*Stooke, 1986*). К концу 80-х годов XX века было установлено, что астероиды и небольшие спутники, в отличие от планет, имеют неравновесную фигуру, которая может быть аппроксимирована *трёхосным эллипсоидом* (*Thomas, 1989*). На фундаментальное структурное и эволюционное различие между планетными и малыми телами также указывало то, что зависимость перепадов высот поверхности от размера тела была разной: прямо пропорциональной для тел с неправильной фигурой и, напротив, обратно пропорциональной для планет (*Croft, 1992*).

Первым из несферических тел, изображения поверхности которого были получены космическим аппаратом, стал спутник Марса Фобос (*Нырцов и др., 2012*). Изучение фигуры Фобоса показало, что предпочтительно аппроксимировать его трёхосным эллипсоидом (*Duxbury, 1974*), размеры полуосей которого могут различаться: в ранних исследованиях использовались значения 13,5, 10,7 и 9,6 км (*Аванесов и др., 1994*), тогда как при создании современного атласа Фобоса – 13,24, 11,49 и 9,48 км (*Karachevtseva et al., 2019*). В конце 80-х гг. появляются рекомендации Международного астрономического союза (МАС) по выбору референц-поверхностей для картографирования планет и спутников, основанные на исследованиях их фигуры и геологического строения (*Тюфлин, 1986*). Трёхосный эллипсоид рекомендуется для спутников Марса, а также для некоторых спутников Юпитера и Сатурна.

По современным представлениям, параметры фигуры таких небесных тел (сплюснутость, вытянутость) зависят от их химического и минерального состава. Е.Н. Слюта выделяет пять групп малых тел, для каждой из которых имеется своя граница (критический радиус) перехода к планетному телу (*Слюта, 2014*):

койперовские объекты; ледяные тела; силикатные тела, состоящие из углистых хондритов; силикатные тела, состоящие из обыкновенных хондритов; металлические тела (класс железных метеоритов). Наблюдается явная корреляция формы силикатных тел в зависимости от их прочности, т.е. чем меньше прочность – тем меньше вытянутость фигуры по длинной оси (Слюта, 2013). Отсутствует зависимость сферичности малых тел от их массы, причём это характерно для тел любого состава – от ледяных до металлических (Слюта, 2014). Отметим, что Е.Н. Слюта указывает на характерное для планетных тел соотношение полуосей – более 0,9, что согласуется с исследованиями Ф. Стука.

Таким образом, при картографировании небесных тел, не являющихся планетными телами, целесообразно использовать трёхосный эллипсоид, поскольку фигуры этих тел не являются равновесными и чаще всего далеки от сферы и эллипсоида вращения. Это обуславливает практическую значимость задачи получения *проекций трёхосного эллипсоида*. Далее в диссертации понятие «малые тела» не используется во избежание противоречий с определением МАС, о котором упоминалось в разделе 1.1.1. Однако предполагается, что проекции трёхосного эллипсоида предназначены именно для таких тел, а их применение для картографирования планетных тел избыточно ввиду незначительных отличий этих тел от сферы и эллипсоида вращения.

1.2.2. История разработки проекций трёхосного эллипсоида

По характеру искажений картографические проекции подразделяются на *равновеликие, равноугольные и произвольные*; среди последних выделяются *равнопромежуточные* проекции. При разработке проекций для трёхосного эллипсоида исследователи чаще всего старались получить проекции с аналогичными свойствами, однако возможны и иные подходы.

Получение *равноугольных проекций* является приложением более общей математической теории, рассматривающей конформные отображения, которые сохраняют углы между кривыми. Значительный вклад в развитие этой теории внёс немецкий математик и геодезист К.Ф. Гаусс (Гаусс, 1958). Равноугольное отображение поверхности трёхосного эллипсоида на плоскость исследовал немецкий математик К. Якоби (Якоби, 1936). Также следует отметить советского геодезиста Г.А. Мещерякова, рассмотревшего *стереографические проекции*

произвольной поверхности (Мещеряков, 1968). Одним из периодов активной разработки равноугольных и близких к ним проекций трёхосного эллипсоида являются 80-е годы XX века.

В 1985 году американский картограф Дж. Снайдер получил приближённые формулы *равноугольной проекции трёхосного эллипсоида* с небольшим экваториальным и полярным сжатием (Snyder, 1985). Дж. Снайдер применил особый способ задания широты: параллели образуются сечением трёхосного эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости экватора, и представляют собой эллипсы. Для вычислений использовались тригонометрические ряды, коэффициенты которых рассчитывались методом наименьших квадратов. Меридианы в проекции несколько отличаются от прямолинейных (рисунок 5). Хотя полученная Снайдером проекция является строго равноугольной, использование её при картографировании различных небесных тел затруднительно. Для каждого трёхосного эллипсоида с конкретными значениями полуосей необходимо заново вычислять коэффициенты, входящие в формулы проекции, и проверять точность результата.

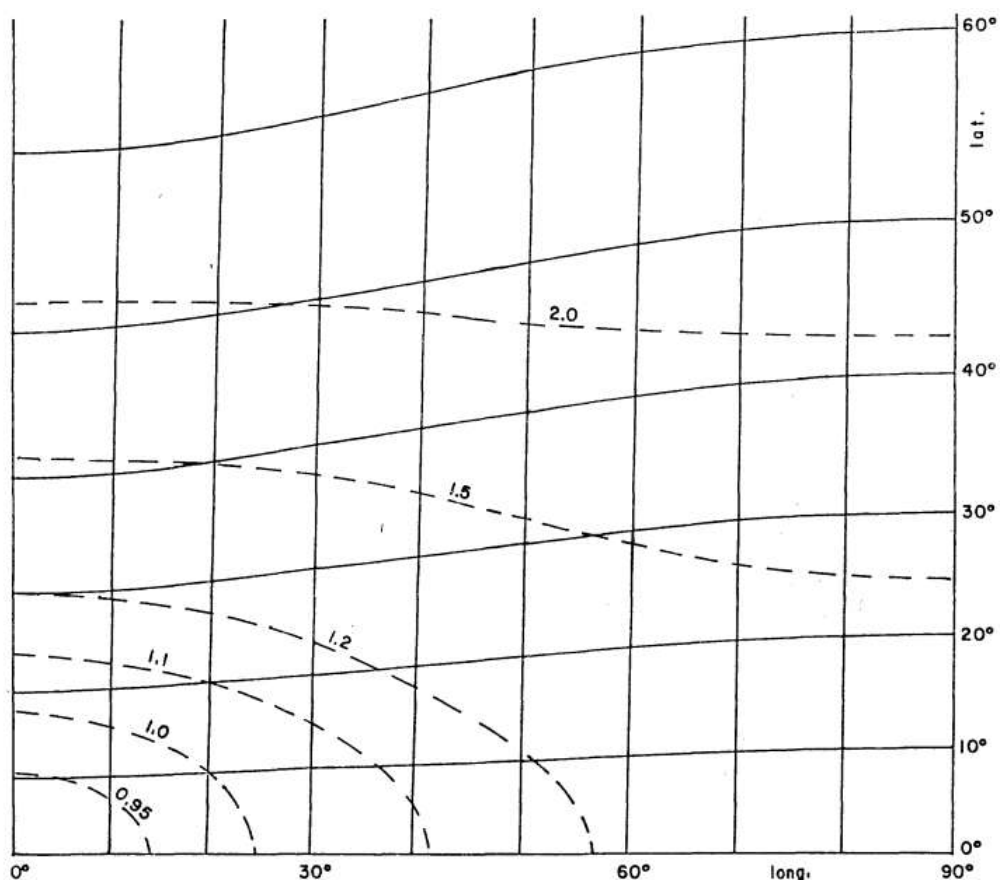


Рисунок 5. Фрагмент картографической сетки в равноугольной проекции Снайдера (Snyder, 1985; размеры полуосей условны: $a = 1$, $b = 0,8$, $c = 0,6$)

Также в 80-е годы равноугольным проекциям трёхосного эллипсоида были посвящены работы Б.Б. Серапиаса. Так, в его статье (*Серапиас, 1984*) отмечается, что для получения равноугольных проекций необходимы *изометрические координаты*, введение которых может оказаться проблематичным, особенно для эллипсоидов с большими значениями экваториального и полярного эксцентриситетов. Исходя из существования *равноугольной цилиндрической проекции* трёхосного эллипсоида, Б.Б. Серапиас предложил свой способ вывода такой проекции, основанный на пропорциональности коэффициентов Гаусса на эллипсоиде и на плоскости. Также в статье выводятся *равноугольная коническая и стереографическая проекции*.

Особое место в истории разработки равноугольных и близких к ним проекций занимают исследования Л.М. Бугаевского. В частности, этому вопросу посвящена его докторская диссертация (*Бугаевский, 1971*), где также говорится о необходимости рассмотрения *изометрических координат* для трёхосного эллипсоида и делается попытка ввести такие координаты. Основываясь на своих исследованиях, Л.М. Бугаевский предложил *цилиндрическую проекцию трёхосного эллипсоида* (*Бугаевский, 1987*), которая в то время считалась равноугольной. Продолжив изыскания в этом направлении, учёный получил формулы *конической и азимутальной проекций* (*Бугаевский, 1991*). Наиболее полно исследования Л.М. Бугаевского в области равноугольных проекций трёхосного эллипсоида отражены в его монографии (*Бугаевский, 1999*), где представлен вывод перечисленных и некоторых других проекций через изометрические координаты.

Предложенная Л.М. Бугаевским цилиндрическая проекция трёхосного эллипсоида была использована для карт Фобоса в «Атласе планет земной группы и их спутников» (*1992*). Помимо карты поверхности (рисунок 6), в этой проекции составлены гипсометрическая карта и бланковая карта Фобоса. Единообразная компоновка этих трёх карт была предложена К.Б. Шингарёвой. К центральной части карты, показывающей приэкваториальные и средние широты (до $\pm 60^\circ$), было добавлено изображение полярных территорий (от $\pm 40^\circ$ до $\pm 90^\circ$) в равнопромежуточной вдоль меридианов азимутальной проекции трёхосного эллипсоида. Таким образом, части карты были составлены в разных по характеру искажений проекциях.

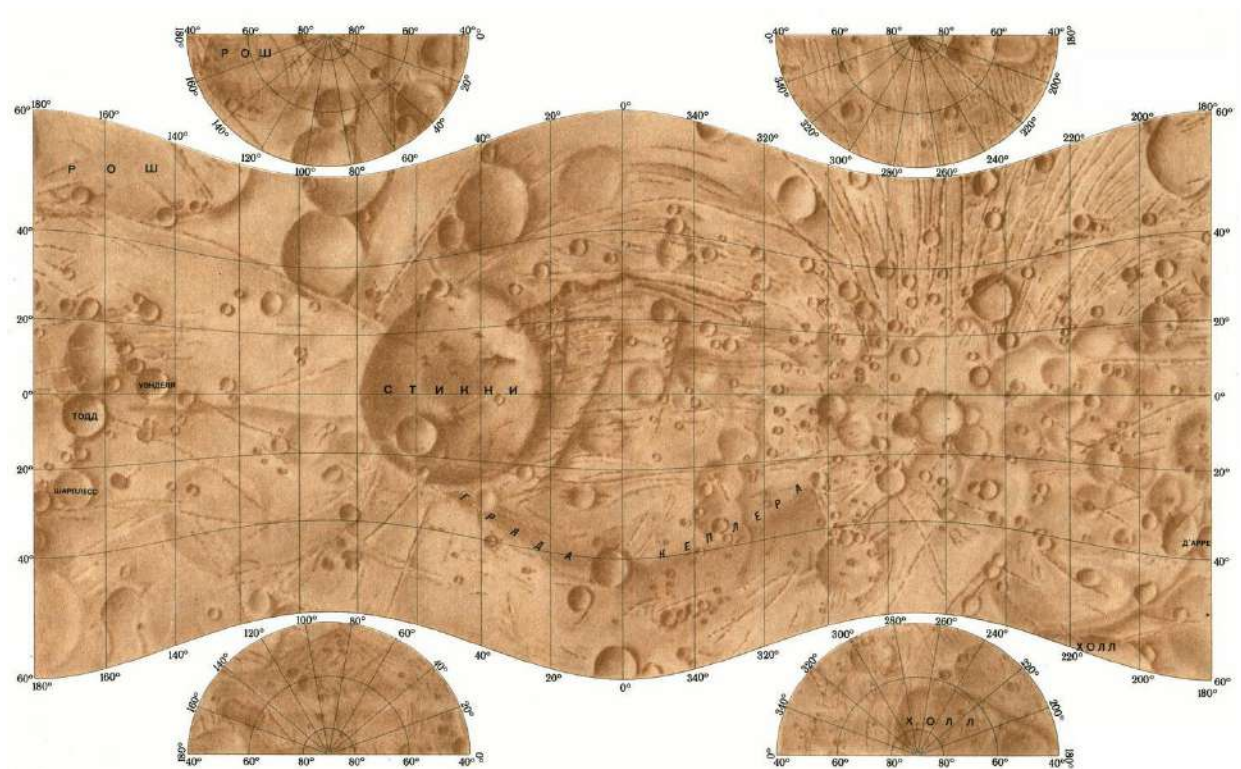


Рисунок 6. Карта поверхности Фобоса из «Атласа планет земной группы и их спутников» (1992)

В 2006 году цилиндрическая проекция Бугаевского была применена и для Деймоса при создании многоязыковой карты спутников Марса (*Серия многоязыковых карт планет Земной группы и их спутников*, URL: <http://planetmaps.ru/multilingual-planet-maps.html>), причём в той же компоновке. Модифицированная версия этой проекции была использована для «Атласа Фобоса» (2015). Новая карта составлена по данным, полученным с космического аппарата «Mars Express». Оригинальная компоновка была сохранена и в этом случае.

По мере углубления знаний о равноугольных и близких к ним проекциях трёхосного эллипсоида возрастал интерес картографов и к *равновеликим проекциям*, позволяющим отображать на карте без искажений площади любых объектов. В статье (*Cheng, Lorre, 2000*), посвящённой равновеликим проекциям для картографирования небесных тел с нерегулярной фигурой, условие сохранения площадей выводится с помощью коэффициентов Гаусса на аппроксимирующей поверхности, построенной авторами, и в плоскости проекции. Приводится интеграл для вычисления полярного расстояния в равновеликой азимутальной проекции. Утверждается, что этот интеграл не имеет аналитического выражения, далее полярное расстояние вычисляется численными методами. Также в статье

приводится координатная сетка полученной проекции (рисунок 7). Проекция используется для картографирования Фобоса и Деймоса. Отметим, что проекция является морфографической, поскольку длина радиус-вектора каждой точки цифровой модели фигуры входит в уравнения проекции.

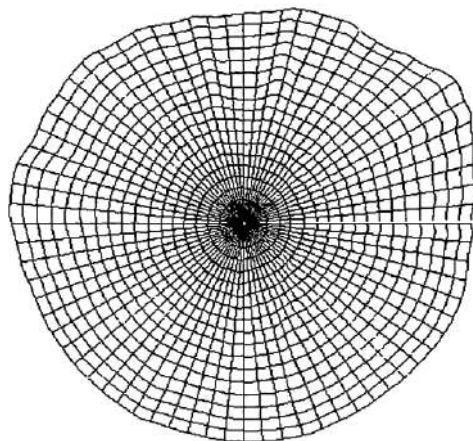


Рисунок 7. Картографическая сетка Фобоса (Cheng, Lorre, 2000)

Равновеликая проекция из статьи (Berthoud, 2005) также получена на основе азимутальной проекции и является морфографической. Она используется для картографирования кратеров на поверхности Эроса (рисунок 8). Искажения в проекции для этого небесного тела сравниваются с искажениями в «простой цилиндрической» проекции сферы.

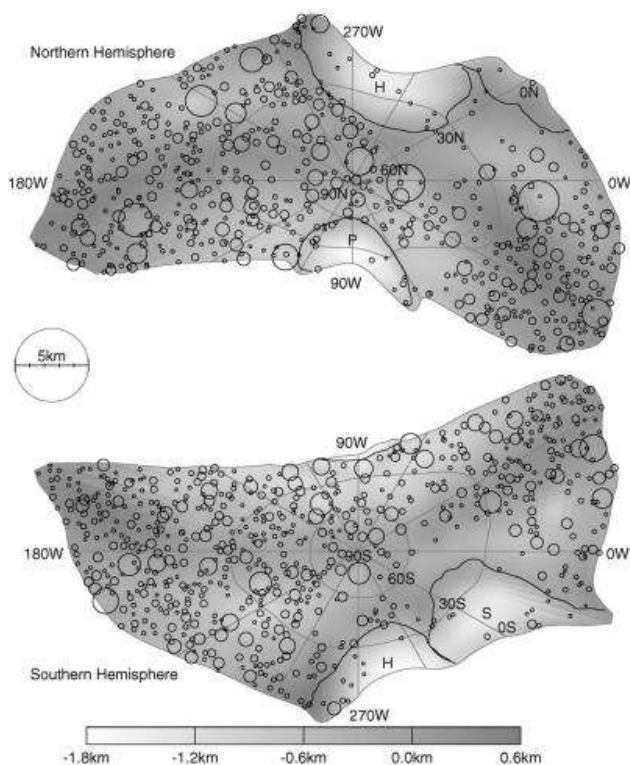


Рисунок 8. Кратеры Эроса в равновеликой проекции (Berthoud, 2005)

В начале ХХІ века трёхосный эллипсоид уже широко использовался для картографирования небесных тел (*Нырцов, 2009*). Этим можно объяснить новый период активной разработки равноугольных и близких к ним проекций этой математической поверхности, связанный с исследованиями М.В. Нырцова, М.Э. Флейс, М.М. Борисова и Ф. Стука. В их статье (*Флейс и др., 2015*) показывается, что полученные Л.М. Бугаевским и Б.Б. Серапиной цилиндрические проекции не являются строго равноугольными. Однако, как отмечают авторы статьи, проекция Бугаевского даёт хорошее представление о поверхности Фобоса в широтном поясе от -60° до $+60^\circ$, так как в окрестности каждого меридиана близка к равноугольной цилиндрической проекции эллипсоида вращения, соответствующего меридианному сечению.

Также авторами статьи (*Флейс и др., 2015*) было реализовано вычисление прямоугольных координат в различных проекциях трёхосного эллипсоида, включая проекцию Бугаевского. Алгоритм вычислений, основанный на квадратурной формуле Гаусса, работает и для эллипсоидов с большими значениями экваториального и полярного эксцентриситетов. В число реализованных входит и *равноугольная проекция* трёхосного эллипсоида, формулы которой были предложены К. Якоби ещё в ХІХ веке (*Якоби, 1936*). В этой проекции построена фотокарта поверхности астероида 25143 Итокава (*Nyrtsov et al., 2014*). Также авторами была составлена фотокарта поверхности астероида 433 Эрос в *проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью* (рисунок 9). Использование поперечной ориентировки и особенности трёхосного эллипсоида, аппроксимирующего фигуру этого астероида (малая экваториальная и полярная полуоси совпадают) превращают проекцию, по сути, в проекцию эллипсоида вращения, которая является равноугольной. В то же время, карты в проекциях, сохраняющих угол между меридианом и параллелью, в нормальной ориентировке дают плохое представление о картографируемом небесном теле (*Флейс и др., 2015*).

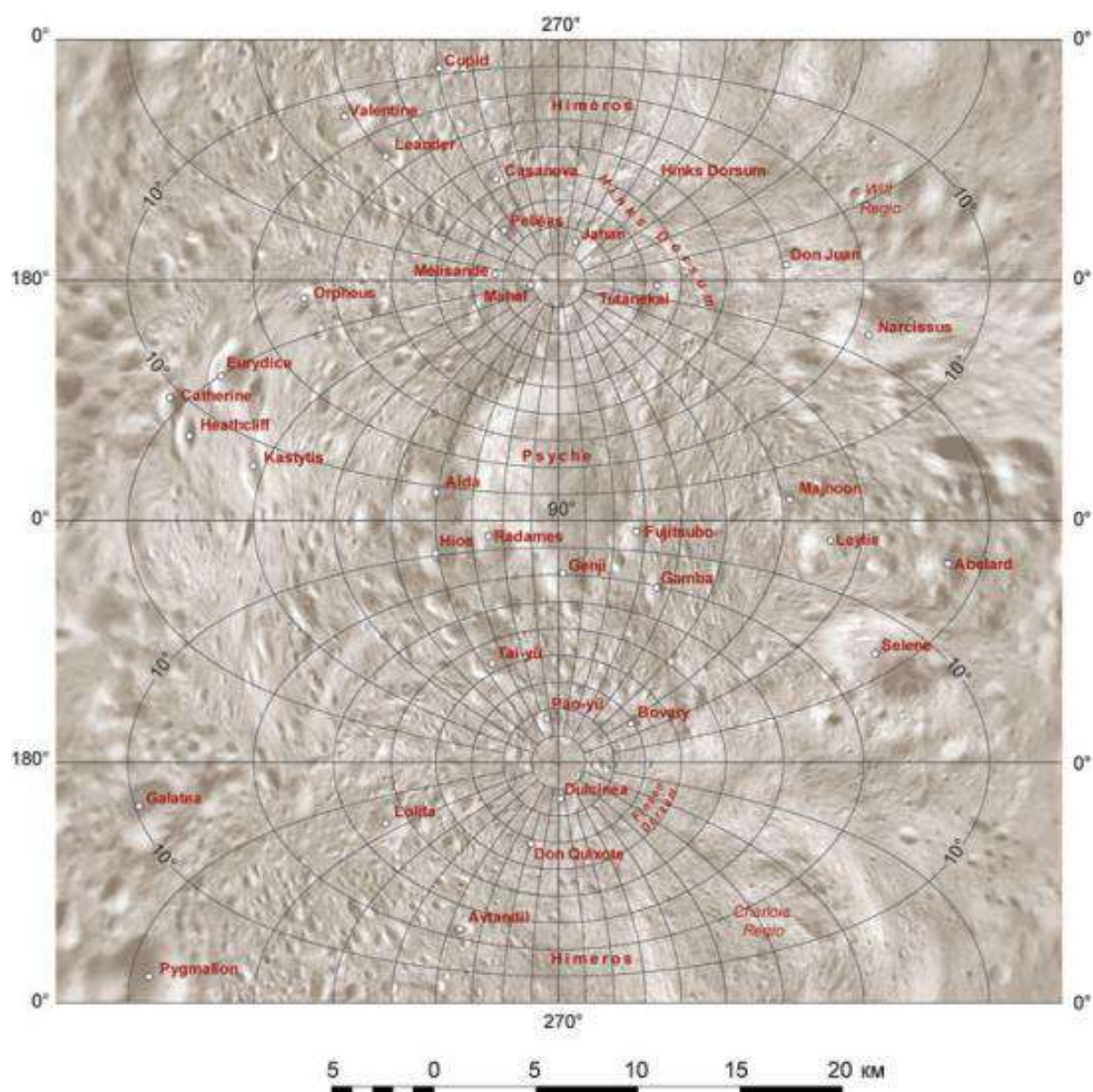


Рисунок 9. Фотокарта поверхности астероида 433 Эрос в цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью (Nyrtsov et al., 2014)

Коллектив авторов в составе М.В. Нырцова, М.Э. Флейс, М.М. Борисова и Ф. Стука внёс значительный вклад в разработку и иных по характеру искажений проекций трёхосного эллипсоида, в частности, равновеликих. В их статье (Nyrtsov et al., 2015) приводятся формулы *равновеликих проекций* (цилиндрической и азимутальной), а также выражения для расчёта различных показателей искажений в них. В этих проекциях составлена фотокарта астероида 253 Матильда. Цилиндрическая и азимутальная проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов, использованы при картографировании астероида 433 Эрос. В статье (Нырцов и др., 2012) приводится фотокарта поверхности этого небесного тела, а в статье (Флейс и

др., 2019) – гипсометрическая карта. В статье (Nyrtsov et al., 2017) предлагаются различные по характеру искажений *конические проекции*. Важнейшим результатом научных изысканий указанного коллектива авторов является создание учебного пособия (Нырцов и др., 2022), в котором обобщены знания о геометрии трёхосного эллипсоида и его картографических проекциях, как существующих, так и вновь разработанных.

Свою версию равноугольной проекции трёхосного эллипсоида для ограниченного участка поверхности небесного тела предложил польский геодезист П. Пендзих (Pędzich, 2019). Проекция использована для картографирования кратера Стикни на поверхности спутника Марса Фобос (рисунок 10). Условием получения проекции является отсутствие искажений на границе кратера.

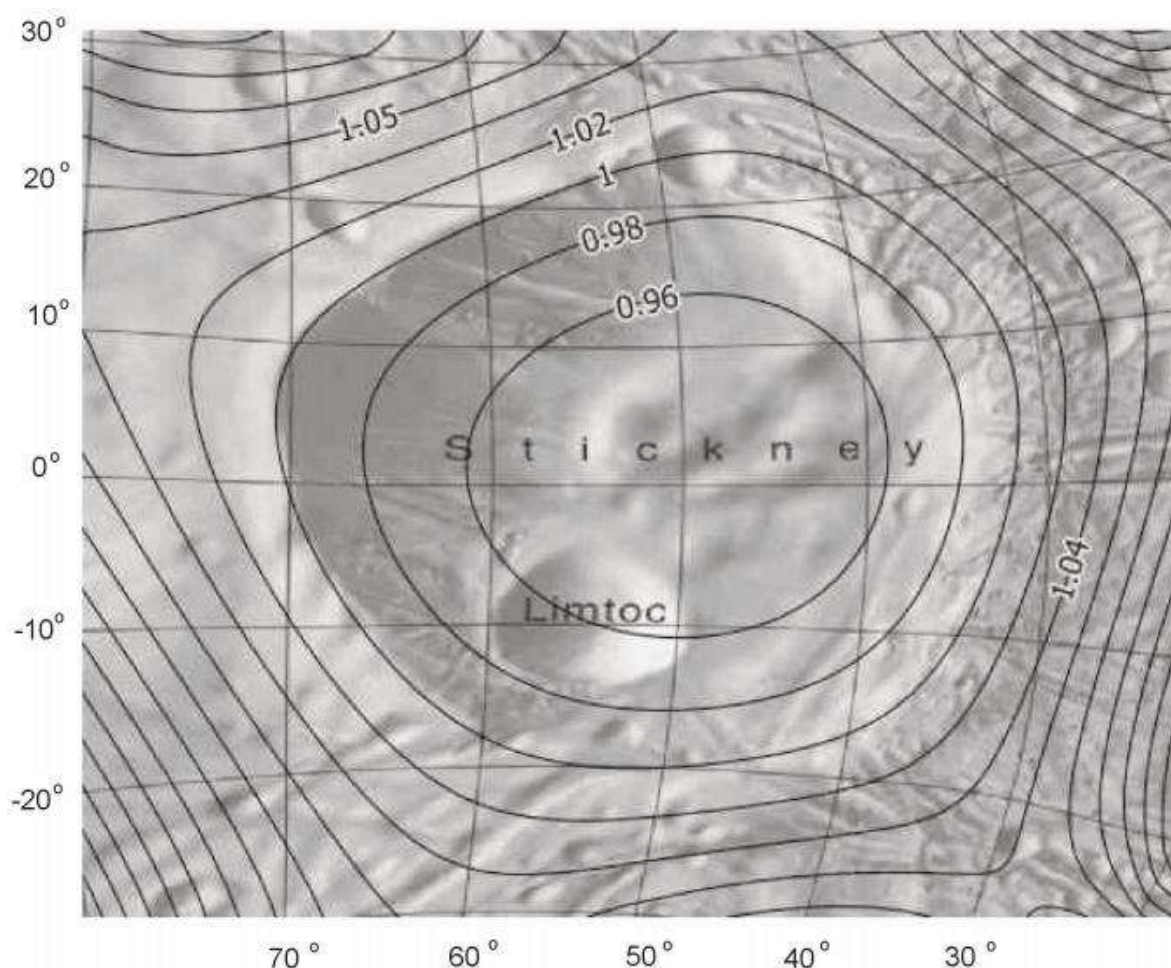


Рисунок 10. Изображение кратера Стикни в равноугольной проекции трёхосного эллипсоида для ограниченного участка поверхности (Pędzich, 2019)

В 2022 году П. Пендзих использовал координаты, введённые Л.М. Бугаевским и названные им *изометрическими*, и представил вновь «равноугольную» цилиндрическую проекцию трёхосного эллипсоида (Pędzich,

2022), ссылаясь на справедливость рассуждений Л.М. Бугаевского о соблюдении свойства равноугольности. В статье представлена картографическая сетка в полученной таким образом цилиндрической проекции, дополненная изолиниями линейных искажений. Также построена картографическая сетка в этой проекции с использованием предложенного автором коэффициента, позволяющего улучшить распределение искажений. В качестве исходных данных используются планетоцентрические координаты. Карт в этой проекции создано не было. В этой же статье П. Пендзих рассмотрел и другие проекции, полученные на основе «изометрических» координат по Бугаевскому.

Исследования П. Пендзиха также не ограничились равноугольными и близкими к ним проекциями. В его статье (*Pędzich, 2017*) представлен метод построения равнопромежуточных проекций трёхосного эллипсоида. При выводе использовались приведённые координаты, а уравнения проекций были выражены с помощью эллиптического интеграла 2-го рода и эллиптических функций Якоби. Приведены уравнения для трёх проекций: *цилиндрической, азимутальной и псевдоцилиндрической*. Кроме того, представлены сетки трёх систем координат (планетографической, планетоцентрической и приведённой) в разработанных проекциях, описаны их основные свойства. На рисунке 11 показана картографическая сетка в псевдоцилиндрической проекции.

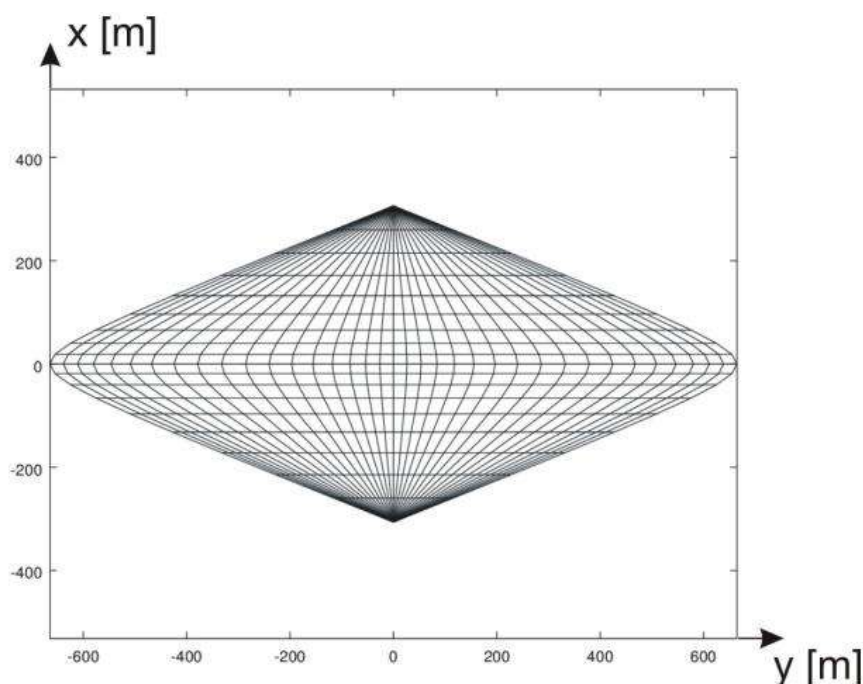


Рисунок 11. Картографическая сетка в равнопромежуточной псевдоцилиндрической проекции (*Pędzich, 2017*)

В ещё одной статье П. Пендзих представил метод построения *цилиндрических и азимутальных равновеликих проекций* трёхосного эллипсоида в приведённых координатах (рисунок 12), также основанный на вычислениях эллиптического интеграла 2-го рода и эллиптических функций Якоби (Pędzich, 2018). Представлены формулы для расчёта искажений в этих проекциях. Искажения площадей и длин отображены в виде изокол и эллипсов искажений. Указывается, что представленный метод может быть использован для расчёта площадей объектов на поверхности небесного тела. Расчёты проводились для трёхосного эллипсоида с полуосями $a = 267,5$ м, $b = 147$ м, $c = 104,5$ м, принятого в качестве референц-поверхности для астероида 25143 Итокава. Исследования П. Пендзиха, посвящённые равнопромежуточным и равновеликим проекциям трёхосного эллипсоида, дополняют и расширяют описанные выше разработки коллектива авторов в составе М.В. Нырцова, М.Э. Флейс, М.М. Борисова и Ф. Стука.

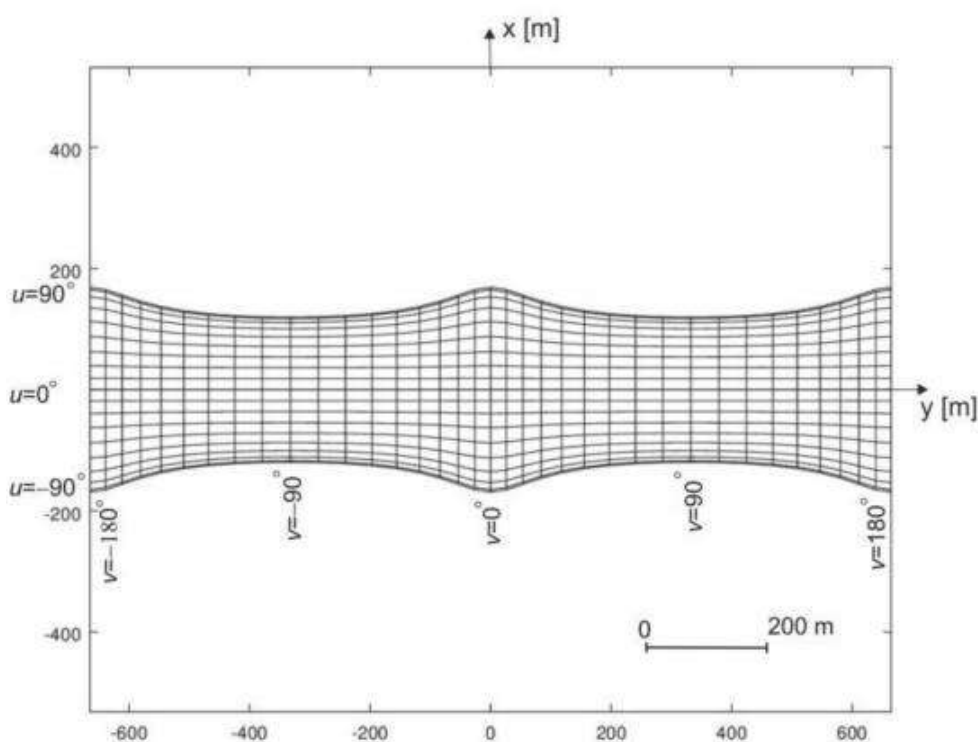


Рисунок 12. Картографическая сетка приведённых координат в равновеликой цилиндрической проекции (Pędzich, 2018)

Говоря о разработке проекций трёхосного эллипсоида, по характеру искажений относящихся к группе произвольных, следует упомянуть также *перспективные проекции*. Теория перспективных проекций трёхосного эллипсоида

была разработана А.В. Кондрачук (Кондрачук, 2008; 2009). Формулы предложенных проекций содержат тригонометрические функции и не требуют вычисления интегралов, что упрощает их практическое использование. На основании расчётов прямоугольных координат были построены варианты картографических сеток представленных в диссертации проекций для спутника Юпитера Амальтея, фигура которого аппроксимируется трёхосным эллипсоидом с полуосями $a = 135\,000$ м, $b = 85\,000$ м, $c = 77\,500$ м.

Таким образом, в начале XXI в. активно ведётся разработка проекций трёхосного эллипсоида с различным характером искажений. Однако проблемой остаётся отсутствие таких проекций в математических модулях распространённых ГИС-пакетов (Нырцов, 2017). Упомянутый ранее инструментарий по вычислению координат в проекциях трёхосного эллипсоида, основанный на квадратурных формулах Гаусса, в свободном доступе отсутствует. Поэтому при создании карт небесных тел часто выбирается более простой вариант (сфера или эллипсоид вращения), что делает карты менее точными, затрудняет измерения по ним; также такая карта может формировать искажённое представление об устройстве поверхности небесного тела.

1.2.3. Исследование проекций. Выбор наилучших проекций

Под *исследованием проекций* понимается определение их свойств, которые устанавливаются после получения формул отображающих функций и характеристик проекции в ходе решения прямой задачи математической картографии. Достоинством способов определения картографических проекций при решении прямой задачи является сравнительная простота используемого при этом математического аппарата (Вахрамеева и др., 1986). Это особенно важно в случае трёхосного эллипсоида, работа с которым сама по себе сопряжена с выполнением громоздких вычислений.

Свойства проекций – это, прежде всего, величины и распределение основных видов искажений (углов, площадей, длин и форм) по картографируемой поверхности. Особый характер имеет связь между искажениями углов и площадей: стремление уменьшить искажения площадей влечёт за собой увеличение искажений углов, и наоборот. Поэтому в равноугольных проекциях наблюдаются очень большие искажения площадей, а в равновеликих проекциях значительно

искажены углы (*Серпинас, 2005*). В проекциях могут быть точки или линии, в которых искажения отдельных или всех видов отсутствуют. Их называют точками и линиями нулевых искажений.

Искажения длин на карте выражаются в том, что частный масштаб длин меняется в каждой точке в зависимости от направления, а также от точки к точке. *Частный масштаб длин* представляет собой отношение длины бесконечно малого отрезка на карте к длине соответствующего бесконечно малого отрезка на эллипсоиде. В бесконечно малой окрестности каждой точки карты различают: масштаб длин вдоль меридиана, масштаб длин вдоль параллели, масштаб длин по любому направлению (*Серпинас, 2005*). Также в каждой точке существуют два направления, по которым частные масштабы длин принимают экстремальные значения – по одному из них масштаб максимален, по другому – минимален. Направления экстремальных масштабов являются взаимно перпендикулярными.

Искажения площадей на карте могут быть выражены через *частный масштаб площадей*, который представляет собой отношение площадей бесконечно малой трапеции на карте и на эллипсоиде. Что касается искажений углов, то разные углы, имеющие вершину в заданной точке, искажаются по-разному. Поэтому для характеристики этого вида искажений либо выбирается какой-то определённый угол (угол между меридианом и параллелью, азимут заданного направления), либо вычисляется *наибольшее искажение углов*.

Говоря об использовании равноугольных проекций в целях сохранения форм структур рельефа на картах небесных тел (см. раздел 1.1.3), следует понимать, что сохранение углов не тождественно сохранению форм. В равноугольных проекциях частный масштаб длин не зависит от направления. Однако в этих проекциях подобие сохраняется лишь для бесконечно малых фигур, а форма объекта искажается тем сильнее, чем больше его размеры (*Серпинас, 2005*). Поэтому для крупнейших структур рельефа небесного тела эти искажения могут становиться существенными даже в равноугольных проекциях. Искажения форм, как и искажения длин, присутствуют в любых проекциях.

Для характеристики искажений в отдельных точках проекции могут быть использованы *изоколы* – линии равных искажений, которые дают наглядное представление о величине и распределении искажений разных видов на карте.

Другой способ основан на том, что в общем случае (при изображении, не сохраняющем подобия бесконечно малых фигур) бесконечно малая окружность картографируемой поверхности изображается в проекции бесконечно малым эллипсом (*Вахрамеева и др., 1986*). Эллипс конечных размеров, соответствующий этому бесконечно малому эллипсу, называют *эллипсом искажений*. Радиус-вектор эллипса по любому направлению соответствует частному масштабу длин в этом направлении. Форма эллипса показывает искажения углов и форм – они искажены тем больше, чем больше эллипс отличается от окружности. Площадь эллипса пропорциональна частному масштабу площадей. Полуоси эллипса соответствуют экстремальным (наибольшему и наименьшему) масштабам длин.

Изоколы удобны тем, что они наглядно показывают, в каких направлениях нарастают или убывают искажения и где достигаются их наибольшие или наименьшие значения. В то же время эллипс искажений является весьма наглядной комплексной характеристикой всех видов искажений. Недостатком изокол и эллипсов искажений является то, что они по ним трудно судить об искажениях на картах крупных объектов, имеющих конечные размеры (*Серapiнас, 2005*).

Искажения в пределах некоторого региона или даже всей карты исследуются разными способами, часто основанными на вычислениях средних значений показателей. Удобным и наглядным является способ кругов, или колец, размещаемых в заданных точках на сфере и отображаемых в плоскости проекции (*Серapiнас, 2005*). В проекции они изображаются деформированными фигурами. По аналогии с эллипсами искажений их можно назвать фигурами искажений. Фигуры искажений могут быть использованы для получения количественных показателей. Так, если построить на сфере окружность конечных размеров и отобразить эту окружность и её радиусы в проекции, изменение длин радиусов будет характеризовать искажения длин, а изменение площади круга – искажения площадей. Оценку искажений форм можно осуществить, вычислив *коэффициент формы* как отношение максимальной длины радиуса к минимальной.

Возможен другой способ оценки искажений форм. Вновь на сфере строится окружность. В проекции она изображается некоторой геометрической фигурой. Находится максимальный диаметр этой фигуры. Из середины диаметра проводится радиус, определяющий минимальное расстояние от этой точки до контура фигуры.

Максимальный радиус является эквивалентом большой полуоси эллипса искажений, а минимальный радиус – малой полуоси. Отношение максимального радиуса к минимальному определяет *коэффициент стереографичности*. Он характеризует близость свойств проекции к свойствам стереографической проекции сферы (*Серापинас, 2005*), в которой любая окружность, как бесконечно малая, так и конечных размеров, изображается окружностью.

Интересный способ демонстрации искажений форм в картографических проекциях разработал А.В. Гедымин. Он основан на том, что правильные изображения географических объектов не наблюдаются людьми регулярно. Поэтому даже существенные отступления на картах от правильных изображений большинство людей может не заметить. Отсюда возникла идея наложить на карту изображение предмета, хорошо знакомого любому читателю карты. Изображение этого предмета должно быть искажено так же, как искажено на карте изображение самого географического объекта. В качестве такого предмета А.В. Гедымин использовал профиль человеческого лица (*Гедымин, 1984*). Такое отображение весьма наглядно, особенно если искажения форм очень велики.

Ещё один способ оценки искажения формы протяженных объектов был предложен С.В. Ктитровым и Д.А. Рысляевым (*Ктитров, Рысляев, 2018*). Помимо окружности, в качестве модельных предлагается использовать и другие фигуры, такие как параллелограмм, прямоугольник, ромб. При этом, так как неискаженная фигура в действительности расположена на сфере, то в случае, если она не является дугой или окружностью, могут возникнуть вопросы к форме и размерам фигуры для наложения. Решение проблемы видится авторами в проецировании фигуры на плоскость с наименьшими искажениями размеров и формы. Искажения форм и размеров оцениваются путём совмещения изображений модельной фигуры и той же фигуры в рассматриваемой проекции, что представляется весьма наглядным. Авторы предполагают возможность и количественной оценки искажений, однако конкретные значения для модельных фигур в разных проекциях не приводятся.

Отметим, что рассмотренные способы оценки искажений форм предполагается использовать для проекций сферы. В случае с эллипсоидом вращения его поверхность в окрестности выбранной точки (центра фигуры искажений) заменяется сферой (*Серापинас, 2005*). Для земных карт это допустимо,

однако для карт небесных тел могут использоваться эллипсоиды с большим сжатием или трёхосные эллипсоиды, и при переходе к сфере это приведёт к неточностям. Построение фигуры искажений непосредственно на трёхосном эллипсоиде затруднительно из-за отсутствия необходимого инструментария.

Таким образом, описанные способы оценки искажений в пределах региона или всей карты, основанные на фигурах искажений, необходимо дополнительно дорабатывать, чтобы они были применимы для проекций трёхосного эллипсоида. В то же время характеристика искажений в каждой точке карты для таких проекций может быть получена. Искажения в проекциях трёхосного эллипсоида рассматривали Б.Б. Серапинас (*Серапинас, 1983*), Л.М. Бугаевский (*Бугаевский, 1999*), А.В. Кондрачук (*Кондрачук, 2009*), П. Пендзих (*Pędzich, 2018*). Наиболее полно теория искажений в этих проекциях изложена в пособии (*Нырцов и др., 2022*). В главе 3 пособия представлены формулы частных масштабов и параметров эллипса искажений. В выражения для вычисления показателей искажений входят производные вертикальной координаты (для цилиндрических проекций) и полярного расстояния (для азимутальных и конических проекций) по широте и долготе. Приводятся формулы этих производных, полученные с учётом того, что формулы самих координат представлены в виде определённых интегралов.

Исследование проекций тесно связано с таким направлением математической картографии, как разработка теории и практики получения *наилучших и идеальных проекций*, обладающих минимальными искажениями и (или) другими достоинствами. Впервые постановка такой проблемы была сделана в 1853 г. великим русским учёным П.Л. Чебышёвым, который сформулировал теорему о наилучших равноугольных проекциях (*Чебышёв, 1951*). Наилучшие проекции можно искать либо из неограниченного множества картографических проекций (такая проекция называется идеальной), либо из какой-то их частной совокупности. Наилучшие проекции могут быть двух видов: 1) обеспечивающие минимум искажений и наилучшее их распределение; 2) обеспечивающие оптимальное выполнение всей совокупности требований к проекциям в соответствии с конкретным назначением создаваемой карты (*Бугаевский, 1998*).

1.3. Получение проекций трёхосного эллипсоида с заданным характером искажений

В основе диссертационного исследования лежит классификация проекций по виду вспомогательной поверхности и по характеру искажений, адаптированная для трёхосного эллипсоида (Нырцов, Флейс, 2021; Нырцов и др., 2022). Выделяемые этой классификацией *цилиндрические, азимутальные и конические проекции* выводятся на основе векторного описания самого трёхосного эллипсоида радиус-вектором, а также касательной к эллипсоиду плоскости, содержащей приращение радиус-вектора. Такой подход позволяет получить *равновеликие и сохраняющие длины вдоль меридианов проекции*, однако вместо равноугольных проекций трёхосного эллипсоида возникает новый класс проекций – *квазиравноугольные проекции*, сохраняющие некоторые свойства равноугольных. Они подразделяются на *проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью*, и *проекции меридианного сечения*. В пособии (Нырцов и др., 2022) приводятся формулы проекций, получаемых в рамках упомянутого подхода, при этом только для азимутальной проекции меридианного сечения даётся *конечная формула*, остальные же представлены в виде *определённых интегралов*.

1.3.1. Трёхосный эллипсоид: системы координат и первая квадратичная форма

Эллипсоидом называется замкнутая центральная поверхность второго порядка. Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

Числа a , b и c называются полуосями эллипсоида. Сечение эллипсоида плоскостью представляет собой эллипс. Эллипсоид, у которого две полуоси равны между собой, называется эллипсоидом вращения (*Математическая энциклопедия*, 1982). В геодезии и картографии эллипсоид вращения нередко называется просто эллипсоидом, а эллипсоид, у которого все три полуоси различны, – *трёхосным эллипсоидом*. Эллипсоид с соотношением полуосей $a > b = c$ также будем называть трёхосным, поскольку у большинства небесных тел ось вращения совпадает с наименьшей осью эллипсоида или близка к ней.

Вывод цилиндрических, азимутальных и конических проекций в пособии (Нырцов и др., 2022) основывается на системе *пространственных прямоугольных координат XYZ* с центром, совпадающим с центром масс небесного тела (рисунок 13). Эта система координат имеет особое значение при картографировании внеземных объектов, так как нередко именно в ней представлены данные, необходимые для составления карт. В качестве примера можно привести цифровую модель рельефа Фобоса (*Gaskell Phobos shape model v1.0*, URL: <https://data.nasa.gov/Earth-Science/GASKELL-PHOBOSS-SHAPE-MODEL-V1-0/2u8k-qyugw>). Все проекции в рамках описанного выше подхода выведены в системе *планетоцентрических координат* (широта Φ , долгота λ). Для трёхосного эллипсоида существуют и другие способы задания широт – геодезическая (планетографическая), условно-геодезическая, приведённая (Бугаевский, 1998). Практическое значение планетоцентрических координат заключается в том, что они часто используются для представления данных о небесных телах, наряду с пространственными прямоугольными координатами (Нырцов и др., 2012).

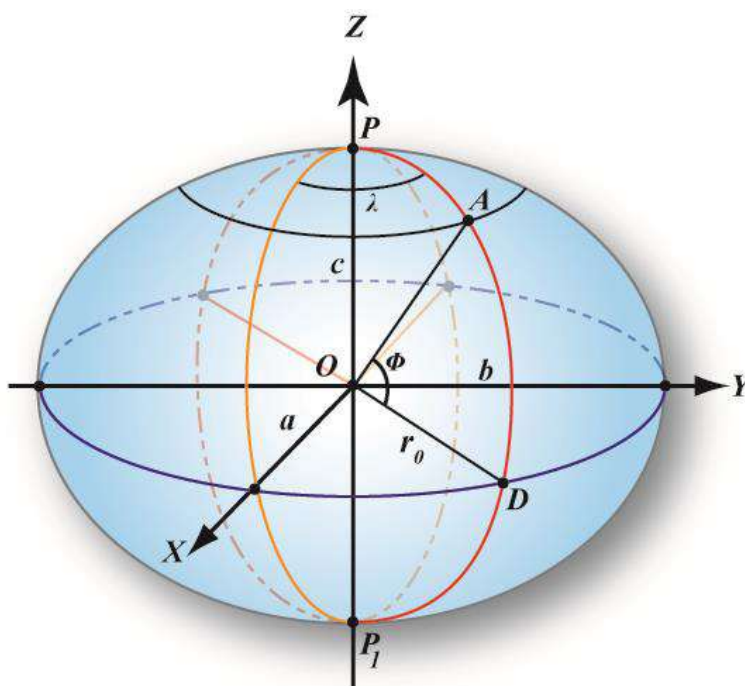


Рисунок 13. Трёхосный эллипсоид в пространстве (Нырцов и др., 2022)

В пособии (Нырцов и др., 2022) для поверхности трёхосного эллипсоида рассматриваются коэффициенты Гаусса первой квадратичной формы E, G, F, G_0 (коэффициент G на экваторе), а также угол между меридианом и параллелью ω .

Первая квадратичная форма, определяющая квадрат дифференциала длины дуги на поверхности с заданной на ней угловой системой координат (Φ, λ) :

$$dl^2 = Ed\Phi^2 + 2Fd\Phi d\lambda + Gd\lambda^2, \quad (2)$$

где E, G, F – коэффициенты Гаусса этой формы:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)^2, \quad (3)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, \quad (4)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \Phi} \frac{\partial z}{\partial \lambda}. \quad (5)$$

Коэффициент Гаусса G на экваторе обозначен G_0 . Косинус угла ω между координатными линиями на поверхности вычисляется по формуле:

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (6)$$

При выводе формул проекций в пособии (Нырцов и др., 2022) и в диссертации используются следующие выражения для коэффициентов Гаусса:

$$E = a^2 \frac{4t^2 + \sin^2 2\Phi \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right)^2}{4t^3}, \quad (7)$$

$$G = a^2 \cos^2 \Phi \frac{4t^2 + \cos^2 \Phi \sin^2 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2}{4t^3}, \quad (8)$$

$$F = a^2 \frac{\sin 2\Phi \cos^2 \Phi \sin 2\lambda \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} - \frac{1}{1 - e_{ac}^2} \right) \left(1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)}{4t^3}, \quad (9)$$

$$G_0 = a^2 \frac{4t_0^2 + \sin^2 2\lambda \left(1 - \frac{1}{1 - e_{ab}^2} \right)^2}{4t_0^3}, \quad (10)$$

где

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2}, \quad t_0 = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}. \quad (11)$$

1.3.2. Условия для получения цилиндрических, азимутальных и конических проекций

С помощью приведённых выше формул коэффициентов Гаусса в пособии (Нырцов и др., 2022) выводятся выражения для элементов бесконечно малой трапеции на эллипсоиде. Затем даются определения цилиндрических,

азимутальных и конических проекций трёхосного эллипсоида и путём сопоставления элементов бесконечно малой трапеции на поверхности эллипсоида и в плоскости проекции выводятся условия сохранения углов, длин вдоль меридианов и площадей в дифференциальной форме для каждого класса проекций. Именно они будут использованы при получении формул проекций в главе 2 диссертации. Далее эти условия приводятся с сохранением введённых авторами пособия обозначений.

Здесь и далее предполагается, что размеры полуосей эллипсоида соотносятся таким образом, что $a > b \geq c$. Выражения для квадратов эксцентриситета эллипса начального меридиана (полярного эксцентриситета) e_{ac}^2 и экваториального эксцентриситета e_{ab}^2 имеют вид:

$$e_{ac}^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}, \quad e_{ab}^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (12)$$

Цилиндрическая проекция трёхосного эллипсоида в пособии (Нырцов и др., 2022) определяется как проекция с прямолинейными меридианами, ортогональными прямолинейному экватору. В такой проекции горизонтальная координата не зависит от широты. Параллели в ней являются кривыми линиями, а вертикальная координата зависит от долготы и характера искажений.

Для получения формул проекций, помимо общего характера искажений, используется дополнительное условие минимизации искажений в определённых областях. В случае цилиндрических проекций в качестве такого условия выступает сохранение длин вдоль экватора. Это условие формулируется следующим образом:

$$dx_{proj} = \sqrt{G_0} d\lambda \quad (13)$$

Горизонтальная координата x_{proj} в цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида получается путём интегрирования этого выражения.

Вертикальная координата y_{proj} в цилиндрических проекциях зависит от характера искажений. Условие равноугольности в дифференциальной форме (Нырцов и др., 2022):

$$\frac{dy_{proj}}{dx_{proj}} = \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} \sin \omega d\lambda} + \operatorname{ctg} \omega, \quad (14)$$

или, с учётом формулы (13) для горизонтальной координаты:

$$dy_{proj} = \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \omega d\lambda \quad (15)$$

Условие сохранения площадей в цилиндрических проекциях:

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi = \frac{\sqrt{EG} \sin \omega}{\sqrt{G_0}} d\Phi \quad (16)$$

Условие сохранения длин вдоль меридианов:

$$\frac{\partial y_{proj}}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{E} d\Phi \quad (17)$$

Цилиндрические проекции в нормальной ориентировке отличаются небольшими искажениями в близких к экватору областях и увеличением их к полюсам. Поэтому для отображения полярных областей часто в дополнение к цилиндрическим применяются *азимутальные проекции*. Проекции этого класса определяются в пособии (Нырцов и др., 2022) как проекции, в которых меридианы – прямые линии, выходящие из одной точки, а параллели – кривые линии, построенные в соответствии с выбранным характером искажений.

Получение координат в азимутальных проекциях осуществляется с учётом перехода к полярным координатам ρ (*полярное расстояние*) и δ (*полярный угол*) в плоскости проекции, причём для проекций в нормальной ориентировке $\delta = \lambda$. Формулы связи имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{proj} &= \rho \sin \delta, \\ y_{proj} &= -\rho \cos \delta \end{aligned} \quad (18)$$

Полярное расстояние в азимутальных проекциях зависит от характера искажений. Условие локальной равноугольности (Нырцов и др., 2022) имеет вид:

$$-\frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi}{\rho d\lambda} = \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} \sin \omega d\lambda} + \operatorname{ctg} \omega, \quad (19)$$

или

$$-d \ln \rho = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \operatorname{ctg} \omega d\lambda, \quad (20)$$

условие сохранения площадей

$$-\frac{\partial \left(\frac{\rho^2}{2} \right)}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi, \quad (21)$$

а условие сохранения длин меридианов

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{E} d\Phi. \quad (22)$$

Цилиндрические и азимутальные проекции целесообразно совместно использовать для глобального картографирования, как в случае с картой поверхности Фобоса (рисунок 6). Для регионального картографирования удобны *конические проекции*. Проекции этого класса определены в пособии (Нырцов и др., 2022) как проекции, в которых меридианы – прямые линии, исходящие из одной точки, а параллели – кривые линии, построенные в соответствии с выбранным характером искажений. При этом углы в точке схода меридианов в проекции зависят от соответствующих углов на эллипсоиде и от параметров конуса.

Получение координат в конических проекциях осуществляется с учётом перехода к полярным координатам ρ, δ в плоскости проекции. Формулы связи имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{proj} &= \rho \sin \delta, \\ y_{proj} &= \rho_{origin} - \rho \cos \delta, \end{aligned} \quad (23)$$

где полярное расстояние $\rho_{origin} = \rho(\Phi_{origin}, \lambda_0)$ по среднему меридиану равно расстоянию между началами координат полярной и плоской прямоугольной систем координат.

Далее приводятся формулы расчёта полярного угла δ для всех конических проекций в нормальной ориентировке из пособия (Нырцов и др., 2022). Для их получения в пособии определяются параметры эллиптического конуса, касательного к трёхосному эллипсоиду по линии сечения эллипсоида плоскостью $z = z_1$. При заданных координатах центра карты Φ_0, λ_0 :

$$z_1 = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \Phi_0 \left(\cos^2 \lambda_0 + \frac{\sin^2 \lambda_0}{1 - e_{ab}^2} \right) + \frac{\sin^2 \Phi_0}{1 - e_{ac}^2}}} \sin \Phi_0 \quad (24)$$

Линия сечения представляет собой эллипс. Расстояние r_1 от центра эллипса до точки с заданной долготой λ на границе эллипса равно:

$$r_1 = \frac{a\sqrt{1 - e_{ab}^2}}{\sqrt{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda}} \cdot \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}} \quad (25)$$

Широта точки касания равна:

$$\Phi_{tg} = \arctg \frac{z_1}{r_1} \quad (26)$$

Прямоугольная координата z_0 вершины конуса, не зависящая от долготы:

$$z_0 = \frac{c^2}{z_1} \quad (27)$$

Длина отрезка касательной от точки касания до вершины конуса, обозначенная как L , вычисляется по формуле:

$$L = \sqrt{r_1^2 + (z_0 - z_1)^2} \quad (28)$$

Синус и косинус угла B между осью Z и касательной равны:

$$\sin B = \frac{r_1}{L}, \quad \cos B = \frac{z_0 - z_1}{L} \quad (29)$$

Полярный угол δ вычисляется по формуле:

$$\delta = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sin B \sqrt{1 + \cos^2 B \left(\frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda} \right)^2} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \alpha d\lambda, \quad (30)$$

Полярное расстояние в конических проекциях, как и в азимутальных, зависит от характера искажений. Условие локальной равноугольности имеет вид:

$$-\frac{\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi}{\rho \alpha d\lambda} = \frac{\sqrt{E} d\Phi}{\sqrt{G} \sin \omega d\lambda} + \operatorname{ctg} \omega, \quad (31)$$

условие сохранения площадей

$$-\alpha \frac{\partial \left(\frac{\rho^2}{2} \right)}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi, \quad (32)$$

а условие сохранения длин меридианов

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \sqrt{E} d\Phi. \quad (33)$$

Формулы для вертикальной координаты y_{proj} в цилиндрической проекции и полярного расстояния ρ в азимутальной и конической проекциях выводятся путём интегрирования выражений, соответствующих заданному характеру искажений. Получаемые при этом интегралы могут выражаться в элементарных функциях, в противном случае их можно привести к эллиптическим интегралам. В статье (Флейс и др., 2022) описан процесс таких преобразований для цилиндрических проекций трёхосного эллипсоида.

1.3.3. Квазиравноугольные проекции трёхосного эллипсоида

Для получения равноугольной цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида необходимо проинтегрировать выражение (15). При интегрировании возникает неопределённость, зависящая от задаваемого пути интегрирования (Флейс и др., 2013). Но при выборе пути интегрирования в каждой точке фиксируется направление, при этом угол между меридианом и выбранным направлением в плоскости проекции равен соответствующему углу на трёхосном эллипсоиде. В то же время для любого другого направления угол сохраняться не будет. Это доказывает невозможность построения равноугольной проекции трёхосного эллипсоида, которая являлась бы цилиндрической в соответствии с данным выше определением. Равноугольная азимутальная проекция трёхосного эллипсоида, как и цилиндрическая, не существует (Флейс и др., 2013).

Не являются равноугольными и проекции, полученные на основе изометрических координат по Бугаевскому, о которых упоминалось в разделе 1.2.2. Попытки построения равноугольных проекций трёхосного эллипсоида через введение изометрических координат подробно рассмотрены в статье (Fleis et al., 2024). В ней показано, что некоторые системы координат, ранее описанные как *изометрические*, на самом деле не являются таковыми, и, как следствие, проекции, полученные на их основе, не являются равноугольными. В статье рассматриваются два способа задания систем координат на поверхности трёхосного эллипсоида, ошибочно называемых изометрическими. В первом способе соответствующая система координат не является ортогональной, а тем более изометрической. Это доказывает тот факт, что косинус угла между координатными линиями тождественно не равен нулю. Во втором способе координаты определяются с помощью интегрирования, а результат интегрирования зависит от пути интегрирования. Такая неоднозначность показывает, что этот способ также неверен. Рассмотренные системы координат позволяют создавать новые проекции, однако эти проекции не являются равноугольными.

Тем не менее, построение равноугольных проекций трёхосного эллипсоида не является принципиально невозможным. Для получения такой проекции необходимо ввести на трёхосном эллипсоиде сетку *ортогональных координат* и определить в этих координатах условие равноугольности. Именно такую систему

координат ввёл К. Якоби для получения формул *равноугольной проекции* трёхосного эллипсоида, о которой говорилось в разделе 1.2.2. В статье (Nyrtsov et al., 2014) приведён способ перехода от планетоцентрических координат к *эллиптическим* и от них – к прямоугольным координатам в плоскости проекции с использованием полученных Карлом Якоби формул. Координаты в проекции представлены в виде эллиптических интегралов 1-го и 3-го рода.

Для того, чтобы проекция трёхосного эллипсоида была равноугольной, нужно, чтобы соблюдались два условия: сохранение угла между меридианом и параллелью и равенство отношений дифференциала длины дуги меридиана и дифференциала длины перпендикуляра, проведённого к этому меридиану, на эллипсоиде и в проекции. При построении цилиндрических и азимутальных проекций трёхосного эллипсоида выполняется только одно из этих условий. При выполнении первого условия получается *проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью*, при выполнении второго – так называемая *проекция меридианного сечения* (Нырцов и др., 2021). Эти проекции образуют особый класс – *квазиравноугольные проекции* трёхосного эллипсоида.

Невозможность построения равноугольных цилиндрических и азимутальных проекций трёхосного эллипсоида связана с тем, что сетка меридианов и параллелей планетоцентрической широты на этой поверхности не ортогональна. Вследствие этого значение квазиравноугольных проекций – проекции меридианного сечения и проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, – возрастает. Как отмечалось в разделе 1.2.2, карты в проекциях, сохраняющих угол между меридианом и параллелью, в нормальной ориентировке дают плохое представление о картографируемой поверхности, однако в некоторых случаях возможно использование поперечной ориентировки. Приоритет среди квазиравноугольных проекций остаётся за проекциями меридианного сечения (к ним относятся и упомянутые выше цилиндрические проекции Бугаевского и Серапинаса), их теория разработана значительно лучше. Проекциям этого класса посвящена статья (Нырцов и др., 2021).

Введение нового класса проекций трёхосного эллипсоида – квазиравноугольных проекций, а также их разделение на проекции меридианного сечения и проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью,

отражено в статье (*Нырцов, Флейс, 2021*), посвящённой классификации проекций трёхосного эллипсоида. Её авторы отмечают, что классификации по характеру искажений и по виду вспомогательной поверхности претерпевают существенные изменения при переходе к этой математической поверхности (по сравнению со сферой и эллипсоидом вращения). Также следует отметить, что в пособии (*Нырцов и др., 2022*) даётся рекомендация использовать конические проекции для картографирования на региональном уровне, а азимутальные и цилиндрические – на глобальном. Как видно из примеров карт в разделах 1.1.2 и 1.2.2, последние два класса проекций могут комбинироваться в весьма удачной компоновке, предложенной К.Б. Шингарёвой и преобразованной автором диссертации.

Выводы к главе 1

1. Обзор литературы и картографических произведений показывает, что карты поверхности и гипсометрические карты могут составляться в различных по характеру искажений проекциях, т.е. связи выбора проекции для карты небесного тела с её содержанием практически не наблюдается. Поэтому для обоснования выбора проекций используется «Атлас для выбора картографических проекций» (*Гинзбург, Салманова, 1957*). Для гипсометрических карт рекомендуются проекции, по характеру искажений занимающие место посередине между равнопромежуточными и равновеликими. На практике используются и те, и другие. Для общегеографических карт признаётся важным передать как формы, так и площади с наименьшими искажениями. В диссертационном исследовании при рассмотрении карт поверхности основной акцент делается на сохранении очертаний и форм объектов. В этом случае рекомендуется применять проекции, в которых минимизированы или полностью устранены искажения углов (*Гинзбург, Салманова, 1957*).

2. Исследование проекций предполагает анализ величины и распределения искажений разных видов – длин, площадей, углов и форм. Характеристика искажений в каждой точке карты для проекций трёхосного эллипсоида может быть получена, теория искажений подробно освещена в пособии (*Нырцов и др., 2022*). В то же время способы оценки искажений в пределах региона или всей карты, основанные на фигурах искажений, необходимо дополнительно дорабатывать,

чтобы они были применимы для таких проекций. Исследование искажений в проекциях служит основой для выбора наилучших проекций.

3. Проекции, выведенные в пособии (*Нырцов и др., 2022*) на основе векторного описания самого трёхосного эллипсоида радиус-вектором, а также касательной к эллипсоиду плоскости, содержащей приращение радиус-вектора, вместе с равноугольной проекцией Якоби обеспечивают необходимый характер искажений для карт поверхности и гипсометрических карт. Поэтому объектом диссертационного исследования являются проекция Якоби, цилиндрические и азимутальные проекции – для карт глобального охвата, а также конические проекции – для карт регионального охвата.

ГЛАВА 2. ПОЛУЧЕНИЕ ФОРМУЛ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ ПРОЕКЦИЙ ТРЁХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

2.1. Получение формул проекций

Получение формул проекций основывается на интегрировании выражений, которые отражают соотношения элементов бесконечно малой трапеции в плоскости проекции и на эллипсоиде, соответствующие заданному характеру искажений. Для ряда проекций трёхосного эллипсоида имеются формулы в виде определённых интегралов (*Нырцов и др., 2022*), при этом конечные формулы представлены только для азимутальной проекции меридианного сечения. Далее будут представлены полученные автором диссертации *конечные формулы* остальных проекций, а при невозможности их получения – приведённые к *эллиптическим интегралам* 1-го, 2-го и 3-го рода. Такие преобразования упрощают вычисление координат и показателей искажений, а также делают формулы более удобными для обратного пересчёта из проекции в планетоцентрические координаты на эллипсоиде. Формулы получены с использованием справочника «Интегралы и ряды» (*Прудников и др., 2002*), если не указано иное.

2.1.1. Горизонтальная координата в цилиндрических проекциях

Все представленные в диссертации цилиндрические проекции не имеют искажений на экваторе. Горизонтальная координата (*Нырцов и др., 2022*) вычисляется путём интегрирования выражения (13):

$$x_{proj} = \int_0^{\lambda} \sqrt{G_0} d\lambda \quad (34)$$

В рамках диссертационного исследования этот интеграл был приведён к эллиптическому интегралу 2-го рода $E_2(\lambda_1, e_{ab})$:

$$x_{proj} = a \left(E_2(\lambda_1, e_{ab}) - \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda_1 \cos \lambda_1}{\sqrt{1 - e_{ab}^2 \sin^2 \lambda_1}} \right), \quad \text{где } \lambda_1 = \arctg \left(\frac{\tg \lambda}{1 - e_{ab}^2} \right) \quad (35)$$

Эллиптический интеграл 2-го рода $E_2(\varphi, k)$ вычисляется приближённо с помощью разложения в ряд (*Журавский, 1941*):

$$E_2(\varphi, k) = A_0 - \frac{1}{2} A_1 k^2 - \frac{1}{8} A_2 k^4 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \dots (2n - 3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} A_n k^{2n} \quad (36)$$

Коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n рассчитываются последовательно:

$$A_0 = \varphi, \quad A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} - \frac{1}{2n} \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi \quad (37)$$

При расчёте горизонтальной координаты $\varphi = \lambda_1, k = e_{ab}$.

2.1.2. Полярный угол в конических проекциях

Формула (30) для вычисления полярного угла содержит интеграл, который не выражается в элементарных функциях и не сводится к эллиптическим интегралам. При вычислении координат в конических проекциях авторы статьи (Nyrtsov *et al.*, 2017) использовали квадратурную формулу Гаусса для приближённого вычисления интеграла. Этот же метод был использован и в рамках диссертации. При расчётах для достижения большей точности использовался составной вариант формулы (Калиткин, 1978; Никольский, 1988): вычисления производились для трёх и пяти узлов и сравнивались между собой.

2.1.3. Проекция меридианного сечения¹

Вертикальная координата в *цилиндрической проекции* меридианного сечения получается интегрированием выражения (15) сначала по экватору, затем по меридиану с долготой λ :

$$y_{proj} = \sqrt{G_0} \int_0^{\Phi} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \int_0^{\lambda} \sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \omega d\lambda \quad (38)$$

Второй интеграл равен нулю, так как угол ω на экваторе равен 90° . Первый интеграл может быть представлен в элементарных функциях. Вывод этого интеграла представлен в статье (Нырцов и др., 2021) и более подробно в пособии (Нырцов и др., 2022). Для записи полученного выражения введём обозначения

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2},$$

$$t_0 = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2}, \quad K_{\rho 3} = t_0 - \frac{1}{1 - e_{ac}^2},$$

¹ При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором в соавторстве, в которых, согласно положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Нырцов М.В., Флейс М.Э., Соколов А.И. Проекция меридианного сечения: новый класс проекций для трёхосного эллипсоида // Геодезия и картография. – 2021. – № 2. – С. 11-22. – DOI: 10.22389/0016-7126-2021-968-2-11-22, EDN: XHPCZT.

$$K_{\rho 5} = \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2}, \quad K_{\rho 4} = K_{\rho 5} - \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}, \quad (39)$$

$$K_{\rho 1} = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2},$$

$$K_{\rho 2} = e_{ac}^2 \cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda (e_{ac}^2 - e_{ab}^2)}{(1 - e_{ab}^2)^2}, \quad K_{int} = -\frac{(1 - e_{ac}^2)K_{\rho 3}\sqrt{t_0}}{\sqrt{K_{\rho 2}}}$$

Если интеграл, входящий в формулы проекции, представлен в элементарных функциях, то конечная формула получается с учётом *постоянной интегрирования* C_{int} , которая рассчитывается для каждой проекции исходя из дополнительных условий. Для цилиндрических проекций это равенство нулю вертикальной координаты на экваторе, для азимутальных – отсутствие искажений в полюсе проекции, для конических – равенство полярного расстояния в точке $\Phi = \Phi_{tg}$ и величины L .

Полученная в исследовании конечная формула вертикальной координаты в цилиндрической проекции меридианного сечения с учётом постоянной интегрирования имеет вид:

$$y_{proj} = \sqrt{G_0} \ln \frac{\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}}}{\cos \Phi \sqrt{K_{\rho 5}}} + \sqrt{G_0} K_{int} \ln \frac{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{K_{\rho 5}}t}{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2)\sqrt{t_0 K_{\rho 1}}} \quad (40)$$

Полярное расстояние в *азимутальной проекции* меридианного сечения получается интегрированием выражения (20) сначала по экватору, затем по меридиану с долготой λ (Нырцов и др., 2022):

$$-\ln \rho = \int_0^\Phi \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \int_0^\lambda \operatorname{ctg} \omega d\lambda \quad (41)$$

Таким образом, в формулу входит тот же интеграл (второй интеграл также равен нулю). Вывод представлен в пособии (Нырцов и др., 2022). Конечная формула полярного расстояния с учётом постоянной интегрирования:

$$\rho = \frac{2a \cos \Phi \sqrt{1 - e_{ac}^2}}{\sin \Phi + (1 - e_{ac}^2)\sqrt{K_{\rho 1}}} \cdot \left(\frac{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2)\sqrt{t_0 K_{\rho 1}}}{(\sqrt{t_0} + \sqrt{K_{\rho 2}})\sqrt{t(1 - e_{ac}^2)}} \right)^{K_{int}} \quad (42)$$

Полярное расстояние в *конической проекции* меридианного сечения получается интегрированием выражения (31):

$$-\int_{\Phi}^{\Phi_{tg}} \frac{\partial \rho}{\partial \Phi} d\Phi = \alpha \int_{\Phi}^{\Phi_{tg}} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \int_0^{\lambda} \alpha \operatorname{ctg} \omega d\lambda \quad (43)$$

Второй интеграл (по экватору) вновь равен нулю. После преобразований в рамках диссертации была получена конечная формула полярного расстояния с учётом постоянной интегрирования:

$$\rho = L \cdot \left[\frac{\left(\frac{\sin \Phi_{tg}}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1 tg}} \right) \cos \Phi}{\left(\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} + \sqrt{K_{\rho 1}} \right) \cos \Phi_{tg}} \right]^{\alpha} \cdot \left[\frac{\left(\frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} \right) \sqrt{t_{tg}}}{\left(\frac{\sin \Phi_{tg}}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1 tg}} \right) \sqrt{t}} \right]^{\alpha K_{int}}, \quad (44)$$

где

$$K_{\rho 1 tg} = \cos^2 \Phi_{tg} \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi_{tg} \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi_{tg}}{(1 - e_{ac}^2)^2},$$

$$t_{tg} = \cos^2 \Phi_{tg} \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi_{tg} \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi_{tg}}{1 - e_{ac}^2}. \quad (45)$$

2.1.4. Проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью²

Вертикальная координата в *цилиндрической проекции*, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, получается интегрированием выражения (15) сначала по начальному меридиану, затем по параллели с широтой Φ :

$$y_{proj} = \sqrt{G_0} \int_0^{\Phi} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G} \sin \omega} d\Phi + \int_0^{\lambda} \sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \omega d\lambda, \quad (46)$$

или, с учётом того, что на начальном меридиане угол ω равен 90° :

$$y_{proj} = \sqrt{G_0} \int_0^{\Phi} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} d\Phi + \int_0^{\lambda} \sqrt{G_0} \operatorname{ctg} \omega d\lambda. \quad (47)$$

Первое слагаемое вычисляется по формуле (40), причём $\lambda = 0$. Результатом (с учётом постоянной интегрирования, выведенной по аналогии с цилиндрической проекцией меридианного сечения при условии $\Phi = 0$) является полученная автором диссертации конечная формула:

² При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором в соавторстве, в которых, согласно положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Флейс М.Э., Нырцов М.В., **Соколов А.И.** Цилиндрические проекции трёхосного эллипсоида: точные формулы и эллиптические интегралы // Геодезия и картография. – 2022. – № 4. – С. 26-38. – DOI: 10.22389/0016-7126-2022-982-4-26-38, EDN: FVLKFG.

$$\sqrt{G_0} \int_0^\Phi \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} d\Phi = a \ln \frac{\sin \Phi + \sqrt{(1 - e_{ac}^2)^2 \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi}}{(1 - e_{ac}^2) \cos \Phi} +$$

$$+ a e_{ac} \ln \frac{\sqrt{1 - e_{ac}^2} \sqrt{(1 - e_{ac}^2) \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi}}{e_{ac} \sin \Phi + \sqrt{(1 - e_{ac}^2)^2 \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi}} \quad (48)$$

Интеграл, входящий во второе слагаемое, в рамках диссертационного исследования был представлен в виде эллиптических интегралов 1-го, 2-го и 3-го рода (Флейс и др., 2022). Эллиптический интеграл 1-го рода $E_1(\varphi, k)$ вычисляется приближённо с помощью разложения в ряд (Журавский, 1941):

$$E_1(\varphi, k) = A_0 + \frac{1}{2} A_1 k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_2 k^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} A_n k^{2n} \quad (49)$$

Коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n рассчитываются последовательно с помощью равенств

$$A_0 = \varphi, \quad A_n = \frac{2n - 1}{2n} A_{n-1} - \frac{1}{2n} \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi \quad (50)$$

Эллиптический интеграл 3-го рода $E_3(\varphi, n, k)$ вычисляется приближённо по более сложным формулам, представленным в разделе 17.7 «Справочника по специальным функциям» (1979).

Полярное расстояние в *азимутальной проекции*, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, получается интегрированием выражения (20) сначала по начальному меридиану, затем по параллели с широтой Φ :

$$-\ln \rho = \int_\Phi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} d\Phi + \int_0^\lambda \operatorname{ctg} \omega d\lambda \quad (51)$$

Интеграл по начальному меридиану (первое слагаемое) вычисляется по формуле (42), причём $\lambda = 0$. Результатом (с учётом постоянной интегрирования, выведенной по аналогии с азимутальной проекцией меридианного сечения при условии $\Phi = \frac{\pi}{2}$) является полученная в исследовании конечная формула:

$$\int_\Phi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} d\Phi = -\ln \frac{2a\sqrt{1 - e_{ac}^2} \cos \Phi}{\sin \Phi + \sqrt{(1 - e_{ac}^2)^2 \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi}} -$$

$$- e_{ac} \ln \frac{e_{ac} \sin \Phi + \sqrt{(1 - e_{ac}^2)^2 \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi}}{(e_{ac} + 1) \sqrt{(1 - e_{ac}^2) \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi}} \quad (52)$$

Второе слагаемое в правой части формулы (51) представляет собой интеграл по параллели, который выражается в элементарных функциях. Для записи окончательного результата введём обозначения:

$$K_{\rho 6} = \cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2}, \quad K_{\rho 7} = \cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2},$$

$$K_{int} = K_{\rho 7} - \frac{2 - e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2} K_{\rho 6}. \quad (53)$$

Окончательно для исходного интеграла имеем:

$$\int \operatorname{ctg} \omega d\lambda = \int \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}} d\lambda =$$

$$= \frac{\sin \Phi}{\cos^2 \Phi} \left(\frac{1}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{K_{int}}} \ln \frac{e_{ab} \cos \Phi (\sqrt{K_{\rho 1}} - \sqrt{K_{int}})}{\sqrt{(1 - e_{ab}^2)t}} - \frac{1 - e_{ab}^2}{2 - e_{ab}^2} \sqrt{K_{\rho 1}} \right) + C_{int}$$

при $K_{int} > 0$;

$$= \frac{\sin \Phi}{\cos^2 \Phi} \left[\frac{1}{2(1 - e_{ac}^2)\sqrt{-K_{int}}} \arcsin \left(\frac{(1 - e_{ab}^2)(K_{\rho 1} + K_{\rho 7})}{(2 - e_{ab}^2)t} - \frac{K_{\rho 6}}{t} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1 - e_{ab}^2}{2 - e_{ab}^2} \sqrt{K_{\rho 1}} \right] + C_{int} \text{ при } K_{int} < 0;$$

$$= -\frac{\sin \Phi}{\cos^2 \Phi} \left(\frac{1}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{K_{\rho 1}}} + \frac{1 - e_{ab}^2}{2 - e_{ab}^2} \sqrt{K_{\rho 1}} \right) + C_{int} \text{ при } K_{int} = 0. \quad (54)$$

Постоянная интегрирования C_{int} подбирается в каждом из трёх случаев так, чтобы значение интеграла на начальном меридиане было равным нулю. При $\lambda = 0$:

$$K_{\rho 1} = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{(1 - e_{ab}^2)^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} = \cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{(1 - e_{ac}^2)^2} = K_{\rho 7},$$

$$t = \cos^2 \Phi \cos^2 \lambda + \frac{\cos^2 \Phi \sin^2 \lambda}{1 - e_{ab}^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} = \cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{1 - e_{ac}^2} = K_{\rho 6}. \quad (55)$$

Таким образом, с учётом C_{int} для второго слагаемого в правой части формулы (51) в рамках диссертационного исследования была получена конечная формула:

$$\int_0^\lambda \operatorname{ctg} \omega d\lambda =$$

$$= \frac{\sin \Phi}{\cos^2 \Phi} \left[\frac{1}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{K_{int}}} \ln \frac{(\sqrt{K_{\rho 1}} - \sqrt{K_{int}})\sqrt{K_{\rho 6}}}{(\sqrt{K_{\rho 7}} - \sqrt{K_{int}})\sqrt{t}} + \frac{1 - e_{ab}^2}{2 - e_{ab}^2} (\sqrt{K_{\rho 7}} - \sqrt{K_{\rho 1}}) \right]$$

при $K_{int} > 0$;

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin \Phi}{\cos^2 \Phi} \left[\frac{1}{2(1 - e_{ac}^2)\sqrt{-K_{int}}} \cdot \right. \\
&\cdot \left(\arcsin \left(\frac{(1 - e_{ab}^2)(K_{\rho 1} + K_{\rho 7})}{(2 - e_{ab}^2)t} - \frac{K_{\rho 6}}{t} \right) - \arcsin \left(\frac{2(1 - e_{ab}^2)K_{\rho 7}}{(2 - e_{ab}^2)K_{\rho 6}} - 1 \right) \right) + \\
&\quad \left. + \frac{1 - e_{ab}^2}{2 - e_{ab}^2} \left(\sqrt{K_{\rho 7}} - \sqrt{K_{\rho 1}} \right) \right] \text{ при } K_{int} < 0; \\
&= \frac{\sin \Phi}{\cos^2 \Phi} \left[\frac{1}{1 - e_{ac}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{K_{\rho 7}}} - \frac{1}{\sqrt{K_{\rho 1}}} \right) + \frac{1 - e_{ab}^2}{2 - e_{ab}^2} \left(\sqrt{K_{\rho 7}} - \sqrt{K_{\rho 1}} \right) \right] \text{ при } K_{int} = 0. \quad (56)
\end{aligned}$$

Для получения *конической проекции*, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, необходимо выполнение двух условий. Во-первых, котангенс угла между меридианом и параллелью в проекции должен быть равен котангенсу угла между меридианом и параллелью на эллипсоиде. Во-вторых, как и для других конических проекций, при $\Phi = \Phi_{tg}$ полярное расстояние $\rho = \rho(\Phi, \lambda)$ должно быть равно расстоянию L от точки с координатами (Φ, λ) до точки схода меридианов.

Выполнению первого условия соответствуют зависимости:

$$-\frac{\rho_\lambda d\lambda}{\rho\alpha} = \text{ctg } \omega d\lambda \quad (57)$$

$$\ln \rho(\Phi, \lambda = 0) - \ln \rho(\Phi, \lambda) = \int_0^\lambda \alpha \text{ctg } \omega d\lambda + f(\Phi) \quad (58)$$

Эти выражения получаются при интегрировании по параллели второго слагаемого в правой части формулы (31).

Для выполнения второго условия при $\Phi = \Phi_{tg}$ правая часть (58) должна быть равна $\ln L$, умноженному на константу, то есть подынтегральное выражение должно быть равно $\frac{dL}{L}$, умноженному на эту константу. Интеграл по параллели может быть представлен в следующем виде:

$$\int_0^{\lambda_i} \alpha \text{ctg } \omega d\lambda = \frac{z_1 r_{0i}^2 a^2 \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}}{c^2(1 - e_{ab}^2)}.$$

$$\cdot \int_{L_0}^{L_i} \frac{(r_0^2 - c^2) \sqrt{b^4 L^2 + z_0^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right)^2 (1 - e_{ab}^2)(a^2 - r_0^2)(r_0^2 - b^2)}}{r_0^4 \left[r_{0i}^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right) \frac{a^2}{r_0^2} + \frac{a^2 z_1^2}{c^2} \right] \sqrt{r_{0i}^2 \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right) \frac{a^2 - r_0^2 + b^2}{r_0^2 (1 - e_{ab}^2)} + \frac{a^4 z_1^2}{c^4}}} \frac{dL}{L}, \quad (59)$$

где L_0 – длина отрезка касательной от точки касания до вершины конуса при $\lambda = 0$; $L_i = L(\lambda_i)$; $r_{0i} = r_0(\lambda_i)$.

Для выполнения второго условия множитель при $\frac{dL}{L}$ в подынтегральном выражении должен быть равен константе. Вычисления значения этого множителя для трёхосного эллипсоида с полуосями $a = 13000$ м, $b = 11400$ м, $c = 9100$ м, аппроксимирующего фигуру спутника Марса Фобос, показывают его зависимость от долготы. Таким образом, выполнение одновременно двух перечисленных условий невозможно, следовательно, коническая проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью, не существует. Это утверждение также может рассматриваться как доказательство невозможности построения равноугольной конической проекции.

2.1.5. Проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов³

Вертикальная координата в *цилиндрической проекции*, сохраняющей длины вдоль меридианов, получается интегрированием выражения (17):

$$y_{proj} = \int_0^{\Phi} \sqrt{E} d\Phi \quad (60)$$

Этот интеграл был приведён к эллиптическому интегралу 2-го рода (Флейс и др., 2022):

$$y_{proj} = r_0 \left(E_2(\Phi_1, e_{mer}) - \frac{e_{mer}^2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_1}{\sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1}} \right), \quad (61)$$

где

$$r_0 = \frac{b}{\sqrt{1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda}}, \quad e_{mer}^2 = 1 - \frac{c^2}{r_0^2}, \quad \Phi_1 = \arctg \left(\frac{\tg \Phi}{1 - e_{mer}^2} \right). \quad (62)$$

³ При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором в соавторстве, в которых, согласно положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Флейс М.Э., Нырцов М.В., **Соколов А.И.** Цилиндрические проекции трёхосного эллипсоида: точные формулы и эллиптические интегралы // Геодезия и картография. – 2022. – № 4. – С. 26-38. – DOI: 10.22389/0016-7126-2022-982-4-26-38, EDN: FVLKFG.

Полярное расстояние в *азимутальной проекции*, сохраняющей длины вдоль меридианов, получается интегрированием выражения (22):

$$\rho = \int_{\Phi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{E} d\Phi \quad (63)$$

С учётом приведения к эллиптическому интегралу 2-го рода автором диссертации была получена формула полярного расстояния в азимутальной проекции:

$$\rho = r_0 \left(E_2 \left(\frac{\pi}{2}, e_{mer} \right) - E_2(\Phi_1, e_{mer}) + \frac{e_{mer}^2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_1}{\sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1}} \right) \quad (64)$$

Полярное расстояние в *конической проекции*, сохраняющей длины вдоль меридианов, получается интегрированием выражения (33). С учётом приведения к эллиптическому интегралу 2-го рода в рамках диссертационного исследования была получена следующая формула полярного расстояния:

$$\begin{aligned} \rho = L - r_0 \left(E_2(\Phi_1, e_{mer}) - \frac{e_{mer}^2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_1}{\sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1}} \right) + \\ + r_0 \left(E_2(\Phi_{1tg}, e_{mer}) - \frac{e_{mer}^2 \sin \Phi_{1tg} \cos \Phi_{1tg}}{\sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_{1tg}}} \right), \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$\Phi_{1tg} = \text{arctg} \left(\frac{\text{tg } \Phi_{tg}}{1 - e_{mer}^2} \right). \quad (66)$$

2.1.6. Равновеликие проекции⁴

Формула вертикальной координаты в равновеликой *цилиндрической проекции* получается интегрированием выражения (16) и имеет вид:

$$y_{proj}(\Phi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \int_0^{\Phi} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \int_0^{\Phi} \sqrt{EG - F^2} d\Phi \quad (67)$$

Этот интеграл может быть представлен в элементарных функциях. Вывод представлен в статье (Флейс и др., 2022). Полученное выражение для интеграла имеет вид:

⁴ При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором в соавторстве, в которых, согласно положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:
Флейс М.Э., Нырцов М.В., **Соколов А.И.** Цилиндрические проекции трёхосного эллипсоида: точные формулы и эллиптические интегралы // Геодезия и картография. – 2022. – № 4. – С. 26-38. – DOI: 10.22389/0016-7126-2022-982-4-26-38, EDN: FVLKFG.

$$\int \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi = \frac{a^2}{2\sqrt{t_0}} \left(\frac{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t\sqrt{t_0}} + K_{int} \ln \frac{\left| \frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} \right|}{\sqrt{-K_{\rho 4} t}} \right) + C_{int}, \quad (68)$$

где

$$K_{int} = \frac{1}{K_{\rho 3}} \left(\frac{(1 - e_{ac}^2) K_{\rho 4}}{\sqrt{K_{\rho 2}}} + \frac{\sqrt{K_{\rho 2}}}{(1 - e_{ac}^2) t_0} \right). \quad (69)$$

Постоянная интегрирования C_{int} для цилиндрической проекции определяется так, чтобы вертикальная координата равнялась нулю на экваторе. С учётом этого автором диссертации была получена конечная формула вертикальной координаты в равновеликой цилиндрической проекции:

$$y_{proj}(\Phi, \lambda) = \frac{a^2}{2\sqrt{t_0 G_0}} \left(\frac{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t\sqrt{t_0}} + K_{int} \ln \frac{\left| \frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} \right|}{\sqrt{K_{\rho 5} t}} \right) \quad (70)$$

Полярное расстояние в равновеликой *азимутальной проекции* трёхосного эллипсоида получается интегрированием выражения (21):

$$\rho(\Phi, \lambda) = \sqrt{2 \int_{\Phi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi} = \sqrt{-2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\Phi} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi} \quad (71)$$

С учётом приведения входящего в это выражение интеграла к элементарным функциям:

$$\rho(\Phi, \lambda) = \sqrt{-\frac{a^2}{\sqrt{t_0}} \left[\frac{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t\sqrt{t_0}} + K_{int} \ln \frac{\left| \frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} \right|}{\sqrt{-K_{\rho 4} t}} \right]} - 2C_{int} \quad (72)$$

Постоянная интегрирования C_{int} для азимутальной проекции определяется так, чтобы полярное расстояние равнялось нулю в полюсе. При $\Phi = \frac{\pi}{2}$:

$$K_{\rho 1} = \frac{1}{(1 - e_{ac}^2)^2}, \quad t = \frac{1}{1 - e_{ac}^2}. \quad (73)$$

С учётом этого для полярного расстояния в равновеликой азимутальной проекции в рамках диссертационного исследования была получена следующая конечная формула:

$$\rho(\Phi, \lambda) = a \sqrt{\frac{t - \sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t t_0} - \frac{K_{int}}{\sqrt{t_0}} \ln \frac{|\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0 K_{\rho 1}}|}{\sqrt{(1 - e_{ac}^2) t (\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0})}}} \quad (74)$$

Полярное расстояние в равновеликой конической проекции трёхосного эллипсоида получается интегрированием выражения (32):

$$\rho(\Phi, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\alpha} \int_{\Phi}^{\Phi_{tg}} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi + L^2} = \sqrt{L^2 - \frac{2}{\alpha} \int_{\Phi_{tg}}^{\Phi} \sqrt{EG} \sin \omega d\Phi} \quad (75)$$

С учётом приведения входящего в это выражение интеграла к элементарным функциям получим:

$$\begin{aligned} \rho(\Phi, \lambda) = \\ = \sqrt{L^2 - \frac{a^2}{\alpha \sqrt{t_0}} \left[\frac{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t \sqrt{t_0}} + K_{int} \ln \frac{\left| \frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} \right|}{\sqrt{-K_{\rho 4} t}}} \right] - \frac{2C_{int}}{\alpha}} \end{aligned} \quad (76)$$

Постоянная интегрирования C_{int} определяется для конической проекции так, чтобы полярное расстояние в точке $\Phi = \Phi_{tg}$ равнялось L . С учётом этого автором диссертации была получена конечная формула полярного расстояния в равновеликой конической проекции:

$$\begin{aligned} \rho(\Phi, \lambda) = \\ = \sqrt{L^2 - \frac{a^2}{\alpha \sqrt{t_0}} \left[\frac{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t \sqrt{t_0}} - \frac{\sin \Phi_{tg} \sqrt{K_{\rho 1 t g}}}{t_{tg} \sqrt{t_0}} + K_{int} \ln \frac{\left| \frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} \right| \sqrt{t_{tg}}}{\left| \frac{\sin \Phi_{tg}}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1 t g}} \right| \sqrt{t}}} \right]} \end{aligned} \quad (77)$$

2.1.7. Равноугольная проекция Якоби

В статье (Nyrtsov *et al.*, 2014) и в пособии (Нырцов и др., 2022) координаты в равноугольной проекции Якоби представлены в виде эллиптических интегралов 1-го и 3-го рода. О вычислении таких интегралов говорилось выше. Как отмечается в пособии (Нырцов и др., 2022), особенностью формул является тот факт, что полученные значения x_{proj} и y_{proj} – безразмерные величины, которые при создании карты необходимо дополнительно умножать, например, на большую полуось эллипсоида a . В рамках диссертационного исследования этот коэффициент был подобран таким образом, чтобы в полюсе частный масштаб длин был равен единице.

2.2. Вычисление координат в проекциях и показателей искажений

2.2.1. Вычисление координат

Вычисления координат были реализованы в виде программы на языке JavaScript и графического интерфейса к ней на HTML. Номера формул, по которым рассчитываются координаты в рассмотренных проекциях трёхосного эллипсоида, представлены в таблице 1. Полужирным шрифтом выделены номера формул, полученных в рамках диссертационного исследования. Входными параметрами программы являются значения полуосей математической поверхности, начальное и конечное значения планетоцентрической широты и шаг по широте, начальное и конечное значение долготы и шаг по долготе. Также могут рассчитываться координаты точек из загруженного текстового файла. Результат работы программы – текстовый файл с прямоугольными координатами. Такой файл был использован для построения картографических сеток и трансформирования фотомозаик, созданных проф. Ф. Стуком (*Stooke Small Bodies Maps*, URL: https://sbnarchive.psi.edu/pds3/multi_mission/MULTI_SA_MULTI_6_STOOKEMAPS_V3_0/document/00_map_guide.html).

Таблица 1. Номера формул для расчёта координат в проекциях трёхосного эллипсоида

Проекции по характеру искажений	Проекции по виду вспомогательной поверхности		
	Цилиндрические	Азимутальные	Конические
Меридианного сечения	(35) , (40)	(42), (18)	(44) , (30), (23)
Сохраняющие угол между меридианом и параллелью	(35) , (48) , формулы раздела 17.7 из «Справочника по специальным функциям» (1979)	(52) , (56) , (18)	проекция не существует
Сохраняющие длины вдоль меридианов	(35) , (61)	(64) , (18)	(65) , (30), (23)
Равновеликие	(35) , (70)	(74) , (18)	(77) , (30), (23)
Равноугольная проекция Якоби	формулы раздела 17.7 из «Справочника по специальным функциям» (1979)		

2.2.2. Вычисление показателей искажений

Определение свойств проекций осуществляется путём вычисления показателей искажений и их визуализации в виде *изокол*. Как отмечалось в разделе 1.2.3, в выражения для вычисления показателей искажений (*Нырцов и др., 2022*) входят производные вертикальной координаты (для цилиндрических проекций) и полярного расстояния (для азимутальных и конических проекций) по широте и долготе. Использование выведенных в разделе 2.1 конечных формул позволило в рамках диссертационного исследования получить эти производные аналитически.

Далее приводятся выражения производных вертикальной координаты и полярного расстояния по широте и долготе, полученные в диссертационном исследовании с учётом конечных и приближённых формул, данных в разделе 2.1.

Проекция меридианного сечения

Производные по долготе вспомогательных величин, использованных при выводе конечных формул проекций меридианного сечения и равновеликих проекций (*Нырцов и др., 2022*):

$$\begin{aligned} t_{0\lambda} &= K_{\rho 3\lambda} = \frac{e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2} \sin 2\lambda, \\ t_{\lambda} &= t_{0\lambda} \cos^2 \Phi, \quad K_{\rho 2\lambda} = \frac{2e_{ac}^2 - e_{ac}^2 e_{ab}^2 - 1}{1 - e_{ab}^2} t_{0\lambda}, \\ K_{\rho 1\lambda} &= \frac{2 - e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2} t_{\lambda}, \quad K_{\rho 4\lambda} = K_{\rho 5\lambda} = \frac{2 - e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2} t_{0\lambda}. \end{aligned} \quad (78)$$

Производная вертикальной координаты по долготе в цилиндрической проекции:

$$\begin{aligned} y_{\lambda} &= \frac{G_{0\lambda}}{2G_0} y_{proj} + \frac{\sqrt{G_0} K_{\rho 1\lambda} (1 - e_{ac}^2)}{2 \sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}} + 2(1 - e_{ac}^2) K_{\rho 1}} + \sqrt{G_0} K_{int} \frac{t_{\lambda}}{2t} + \sqrt{G_0} (K_{int} - 1) \frac{K_{\rho 5\lambda}}{2K_{\rho 5}} + \\ &+ \sqrt{G_0} K_{int\lambda} \ln \left(\frac{(1 - e_{ac}^2) \sqrt{K_{\rho 5} t}}{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0 K_{\rho 1}}} \right) - \\ &- \sqrt{G_0} K_{int} \frac{\sin \Phi K_{\rho 2\lambda} \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} + (1 - e_{ac}^2) (t_{0\lambda} K_{\rho 1} + t_0 K_{\rho 1\lambda}) \sqrt{K_{\rho 2}}}{2 \sin \Phi K_{\rho 2} \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} + 2(1 - e_{ac}^2) t_0 K_{\rho 1} \sqrt{K_{\rho 2}}}, \end{aligned} \quad (79)$$

где

$$G_{0\lambda} = a^2 \frac{K_{\rho 5\lambda} t_0 - 3K_{\rho 5} t_{0\lambda}}{t_0^4}, \quad K_{int\lambda} = K_{int} \left(\frac{t_{0\lambda}}{K_{\rho 3}} + \frac{t_{0\lambda}}{2t_0} - \frac{K_{\rho 2\lambda}}{2K_{\rho 2}} \right). \quad (80)$$

Производная полярного расстояния по долготе в азимутальной проекции:

$$\begin{aligned}
\rho_\lambda = & \rho K_{int} \frac{\sin \Phi K_{\rho 2 \lambda} \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} + (1 - e_{ac}^2)(t_{0\lambda} K_{\rho 1} + t_0 K_{\rho 1 \lambda}) \sqrt{K_{\rho 2}}}{2 \sin \Phi K_{\rho 2} \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} + 2(1 - e_{ac}^2) t_0 K_{\rho 1} \sqrt{K_{\rho 2}}} - \\
& - \rho K_{int \lambda} \ln \left(\frac{(\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0}) \sqrt{(1 - e_{ac}^2) t}}{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0 K_{\rho 1}}} \right) - \rho K_{int} \frac{t_\lambda}{2t} - \\
& - \rho \frac{K_{\rho 1 \lambda} (1 - e_{ac}^2)}{2 \sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}} + 2(1 - e_{ac}^2) K_{\rho 1}} - \rho K_{int} \frac{K_{\rho 2 \lambda} \sqrt{t_0} + t_{0\lambda} \sqrt{K_{\rho 2}}}{2 K_{\rho 2} \sqrt{t_0} + 2 t_0 \sqrt{K_{\rho 2}}} \quad (81)
\end{aligned}$$

Производная полярного расстояния по долготе в конической проекции:

$$\begin{aligned}
\rho_\lambda = & \rho \frac{L_\lambda}{L} + \rho \alpha_\lambda \ln \frac{(\sin \Phi_{tg} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{K_{\rho 1 tg}}) \cos \Phi}{(\sin \Phi + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{K_{\rho 1}}) \cos \Phi_{tg}} + \rho \alpha K_{int} \left(\frac{t_{tg\lambda}}{2t_{tg}} - \frac{t_\lambda}{2t} \right) + \\
& + \rho \alpha \frac{2 \Phi_{tg\lambda} \cos \Phi_{tg} \sqrt{K_{\rho 1 tg}} + (1 - e_{ac}^2) K_{\rho 1 tg\lambda}}{2 \sqrt{K_{\rho 1 tg}} (\sin \Phi_{tg} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{K_{\rho 1 tg}})} - \\
& - \rho \alpha \frac{K_{\rho 1 \lambda} (1 - e_{ac}^2)}{2 \sqrt{K_{\rho 1}} (\sin \Phi + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{K_{\rho 1}})} + \rho \alpha \frac{\Phi_{tg\lambda} \sin \Phi_{tg}}{\cos \Phi_{tg}} + \\
& + \rho (\alpha_\lambda K_{int} + \alpha K_{int \lambda}) \ln \frac{(\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0 K_{\rho 1}}) \sqrt{t_{tg}}}{(\sin \Phi_{tg} \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0 K_{\rho 1 tg}}) \sqrt{t}} + \\
& + \rho \alpha K_{int} \frac{K_{\rho 2 \lambda} \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} \sin \Phi + (1 - e_{ac}^2) K_{\rho 1} t_{0\lambda} \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) t_0 K_{\rho 1 \lambda} \sqrt{K_{\rho 2}}}{2 \sqrt{t_0 K_{\rho 1} K_{\rho 2}} (\sqrt{K_{\rho 2}} \sin \Phi + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0 K_{\rho 1}})} + \\
& - \rho \alpha K_{int} \frac{2 K_{\rho 2} \Phi_{tg\lambda} \cos \Phi_{tg} + K_{\rho 2 \lambda} \sin \Phi_{tg}}{2 \sqrt{K_{\rho 2}} (\sqrt{K_{\rho 2}} \sin \Phi_{tg} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0 K_{\rho 1 tg}})} - \\
& - \rho \alpha K_{int} (1 - e_{ac}^2) \frac{t_{0\lambda} K_{\rho 1 tg} + t_0 K_{\rho 1 tg\lambda}}{2 \sqrt{t_0 K_{\rho 1 tg}} (\sqrt{K_{\rho 2}} \sin \Phi_{tg} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0 K_{\rho 1 tg}})}, \quad (82)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{\rho 1 tg\lambda} = & t_{0\lambda} \frac{2 - e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2} \cos^2 \Phi_{tg} - K_{\rho 4} \Phi_{tg\lambda} \sin 2\Phi_{tg}, \\
t_{tg\lambda} = & t_{0\lambda} \cos^2 \Phi_{tg} - K_{\rho 3} \Phi_{tg\lambda} \sin 2\Phi_{tg}. \quad (83)
\end{aligned}$$

Выражение для расчёта производной α_λ приведено в пособии (Нырцов и др., 2022).

Проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью

Производная вертикальной координаты в цилиндрической проекции по широте (Нырцов и др., 2022):

$$y_\Phi = \frac{\sqrt{EG_0}}{\sqrt{G}} + \int_0^\lambda \frac{2\sqrt{G_0}F_\Phi(EG - F^2) - \sqrt{G_0}F(E_\Phi G + EG_\Phi - 2FF_\Phi)}{2\sqrt{(EG - F^2)^3}} d\lambda \quad (84)$$

Это выражение содержит интеграл, который, ввиду его сложности, вычисляется приближённо с использованием квадратурной формулы Гаусса, как и интеграл для расчёта полярного угла в конических проекциях.

Производная полярного расстояния по широте в азимутальной проекции вычисляется в трёх вариантах, как и само полярное расстояние. Используем соотношение:

$$\rho_\Phi = -\rho \frac{d(-\ln \rho)}{d\Phi} \quad (85)$$

Первый вариант ($K_{int} > 0$):

$$\begin{aligned} \frac{d(-\ln \rho)}{d\Phi} = & \frac{\sqrt{K_{\rho 7}}}{\cos \Phi K_{\rho 6}} + \\ & + \frac{\sin \Phi K_{\rho 6 \Phi}}{2 \cos^2 \Phi (1 - e_{ac}^2) K_{\rho 6} \sqrt{K_{int}}} + \frac{\sin \Phi (K_{\rho 1 \Phi} \sqrt{K_{int}} - K_{int \Phi} \sqrt{K_{\rho 1}})}{2 \cos^2 \Phi (1 - e_{ac}^2) (K_{int} K_{\rho 1} - \sqrt{K_{\rho 1} K_{int}^3})} - \\ & - \frac{t_\Phi \sin \Phi}{2 \cos^2 \Phi (1 - e_{ac}^2) t \sqrt{K_{int}}} - \frac{\sin \Phi (K_{\rho 7 \Phi} \sqrt{K_{int}} - K_{int \Phi} \sqrt{K_{\rho 7}})}{2 \cos^2 \Phi (1 - e_{ac}^2) (K_{int} K_{\rho 7} - \sqrt{K_{\rho 7} K_{int}^3})} + \\ & + \frac{\sin \Phi (1 - e_{ab}^2)}{2 \cos^2 \Phi (2 - e_{ab}^2)} \left(\frac{K_{\rho 7 \Phi}}{\sqrt{K_{\rho 7}}} - \frac{K_{\rho 1 \Phi}}{\sqrt{K_{\rho 1}}} \right) + \\ & + \frac{2K_{int} + 2K_{int} \sin^2 \Phi - K_{int \Phi} \sin \Phi \cos \Phi}{2 \cos^3 \Phi (1 - e_{ac}^2) \sqrt{K_{int}^3}} \ln \frac{(\sqrt{K_{\rho 1}} - \sqrt{K_{int}}) \sqrt{K_{\rho 6}}}{(\sqrt{K_{\rho 7}} - \sqrt{K_{int}}) \sqrt{t}} + \\ & + \frac{(1 + \sin^2 \Phi)(1 - e_{ab}^2)(\sqrt{K_{\rho 7}} - \sqrt{K_{\rho 1}})}{\cos^3 \Phi (2 - e_{ab}^2)} \end{aligned} \quad (86)$$

Второй вариант ($K_{int} < 0$):

$$\begin{aligned} \frac{d(-\ln \rho)}{d\Phi} = & \frac{\sqrt{K_{\rho 7}}}{\cos \Phi K_{\rho 6}} + \frac{K_{int \Phi} \sin \Phi \cos \Phi - 2K_{int}(1 + \sin^2 \Phi)}{4 \cos^3 \Phi (1 - e_{ac}^2) \sqrt{-K_{int}^3}} \cdot \\ & \cdot \left[\arcsin \left(\frac{(1 - e_{ab}^2)(K_{\rho 1} + K_{\rho 7})}{(2 - e_{ab}^2)t} - \frac{K_{\rho 6}}{t} \right) - \arcsin \left(\frac{2(1 - e_{ab}^2)K_{\rho 7}}{(2 - e_{ab}^2)K_{\rho 6}} - 1 \right) \right] + \\ & + \frac{\sin \Phi}{2t \cos^2 \Phi (1 - e_{ac}^2) \sqrt{-K_{int}}} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1 - e_{ab}^2)(K_{\rho 1\Phi} t + K_{\rho 7\Phi} t - K_{\rho 1} t_{\Phi} - K_{\rho 7} t_{\Phi}) - (2 - e_{ab}^2)(K_{\rho 6\Phi} t - t_{\Phi} K_{\rho 6})}{\sqrt{(2 - e_{ab}^2)^2 t^2 - [(1 - e_{ab}^2)(K_{\rho 1} + K_{\rho 7}) - (2 - e_{ab}^2)K_{\rho 6}]^2}} - \\
& - \frac{\sqrt{1 - e_{ab}^2}(K_{\rho 7\Phi} K_{\rho 6} - K_{\rho 6\Phi} K_{\rho 7}) \sin \Phi}{2 \cos^2 \Phi (1 - e_{ac}^2) K_{\rho 6} \sqrt{-K_{int} K_{\rho 7}} \sqrt{(2 - e_{ab}^2) K_{\rho 6} - (1 - e_{ab}^2) K_{\rho 7}}} + \\
& + \frac{(1 - e_{ab}^2)(1 + \sin^2 \Phi)}{(2 - e_{ab}^2) \cos^3 \Phi} \left(\sqrt{K_{\rho 7}} - \sqrt{K_{\rho 1}} \right) + \\
& + \frac{(1 - e_{ab}^2) \sin \Phi}{(2 - e_{ab}^2) \cos^2 \Phi} \left(\frac{K_{\rho 7\Phi}}{2\sqrt{K_{\rho 7}}} - \frac{K_{\rho 1\Phi}}{2\sqrt{K_{\rho 1}}} \right) \quad (87)
\end{aligned}$$

Третий вариант ($K_{int} = 0$):

$$\begin{aligned}
& \frac{d(-\ln \rho)}{d\Phi} = \frac{\sqrt{K_{\rho 7}}}{\cos \Phi K_{\rho 6}} + \\
& = \frac{1 + \sin^2 \Phi}{\cos^3 \Phi} \left[\frac{1}{1 - e_{ac}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{K_{\rho 7}}} - \frac{1}{\sqrt{K_{\rho 1}}} \right) + \frac{1 - e_{ab}^2}{2 - e_{ab}^2} \left(\sqrt{K_{\rho 7}} - \sqrt{K_{\rho 1}} \right) \right] + \\
& + \frac{\sin \Phi}{\cos^2 \Phi} \left[\frac{1}{1 - e_{ac}^2} \left(\frac{K_{\rho 1\Phi}}{2\sqrt{K_{\rho 1}^3}} - \frac{K_{\rho 7\Phi}}{2\sqrt{K_{\rho 7}^3}} \right) + \frac{1 - e_{ab}^2}{2 - e_{ab}^2} \left(\frac{K_{\rho 7\Phi}}{2\sqrt{K_{\rho 7}}} - \frac{K_{\rho 1\Phi}}{2\sqrt{K_{\rho 1}}} \right) \right] \quad (88)
\end{aligned}$$

Производные вспомогательных величин по широте:

$$\begin{aligned}
K_{\rho 1\Phi} &= -K_{\rho 4} \sin 2\Phi, \quad t_{\Phi} = -K_{\rho 3} \sin 2\Phi, \\
K_{\rho 6\Phi} &= \frac{e_{ac}^2}{1 - e_{ac}^2} \sin 2\Phi, \quad K_{\rho 7\Phi} = \frac{e_{ac}^2(2 - e_{ac}^2)}{(1 - e_{ac}^2)^2} \sin 2\Phi, \\
K_{int\Phi} &= K_{\rho 7\Phi} - \frac{2 - e_{ab}^2}{1 - e_{ab}^2} K_{\rho 6\Phi}.
\end{aligned} \quad (89)$$

Проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов

Производные по долготе получены с учётом представления вертикальной координаты и полярного расстояния в виде эллиптического интеграла 2-го рода.

Для цилиндрической проекции:

$$\begin{aligned}
y_{\lambda} &= r_{0\lambda} \frac{y_{proj}}{r_0} + \frac{r_0 e_{mer\lambda}}{e_{mer}} (E_2(\Phi_1, e_{mer}) - E_1(\Phi_1, e_{mer})) + \\
& + r_0 \Phi_{1\lambda} \sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1} - r_0 e_{mer} \frac{e_{mer\lambda} \sin 2\Phi_1 + e_{mer} \Phi_{1\lambda} \cos 2\Phi_1}{\sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1}} - \\
& - r_0 e_{mer}^3 \sin^2 \Phi_1 \cos \Phi_1 \frac{e_{mer\lambda} \sin \Phi_1 + e_{mer} \Phi_{1\lambda} \cos \Phi_1}{\sqrt{(1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1)^3}}, \quad (90)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_{1\lambda} &= \frac{2e_{mer}e_{mer\lambda} \operatorname{tg} \Phi}{(1 - e_{mer}^2)^2 + \operatorname{tg}^2 \Phi}, \\ r_{0\lambda} &= -b \frac{e_{ab}^2 \sin \lambda \cos \lambda}{\sqrt{(1 - e_{ab}^2 \cos^2 \lambda)^3}}, e_{mer\lambda} = \frac{r_{0\lambda} c^2}{r_0^3 e_{mer}}.\end{aligned}\quad (91)$$

Для азимутальной проекции:

$$\begin{aligned}\rho_\lambda &= r_{0\lambda} \frac{\rho(\Phi, \lambda)}{r_0} + \\ &+ \frac{r_0 e_{mer\lambda}}{e_{mer}} \left(E_2 \left(\frac{\pi}{2}, e_{mer} \right) - E_2(\Phi_1, e_{mer}) - E_1 \left(\frac{\pi}{2}, e_{mer} \right) + E_1(\Phi_1, e_{mer}) \right) - \\ &- r_0 \Phi_{1\lambda} \sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1} + r_0 e_{mer} \frac{e_{mer\lambda} \sin 2\Phi_1 + e_{mer} \Phi_{1\lambda} \cos 2\Phi_1}{\sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1}} + \\ &+ r_0 e_{mer}^3 \sin^2 \Phi_1 \cos \Phi_1 \frac{e_{mer\lambda} \sin \Phi_1 + e_{mer} \Phi_{1\lambda} \cos \Phi_1}{\sqrt{(1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1)^3}}\end{aligned}\quad (92)$$

Для конической проекции:

$$\begin{aligned}\rho_\lambda &= r_{0\lambda} \frac{\rho(\Phi_{tg}, \lambda) - \rho(\Phi, \lambda)}{r_0} + L_\lambda + \\ &+ \frac{r_0 e_{mer\lambda}}{e_{mer}} \left(E_2(\Phi_{1tg}, e_{mer}) - E_1(\Phi_{1tg}, e_{mer}) - E_2(\Phi_1, e_{mer}) + E_1(\Phi_1, e_{mer}) \right) + \\ &+ r_0 \left(\Phi_{1tg\lambda} \sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_{1tg}} - \Phi_{1\lambda} \sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1} \right) + \\ &+ r_0 e_{mer} \left(\frac{e_{mer\lambda} \sin 2\Phi_1 + e_{mer} \Phi_{1\lambda} \cos 2\Phi_1}{\sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1}} \right) - \\ &- r_0 e_{mer} \left(\frac{e_{mer\lambda} \sin 2\Phi_{1tg} + e_{mer} \Phi_{1tg\lambda} \cos 2\Phi_{1tg}}{\sqrt{1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_{1tg}}} \right) + \\ &+ r_0 e_{mer}^3 \sin^2 \Phi_1 \cos \Phi_1 \frac{e_{mer\lambda} \sin \Phi_1 + e_{mer} \Phi_{1\lambda} \cos \Phi_1}{\sqrt{(1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_1)^3}} - \\ &- r_0 e_{mer}^3 \sin^2 \Phi_{1tg} \cos \Phi_{1tg} \frac{e_{mer\lambda} \sin \Phi_{1tg} + e_{mer} \Phi_{1tg\lambda} \cos \Phi_{1tg}}{\sqrt{(1 - e_{mer}^2 \sin^2 \Phi_{1tg})^3}},\end{aligned}\quad (93)$$

где

$$\Phi_{tg\lambda} = -\frac{z_1 r_{0\lambda}}{r_1^2 + z_1^2} \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}}, \quad L_\lambda = \frac{r_1 r_{1\lambda}}{L},$$

$$\Phi_{1tg\lambda} = \frac{\Phi_{tg\lambda}(1 - e_{mer}^2) + e_{mer}e_{mer\lambda} \sin 2\Phi_{tg}}{\cos^2 \Phi_{tg} (1 - e_{mer}^2)^2 + \sin^2 \Phi_{tg}}. \quad (94)$$

Равновеликие проекции

Для вычисления производных по долготе в равновеликих проекциях сначала необходимо получить производную величины K_{int} :

$$K_{int\lambda} = \frac{(1 - e_{ac}^2)(2K_{\rho 2}K_{\rho 4\lambda} - K_{\rho 2\lambda}K_{\rho 4})}{2K_{\rho 3}\sqrt{K_{\rho 2}^3}} + \frac{K_{\rho 2\lambda}t_0 - 2t_{0\lambda}K_{\rho 2}}{2K_{\rho 3}\sqrt{K_{\rho 2}}(1 - e_{ac}^2)t_0^2} - \frac{t_{0\lambda}K_{int}}{K_{\rho 3}} \quad (95)$$

Производная вертикальной координаты по долготе в равновеликой цилиндрической проекции:

$$\begin{aligned} y_\lambda = & \frac{a^2 \sin \Phi (K_{\rho 1\lambda}tt_0 - 2t_\lambda t_0 K_{\rho 1} - tt_{0\lambda}K_{\rho 1})}{4t^2 t_0^2 \sqrt{G_0 K_{\rho 1}}} - \left(\frac{t_{0\lambda}}{2t_0} + \frac{G_{0\lambda}}{2G_0} \right) y_{proj} + \\ & + \frac{a^2}{2\sqrt{t_0 G_0}} \left(K_{int\lambda} \ln \frac{|\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2)\sqrt{t_0 K_{\rho 1}}|}{(1 - e_{ac}^2)\sqrt{K_{\rho 5}t}} - K_{int} \frac{K_{\rho 4\lambda}t + K_{\rho 5}t_\lambda}{2K_{\rho 5}t} \right) + \\ & + \frac{a^2}{2\sqrt{t_0 G_0}} K_{int} \frac{\sin \Phi K_{\rho 2\lambda}\sqrt{t_0 K_{\rho 1}} + (1 - e_{ac}^2)\sqrt{K_{\rho 2}}(t_{0\lambda}K_{\rho 1} + t_0 K_{\rho 1\lambda})}{2\sqrt{t_0 K_{\rho 1} K_{\rho 2}}(\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2)\sqrt{t_0 K_{\rho 1}})} \end{aligned} \quad (96)$$

Производная полярного расстояния по долготе в азимутальной проекции:

$$\begin{aligned} \rho_\lambda = & a^2 \frac{2t_0 K_{int\lambda} - t_{0\lambda} K_{int}}{4\rho\sqrt{t_0^3}} \ln \frac{(\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0})\sqrt{(1 - e_{ac}^2)t}}{|\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2)\sqrt{t_0 K_{\rho 1}}|} - \\ & - \frac{a^2}{2\rho} \left(\frac{t_{0\lambda}}{t_0^2} + \sin \Phi \frac{K_{\rho 1\lambda}tt_0 - 2(tt_{0\lambda} + t_\lambda t_0)K_{\rho 1}}{2t^2 t_0^2 \sqrt{K_{\rho 1}}} \right) + \\ & + a^2 \frac{K_{int}(K_{\rho 2\lambda}t + K_{\rho 2}t_\lambda)}{4\rho t \sqrt{t_0 K_{\rho 2}}(\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0})} + a^2 \frac{K_{int}(t_\lambda t_0 + tt_{0\lambda})}{4\rho t_0 t (\sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0})} - \\ & - a^2 \frac{K_{int}K_{\rho 2\lambda} \sin \Phi}{4\rho \sqrt{t_0 K_{\rho 2}}(\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2)\sqrt{t_0 K_{\rho 1}})} - \\ & - a^2 \frac{K_{int}(1 - e_{ac}^2)(t_{0\lambda}K_{\rho 1} + t_0 K_{\rho 1\lambda})}{4\rho t_0 \sqrt{K_{\rho 1}}(\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2)\sqrt{t_0 K_{\rho 1}})} \end{aligned} \quad (97)$$

Производная полярного расстояния по долготе в конической проекции:

$$\begin{aligned} \rho_\lambda = & \frac{LL_\lambda}{\rho} + \left(\frac{a^2 \alpha_\lambda}{2\rho \alpha^2 t_0} + \frac{a^2 t_{0\lambda}}{4\rho \alpha t_0^2} \right) \left(\frac{\sin \Phi \sqrt{K_{\rho 1}}}{t} - \frac{\sin \Phi_{tg} \sqrt{K_{\rho 1} t_{tg}}}{t_{tg}} \right) - \\ & - \frac{a^2 \sin \Phi}{2\rho \alpha t_0 t} \left(\frac{K_{\rho 1\lambda}}{2\sqrt{K_{\rho 1}}} - \frac{\sqrt{K_{\rho 1}}t_\lambda}{t} - \frac{\sqrt{K_{\rho 1}}t_{0\lambda}}{2t_0} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a^2 \Phi_{tg\lambda} \cos \Phi_{tg} \sqrt{K_{\rho 1tg}}}{2\rho \alpha t_0 t_{tg}} + \frac{a^2 \sin \Phi_{tg}}{2\rho \alpha t_0 t_{tg}} \left(\frac{K_{\rho 1tg\lambda}}{2\sqrt{K_{\rho 1tg}}} - \frac{\sqrt{K_{\rho 1tg}} t_{tg\lambda}}{t_{tg}} - \frac{t_{0\lambda} \sqrt{K_{\rho 1tg}}}{2t_0} \right) + \\
& + \frac{a^2}{2\rho \alpha \sqrt{t_0}} \left(\frac{\alpha_\lambda K_{int}}{\alpha} + \frac{K_{int} t_{0\lambda}}{2t_0} - K_{int\lambda} \right) \ln \frac{\left| \frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} \right| \sqrt{t_{tg}}}{\left| \frac{\sin \Phi_{tg}}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1tg}} \right| \sqrt{t}} - \\
& - a^2 K_{int} \frac{\frac{\sin \Phi}{(1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0}} \left(\frac{K_{\rho 2\lambda}}{\sqrt{K_{\rho 2}}} + \frac{t_{tg\lambda} \sqrt{K_{\rho 2}}}{t_{tg}} \right) + \frac{t_{0\lambda} \sqrt{K_{\rho 1}}}{t_0} + \frac{K_{\rho 1\lambda}}{\sqrt{K_{\rho 1}}} + \frac{t_{tg\lambda} \sqrt{K_{\rho 1}}}{t_{tg}}}{4\rho \alpha \left| \frac{\sin \Phi}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1}} \right|} + \\
& + \frac{a^2 K_{int}}{2\rho \alpha \sqrt{t_0}} \cdot \frac{\Phi_{tg\lambda} \cos \Phi_{tg} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sin \Phi_{tg} \left(\frac{K_{\rho 2\lambda}}{2\sqrt{K_{\rho 2}}} + \frac{t_{\lambda} \sqrt{K_{\rho 2}}}{2t} \right)}{\left| \sin \Phi_{tg} \sqrt{K_{\rho 2}} + (1 - e_{ac}^2) \sqrt{t_0 K_{\rho 1tg}} \right|} + \\
& + \frac{a^2 K_{int}}{4\rho \alpha} \cdot \frac{\frac{t_{0\lambda} \sqrt{K_{\rho 1tg}}}{t_0} + \frac{K_{\rho 1tg\lambda}}{\sqrt{K_{\rho 1tg}}} + \frac{t_{\lambda} \sqrt{K_{\rho 1tg}}}{t}}{\left| \frac{\sin \Phi_{tg}}{1 - e_{ac}^2} \sqrt{K_{\rho 2}} + \sqrt{t_0 K_{\rho 1tg}} \right|} \quad (98)
\end{aligned}$$

Производные величин α , $K_{\rho 1tg}$ и t_{tg} по долготе такие же, как и для конической проекции меридианного сечения.

Оставшиеся производные получены как производные интегралов по переменной интегрирования и представлены в таблице 2.

Таблица 2. Производные координат в проекциях, полученные из подынтегральных выражений (Нырцов и др., 2022)

Проекция по характеру искажений	Проекция по виду вспомогательной поверхности		
	Цилиндрические	Азимутальные	Конические
Меридианного сечения	$y_\Phi = \frac{E\sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}}$	$\rho_\Phi = -\frac{\rho E}{\sqrt{EG - F^2}}$	$\rho_\Phi = -\frac{\alpha \rho E}{\sqrt{EG - F^2}}$
Сохраняющие угол между меридианом и параллелью	$y_\lambda = \frac{F\sqrt{G_0}}{\sqrt{EG - F^2}}$	$\rho_\lambda = -\frac{\rho F}{\sqrt{EG - F^2}}$	проекция не существует
Сохраняющие длины вдоль меридианов	$y_\Phi = \sqrt{E}$	$\rho_\Phi = -\sqrt{E}$	$\rho_\Phi = -\sqrt{E}$
Равновеликие	$y_\Phi = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{G_0}}$	$y_\Phi = -\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho}$	$y_\Phi = -\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\alpha \rho}$

Полученные формулы производных также вошли в новый инструментарий по вычислению координат в проекциях и показателей искажений. Интерфейс инструментария представлен на рисунке 14.

Картографические проекции трёхосного эллипсоида

Проекция	По виду вспомогательной поверхности		
	Азимутальная	Цилиндрическая	Коническая
По характеру искажений			
Равновеликая	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Сохраняющая длины вдоль меридианов	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Меридианного сечения	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Сохраняющая угол между меридианом и параллелью	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	проекция не существует
Равноугольная (Якоби)		<input type="radio"/>	

Параметры проекции

Полус проекции:

Средний меридиан:

Планетоцентрические координаты для пересчёта

Координаты:

Широта	от <input type="text" value="0"/>	до <input type="text" value="90"/>	шаг <input type="text" value="90"/>
Долгота	от <input type="text" value="0"/>	до <input type="text" value="90"/>	шаг <input type="text" value="10"/>

Параметры трёхосного эллипсоида

Небесное тело:

Большая экваториальная полуось:	<input type="text" value="13000"/>
Малая экваториальная полуось:	<input type="text" value="11400"/>
Полярная полуось:	<input type="text" value="9100"/>

Дополнительные параметры

☒ Показатели искажений

- ☐ Масштаб длин вдоль меридианов (kmer)
- ☒ Масштаб длин вдоль параллелей (kpar)
- ☒ Масштаб площадей (karea)
- ☒ Наибольшее искажение углов (tmax)
- ☐ Угол между меридианом и параллелью в проекции (om_proj)
- ☐ Параметры эллипса искажений: полуоси (kmax, kmin), угол поворота (ga_0)

Точность координат: /

Вычисленные прямоугольные координаты

[Сохранить файл](#)

```

id,longitude,latitude,x,y,kpar,karea,tmax
1,0,0,0,-17492.699,1.346,1.346,16.945
2,0,90,0,0,1,1,0
3,10,0,3028.959,-17178.081,1.347,1.346,17.096
4,10,90,0,0,1,1,0
5,20,0,5918.347,-16260.525,1.351,1.348,17.486
6,20,90,0,0,1,1,0
7,30,0,8550.822,-14810.459,1.358,1.354,17.986
8,30,90,0,0,1,1,0
9,40,0,10843.27,-12922.507,1.368,1.364,18.487
10,40,90,0,0,1,1,0
11,50,0,12746.109,-10695.255,1.381,1.377,18.936
12,50,90,0,0,1,1,0
13,60,0,14234.769,-8218.447,1.395,1.392,19.314
14,60,90,0,0,1,1,0
15,70,0,15299.687,-5568.631,1.406,1.405,19.607

```

Рисунок 14. Интерфейс программы по вычислению координат и показателей искажений

2.3. Определение свойств проекций и составление карт

2.3.1. Обоснование выбора небесных тел для исследования проекций

При картографировании небесных тел с использованием трёхосного эллипсоида в качестве аппроксимирующей поверхности чаще всего руководствуются отчётом рабочей группы Международного астрономического союза (МАС) по картографическим координатам и элементам вращения планет и спутников, где приводятся рекомендуемые параметры эллипсоидов для небольших спутников планет, астероидов и ядер комет. Следовательно, те небесные тела, для которых такие параметры приводятся, являются потенциальными объектами для картографирования в проекциях трёхосного эллипсоида.

На рисунке 15 приведена точечная диаграмма, которая отображает распределение трёхосных эллипсоидов, представленных в отчёте МАС (Archinal et al., 2018), по квадратам двух эксцентриситетов – полярного и экваториального. Трёхосные эллипсоиды, у которых квадрат полярного эксцентриситета $e_{ac}^2 < 0,05$, на диаграмме не показаны.

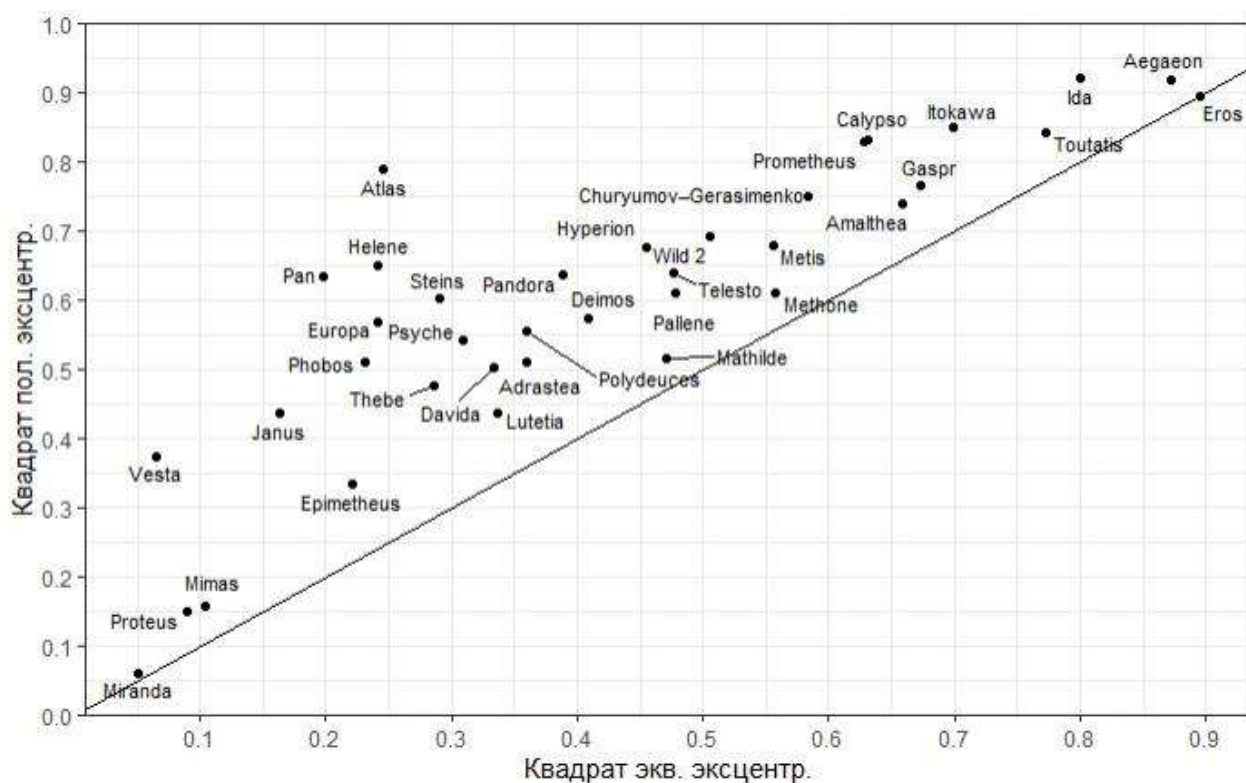
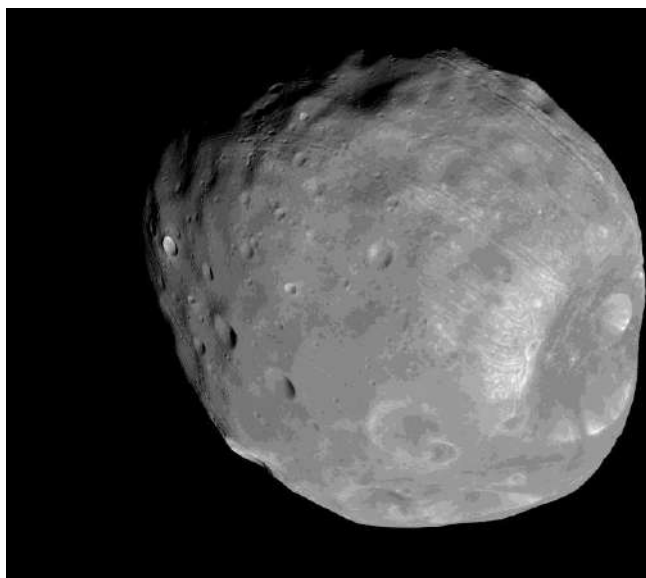
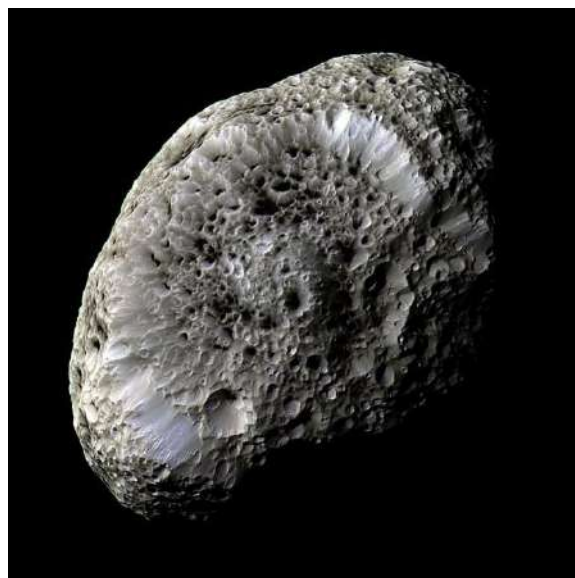


Рисунок 15. Распределение трёхосных эллипсоидов по квадратам эксцентриситетов

В рамках диссертации для построения *изокол* и картографирования были взяты три небесных тела: *спутник Марса Фобос* (рисунок 16, а), *спутник Сатурна Гиперион* (рисунок 16, б) и *астероид 433 Эрос* (рисунок 16, в). Эти три небесных тела относятся к наиболее изученным из тех, фигуры которых близки к трёхосному эллипсоиду. Кроме того, они репрезентативны для разных групп небесных тел. Фобос расположен на диаграмме (рисунок 15) в области с небольшими значениями экваториального и полярного эксцентриситетов, Гиперион – в области средних значений, а Эрос и вовсе занимает крайнее правое положение на диаграмме. Также у Эроса полярный и экваториальный эксцентриситеты совпадают (это показано с помощью линии равных эксцентриситетов).



а)



б)



в)

Рисунок 16. Космические изображения небесных тел:

а) Фобос (Catalog Page for PIA10366, URL:
<https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA10366>);

б) Гиперион (Catalog Page for PIA07740, URL:
<https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA07740>);

в) Эрос (NEAR image of the day for 2000 Feb 17 (A), URL:
<https://near.jhuapl.edu/iod/20000217a/index.html>).

Параметры трёхосных эллипсоидов, аппроксимирующих фигуры указанных небесных тел, – размеры полуосей a , b и c , а также квадраты экваториального e_{ab}^2 и полярного e_{ac}^2 эксцентриситетов – приведены в таблице 3. Отличие эллипсоида от сферы может быть охарактеризовано близким понятием «сжатие»; в дальнейшем «эксцентриситет» и «сжатие» используются равнозначно, поскольку различия между этими понятиями в рамках исследования несущественны. Для Гипериона вследствие хаотичности его вращения существует неоднозначность определения системы координат (Harbinson et al., 2011; Sokolov et

al., 2024a). Поэтому для этого спутника были использованы параметры аппроксимирующего эллипсоида, полученные И.Е. Надеждиной и А.Э. Зубаревым (Slodarzh et al., 2022). Параметры эллипсоидов, аппроксимирующих Фобос и Эрос, были взяты из отчёта (Archinal et al., 2018). Поскольку для проекции Якоби необходимо соблюдение строгого неравенства $a > b > c$, в экспериментальных целях при построении изокол в этой проекции для Эроса малая экваториальная полуось была принята равной 5510 м.

Таблица 3. Параметры трёхосных эллипсоидов, аппроксимирующих фигуры выбранных небесных тел

	a , м	b , м	c , м	e_{ab}^2	e_{ac}^2
Спутник Марса Фобос	13 000	11 400	9100	0,231	0,51
Спутник Сатурна Гиперион	177 600	128 500	105 600	0,4765	0,6465
Астероид 433 Эрос	17 000	5500	5500	0,8953	0,8953

2.3.2. Обоснование выбора способов оценки искажений в проекциях

Для построения изокол были выбраны такие показатели искажений, как частные масштабы длин вдоль меридианов, длин вдоль параллелей и площадей, а также наибольшее искажение углов. Выбор этих показателей вместо эллипсов искажений обусловлен тем, что они позволяют подробно анализировать искажения разных типов, тогда как эллипс искажений даёт их комплексную характеристику.

В дополнение к оценке распределения искажений в проекциях по построенным изоколам, была осуществлена оценка искажений формы некоторых кратеров на поверхности выбранных небесных тел. Эта оценка производилась путём вычисления *среднеквадратического отклонения (СКО) экстремальных масштабов длин* вдоль границы каждого кратера в разных проекциях (σ_K). Такой показатель был подобран исходя из предположения, что чем меньше отличаются наибольший и наименьший масштабы длин между собой и вдоль контура, тем меньше искажена форма этого контура. Отсутствию искажений формы кратера соответствует показатель $\sigma_K = 0$; чем выше показатель, тем больше искажения. Преимущество этого показателя – возможность оценить искажения формы конкретного объекта, в то время как способы, описанные в разделе 1.2.3, относятся к абстрактным фигурам. Также посредством сравнения площади кратера в каждой проекции с его площадью в равновеликой проекции была осуществлена количественная оценка искажения площадей.

Для количественной оценки искажений форм и площадей были выбраны кратеры *Казанова* на поверхности Эроса, *Мери* на поверхности Гипериона и *Скайреш* на поверхности Фобоса. Выбранные кратеры располагаются в средних широтах (таблица 4), что позволяет на их примере оценить искажения в конических проекциях, а также сравнивать между собой искажения в азимутальных и цилиндрических проекциях. На рисунке 17 представлены изображения кратеров Скайреш (рисунок 17, а) и Казанова (рисунок 17, в), сделанные по трёхмерным моделям Эроса и Фобоса, а также изображение кратера Мери, полученное по стереопаре (рисунок 17, б).

Таблица 4. Планетоцентрические координаты центров кратеров, выбранных для количественной оценки искажений формы

Кратер	Широта (°)	Долгота (°, отсчёт от 0° до 360° на восток)
Скайреш (Фобос) (<i>Skyresh</i> , URL: https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/14264)	52,5	40
Мери (Гиперион) (<i>Meri</i> , URL: https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/3852)	31	213
Казанова (Эрос) (<i>Casanova</i> , URL: https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/1039)	46,6	124

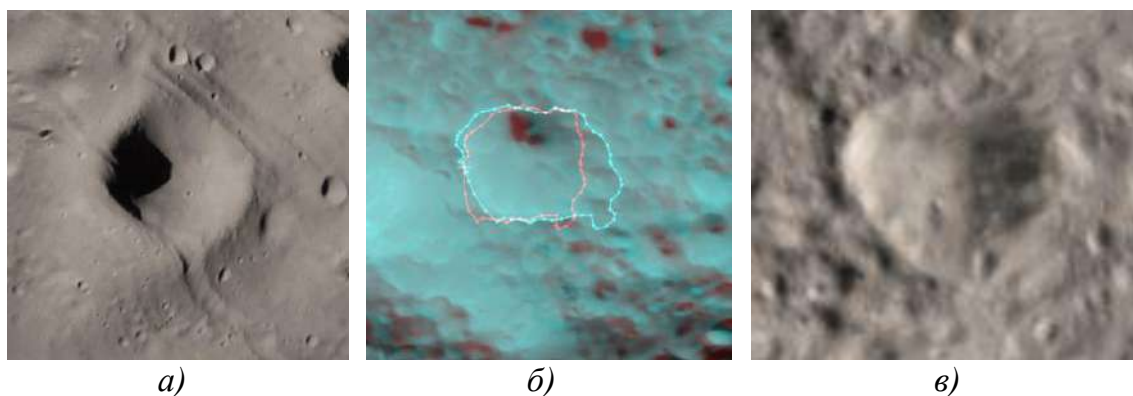


Рисунок 17. Изображения кратеров, выбранных для количественной оценки искажений форм и площадей:

а) Скайреш (M1 Phobos, URL: <https://3d-asteroids.space/moons/M1-Phobos>);

б) Мери (Sokolov et al., 2024b);

в) Казанова (433) Eros, URL: <https://3d-asteroids.space/asteroids/433-Eros>).

Следует отметить, что искажения форм и площадей кратеров зависят не только от проекции и параметров эллипсоида, но и от расположения и размеров кратеров; это необходимо учитывать при оценке. Подобранная таким образом характеристика искажений форм и площадей может применяться только в

дополнение к оценке по изоколам. Для самостоятельного использования необходимо рассчитывать показатели искажений для большего числа кратеров, расположенных в разных частях поверхности небесного тела.

Дополнительно в качестве примера оценки искажения длины *линейной формы рельефа* была вычислена длина одной из борозд на поверхности Фобоса в разных проекциях. Рассчитанные значения длины сравнивались с длиной этой борозды на эллипсоиде, вычисленной приближённо по пространственным прямоугольным координатам. Также было вычислено СКО экстремальных масштабов (σ_K) длин вдоль этой борозды для оценки искажения её формы. На рисунке 18 представлено изображение борозды (показана красной стрелкой), сделанное по трёхмерной модели Фобоса (*M1 Phobos*, URL: <https://3d-asteroids.space/moons/M1-Phobos>).



Рисунок 18. Изображение борозды на поверхности Фобоса (показана красной стрелкой), выбранной для оценки искажения длины линейной формы рельефа (*M1 Phobos*, URL: <https://3d-asteroids.space/moons/M1-Phobos>)

На качественном уровне свойства проекций исследовались *визуально* по составленным в них *фотокартам* и *гипсометрическим картам*. Использование фотокарт вместо карт поверхности для визуальной оценки допустимо, поскольку фотокарты пригодны для анализа формы объектов (при условии достаточного пространственного разрешения космических изображений), а их составление менее

трудоёмко. Суть визуальной оценки в том, что, определив по изоколам величины искажений и их распределение, можно увидеть, как искажаются объекты в соответствующих местах на карте. Дополнительно для большей наглядности составленные фотокарты были совмещены с изоколами наибольшего искажения углов. Визуальный анализ дополняет количественную оценку искажений и позволяет судить о том, как воспринимаются искажения при работе с картой.

Далее будут описаны технологии построения изокол, горизонталей для гипсометрических карт и трансформирования глобальных фотомозаик.

2.3.3. Построение изокол

При построении изокол (рисунок 19) все показатели для последующей интерполяции вычислялись с шагом в 1° по широте и по долготе. Для интерполяции значений выбранных показателей был использован инструментарий, имеющийся в ПО Golden Software Surfer 11. Текстовый файл, полученный в результате работы программы по вычислению показателей искажений, использовался для операции *Grid* – собственно интерполяции, которая осуществлялась методом *радиальных базисных функций* (РБФ). Этот метод относится к наиболее гибким благодаря возможности выбора базисной функции, однако имеет недостаток – выход за пределы исходного диапазона значений (Самсонов, 2021). Применительно к показателям искажений это может приводить, например, к появлению отрицательных масштабов длин, поэтому изоколы с некорректными значениями необходимо отслеживать и удалять. Метод РБФ был выбран в результате визуального сравнения изокол наибольшего искажения углов в азимутальной проекции для Эроса, построенных всеми методами интерполяции, имеющимися в Golden Software Surfer 11 (*Introduction to Gridding Methods*, URL: http://surferhelp.goldensoftware.com/gridmisc/gridding_methods.htm?tocpath=Gridding%7CGriding%20Methods%7C_____1).

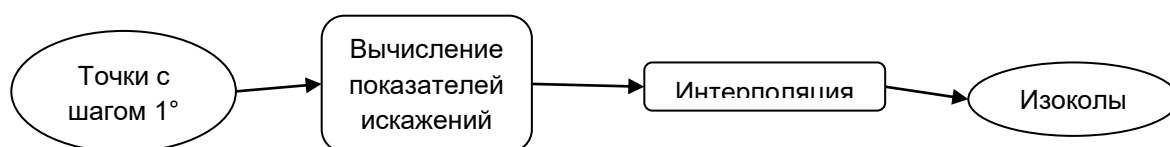


Рисунок 19. Этапы обработки данных при построении изокол

Все картографические сетки и изоколы строились в диапазоне от 0° до 90° по широте и долготе. Исключение – цилиндрические проекции меридианного сечения и сохраняющая угол между меридианом и параллелью, в которых вертикальная координата быстро возрастает с широтой. В этих двух проекциях сетки и изоколы были ограничены параллелью 60° широты. Для всех конических проекций долгота центра карты 0° , широта 45° .

2.3.4. Трансформирование фотомозаик и составление фотокарт

Для трансформирования фотомозаик по опорным точкам прямоугольные координаты в проекциях трёхосного эллипсоида были рассчитаны с шагом в 4° по широте и долготе, который предполагается достаточным для фотокарты. Первым этапом (рисунок 20) является привязка фотомозаик – переход от системы координат пикселей изображения к системе планетоцентрических координат. Этот переход упрощается за счёт того, что исходная фотомозаика создана в равнопромежуточной вдоль меридианов цилиндрической проекции сферы. Для азимутальной проекции растр дополнительно обрезается с сохранением только нужного полушария. Трансформирование привязанной фотомозаики в QGIS в цилиндрическую проекцию трёхосного эллипсоида осуществляется непосредственно из системы планетоцентрических координат. Для трансформирования в азимутальную проекцию необходимо предварительно перепроецировать растр в равнопромежуточную вдоль меридианов азимутальную проекцию сферы, установив соответствие координат опорных точек в этой проекции и в проекции трёхосного эллипсоида.

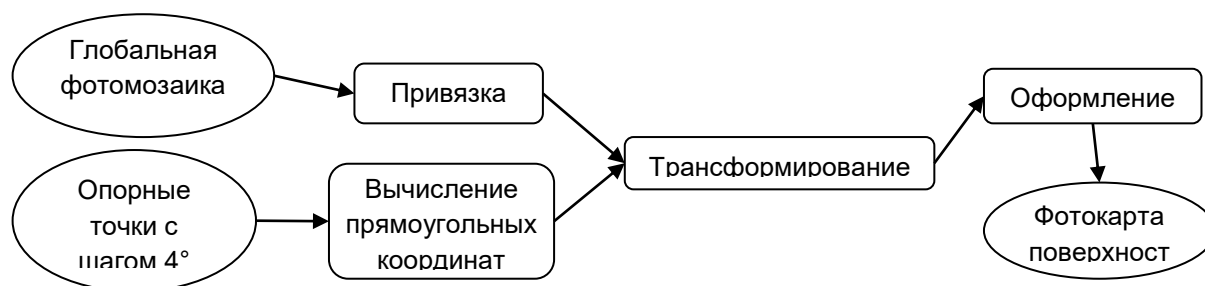


Рисунок 20. Этапы обработки данных при создании фотокарты

Для создаваемых фотокарт Фобоса, Гипериона и Эроса в проекциях меридианного сечения использована видоизменённая компоновка Шингарёвой: изображение приполярных областей дано по всему диапазону долгот, в отличие от

исходного варианта компоновки. Были составлены фотокарты Фобоса (*Нырцов и др., 2021*) и Эроса, а также карта поверхности Гипериона (*Sokolov et al., 2024a; Sokolov et al., 2024b*). Кроме того, была создана фотокарта Фобоса в цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью (*Fleis et al., 2024*). На фотокарты были нанесены названия форм рельефа Эроса (*Planetary Names: Eros, URL: <https://planetarynames.wr.usgs.gov/Page/EROS/target>*), Гипериона (*Planetary Names: Hyperion, URL: <https://planetarynames.wr.usgs.gov/Page/HYPERION/target>*) и Фобоса (*Planetary Names: Phobos, URL: <https://planetarynames.wr.usgs.gov/Page/PHOBOS/target>*) в соответствии со списком, приведённым в справочнике планетной номенклатуры. Все фотокарты составлены автором диссертации и представлены в Приложении 2 (с. 152-159).

2.3.5. Вычисление высот и составление гипсометрических карт

Для отображения рельефа на гипсометрических картах использовались *геодезические высоты*. Вычисление геодезической высоты относительно трёхосного эллипсоида основано на совместном использовании уравнения нормали к поверхности, проходящей через заданную точку, и уравнения собственно поверхности (*Флейс и др., 2019; Sokolov et al., 2024a*). Исходными данными для вычисления высот служат цифровые модели поверхности, имеющиеся в открытом доступе и представленные в прямоугольных (X, Y, Z) или полярных (Φ, λ, r) планетоцентрических координатах. Для Фобоса и Эроса были использованы цифровые модели из системы планетных данных (*PDS Asteroid Data Sets, URL: <https://sbn.psi.edu/pds/archive/asteroids.html>*), для Гипериона – цифровая модель рельефа, созданная в Комплексной лаборатории исследования внеземных территорий МИИГАиК (*Slodarzh et al., 2022; Sokolov et al., 2024a*).

Этапы обработки данных при создании гипсометрической карты представлены на рисунке 21. Исходная цифровая модель рельефа в планетоцентрических координатах содержит точки с регулярным шагом по широте и долготе. При вычислении высот относительно трёхосного эллипсоида точки получают новые координаты (Φ, λ, h) , где широта и долгота отличаются от исходных и не имеют регулярного шага. Для удобства пересчёта планетоцентрических координат в прямоугольные (в проекциях трёхосного

эллипсоида) была осуществлена предварительная интерполяция с переходом к регулярной сетке (с шагом 1°).

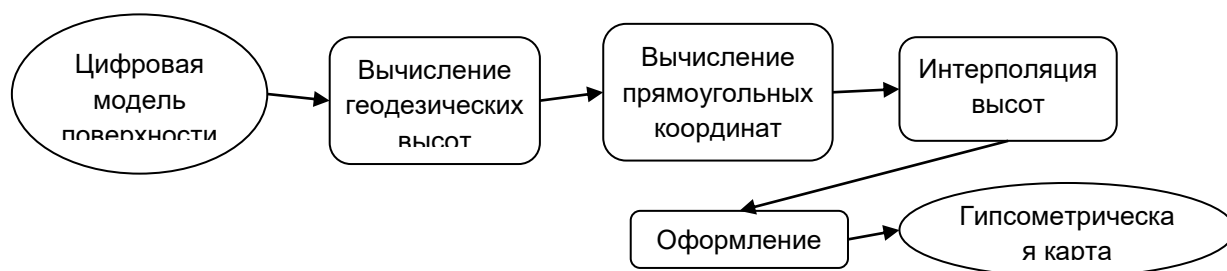


Рисунок 21. Этапы обработки данных при создании гипсометрической карты

Свойства проекций исследовались по гипсометрическим картам Эроса в цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов (Флейс и др., 2019), Гипериона (Sokolov et al., 2024b), Фобоса и Эроса в равновеликой цилиндрической проекции. Все гипсометрические карты составлены автором диссертации и представлены в Приложении 2 (с. 160-162).

Выводы к главе 2

1. В рамках диссертационного исследования получены конечные формулы цилиндрических, азимутальных и конических проекций трёхосного эллипсоида (равновеликих проекций, проекций меридианного сечения и азимутальной проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью). Эти конечные формулы, а также найденные для остальных проекций простые аппроксимирующие зависимости удобны для включения проекций трёхосного эллипсоида в математический модуль геоинформационных систем, поскольку благодаря им упрощается необходимый для этого обратный пересчёт в планетоцентрические координаты. Также полученные конечные формулы упрощают расчёт показателей искажений за счёт того, что необходимые для этого выражения производных могут быть получены аналитически.

2. С помощью нового инструментария (в виде программы на языке JavaScript и графического интерфейса к ней на HTML) по вычислению прямоугольных координат и показателей искажений построены изоколы частных масштабов длин вдоль меридианов, длин вдоль параллелей, площадей и наибольшего искажения углов в исследуемых проекциях для Фобоса, Гипериона и

Эроса. Анализ распределения искажений по изоколам является основополагающим при выборе наилучших проекций для отображения рельефа на картах.

3. В дополнение к оценке распределения искажений в проекциях по построенным изоколам, была осуществлена оценка искажений формы и площади кратеров Скайреш, Мери и Казанова на поверхности выбранных небесных тел, а также длины одной из борозд на поверхности Фобоса.

ГЛАВА 3. ВЫБОР НАИЛУЧШИХ ПРОЕКЦИЙ ТРЁХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ РЕЛЬЕФА НА КАРТАХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

3.1. Наилучшие проекции для фотокарт и карт поверхности глобального охвата⁵

На картах поверхностей небесных тел важно минимизировать искажения форм, поскольку эти карты часто используются для формирования представления об устройстве поверхности, в первую очередь о рельефе. Так, знание морфологических характеристик рельефа позволяет выдвинуть гипотезы о его происхождении, а правильно определять эти характеристики предпочтительно по карте в проекции, в которой минимизированы искажения форм. В этих целях могут быть использованы квазиравноугольные проекции трёхосного эллипсоида (проекции меридианного сечения и проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью) и равноугольная проекция Якоби.

Для карт глобального охвата в проекциях меридианного сечения целесообразно комбинировать цилиндрическую и азимутальную проекции в рамках видоизменённой компоновки Шингарёвой (*Нырцов и др., 2021*). Рассмотрим изоколы в этих двух проекциях, представленные в Приложении 1 (с. 115-118, 139-142). Отметим, что азимутальная проекция является равноугольной на начальном меридиане, меридиане 90° и в полюсе, а цилиндрическая – на начальном меридиане, на экваторе и на меридиане 90° .

Для Фобоса в цилиндрической проекции масштабы длин вдоль меридианов и параллелей к 60° широты достигают значений около 2,5, масштаб площадей – около 6 (Приложение 1, с. 139-141). В азимутальной проекции искажения растут ещё медленнее: к экватору рассматриваемые показатели (Приложение 1, с. 115-117) достигают величин 1,6-1,65 и 2,6 соответственно. Расположение изокол близко к субширотному. Наибольшее искажение углов (Приложение 1, с. 142), в

⁵ При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором в соавторстве, в которых, согласно положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Sokolov A.I., Nadezhkina I.E., Nyrtsov M.V., Zubarev A.E., Fleis M.E., Kozlova N.A. Mapping Hyperion in Projections of the Triaxial Ellipsoid Based on a New Reference Network and a Digital Terrain Model // *Solar System Research*. – 2024. – Vol. 58. – No. 1. – pp. 112-121. – DOI: 10.1134/S0038094624010106, EDN: PCXXAT.

цилиндрической проекции равно нулю на экваторе, начальном меридиане и меридиане 90° , плавно возрастает по мере удаления от этих линий, достигая 10° - 11° к 60° широты и 45° долготы. В азимутальной проекции (Приложение 1, с. 118) этот показатель на экваторе не превышает 3° (около 30° долготы). Интересно наличие замкнутой области незначительного повышения показателя в районе 30° - 60° широты и 60° - 80° долготы.

Для Гипериона все показатели чуть выше. В цилиндрической проекции масштабы длин вдоль меридианов и параллелей достигают значений около 3, масштаб площадей – около 9 (Приложение 1, с. 139-141). В азимутальной проекции искажения также растут медленнее, чем в цилиндрической: к экватору рассматриваемые показатели (Приложение 1, с. 115-117) достигают величин 1,65-1,7 и 2,8 соответственно. Расположение изокол сильнее отличается от субширотного, чем в случае Фобоса. Наибольшее искажение углов (Приложение 1, с. 142), в цилиндрической проекции равно нулю на экваторе, начальном меридиане и меридиане 90° , плавно возрастает по мере удаления от этих линий, достигая 30° - 32° к 60° широты и 45° долготы. В азимутальной проекции этот показатель (Приложение 1, с. 118) на экваторе не превышает 12° (около 23 - 24° долготы). Имеется область повышения показателя в районе 30° - 60° широты и 60° - 80° долготы.

Для Эроса значения всех показателей гораздо выше. Так, масштабы длин вдоль меридианов и параллелей и масштаб площадей в цилиндрической проекции (Приложение 1, с. 139-141) к 60° широты достигают 6-7, 25-30 и 40-50 соответственно. В азимутальной проекции масштабы растут не столь стремительно и в случае с Эросом: перечисленные показатели не превышают 2 для масштабов длин и 4 для масштаба площадей (Приложение 1, с. 115-117). Расположение изокол значительно отличается от субширотного; кроме того, вблизи 50° долготы длины и площади практически не искажаются, а при долготах меньше 50° есть области, где они преуменьшаются – в отличие от Фобоса, для которого масштабы длин и площадей всюду больше 1. Наибольшее искажение углов в цилиндрической проекции (Приложение 1, с. 142) при удалении от экватора, начального меридиана и меридиана 90° растёт крайне быстро и достигает 120° и более. При этом имеется дополнительный меридиан, где искажения углов практически отсутствуют – 8° - 9°

долготы. Однако при удалении от него рост показателя ещё более стремительный. В азимутальной проекции наибольшее искажение углов (Приложение 1, с. 118) достигает 70° на экваторе при долготах 5° - 20° , при этом имеется линия минимальных искажений углов – примерно вдоль меридиана 45° . При долготах больше 50° рассматриваемый показатель не выше 15° .

Обратимся к среднеквадратическому отклонению экстремальных масштабов длин (σ_K) вдоль границ кратера (таблица 5), которое характеризует искажение его формы, рассчитанному для кратеров Казанова на поверхности Эроса, Мери на поверхности Гипериона и Скайреш на поверхности Фобоса. Форма кратеров сильнее искажается в цилиндрической проекции меридианного сечения (для кратера Скайреш $\sigma_K = 0,321$, для кратера Мери $\sigma_K = 0,253$, для кратера Казанова $\sigma_K = 0,701$). В азимутальной проекции меридианного сечения эти величины равны 0,008, 0,021 и 0,032 соответственно. Можно заключить, что с точки зрения искажений формы азимутальная проекция является наилучшей. Поэтому при использовании проекций меридианного сечения в рамках видоизменённой компоновки Шингарёвой азимутальную проекцию нужно распространять не только на высокие широты, но и на средние широты (до 30 - 40°), где и расположены упомянутые кратеры.

Таблица 5. СКО экстремальных масштабов длин и площадь кратеров в равноугольной проекции Якоби и в квазиравноугольных проекциях

Проекция	СКО экстремальных масштабов длин		
	Казанова (Эрос)	Мери (Гиперион)	Скайреш (Фобос)
Равноугольная Якоби	0,002	0,059	0,036
Азимутальная меридианного сечения	0,032	0,021	0,008
Цилиндрическая меридианного сечения	0,701	0,253	0,321
Сохраняющая угол между меридианом и параллелью азимутальная	0,058	0,037	0,008
Сохраняющая угол между меридианом и параллелью цилиндрическая	0,671	0,126	0,232

Из приведённого анализа распределения искажений в проекциях меридианного сечения можно сделать два вывода. Во-первых, искажения в азимутальной проекции достигают к экватору гораздо меньших значений, чем искажения в цилиндрической проекции – к параллели 60° широты. Во-вторых, чем правее расположен эллипсоид на графике (рисунок 15), тем больше все искажения в цилиндрической проекции по сравнению с азимутальной.

Эти выводы подтверждаются при визуальном сопоставлении фотокарт трёх небесных тел. По фотокарте Фобоса (Приложение 2, с. 150, 152) видно, что цилиндрическая проекция меридианного сечения трёхосного эллипсоида, используемая для широт от -60° до 60° , характеризуется незначительными искажениями. Кратеры, расположенные вблизи экватора и вблизи полюсов, имеют округлую форму. Преимущества видоизменённой компоновки Шингарёвой видны и при рассмотрении переходной полосы между параллелями 30° и 60° . Если в цилиндрической проекции форма расположенных здесь кратеров уже начинает искажаться, то в азимутальной остаётся близкой к окружности (рисунок 22, а-б). Таким образом, выявленное при количественной оценке искажений формы преимущество азимутальной проекции подтверждается и визуально. Также в азимутальной проекции с меньшими искажениями передаются линейные формы рельефа (борозды к северу от области Лапуты).

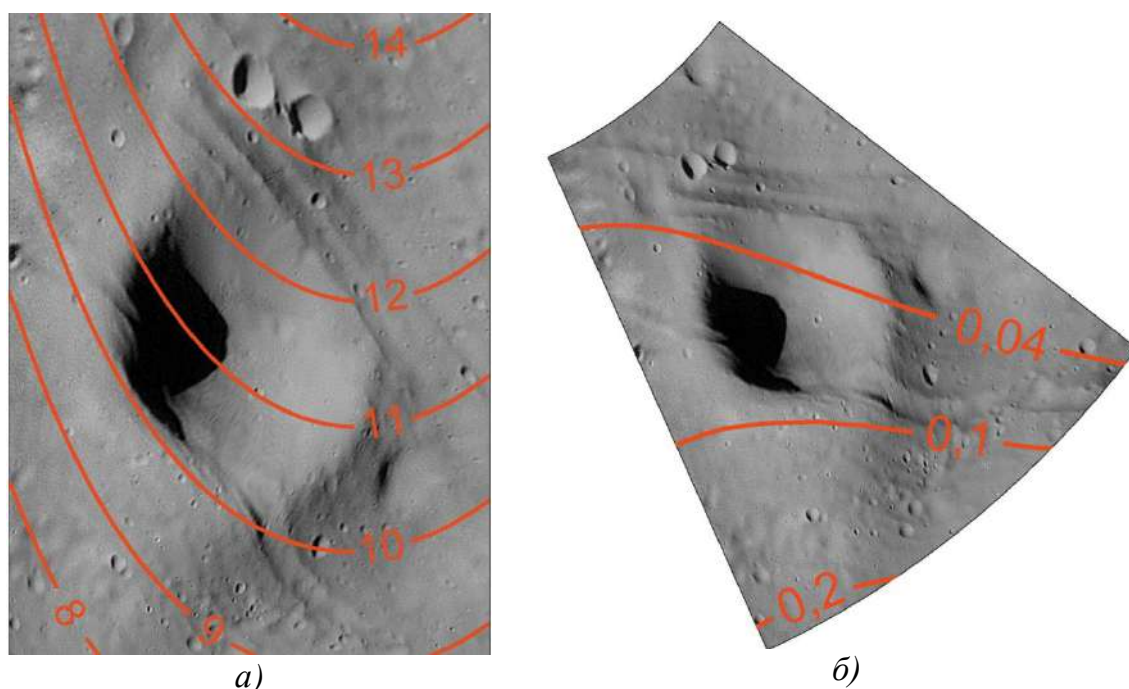


Рисунок 22. Изображение кратера Скайреш в проекциях меридианного сечения с изоколами наибольшего искажения углов ($^\circ$): а) в цилиндрической проекции ($\sigma_K = 0,321$); б) в азимутальной проекции ($\sigma_K = 0,008$)

При построении карты поверхности Гипериона (Приложение 2, с. 156, 157) переходная область между азимутальной и цилиндрической проекциями была смещена к экватору. Такое решение было принято после сопоставления изокол наибольшего искажения углов в этих двух проекциях (Sokolov et al., 2024a). Это позволило уменьшить искажения при отображении рельефа, особенно искажения

форм. Проведённая количественная оценка искажений формы кратера Мери, расположенного в переходной области, подтверждает необходимость подобного изменения компоновки по сравнению с картой Фобоса.

Наконец, фотокарта Эроса (Приложение 2, с. 154, 155) показывает, что искажения в цилиндрической проекции для этого небесного тела критически возрастают уже в непосредственной близости от экватора. Такое распределение искажений затрудняет комбинирование двух проекций меридианного сечения в рамках видоизменённой компоновки Шингарёвой. Поэтому для небесных тел с очень большими значениями эксцентриситетов использование проекций меридианного сечения для глобального картографирования не рекомендуется.

Таким образом, для большинства небесных тел, исключая те из них, фигуры которых аппроксимируются трёхосными эллипсоидами с большими значениями эксцентриситетов (расположены на рисунке 15 вблизи Эроса), проекции меридианного сечения обеспечивают отображение рельефа на картах с минимальными искажениями форм.

Обратимся теперь к проекциям, сохраняющим угол между меридианом и параллелью. Отметим, что азимутальная проекция является равноугольной на начальном меридиане и в полюсе, а цилиндрическая – только на начальном меридиане. По сравнению с проекциями меридианного сечения, изоколы масштаба длин вдоль параллелей и площадей в этих проекциях распределены похожим образом. А вот изоколы масштаба длин вдоль меридианов и наибольшего искажения углов распределены иначе, чем в проекциях меридианного сечения. В цилиндрической проекции (Приложение 1, с. 143-146) максимальные значения наибольшего искажения углов достигаются в области, расположенной на пересечении меридиана 90° с экватором и параллелями 10° - 20° широты. Такое распределение не позволяет уменьшать искажения углов путём сдвига переходной области в рамках компоновки Шингарёвой, как это было сделано для карт Гипериона. Поскольку при использовании такой компоновки предполагается, что искажения в приэкваториальных областях минимальны, а в цилиндрической проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, это не так, то использование проекций этого класса в указанной компоновке нецелесообразно.

В статье (Fleis et al., 2024) сравниваются между собой фотокарты Фобоса, составленные в цилиндрических проекциях меридианного сечения (Приложение 2, с. 150, 152) и сохраняющей угол между меридианом и параллелью (Приложение 2, с. 151, 153). Сохранение формы крупных кратеров, различимых по фотомозаике, в целом, лучше обеспечивается в проекциях меридианного сечения. Однако у проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, вблизи параллелей 50° - 60° имеется область, где она близка к равноугольной (Приложение 1, с. 146), вследствие чего форма кратера Скайреш (рисунок 23, а-б), расположенного именно в этой области, искажается несколько меньше, чем в проекции меридианного сечения ($\sigma_K = 0,232$ и $\sigma_K = 0,321$ соответственно).

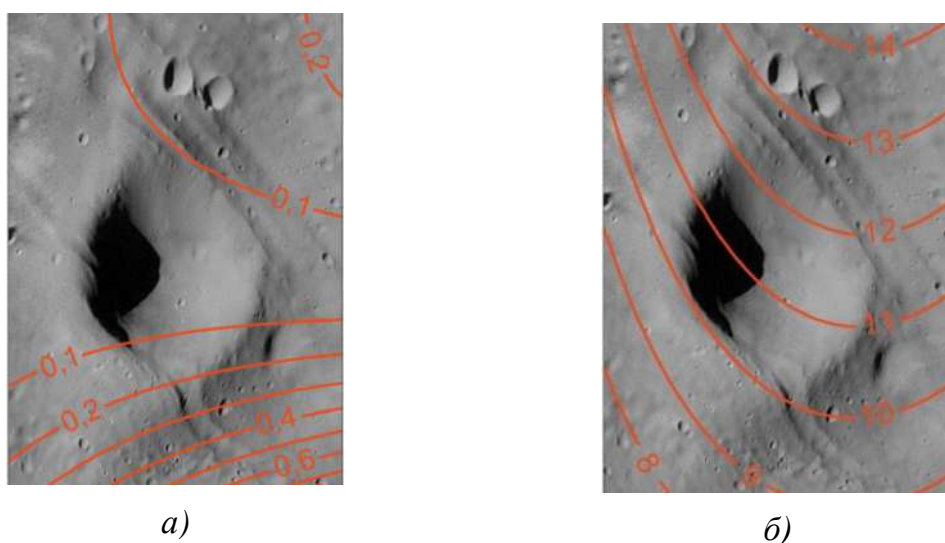


Рисунок 23. Изображение кратера Скайреш в цилиндрических проекциях с изоколами наибольшего искажения углов ($^{\circ}$):
а) в проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью ($\sigma_K = 0,232$);
б) в проекции меридианного сечения ($\sigma_K = 0,321$)

Азимутальная проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью (Приложение 1, с. 119-122), обладает лучшими свойствами, чем цилиндрическая проекция, но худшими, чем азимутальная проекция меридианного сечения. Форма борозды на поверхности Фобоса, расположенной преимущественно в приполярных широтах, искажается несколько меньше в азимутальной проекции меридианного сечения ($\sigma_K = 0,075$), чем в азимутальной проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью ($\sigma_K = 0,088$). Азимутальная проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью, имеет теоретическое значение в сопоставлении с азимутальной проекцией меридианного сечения: чем меньше отличия картографических сеток в этих

проекциях, тем ближе обе проекции к равноугольным. Рассмотренные две азимутальные проекции могут быть взаимозаменяемы только для приполярных областей, не выше 50° - 40° широты. Так, для кратера Скайреш на поверхности Фобоса, широта центра которого $52,5^\circ$, в обеих проекциях $\sigma_K = 0,008$. Для кратеров Казанова на поверхности Эроса и Мери на поверхности Гипериона (рисунок 24, а-б), расположенных ближе к экватору ($46,6^\circ$ и 31°), этот показатель в проекции меридианного сечения и в проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, несколько различается (таблица 5).

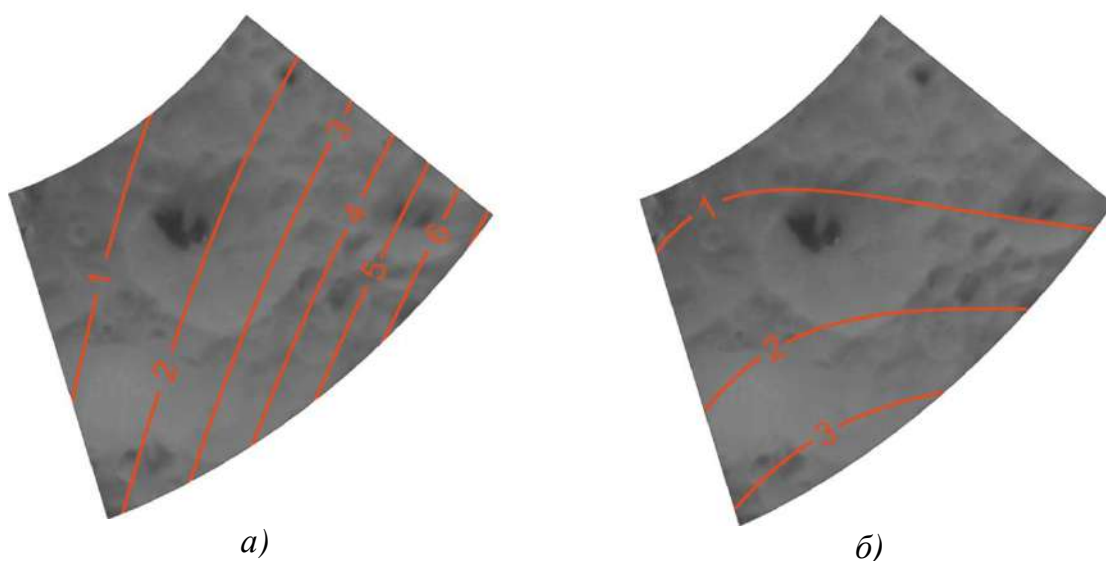


Рисунок 24. Изображение кратера Мери в азимутальных проекциях с изоколами наибольшего искажения углов ($^\circ$):

а) в проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью ($\sigma_K = 0,037$);

б) в проекции меридианного сечения ($\sigma_K = 0,021$)

Таким образом, два класса квазиравноугольных проекций схожи по характеру искажений, но различны по их распределению. Особенно заметны эти различия для цилиндрических проекций. Распределение искажений в проекциях меридианного сечения лучше подходит для комбинирования азимутальной и цилиндрической проекций этого класса в единой компоновке. Это позволяет считать их наилучшими для глобальных карт поверхности, за исключением карт небесных тел, фигуры которых аппроксимируются трёхосными эллипсоидами с большими значениями эксцентриситетов.

Хорошей альтернативой проекциям меридианного сечения может быть равноугольная проекция Якоби. Важной особенностью этой проекции является наличие так называемых *круговых точек*, в которых масштаб длин стремится к бесконечности. Эти точки имеют долготы 0° и 180° , а их широта зависит от

эксцентриситетов эллипсоида. Круговая точка для Фобоса имеет широту около 38° , для Гипериона около 20° , для Эроса менее 1° . Как видно по представленным в Приложении 1 (с. 147-148) изоколам, искажения длин и площадей вблизи круговой точки могут быть значительными.

Вновь обратимся к количественной характеристике искажений формы кратеров Казанова, Мери и Скайреш (таблица 5). Обратим внимание, что для двух из них в проекции Якоби среднеквадратическое отклонение экстремальных масштабов длин достигает бóльших значений (кратер Скайреш – 0,036, кратер Мери – 0,059), чем в азимутальной проекции меридианного сечения (0,008 и 0,021 соответственно). Таким образом, равноугольная проекция не обеспечивает лучшего сохранения формы этих двух кратеров. Причиной может являться относительно близкое их расположение к круговой точке. Форма борозды на поверхности Фобоса искажается в этой проекции тоже несколько сильнее ($\sigma_K = 0,103$), чем в рассмотренных выше азимутальных проекциях. В то же время для кратера Казанова (рисунок 25, а-б) в проекции Якоби $\sigma_K = 0,002$, что значительно меньше, чем в азимутальной проекции меридианного сечения ($\sigma_K = 0,032$). Для Эроса круговая точка расположена вблизи экватора, поэтому форма кратера в средних широтах меньше искажается именно в проекции Якоби.

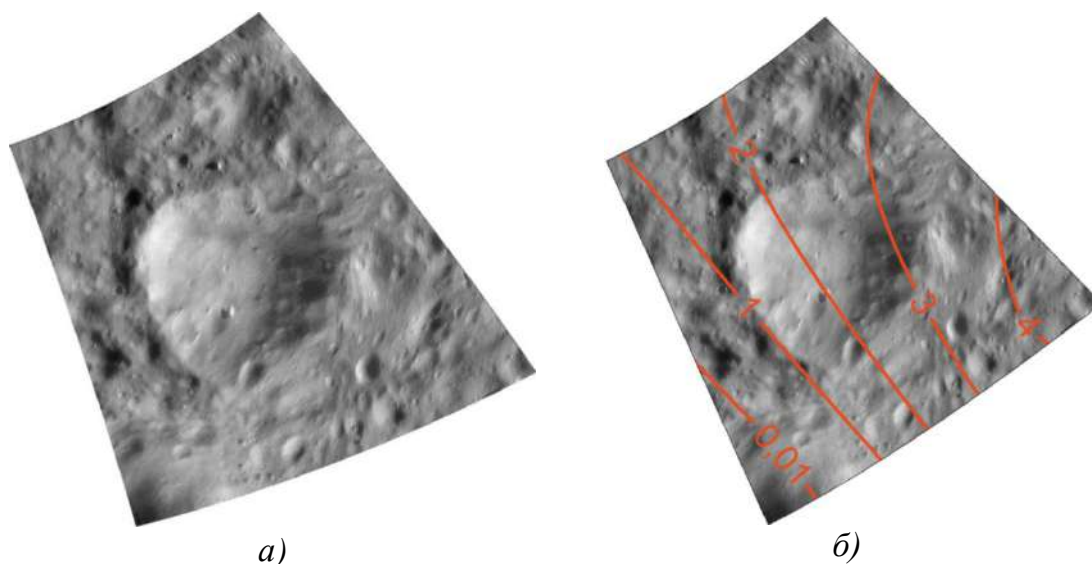


Рисунок 25. Изображение кратера Казанова в разных проекциях:

- а) в равноугольной проекции Якоби ($\sigma_K = 0,002$);
- б) в азимутальной проекции меридианного сечения ($\sigma_K = 0,032$) с изоколами наибольшего искажения углов ($^\circ$)

Итак, недостатком проекции Якоби с точки зрения глобального картографирования является то, что масштабы длин и площадей значительно

возрастают в окрестности круговой точки (в ней оба масштаба стремятся к бесконечности). С большими искажениями передаётся участок поверхности в диапазоне $\pm 10-15^\circ$ от начального меридиана по долготе и $\pm 10-15^\circ$ от параллели круговых точек по широте. Проекция меридианного сечения в компоновке для глобального картографирования, хотя и не обеспечивают строгой равноугольности, такого недостатка лишены. Однако проекцию Якоби целесообразно использовать для трёхосных эллипсоидов со значительными экваториальными и полярными сжатиями, поскольку для них проекции меридианного сечения не рекомендуются.

Таким образом, для отображения рельефа на картах поверхностей и фотокартах небесных тел с небольшими экваториальным и полярным сжатиями наилучшим образом подходят проекции меридианного сечения, а в случае, если сжатия значительны – проекция Якоби. При использовании проекций меридианного сечения необходимо смещать переходную область между азимутальной и цилиндрической проекциями в рамках единой компоновки ближе к экватору при увеличении эксцентриситетов эллипсоида (*Sokolov et al., 2024a*). На рисунке 26 показаны примерные области графика распределения эллипсоидов по эксцентриситетам, где та или иная проекция может считаться наилучшей для отображения рельефа на фотокартах и картах поверхностей небесных тел.

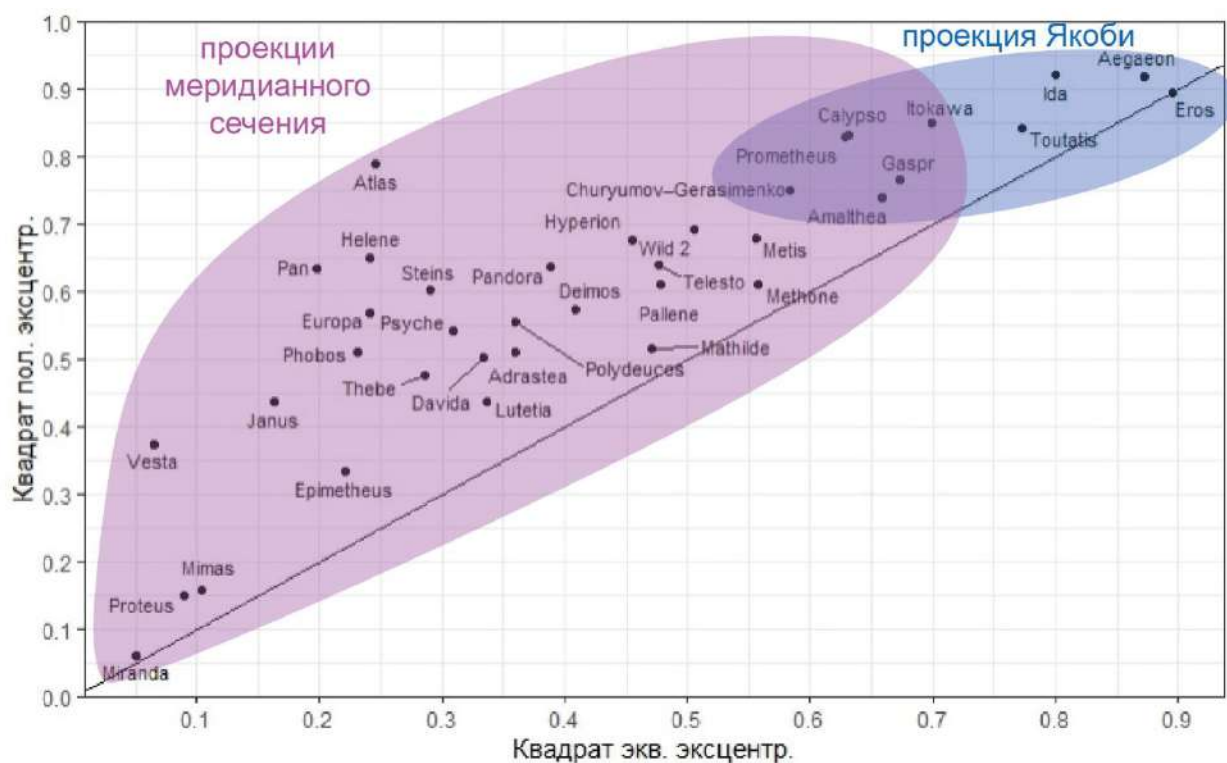


Рисунок 26. Наилучшие проекции для отображения рельефа на фотокартах и картах поверхности глобального охвата (границы областей условные)

3.2. Наилучшие проекции для гипсометрических карт глобального охвата⁶

При отображении рельефа на гипсометрических картах важно уменьшить искажения площадей, в то же время не пренебрегая полностью искажениями форм. В этих целях для небесных тел, фигуры которых целесообразно аппроксимировать трёхосным эллипсоидом, могут быть использованы как равновеликие проекции, так и проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов. Выбор наилучших из них основывается на сравнении распределения искажений.

При анализе искажений в равновеликой цилиндрической проекции (Приложение 1, с. 133-135), прежде всего, следует отметить уменьшение масштаба длин вдоль меридианов от 1 на экваторе до 0 в полюсе. В результате изображение становится трудно различимым выше 50°-60° широты. Наглядный пример – гипсометрическая карта Гипериона (*Sokolov et al., 2024b*), приведённая в Приложении 2 (с. 158), на которой с трудом различаются горизонтали выше 60° широты (рисунок 27). Решением проблемы может быть совмещение цилиндрической и азимутальной проекций в компоновке, аналогичной той, что рассматривалась в разделе 3.1 для проекций меридианного сечения.

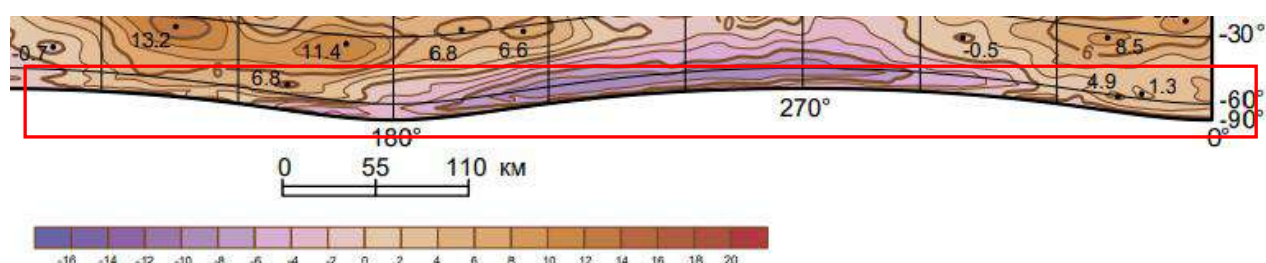


Рисунок 27. Фрагмент гипсометрической карты Гипериона в равновеликой цилиндрической проекции (красной рамкой выделены трудноразличимые горизонтали выше 60° широты)

Судя по изоколам и картографической сетке, для Эроса указанная особенность равновеликой цилиндрической проекции наблюдается уже на 40-й параллели. Искажения других типов возрастают ещё сильнее: так, наибольшее искажение углов (Приложение 1, с. 135) достигает 100° уже к 30° широты на

⁶ При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором в соавторстве, в которых, согласно положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Sokolov A.I., Nyrtsov M.V., Fleis M.E., Nadezhdina I.E. Investigation and cartographic representation of Hyperion space images photogrammetric processing results // *Planetary and Space Science*. – 2024. – Vol. 249. – 105945. – DOI: 10.1016/j.pss.2024.105945, EDN: GYXPGD.

меридианах 10° - 20° . Для этого небесного тела искажения останутся значительными даже при совмещении двух равновеликих проекций в вышеупомянутой компоновке (и при должном смещении переходной области к экватору).

Проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов, интересны в контексте гипсометрических карт тем, что обеспечивают баланс между искажениями площадей и углов (а, следовательно, и форм). На картах в таких проекциях не будет больших искажений как очертаний горизонталей, так и площадей высотных уровней. В таблице 6 приведены результаты количественной оценки искажений форм и площадей кратеров Казанова, Мери и Скайреш в равновеликих проекциях и в проекциях, сохраняющих длины вдоль меридианов. Таблица показывает, что лучший баланс искажений форм и площадей достигается в азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов: искажения площадей в этой проекции небольшие, а формы искажаются ощутимо меньше, чем в равновеликой азимутальной проекции. С точки зрения глобального картографирования, целесообразно использовать такое преимущество цилиндрических проекций, как отсутствие искажений на экваторе, и комбинировать их с азимутальными проекциями в рамках видоизменённой компоновки Шингарёвой, по аналогии с картами в проекциях меридианного сечения.

Таблица 6. СКО экстремальных масштабов длин и площадь кратеров в равновеликих проекциях и в проекциях, сохраняющих длины вдоль меридианов

Проекция	Площадь, км ²			СКО экстремальных масштабов длин		
	Казанова (Эрос)	Мери (Гиперион)	Скайреш (Фобос)	Казанова (Эрос)	Мери (Гиперион)	Скайреш (Фобос)
Равновеликая азимутальная	0,467	749	1,881	0,064	0,045	0,017
Равновеликая цилиндрическая	0,467	749	1,881	0,613	0,374	0,899
Сохраняющая длины вдоль меридианов азимутальная	0,471 (100,9%)	782 (104,4%)	1,92 (102,1%)	0,036	0,034	0,011
Сохраняющая длины вдоль меридианов цилиндрическая	0,811 (173,7%)	1034 (138,1%)	4,14 (220,1%)	0,511	0,271	0,641

Длина борозды на поверхности Фобоса также меньше всего искажена в азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов (на 0,1%). Это

объясняется тем, что бóльшая её часть расположена вблизи полюса. Поэтому в обеих цилиндрических проекциях (равновеликой и сохраняющей длины вдоль меридианов) длина борозды преувеличена более чем в 2,5 раза.

Таким образом, проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов, следует признать наилучшими для гипсометрических карт. При этом для небесных тел с небольшим экваториальным и полярным сжатием равновеликие проекции также могут использоваться, при условии комбинирования цилиндрических и азимутальных проекций в рамках всё той же компоновки. Однако, чем больше экваториальное и полярное сжатие, тем более целесообразным становится выбор в пользу проекций, сохраняющих длины вдоль меридианов. Так, для Эроса в равновеликой цилиндрической проекции искажения значительно возрастают уже в районе 20-й параллели, особенно вблизи начального меридиана. Это снижает целесообразность комбинирования двух равновеликих проекций в рамках видоизменённой компоновки Шингарёвой. На рисунке 28 показаны области (границы даны условно) графика распределения эллипсоидов по эксцентриситетам, где та или иная проекция может считаться наилучшей для отображения рельефа на гипсометрических картах небесных тел.

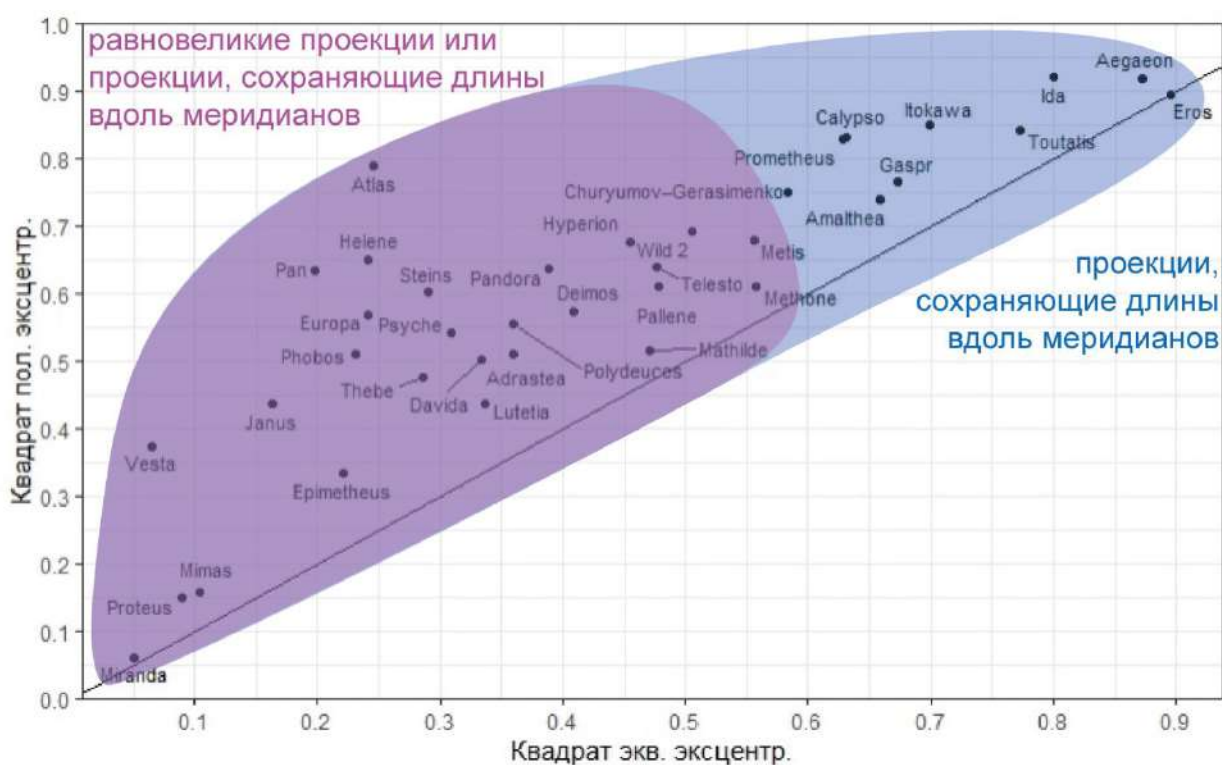
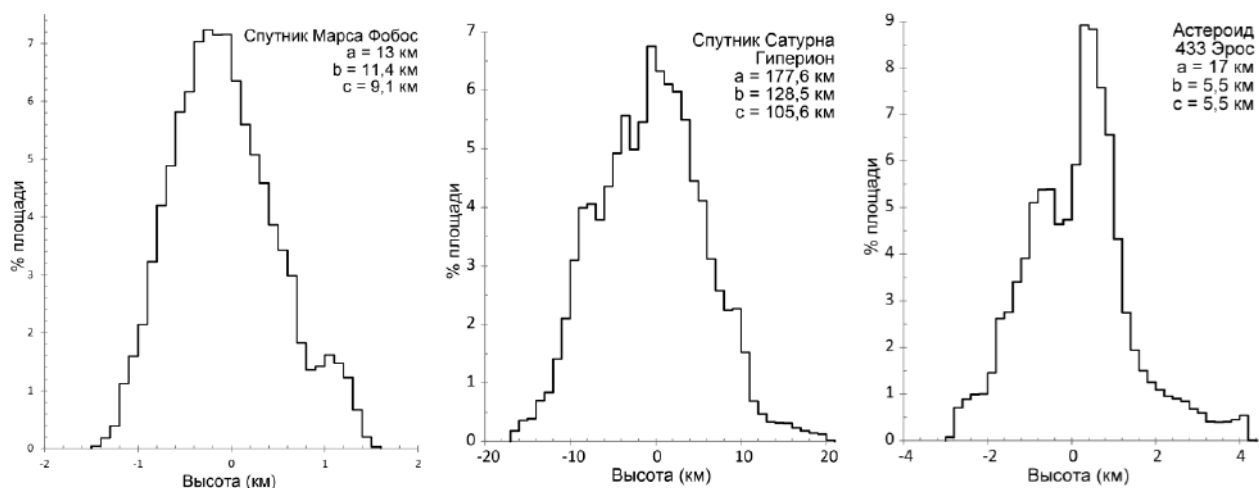


Рисунок 28. Наилучшие проекции для отображения рельефа на гипсометрических картах глобального охвата (границы областей условные)

Равновеликая цилиндрическая проекция, представленная в диссертации в виде конечных формул (Флейс и др., 2022), удобна для расчёта площадей любых объектов на поверхности, в том числе кратеров и высотных ступеней, и их сопоставления. В статье (Sokolov et al., 2024b) по карте в равновеликой цилиндрической проекции измеряется площадь кратера на поверхности Гипериона. Карты в равновеликих проекциях служат инструментом для таких измерений в условиях отсутствия в ГИС-пакетах возможности их выполнения непосредственно на эллипсоиде.

Расчёт площадей высотных ступеней в равновеликой проекции позволяет получить распределение участков поверхности небесного тела по высотам, которое может быть представлено в виде гистограммы или кривой с накоплением (*гипсографической кривой*). Такое представление позволяет анализировать как рельеф, так и отклонения референц-поверхности от физической поверхности. На рисунке 29 представлены *диаграммы высотных уровней* (англ. *hypsograms*) для Фобоса, Гипериона и Эроса. Построенные диаграммы могут служить инструментом, позволяющим оценить соответствие аппроксимирующего эллипсоида физической поверхности небесного тела. Для Гипериона (Sokolov et al., 2024a) определён наилучший эллипсоид, выведенный под условием минимума отклонения от физической поверхности, без учёта физических параметров вращения и центра масс, поэтому диаграмма высотных ступеней имеет вид нормального распределения, с пиком в центре. Если центр масс тела не совпадает с геометрическим центром его фигуры или при различиях в направлении осей фигуры и осей системы координат, диаграмма будет иметь значимые отклонения от нормального распределения.



а) б) в)
Рисунок 29. Диаграммы высотных уровней: а) Фобос; б) Гиперион; в) Эрос

3.3. Наилучшие проекции для карт поверхности и гипсометрических карт регионального охвата

Конические проекции трёхосного эллипсоида, формулы которых получены в главе 2, удобны для регионального картографирования, поскольку предоставляют возможность выбрать точку (центр карты), где отсутствуют искажения всех типов. Изоколы в этих проекциях (Приложение 1, с. 123-132) были построены таким образом, чтобы отсутствовали искажения в точке пересечения начального меридиана и параллели с широтой 45° .

Анализ изокол показывает, что конфигурация участка поверхности, где искажения всех типов минимальны, зависит от эксцентриситетов эллипсоида. Для Фобоса это область близка к широтной полосе. Так, наибольшее искажение углов в равновеликой проекции (рисунок 30) не превышает 1° в полосе широт 35° - 55° , которая при возрастании долготы слегка смещается в сторону полюса примерно к 39° - 58° широты. Для Гипериона такой сдвиг к полюсу заметнее: наибольшее искажение углов не превышает 1° в полосе широт 32° - 58° , которая при возрастании долготы смещается в сторону полюса примерно к 43° - 63° широты. Наконец, для Эроса зона минимальных искажений углов имеет нижнюю границу по начальному меридиану около 30° широты, а по меридиану 90° выше 60° широты.

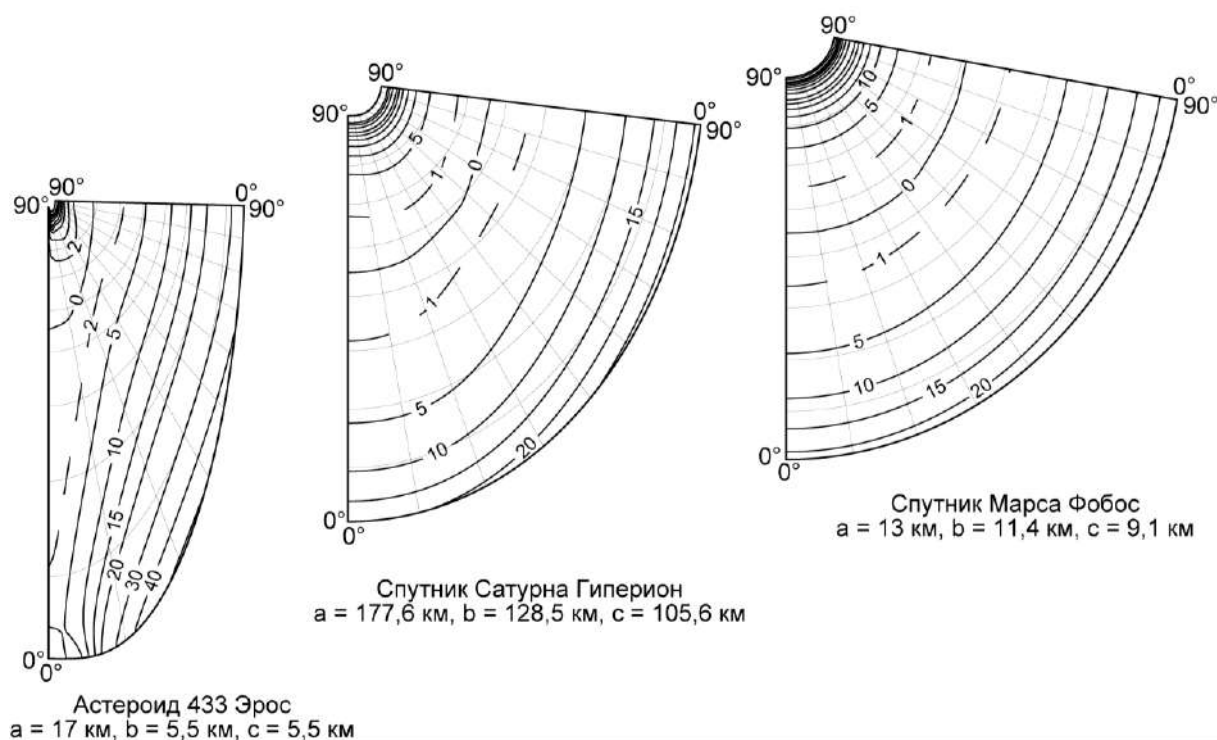


Рисунок 30. Наибольшее искажение углов ($^{\circ}$) в равновеликой конической проекции

Эти особенности проекции определяются положением линии касания эллипсоида и эллиптического конуса. В конической проекции меридианного сечения на конфигурацию области с минимальными искажениями углов влияет также тот факт, что эта проекция является равноугольной на начальном меридиане и меридиане 90° . Такое свойство позволяет заключить, что для карт поверхности регионального охвата более предпочтительны именно проекции меридианного сечения. В то же время отличия распределения изокол между проекциями с различным характером искажений невелики, особенно в окрестности центра карты, поэтому все конические проекции можно считать взаимозаменяемыми.

Тезис о взаимозаменяемости конических проекций подтверждается при рассмотрении фотокарт одного и того же участка поверхности Эроса в различных по характеру искажений проекциях (рисунок 31), представленных в пособии (Нырцов и др., 2022). Не глядя на подписи, затруднительно увидеть разницу между тремя фотокартами.

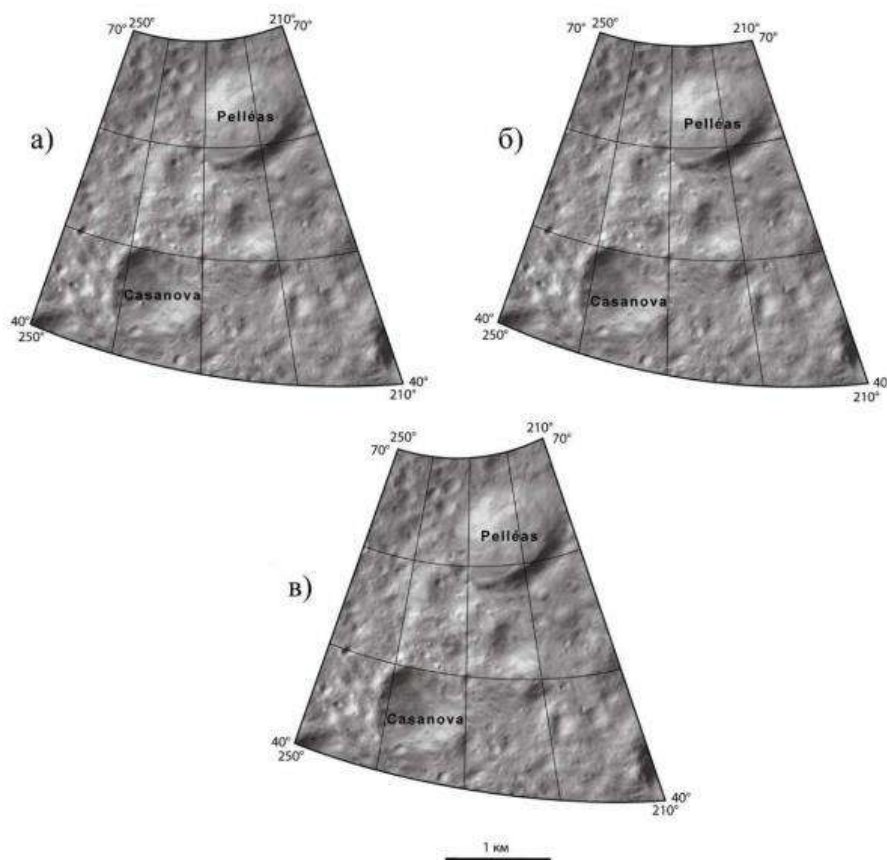


Рисунок 31. Фотокарты участка поверхности Эроса в конических проекциях (Нырцов и др., 2022): а) сохраняющей длины вдоль меридианов; б) равновеликой; в) меридианного сечения

Количественная оценка искажений форм и площадей кратеров Казанова, Мери и Скайреш также показывает, что при подборе параметров конических проекций в соответствии с координатами центров кратера эти искажения во всех трёх конических проекциях практически одинаковы. Схожесть показателей иллюстрирует таблица 7. Можно заключить, что для карт поверхностей и гипсометрических карт регионов, расположенных в средних широтах и простирающихся на 15° - 20° по широте и долготе, наилучшей может считаться любая из трёх конических проекций.

Таблица 7. Искажения форм и площадей кратеров в конических проекциях

Коническая проекция	СКО экстремальных масштабов длин			Площадь, км ²		
	Казанова (Эрос)	Мери (Гиперион)	Скайреш (Фобос)	Казанова (Эрос)	Мери (Гиперион)	Скайреш (Фобос)
Равновеликая	0,01	0,009	0,002	0,467	749	1,881
Сохраняющая длины вдоль меридианов	0,009	0,009	0,001	0,468	750	1,882
Меридианного сечения	0,012	0,01	0,001	0,469	751	1,883

Измерения длины и формы борозды на поверхности Фобоса показывают, что для территорий больших размеров (борозда простирается более чем на 65° по широте и более чем на 135° по долготе) искажения в конических проекциях могут уже значительно различаться. Так, среднеквадратическое отклонение экстремальных масштабов длин вдоль линии борозды составляет 0,505 в равновеликой проекции, 0,159 в проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, и 0,062 в проекции меридианного сечения. В тоже время длина борозды в этих проекциях искажена на 5,8%, на 4,6% и на 5,8% соответственно. То есть искажение формы борозды в проекции меридианного сечения меньше, чем в двух других проекциях, а её длина искажается незначительно во всех проекциях.

Следует также обратить внимание, что во всех трёх конических проекциях область минимальных искажений для Эроса не ограничивается окрестностью линии касания. Имеется также полоса, расположенная примерно вдоль 50° долготы и простирающаяся до экватора, вдоль которой искажения практически отсутствуют. При этом, например, в проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, к западу от этой полосы частные масштабы длин вдоль параллелей и площадей уменьшаются, к востоку – увеличиваются. Для Фобоса и Гипериона в этой проекции указанные частные масштабы всюду больше или равны единице.

Таким образом, конические проекции целесообразно использовать для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах регионального охвата, при этом расположение области с минимальными искажениями тем ближе к субширотному, чем меньше экваториальное сжатие эллипсоида. Для карт регионов, расположенных в средних широтах и простирающихся на 15° - 20° по широте и долготе, наилучшей может считаться любая из трёх конических проекций.

Выводы к главе 3

1. Для отображения рельефа на картах поверхностей и фотокартах небесных тел с небольшим экваториальным и полярным сжатием наилучшим образом подходят проекции меридианного сечения, а в случае значительного экваториального и полярного сжатия – проекция Якоби. Для гипсометрических карт наилучшим образом подходят проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов. При этом для небесных тел с небольшим экваториальным и полярным

сжатием равновеликие проекции также могут использоваться. Однако, чем больше экваториальное и полярное сжатие, тем более целесообразным становится выбор в пользу проекций, сохраняющих длины вдоль меридианов.

2. При отображении рельефа на картах поверхности, фотокартах и гипсометрических картах минимизация искажений в указанных выше проекциях достигается путём комбинирования цилиндрических и азимутальных проекций в составе единой компоновки. При этом необходимо смещать переходную область между азимутальной и цилиндрической проекциями ближе к экватору при увеличении эксцентриситетов эллипсоида.

3. Конические проекции целесообразно использовать для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах регионального охвата, при этом расположение области с минимальными искажениями тем ближе к субширотному, чем меньше экваториальное сжатие эллипсоида. Для карт регионов, расположенных в средних широтах и простирающихся на 15° - 20° по широте и долготе, наилучшей может считаться любая из трёх конических проекций.

4. Равновеликая цилиндрическая проекция, представленная в виде конечных формул, удобна для расчёта площадей любых объектов на поверхности, в том числе кратеров и высотных ступеней, и их сопоставления. Построенные по карте в равновеликой проекции диаграммы высот могут служить инструментом анализа поверхностей небесных тел на предмет отклонения референц-поверхности от физической.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследования

В исследовании определены проекции, используемые для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах небесных тел. Рассмотрены способы получения таких проекций для трёхосного эллипсоида. Получены конечные формулы цилиндрических, азимутальных и конических проекций трёхосного эллипсоида, а при невозможности их получения – простые аппроксимирующие зависимости для вычисления координат в проекциях. Эти формулы удобны для включения в математический модуль геоинформационных систем и для упрощения расчёта показателей искажений. Разработан новый инструментарий по вычислению прямоугольных координат в проекциях трёхосного эллипсоида и показателей искажений. На основе исследования проекций трёхосного эллипсоида путём оценки искажений по изоколам и на примере отдельных кратеров, визуальной оценки по фотокартам и гипсометрическим картам выбраны наилучшие из них для отображения рельефа на картах небесных тел с точки зрения минимизации искажений.

Выбранные наилучшие проекции для отображения рельефа рекомендуются к использованию для карт поверхностей и гипсометрических карт небесных тел, фигуры которых целесообразно аппроксимировать трёхосным эллипсоидом. Разработанный инструментарий по вычислению координат в проекциях значительно упрощает процесс составления карт таких небесных тел. Алгоритмы расчёта показателей искажений, включённые в упомянутый инструментарий, могут быть использованы при выборе проекций для карт небесных тел, также как и построенные изоколы.

Основные выводы

1. Для отображения рельефа на картах поверхностей и фотокартах глобального охвата небесных тел с небольшими экваториальным и полярным сжатиями наилучшим образом подходят проекции меридианного сечения. В случае значительных экваториального и полярного сжатий искажения в проекциях меридианного сечения возрастают, поэтому наилучшей для таких небесных тел является проекция Якоби. Наилучшие проекции для отображения рельефа на

гипсометрических картах глобального охвата – проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов.

2. Проекции меридианного сечения и проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов, являются наилучшими для отображения рельефа на картах глобального охвата при использовании видоизменённого варианта компоновки Шингарёвой, который обеспечивает минимизацию искажений по всей поверхности небесного тела. Использование равновеликих проекций в этой компоновке для гипсометрических карт также допускается – в случае небольших значений экваториального и полярного эксцентриситетов эллипсоида.

3. Конические проекции целесообразно использовать для отображения рельефа на картах поверхности и гипсометрических картах регионального охвата. Построенные изоколы показывают, что расположение области с минимальными искажениями тем ближе к субширотному, чем меньше экваториальное сжатие эллипсоида. Количественная оценка искажений форм и площадей отдельных кратеров позволяет сделать вывод, что для карт регионов, расположенных в средних широтах и простирающихся на 15° - 20° по широте и долготе, наилучшей может считаться любая из трёх конических проекций.

4. Равновеликие проекции предоставляют возможность анализировать небесные тела на предмет отклонения референц-поверхности от физической поверхности путём сопоставления площадей различных объектов. Новый инструментарий по вычислению координат в проекциях трёхосного эллипсоида включает конечные формулы этих проекций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аванесов Г.А., Жуков Б.С., Зиман Я.Л.* Телевизионные исследования Фобоса – М.: Наука, 1994. – 168 с.
2. Атлас планет земной группы и их спутников / Под ред. Большакова В.Д. – М.: МИИГАиК, 1992. – 208 с.
3. Атлас Фобоса / И.П. Карачевцева, А.А. Конопихин, А.А. Коханов и др. – М.: МИИГАиК, 2015. – 220 с.
4. *Барабашов Н.П., Михайлов А.А., Липский Ю.Н.* Атлас обратной стороны Луны. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 169 с.
5. *Бугаевский Л.М.* Проблемы изыскания и использования равноугольных и близких к ним проекций для целей картографии и геодезии: автореф. дисс. на соиск. учёной степени д-ра техн. наук. – М.: МИИГАиК, 1971. – 49 с.
6. *Бугаевский Л.М.* К вопросу о получении изометрических координат и равноугольной цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1987. – №4. – С. 79-90.
7. *Бугаевский Л.М.* Изометрические координаты, равноугольная цилиндрическая, коническая и азимутальная проекции трёхосного эллипсоида // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1991. – №3. – С. 144-152.
8. *Бугаевский Л.М.* Математическая картография: учебник для вузов. – М.: Златоуст, 1998. – 400 с.
9. *Бугаевский Л.М.* Теория картографических проекций регулярных поверхностей. – М.: Златоуст, 1999. – 144 с.
10. *Вахрамеева Л.А., Бугаевский Л.М., Казакова З.Л.* Математическая картография: учебник для вузов. – М.: Недра, 1986. – 286 с.
11. *Гаусс К.Ф.* Избранные геодезические сочинения. Том II. Высшая геодезия / Под ред. Г.В. Багратуни; пер. с нем. Н.Ф. Булаевского, М.Л. Рудштейна. – М.: Издательство геодезической литературы, 1958. – 246 с.
12. *Гедымин А. В.* Картографические проекции советских школьных карт. – М.: Просвещение, 1984. – 111 с.

13. *Гинзбург Г.А., Салманова Т.Д.* Атлас для выбора картографических проекций. – М.: Геодезиздат, 1957. – 239 с.
14. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. – М., Ленинград: Изд-во Акад. наук СССР, 1941. – 236 с.
15. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
16. *Кондрачук А.В.* Перспективные проекции разных классов // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2008. – № 6. – С.57-59.
17. *Кондрачук А.В.* Исследование и разработка перспективных проекций трёхосного эллипсоида для картографирования поверхностей небесных тел: автореф. дисс. на соиск. учёной степени канд. техн. наук по спец-ти 25.00.33 – Картография. – М.: МИИГАИК, 2009. – 23 с.
18. *Кринов Е.Л.* Планеты-карлики (астероиды). – М., Л.: Изд. АН СССР, 1951. – 235 с.
19. *Ктитров С.В., Рысляев Д.А.* Сравнительный графический анализ искажений некоторых картографических проекций // Научная визуализация. – 2018. – Т. 10 – № 3. – С. 1- 10.
20. *Лазарев Е.Н., Баскакова М.А., Гусакова Е.Н. [и др.].* Сравнительный анализ данных активного дистанционного зондирования для картографирования форм рельефа планет и спутников Солнечной системы // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2014. – № 2. – С.84-92.
21. *Личков Б.Л.* К основам современной теории Земли – Л.: Изд. Ленинградского Унив., 1965. – 120 с.
22. *Лукашевич И.Д.* Неорганическая жизнь земли: Ч. 1-3. – Санкт-Петербург: Т-во худож. печати, 1908-1911. –1287 с.
23. *Лукашов А.А.* Рельеф планетных тел. Введение в сравнительную геоморфологию: учебное пособие. – М.: Издательство Московского университета, 1996. – 112 с.
24. *Ляпунов А.М.* О форме небесных тел // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1930. – Вып. 1. – С. 25-41.
25. Математическая энциклопедия. Том 5. – М.: Советская энциклопедия, 1985. – 623 с.

26. *Мещеряков Г.А.* Теоретические основы математической картографии. – М.: Недра, 1968. – 160 с.
27. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
28. *Нырцов М.В.* Картографирование астероида 433 Эрос на основе проекций реальных поверхностей небесных тел // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2009. – № 2. – С.82-86.
29. *Нырцов М.В., Флейс М.Э., Борисов М.М.* Картографирование астероида 433 Эрос в равнопромежуточных вдоль меридианов цилиндрической и азимутальной проекциях трёхосного эллипсоида // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 1. – С.54-61.
30. *Нырцов М.В.* Актуальные проблемы картографирования внеземных объектов // Вопросы географии. – 2017. – № 144. – С. 42-51.
31. *Нырцов М.В., Флейс М.Э., Соколов А.И.* Проекция меридианного сечения: новый класс проекций для трёхосного // Геодезия и картография. – 2021. – № 2. – С. 11-22.
32. *Нырцов М.В., Флейс М.Э.* Классификация проекций трёхосного эллипсоида // Геодезия и картография. – 2021. – № 6. – С. 18-26.
33. *Нырцов М.В., Флейс М.Э., Борисов М.М.* Математическая картография. Проекция трёхосного эллипсоида: учебное пособие. – М.: Издательство Московского университета, 2022. – 212 с.
34. *Огородова Л.В., Конопихин А.А., Надеждина И.Е.* Вычисление геодезических координат для трёхосного отсчётного эллипсоида // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 5. – С.9-13.
35. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции. – 2-е изд., исправ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 632 с.
36. *Родионова Ж.Ф., Шевченко В.В., Гришакина Е.А., Слюта Е.Н.* Исследование и картографирование Луны космическими аппаратами и кораблями // Космическая техника и технологии. – 2022. – № 4 (39). – С. 29-44.
37. *Самсонов Т.Е.* Визуализация и анализ географических данных на языке R [Электронный ресурс]. – М.: Географический факультет МГУ, 2021. – URL: <https://tsamsonov.github.io/r-geo-course> (дата обращения: 10.10.2022).

38. *Серापинас Б.Б.* Оценка искажений в картографических проекциях трехосного эллипсоида // Геодезия и картография. – 1983. – № 8. – С. 55-56.
39. *Серापинас Б.Б.* О получении равноугольных картографических проекций трёхосного эллипсоида // Геодезия и картография. – 1984. – № 8. – С. 48-50.
40. *Серापинас Б.Б.* Геодезические основы карт: учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 133 с.
41. *Серापинас Б.Б.* Математическая картография. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 336 с.
42. Серия многоязыковых карт планет Земной группы и их спутников [Электронный ресурс] / Комплексная лаборатория исследования внеземных территорий. – URL: <http://planetmaps.ru/multilingual-planet-maps.html> (дата обращения: 21.04.2021).
43. *Слюта Е.Н., Воронаев С.А.* Малые и планетные тела Солнечной системы. Критическая масса ледяных тел // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. – 1993. – Т. 27. – № 1. – С. 71- 82.
44. *Слюта Е.Н.* Физико-механические свойства и гравитационная деформация металлических астероидов // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. – 2013. – Т. 47. – № 2. – С. 122-140.
45. *Слюта Е.Н.* Особенности гравитационной деформации малых тел Солнечной системы в зависимости от их химического и минерального состава: автореф. дисс. на соиск. учёной степени канд. геол.-минер. наук по спец-ти 25.00.09 – Геохимия, геохимические методы поисков полезных ископаемых. – М.: Ин-т геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского РАН, 2014. – 27 с.
46. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1979. – 832 с.
47. *Тюфлин Ю.С.* Космическая фотограмметрия при изучении планет и спутников. – М.: Недра, 1986. – 247 с.
48. *Флейс М.Э., Нырцов М.В., Борисов М.М.* Исследование свойства равноугольности цилиндрических проекций трёхосного эллипсоида // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 451. – № 3. – С. 336-338.

49. Флейс М.Э., Нырцов М.В., Борисов М.М., Стук Ф. Равноугольные и близкие к ним проекции для карт Фобоса // Атлас Фобоса. – М.: МИИГАиК, 2015. – С.48-64.
50. Флейс М.Э., Нырцов М.В., Соколов А.И. Цилиндрические проекции трёхосного эллипсоида: точные формулы и эллиптические интегралы // Геодезия и картография. – 2022. – № 4. – С. 26-38.
51. Холиевников К.В. О фигурах равновесия небесных тел (к 150-летию А.М. Ляпунова) // Компьютерные инструменты в образовании. – 2008. – №2. – С. 39-44.
52. Чебышёв П.Л. Полное собрание сочинений. Том V. Прочие сочинения. Биографические материалы. – М., Л.: Изд-во Акад. наук СССР, 1951. – 475 с.
53. Щетников А.И. Сферическая Земля от древних греков до эпохи Великих географических открытий // ΣΧΟΛΗ. Философское антиковедение и классическая традиция. – 2012. – Том 6. – №. 2. – С. 384-404.
54. Якоби К. Лекции по динамике / пер. с нем. О.А. Полосухиной под ред. Н.С. Кошлякова. – М., Ленинград: Главная редакция общетехнической литературы, 1936. – 271 с.
55. (433) Eros [Электронный ресурс] / 3D Asteroid Catalogue. – URL: <https://3d-asteroids.space/asteroids/433-Eros> (дата обращения: 16.03.2024).
56. Archinal B.A., Anton C.H., A'Hearn M. F. [et al.]. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015 // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2018. – Vol. 130. – Issue 3.
57. Berthoud M.G. An equal-area map projection for irregular objects // Icarus. – 2005. – Vol. 175. – No. 2. – pp. 382-389.
58. Casanova [Электронный ресурс] / Planetary Names – Gazetteer of Planetary Nomenclature. – International Astronomical Union (IAU) Working Group for Planetary System Nomenclature (WGPSN). – URL: <https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/1039> (дата обращения 15.11.2024).
59. Catalog Page for PIA07740 [Электронный ресурс] / Photojournal. – Jet Propulsion Laboratory. – California Institute of Technology. – URL: <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA07740> (дата обращения: 19.11.2024).

60. Catalog Page for PIA10366 [Электронный ресурс] / Photojournal. – Jet Propulsion Laboratory. – California Institute of Technology. – URL: <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA10366> (дата обращения: 19.11.2024).
61. *Chandrasekhar S.* Ellipsoidal Figures of Equilibrium // New Haven: Yale Univ. Press, 1969. – 252 p.
62. *Cheng Y., Lorre J.J.* Equal area map projection for irregularly shaped objects // Cartography and Geographic Information Science. – 2000. – Vol. 27. – No. 2. – pp. 91-100.
63. *Croft S.K.* Proteus: Geology, shape, and catastrophic destruction // Icarus. 1992. – Vol. 99. – pp. 402–419.
64. *Duxbury T.C.* Phobos: Control network analysis // Icarus. – 1974. – Vol. 23. – Issue 2. – pp. 290-299.
65. *Fleis M.E., Nyrtsov M.V., Borisov M.M., Sokolov A.I.* Accurate calculation of geodetic heights of a celestial body's surface points relative to the triaxial ellipsoid // Doklady Earth Sciences. – 2019. – Vol. 486. – No. 2. – pp. 663-668.
66. *Fleis M.E., Nyrtsov M.V., Sokolov A.I., Stooke P.J.* Errors in the Introduction of Isometric Coordinates and Violation of the Property of Conformality of the Triaxial Ellipsoid Projections // Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization. – 2024. – Vol. 59. – No. 2. – pp. 67-76.
67. Gaskell Phobos shape model v1.0 [Электронный ресурс] / NASA's Open Data Portal. – URL: <https://data.nasa.gov/Earth-Science/GASKELL-PHOBOS-SHAPE-MODEL-V1-0/2u8k-qygw> (дата обращения: 19.12.2023).
68. Geologic map of the Discovery Quadrangle of Mercury [Электронный ресурс] / U.S. Geological Survey. – URL: <https://pubs.usgs.gov/imap/1658/plate-1.pdf> (дата обращения: 10.11.2024).
69. *Harbison R.A., Thomas P.C., Nicholson P.C.* Rotational modeling of Hyperion // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2011. – Vol. 110. – No. 1. – pp. 1-16.
70. International Catalog of Planetary Maps [Электронный ресурс] / Digital Museum of Planetary Mapping. – URL: <https://planetarymapping.elte.hu/wp-content/uploads/2015/11/lipsky1960.jpg> (дата обращения: 18.10.2024).
71. Introduction to Gridding Methods [Электронный ресурс] / Surfer Help. –

URL: http://surferhelp.goldensoftware.com/gridmisc/gridding_methods.htm?tocpath=Gridding%7CGridding%20Methods%7C_____1 (дата обращения: 21.02.2022).

72. *Karachevtseva I.P., Kokhanov A.A., Rodionova Zh.* Atlas Planetary Mapping: Phobos Case // Planetary Cartography and GIS (ed. Henrik Hargitai). – Springer Nature Switzerland, 2019. – pp. 235-251.

73. M1 Phobos [Электронный ресурс] / 3D Asteroid Catalogue. – URL: <https://3d-asteroids.space/moons/M1-Phobos> (дата обращения: 16.03.2024).

74. Mars Maps by Schiaparelli (1877-1890) [Электронный ресурс] / Planetary Maps. – Digital Museum of Planetary Mapping. – URL: https://planetarymapping.elte.hu/wp-content/uploads/2016/02/schiaparelli__1881.jpg (дата обращения: 16.12.2020).

75. *Melosh H.J.* Impact Cratering: A Geologic Process. – New York: Oxford University Press, 1996. – 245 p.

76. *Melosh H.J.* Planetary surface processes. – New York: Cambridge University Press, 2011. – 534 p.

77. Meri [Электронный ресурс] / Planetary Names – Gazetteer of Planetary Nomenclature. – International Astronomical Union (IAU) Working Group for Planetary System Nomenclature (WGPSN). – URL: <https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/3852> (дата обращения 15.11.2024).

78. *Monmonier M.* Rhumb Lines and Map Wars: A Social History of the Mercator Projection. – Chicago: The University of Chicago Press, 2004. – 256 p.

79. NEAR image of the day for 2000 Feb 17 (A) [Электронный ресурс] / Near Earth Asteroid Rendezvous Mission. – The Johns Hopkins Applied Physics Laboratory. – URL: <https://near.jhuapl.edu/iod/20000217a/index.html> (дата обращения: 15.10.2024).

80. *Nyrtsov M.V., Fleis M.E., Borisov M.M., Stooke P.J.* Jacobi Conformal Projection of the Triaxial Ellipsoid: New Projection for Mapping of Small Celestial Bodies // Cartography from Pole to Pole, Lecture Notes in Geoinformation and Cartography. M. Buchroithner et al. (eds.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014. – pp. 235-246.

81. *Nyrtsov M.V., Fleis M.E., Borisov M.M., Stooke P.J.* Equal-Area Projections of the Triaxial Ellipsoid: First Time Derivation and Implementation of Cylindrical and Azimuthal Projections for Small Solar System Bodies // The Cartographic Journal. – 2015. – Vol. 52. – No.2. – pp. 114-124.

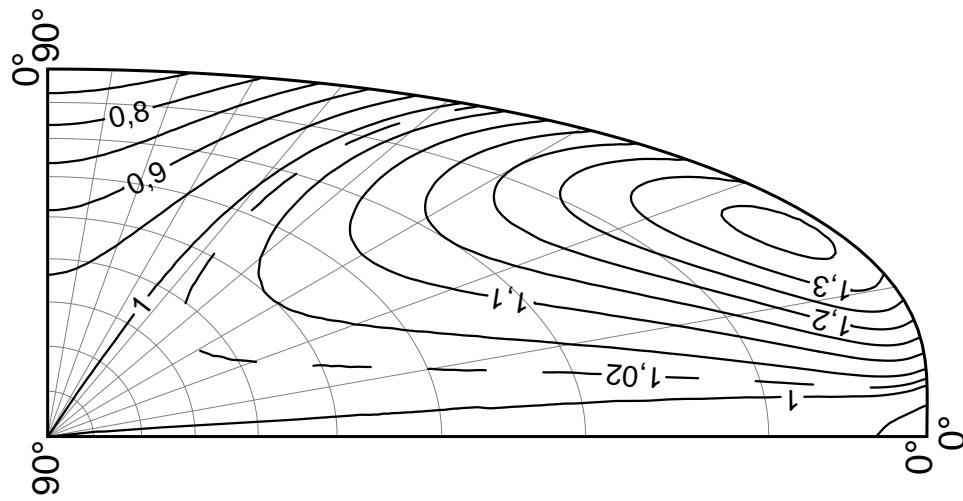
82. *Nyrtsov M.V., Fleis M.E., Borisov M.M., Stooke P.J.* Conic projections of the triaxial ellipsoid: the projections for regional mapping of celestial bodies // *The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*. – 2017. – Vol. 52. – No. 4. – pp. 322-331.
83. *Pędzich P.* Equidistant map projections of a triaxial ellipsoid with the use of reduced coordinates // *Geodesy and Cartography*. – 2017. – Vol. 66. – No. 2. – pp. 271-290.
84. *Pędzich P.* The method of construction of cylindrical and azimuthal equal-area map projections of a tri-axial ellipsoid // *Geodesy and Cartography*. – 2018. – Vol. 67. – No. 2. – pp. 271-294.
85. *Pędzich P.* A low distortion conformal projection of a tri-axial ellipsoid and its application for mapping of extra-terrestrial objects // *Planetary and Space Science*. – 2019. – Vol. 178. – 104697.
86. *Pędzich P.* Conformal projections of a tri-axial ellipsoid based on isometric coordinates: history, methodology, and examples // *Polish Cartographical Review*. – 2022. – Vol. 54. – pp. 35-53.
87. PIA03467: The MGS MOC Wide Angle Map of Mars [Электронный ресурс] / Photojournal. – Jet Propulsion Laboratory. – California Institute of Technology. – URL: <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA03467> (дата обращения: 16.12.2022).
88. Planetary Names: Eros [Электронный ресурс] / Gazetteer of Planetary Nomenclature. – International Astronomical Union (IAU) Working Group for Planetary System Nomenclature (WGPSN). – URL: <https://planetarynames.wr.usgs.gov/Page/EROS/target> (дата обращения: 30.04.2020).
89. Planetary Names: Hyperion [Электронный ресурс] / Gazetteer of Planetary Nomenclature. – International Astronomical Union (IAU) Working Group for Planetary System Nomenclature (WGPSN). – URL: <https://planetarynames.wr.usgs.gov/Page/HYPERION/target> (дата обращения: 30.10.2022).
90. Planetary Names: Phobos [Электронный ресурс] / Gazetteer of Planetary Nomenclature. – International Astronomical Union (IAU) Working Group for Planetary System Nomenclature (WGPSN). – URL: <https://planetarynames.wr.usgs.gov/Page/PHOBOS/target> (дата обращения: 10.05.2020).

91. Resolutions adopted at the General Assemblies [Электронный ресурс] / International Astronomical Union (IAU). – URL: https://www.iau.org/static/resolutions/Resolution_GA26-5-6.pdf (дата обращения: 10.05.2024).
92. Skyresh [Электронный ресурс] / Planetary Names – Gazetteer of Planetary Nomenclature. – International Astronomical Union (IAU) Working Group for Planetary System Nomenclature (WGPSN). – URL: <https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/14264> (дата обращения 15.11.2024).
93. *Slodarz N.A., Zubarev A.E., Nadezhdina I.E., Kozlova N.A.* Hyperion (C7): control point network and shape model. Difficulties and solutions // 13th Moscow Solar System Symp.: Abstract Book. – 2022. – P. 201.
94. Asteroid Data Sets [Электронный ресурс] / Planetary Data System. – URL: <https://sbn.psi.edu/pds/archive/asteroids.html> (дата обращения: 11.07.2024).
95. *Snyder J. P.* Conformal mapping of the triaxial ellipsoid // Survey Review. – 1985. – Vol. 28. – No. 217. – pp. 130-148.
96. *Snyder J. P.* Map projections: A working manual. – Washington: U.S. Government Printing Office, 1987. – 385 p.
97. *Sokolov A.I., Nadezhdina I.E., Nyrtsov M.V. [et al.]* Mapping Hyperion in Projections of the Triaxial Ellipsoid Based on a New Reference Network and a Digital Terrain Model // Solar System Research. – 2024. – Vol. 58. – No. 1. – pp. 112-121.
98. *Sokolov A.I., Nyrtsov M.V., Fleis M.E., Nadezhdina I.E.* Investigation and cartographic representation of Hyperion space images photogrammetric processing results // Planetary and Space Science. – 2024. – Vol. 249. – 105945.
99. *Stooke P.J.* Automated cartography of non-spherical worlds // Proc. 2nd Internat. Symp. Spatial Data Handling. – 1986. – pp. 523–536.
100. Stooke Small Bodies Maps [Электронный ресурс] / Planetary Science Institute. – URL: https://sbnarchive.psi.edu/pds3/multi_mission/MULTI_SA_MULTI_6_STOOKEMAPS_V3_0/document/00_map_guide.html (дата обращения: 20.03.2023).
101. *Stofan E.R., Elachi C., Lunine J.I. [et al.]* The lakes of Titan // Nature. – 2007. – Vol. 445. – No. 7123. – pp. 61–64.
102. *Thomas P.C.* The shapes of small satellites // Icarus. – 1989. – Vol. 77. – pp. 248–274.

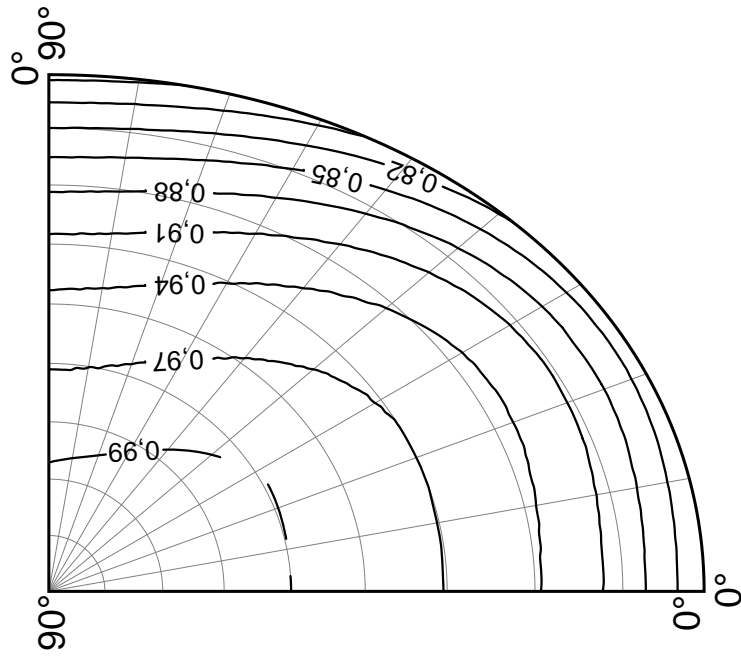
**ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ИЗОКОЛЫ ЧАСТНЫХ МАСШТАБОВ ДЛИН
ВДОЛЬ МЕРИДИАНОВ, ВДОЛЬ ПАРАЛЛЕЛЕЙ, ПЛОЩАДЕЙ И
НАИБОЛЬШЕГО ИСКАЖЕНИЯ УГЛОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ,
АЗИМУТАЛЬНЫХ, КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ И В
ПРОЕКЦИИ ЯКОБИ (СПУТНИК МАРСА ФОБОС, СПУТНИК
САТУРНА ГИПЕРИОН, АСТЕРОИД 433 ЭРОС)**

Равновеликая азимутальная проекция

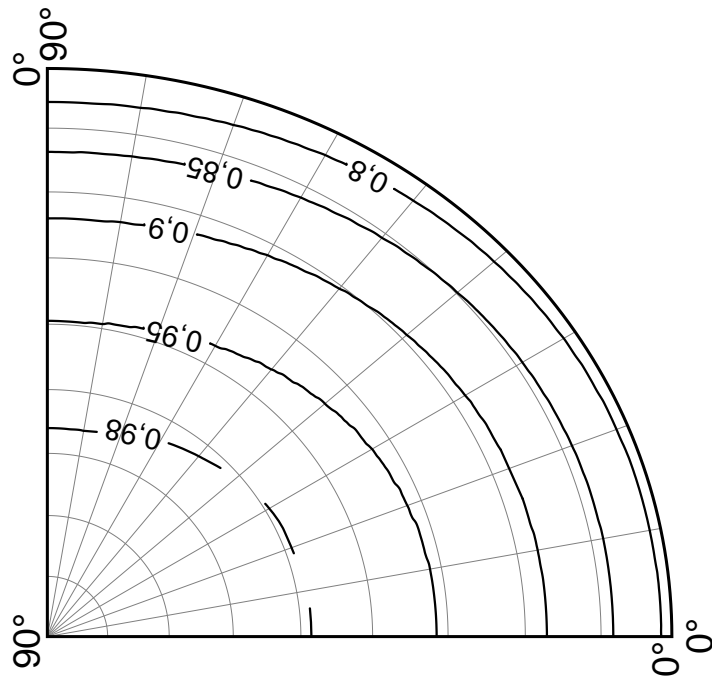
Масштаб длин вдоль меридианов



Астероид 433 Эрос
 $a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



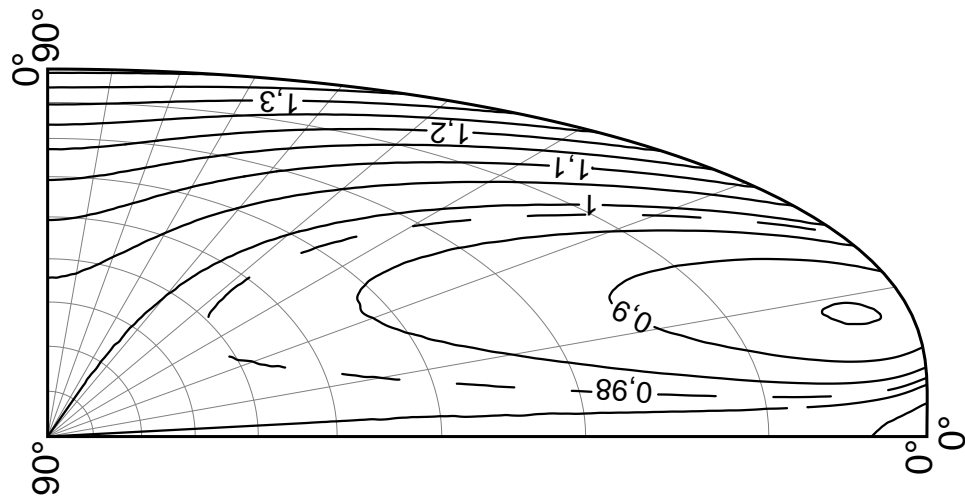
Спутник Сатурна Гиперион
 $a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км



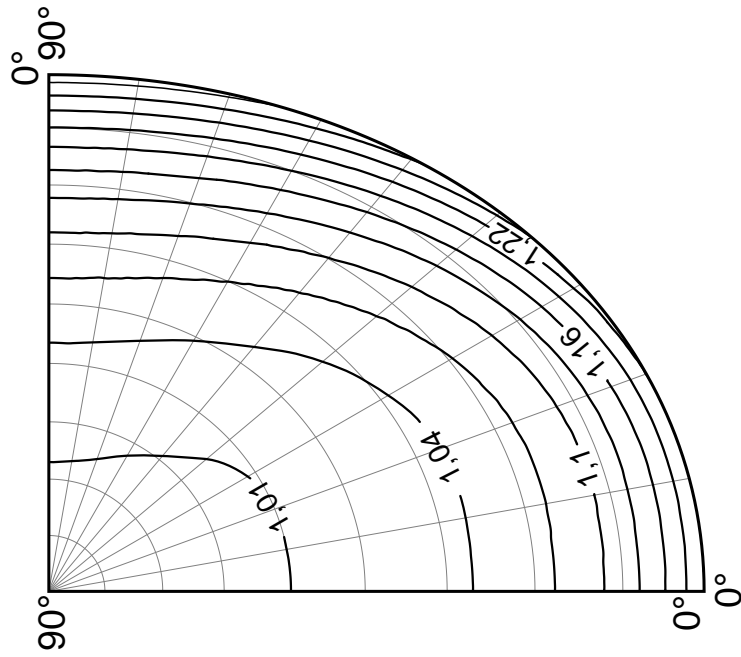
Спутник Марса Фобос
 $a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

Равновеликая азимутальная проекция

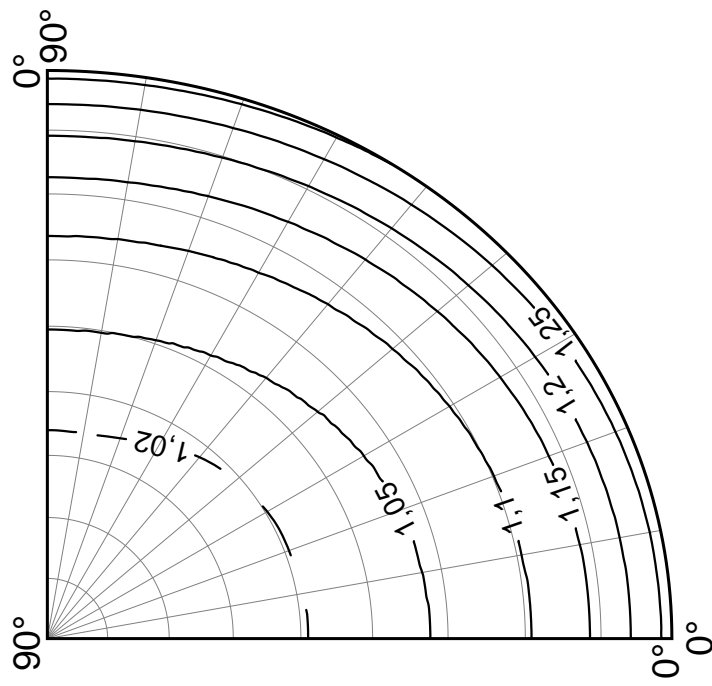
Масштаб длин вдоль параллелей



Астероид 433 Эрос
 $a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



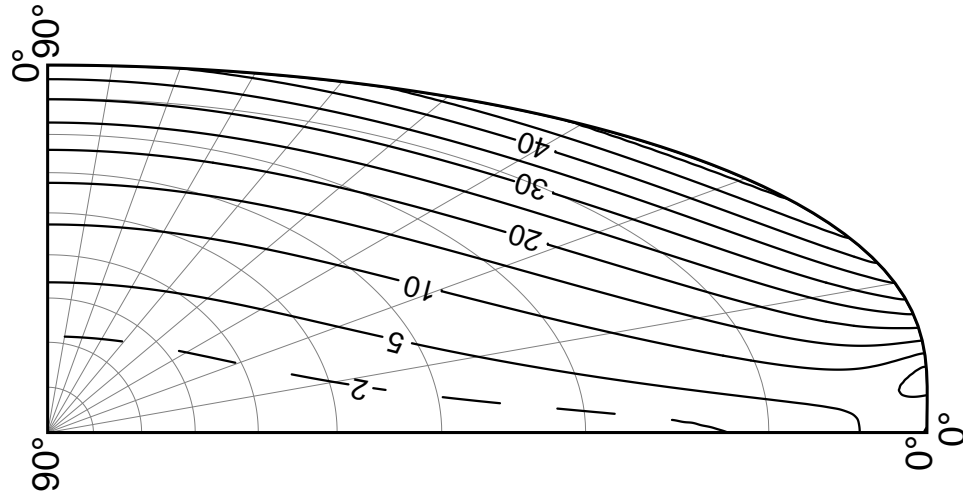
Спутник Сатурна Гиперион
 $a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км



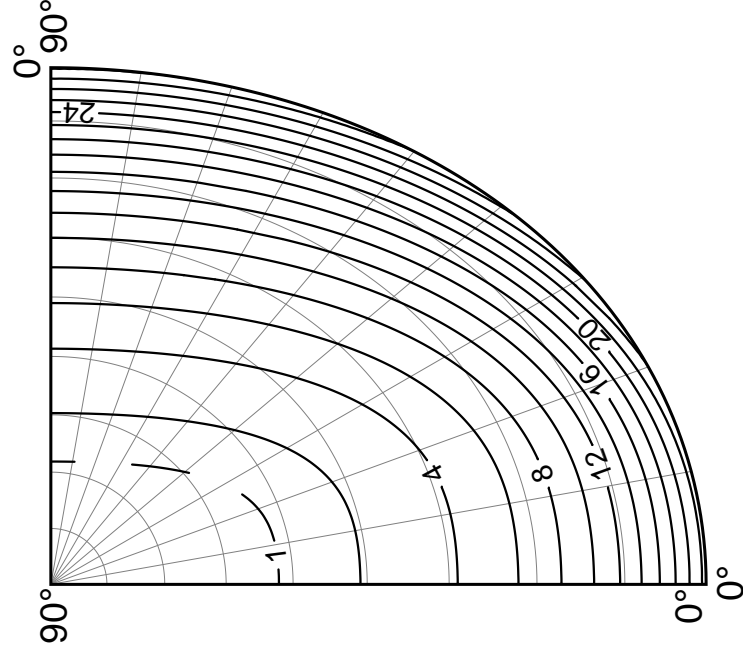
Спутник Марса Фобос
 $a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

Равновеликая азимутальная проекция

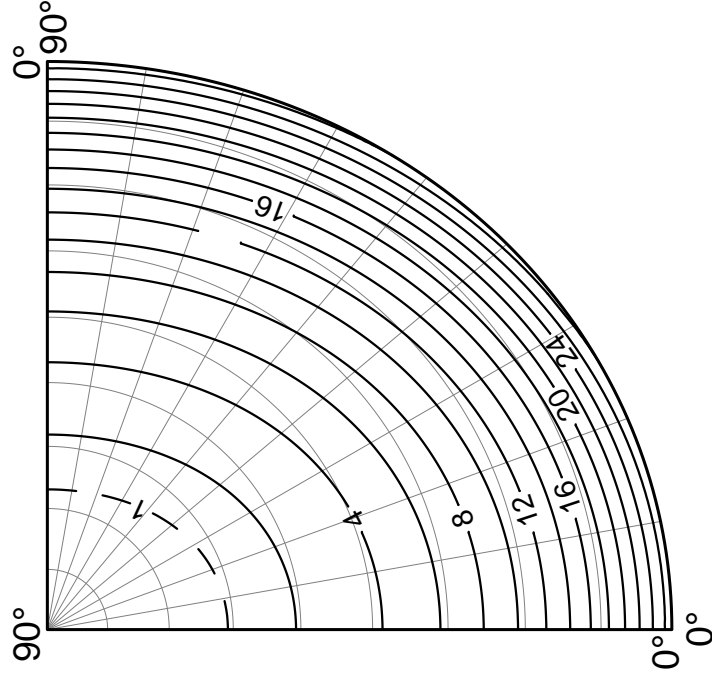
Наибольшее искажение углов (°)



Астероид 433 Эрос
 $a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



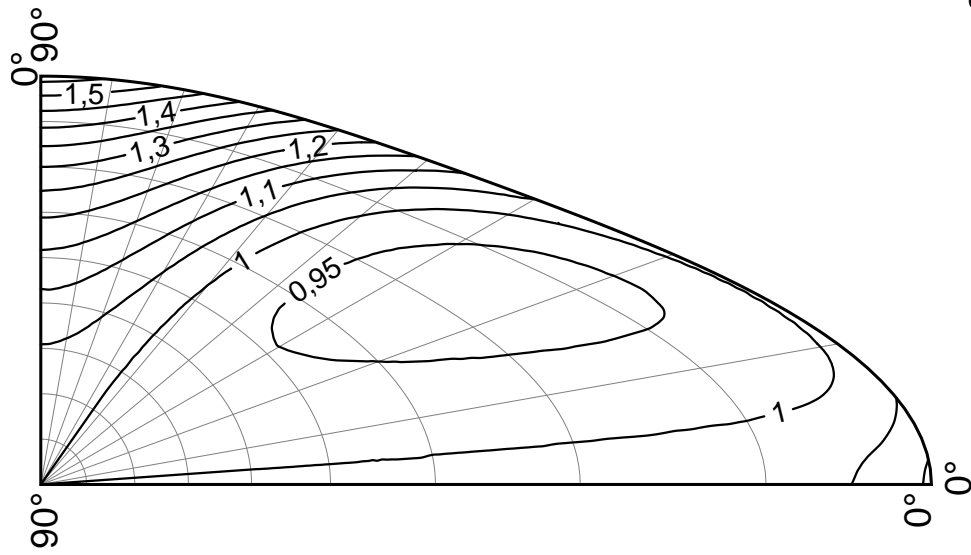
Спутник Сатурна Гиперион
 $a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км



Спутник Марса Фобос
 $a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

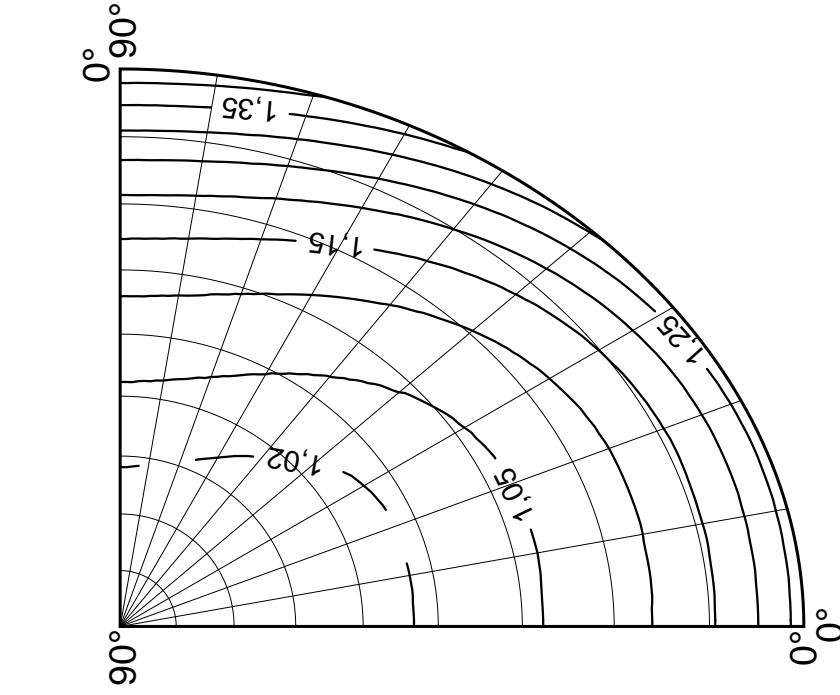
Азимутальная проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов

Масштаб длин вдоль параллелей



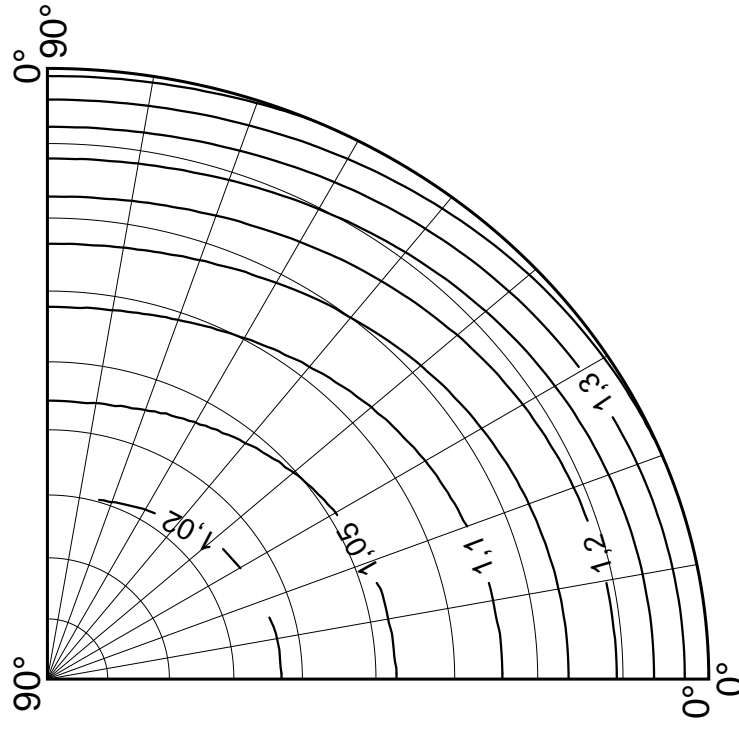
Астероид 433 Эрос

$a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



Спутник Сатурна Гиперион

$a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км

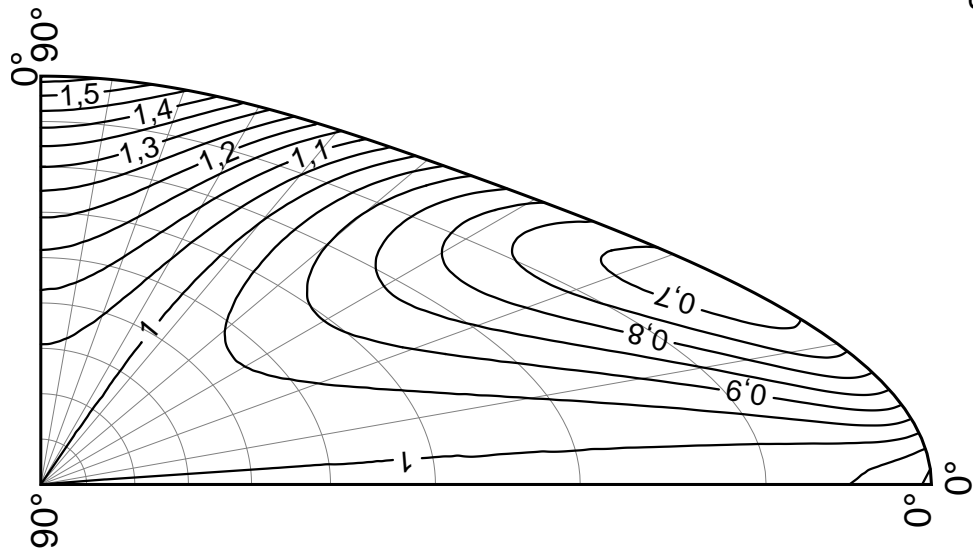


Спутник Марса Фобос

$a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

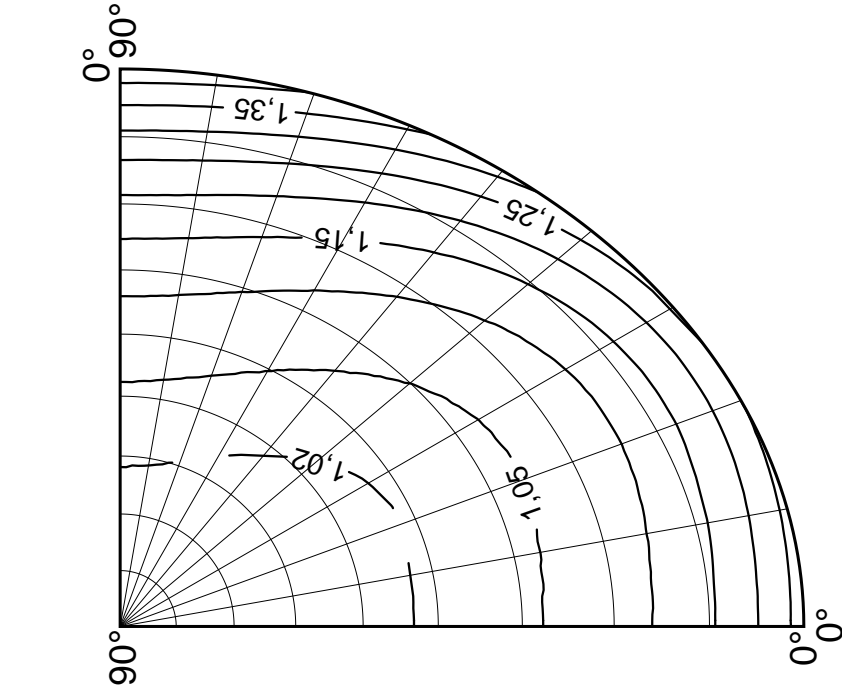
Азимутальная проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов

Масштаб площадей



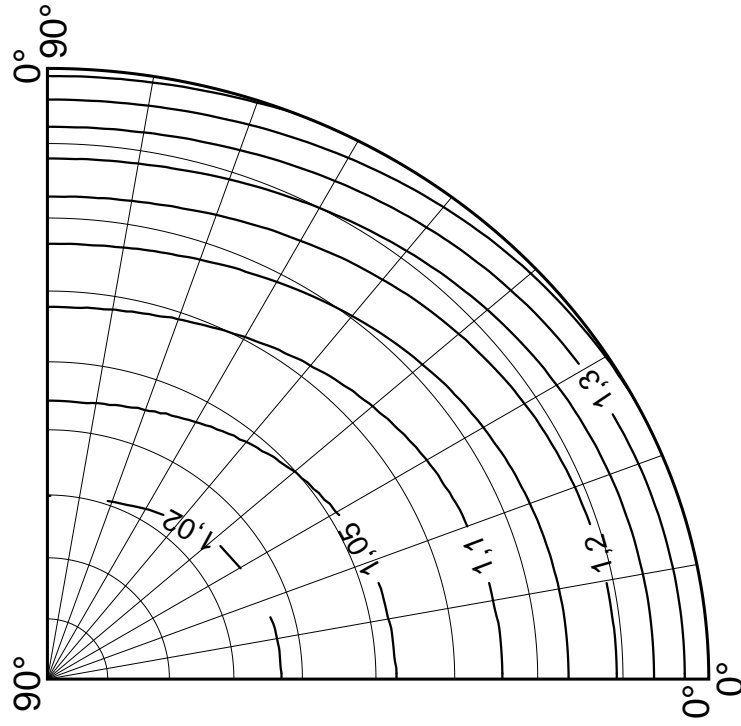
Астероид 433 Эрос

$a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



Спутник Сатурна Гиперион

$a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км

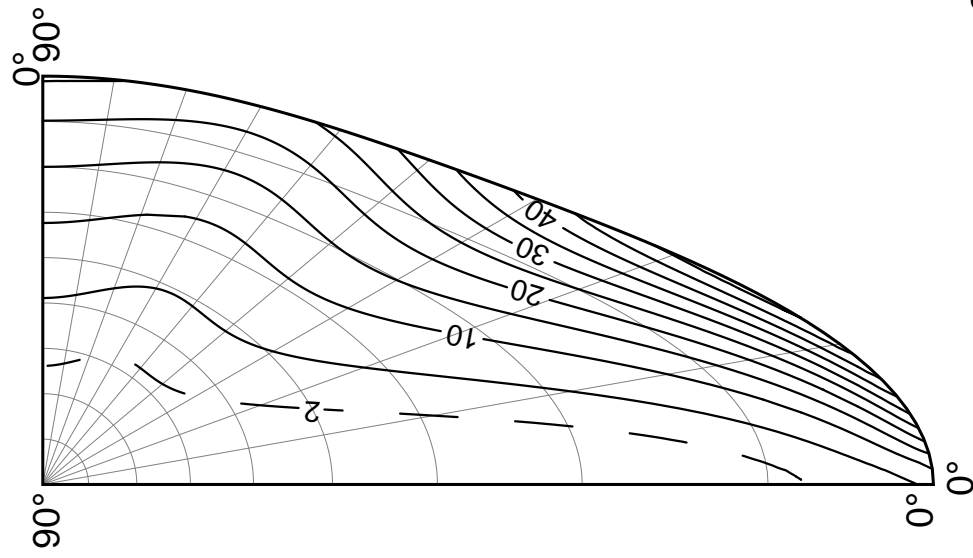


Спутник Марса Фобос

$a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

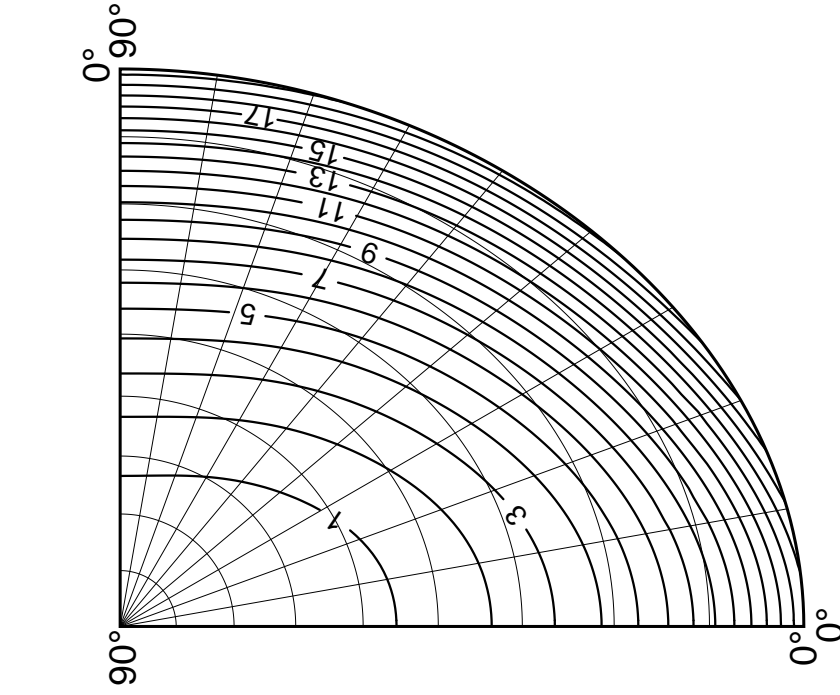
Азимутальная проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов

Наибольшее искажение углов (°)



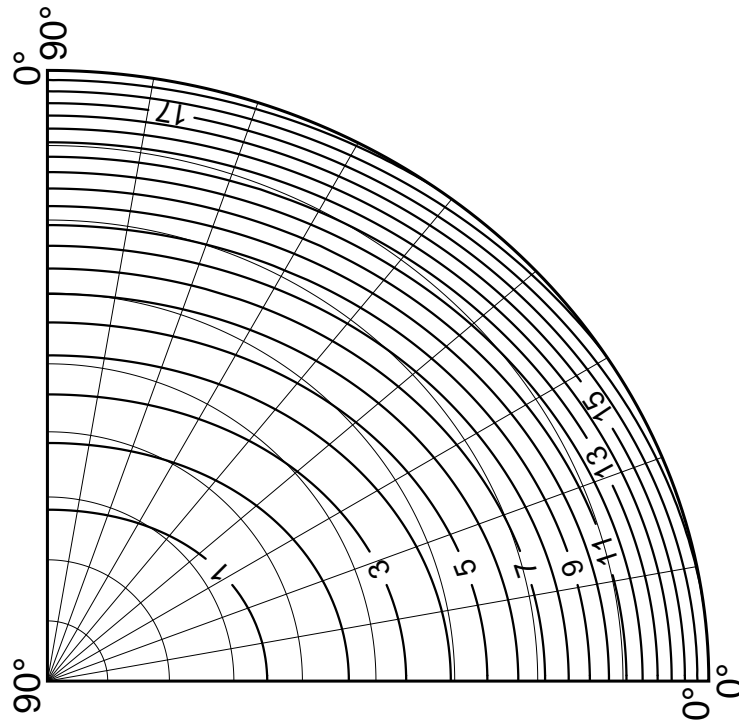
Астероид 433 Эрос

$a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



Спутник Сатурна Гиперион

$a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км

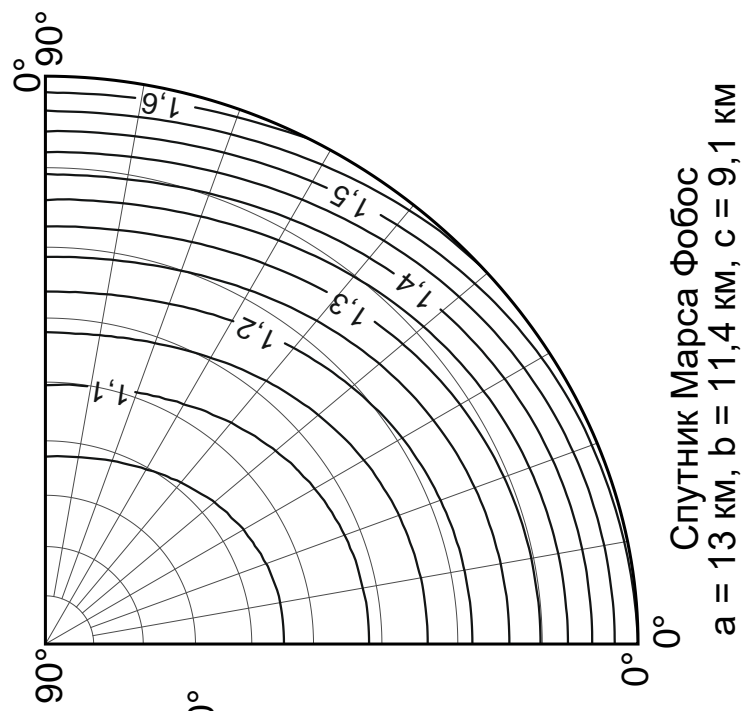
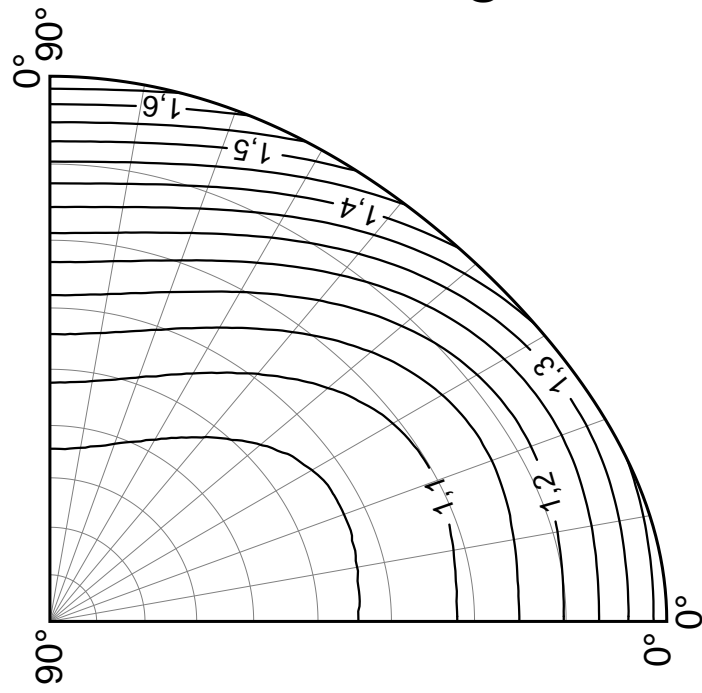
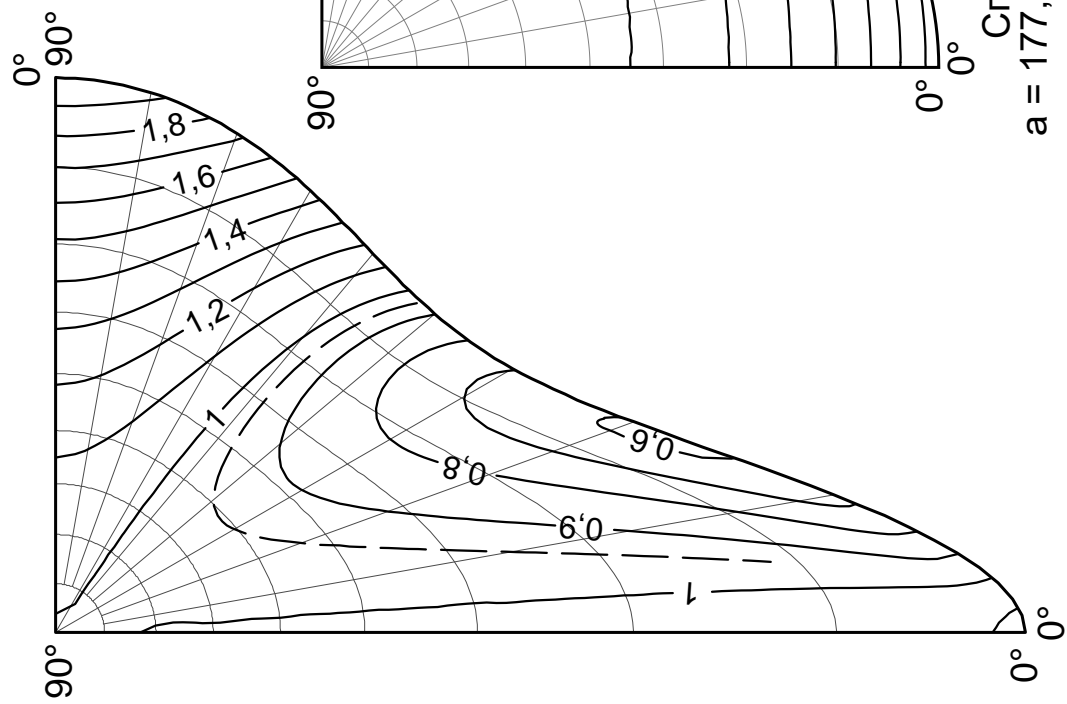


Спутник Марса Фобос

$a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

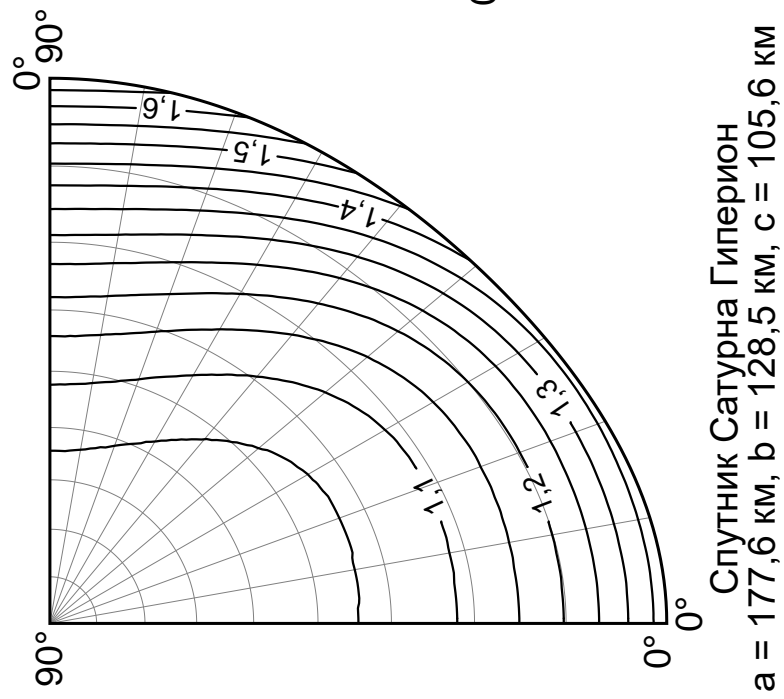
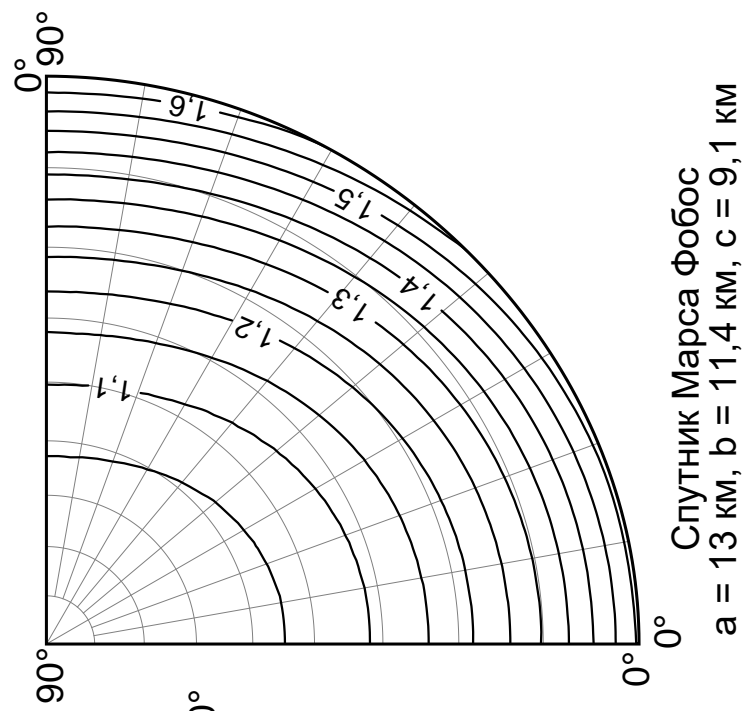
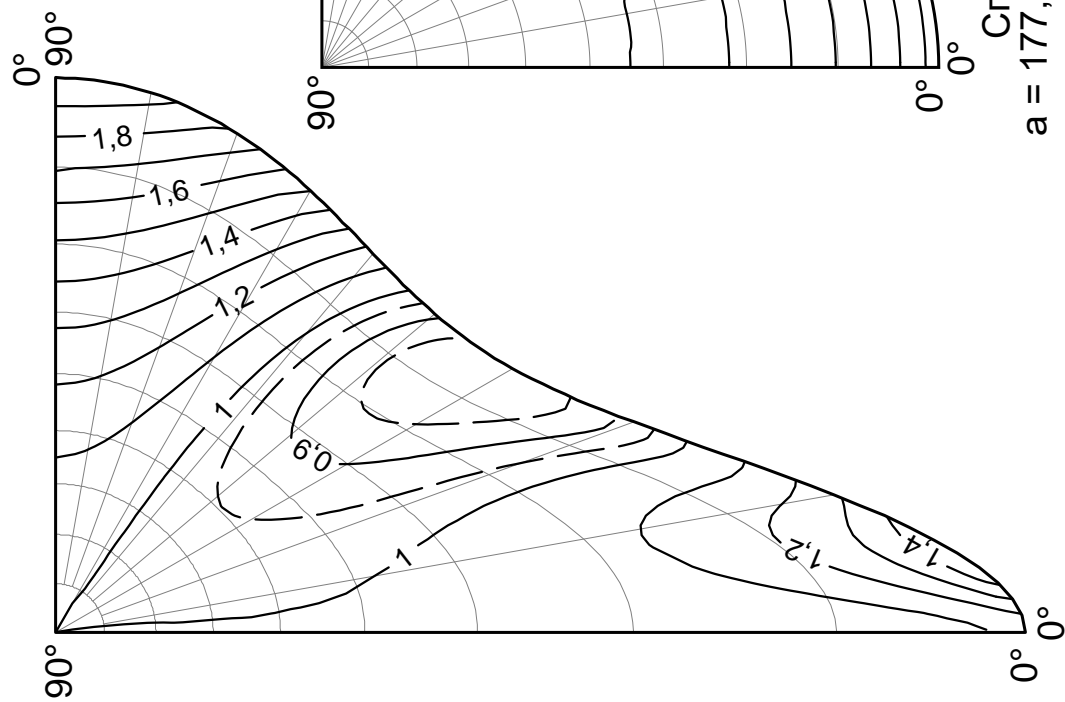
Азимутальная проекция меридианного сечения

Масштаб длин вдоль меридианов



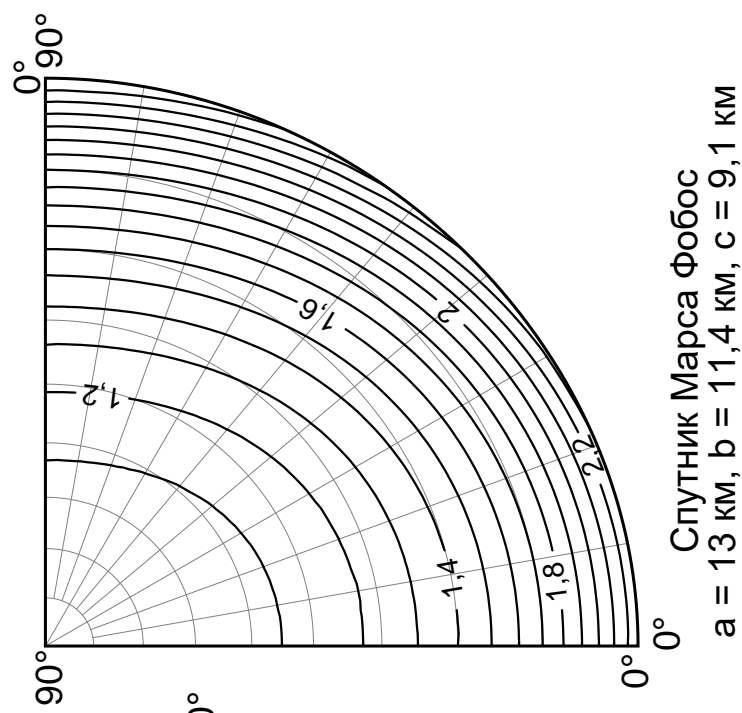
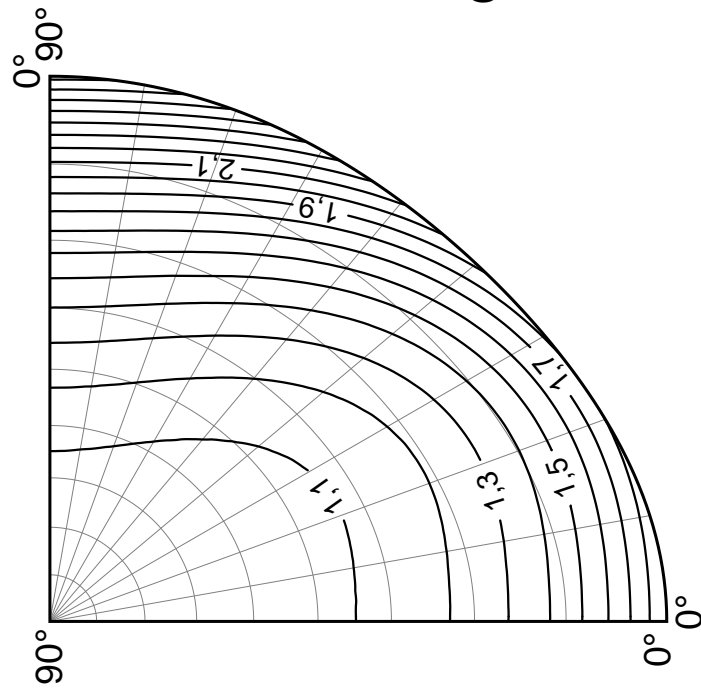
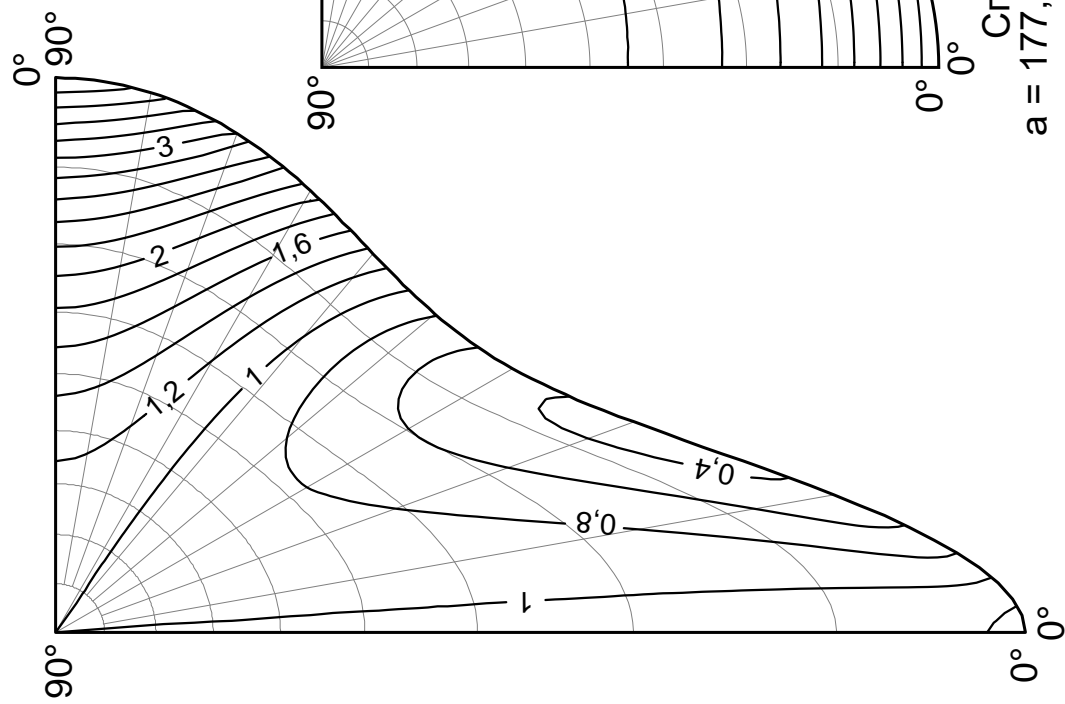
Азимутальная проекция меридианного сечения

Масштаб длин вдоль параллелей



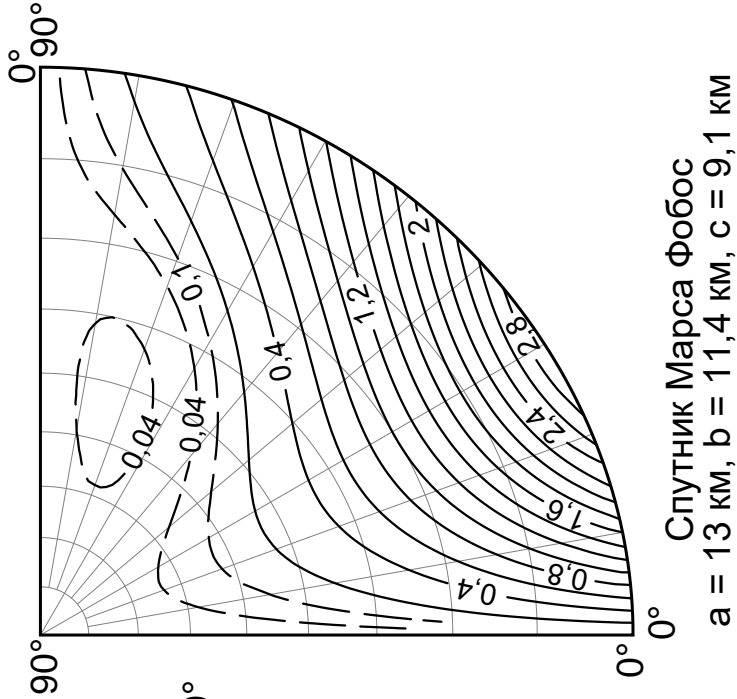
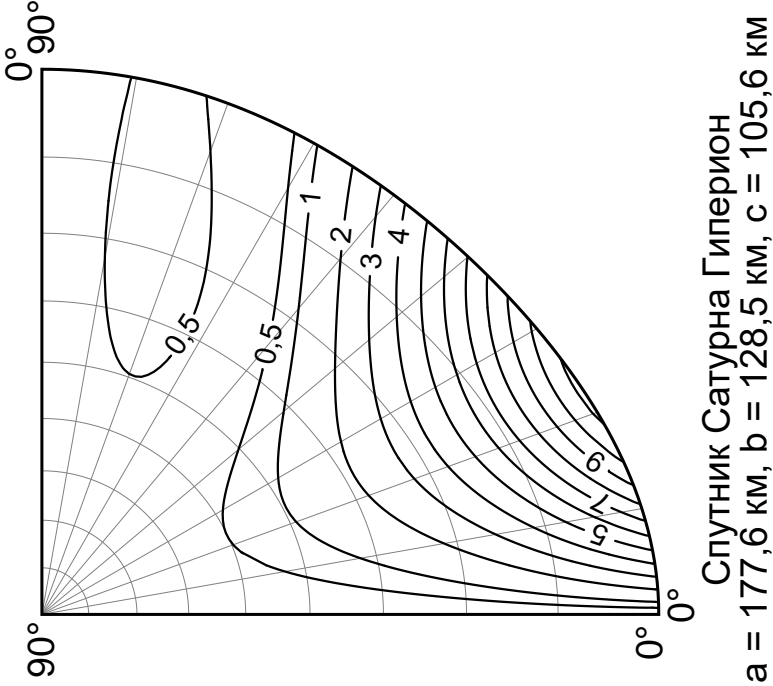
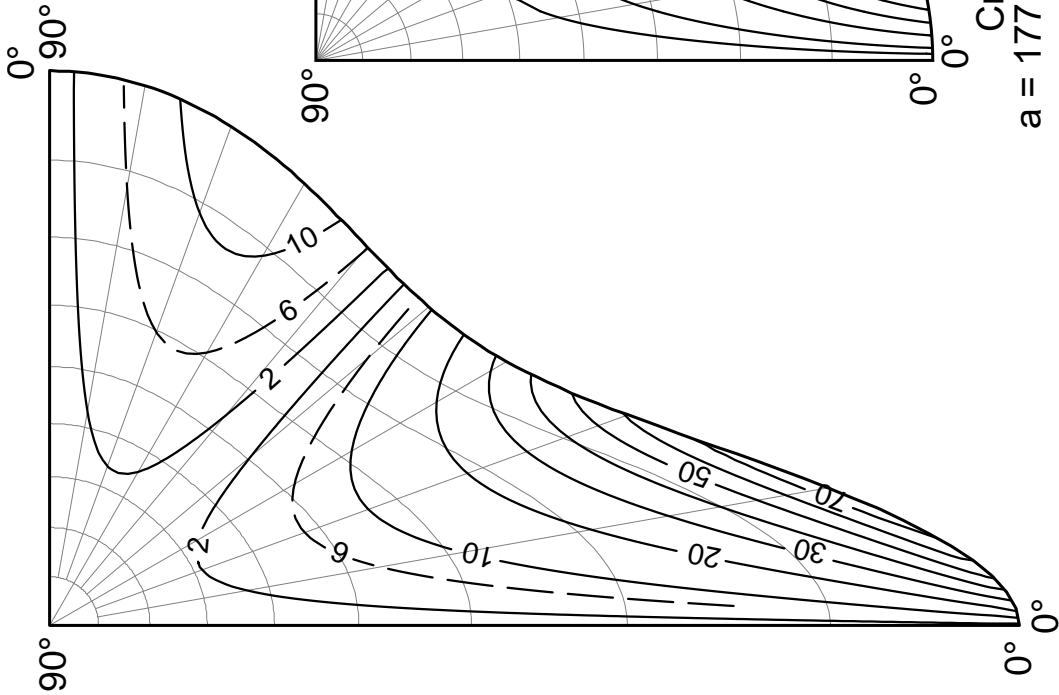
Азимутальная проекция меридианного сечения

Масштаб площадей



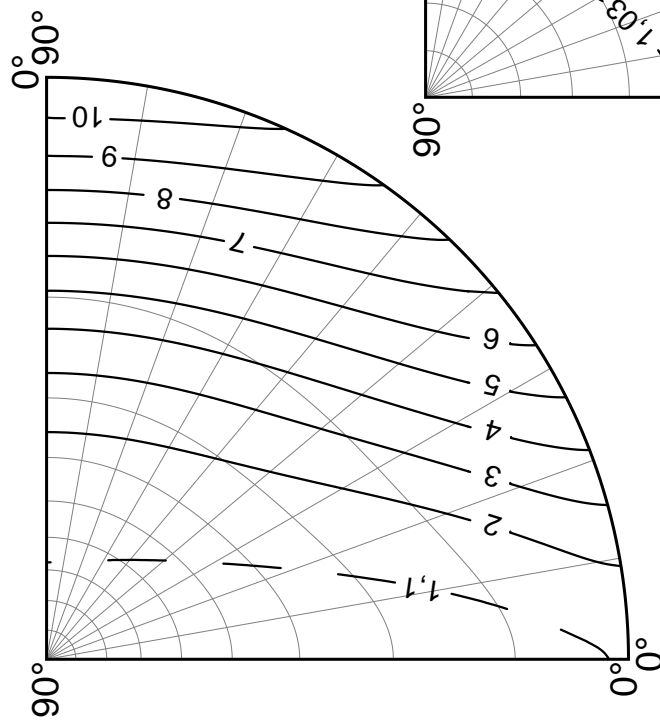
Азимутальная проекция меридианного сечения

Наибольшее искажение углов (°)



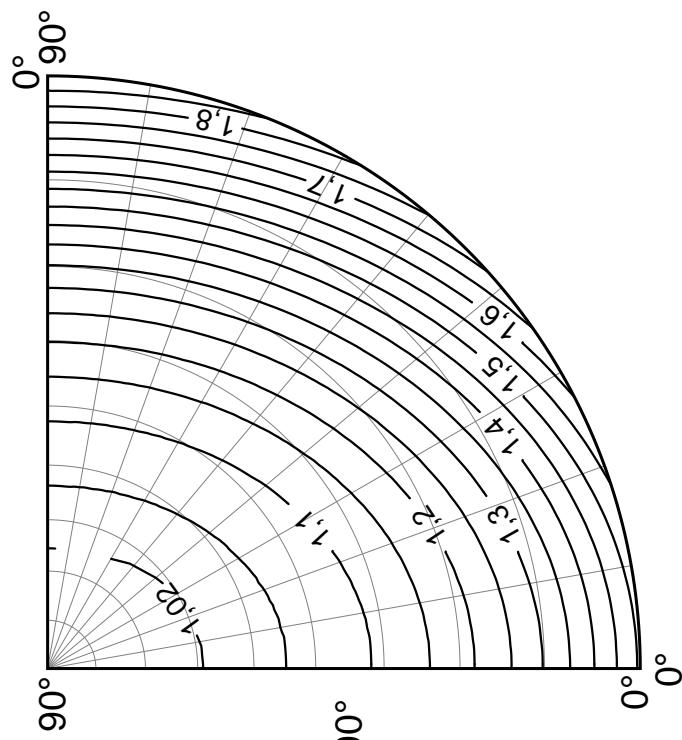
Азимутальная проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью

Масштаб длин вдоль меридианов



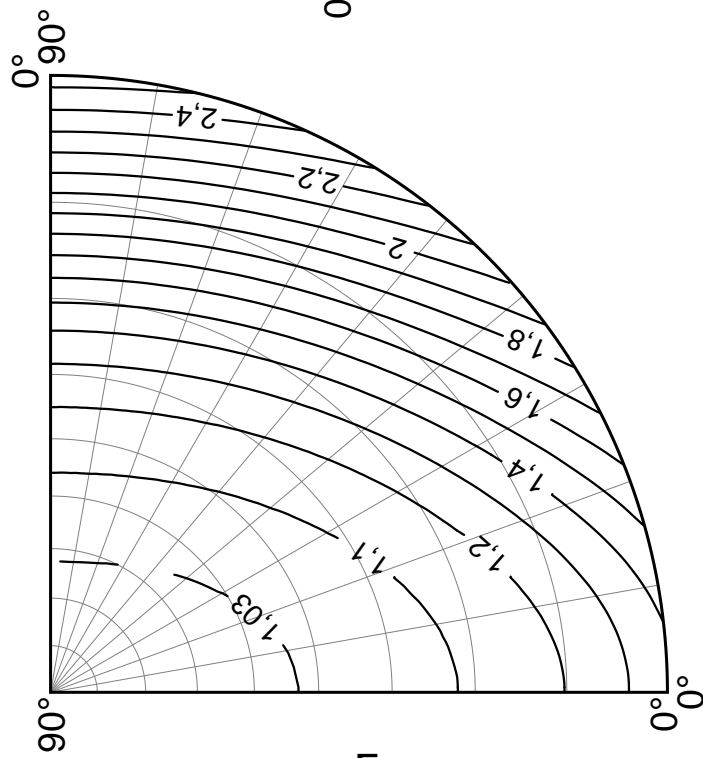
Астероид 433 Эрос

$a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



Спутник Марса Фобос

$a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

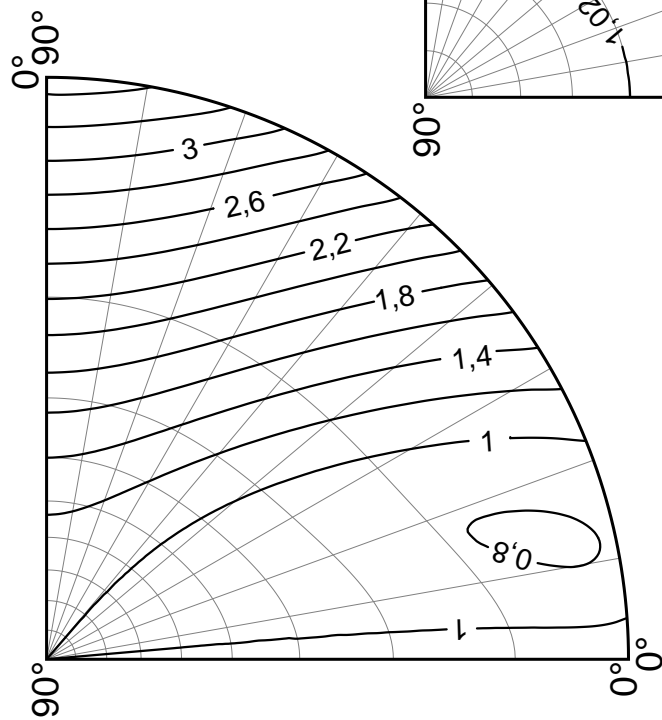


Спутник Сатурна Гиперион

$a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км

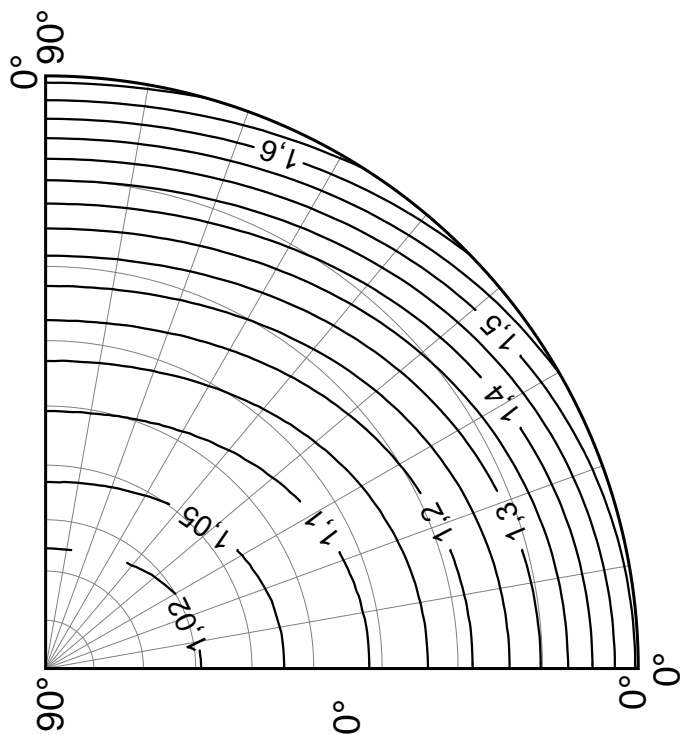
Азимутальная проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью

Масштаб длин вдоль параллелей



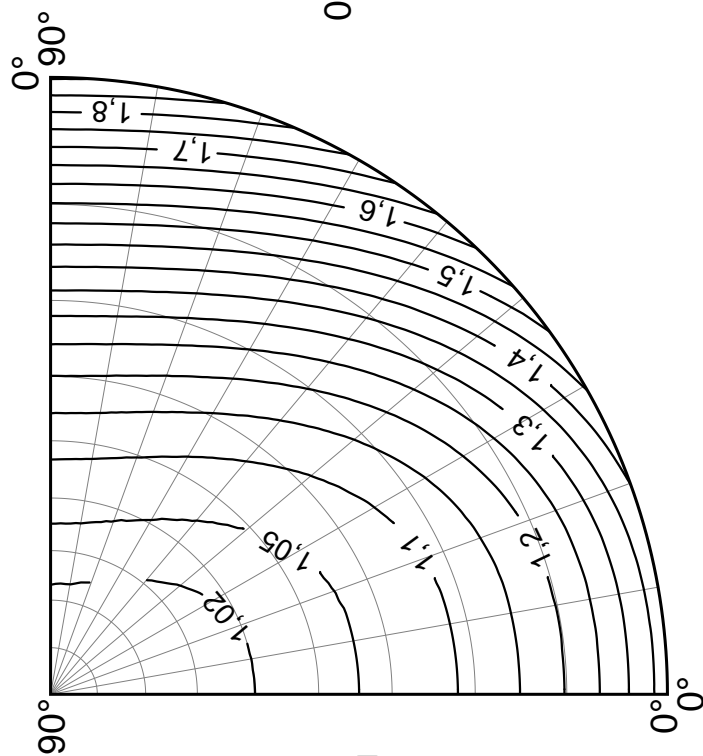
Астероид 433 Эрос

$a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



Спутник Марса Фобос

$a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

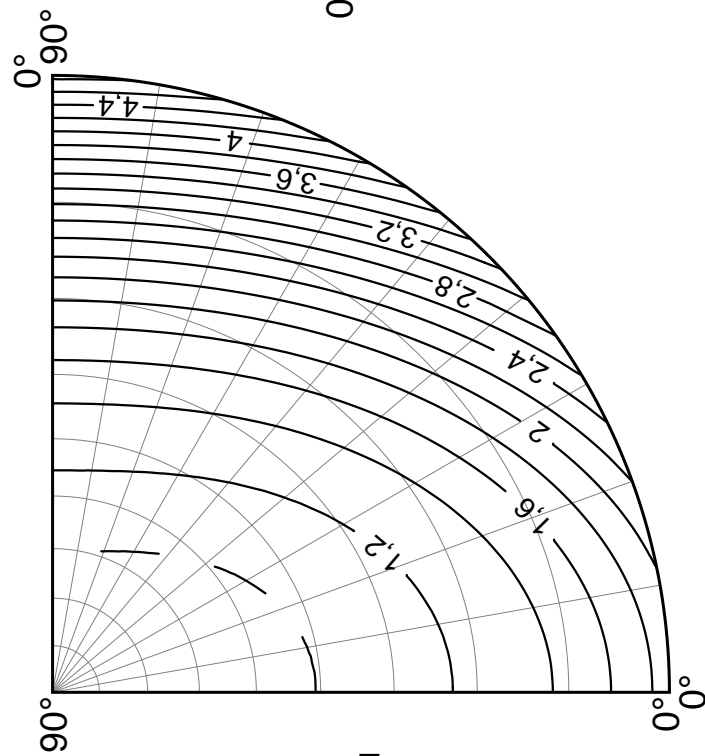
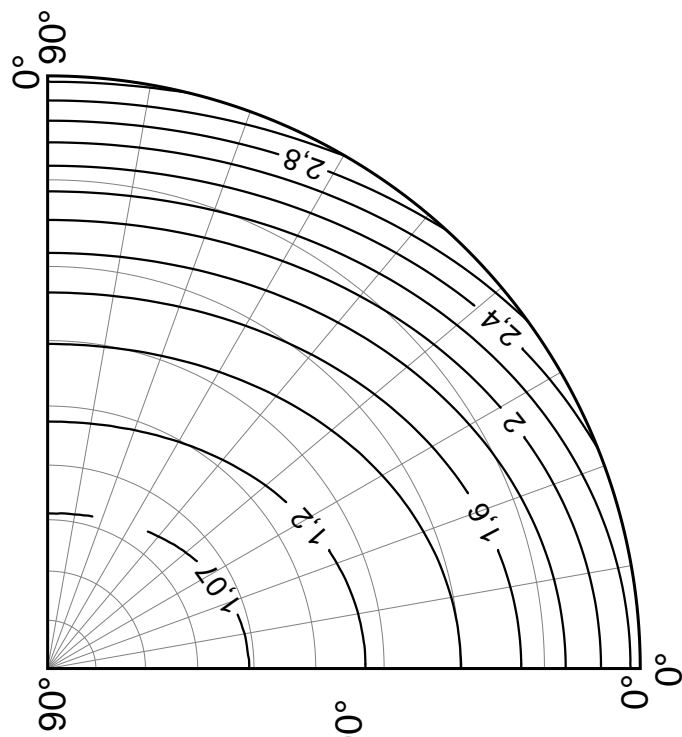
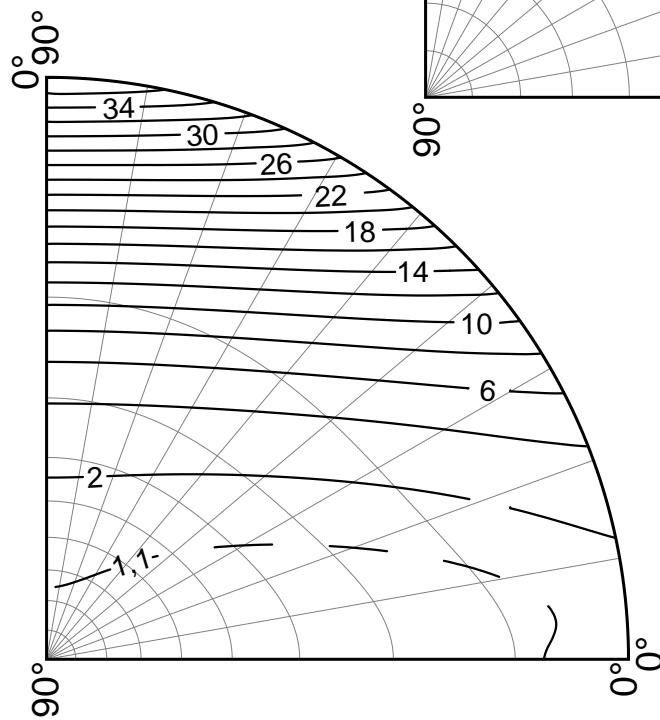


Спутник Сатурна Гиперион

$a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км

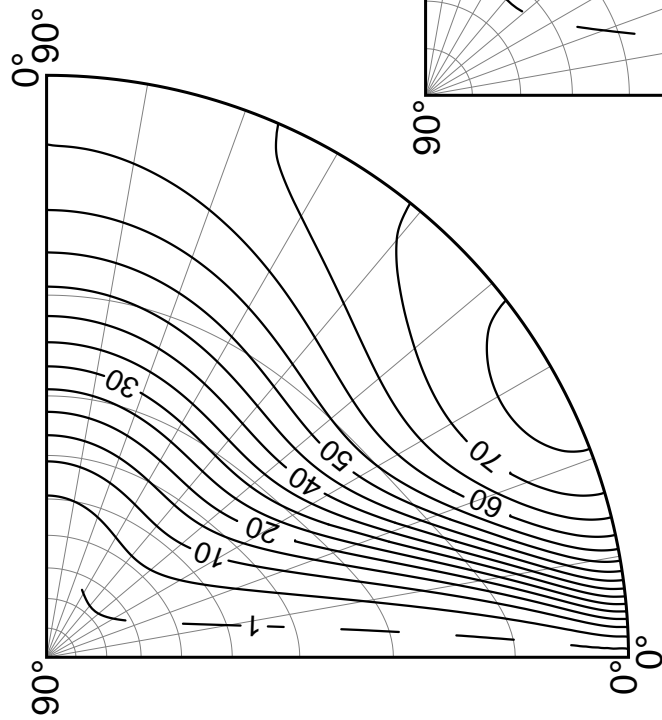
Азимутальная проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью

Масштаб площадей



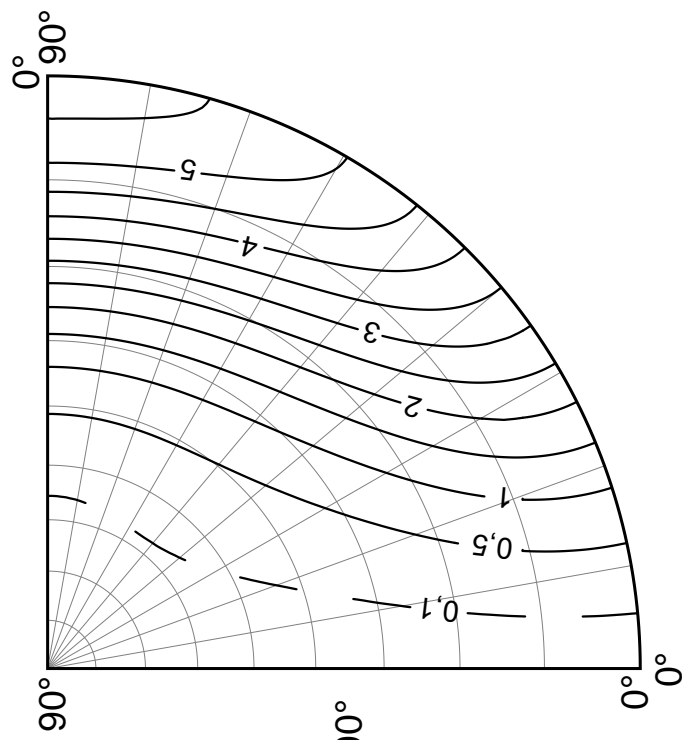
Азимутальная проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью

Наибольшее искажение углов (°)



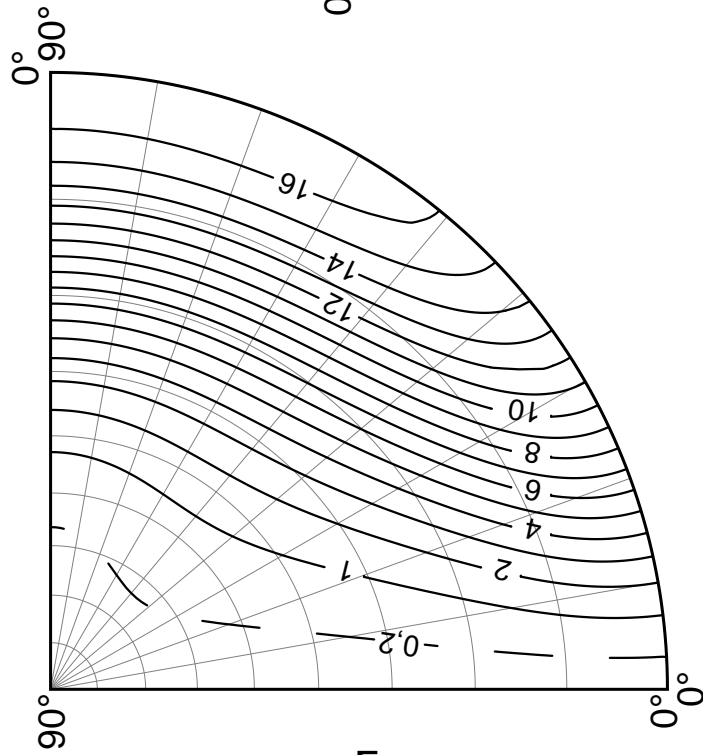
Астероид 433 Эрос

$a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



Спутник Марса Фобос

$a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

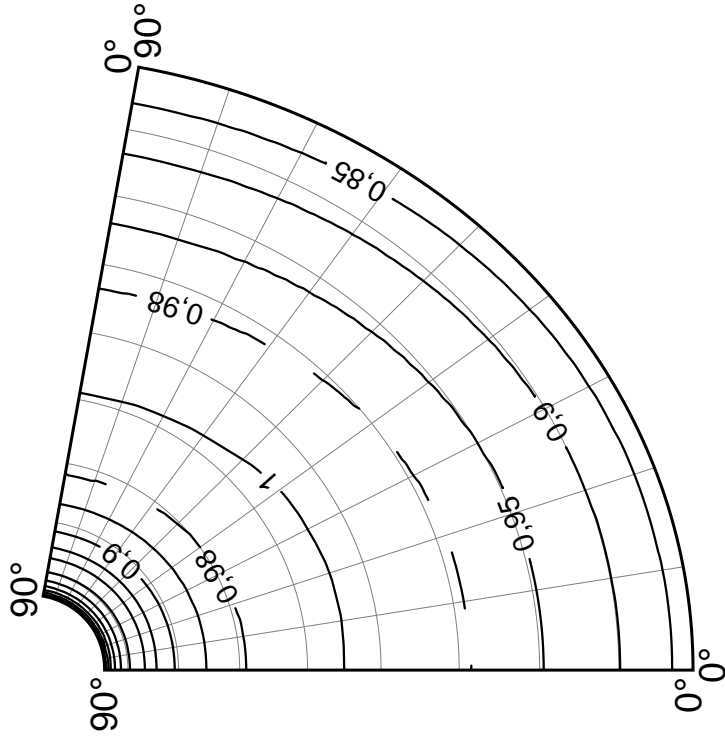


Спутник Сатурна Гиперион

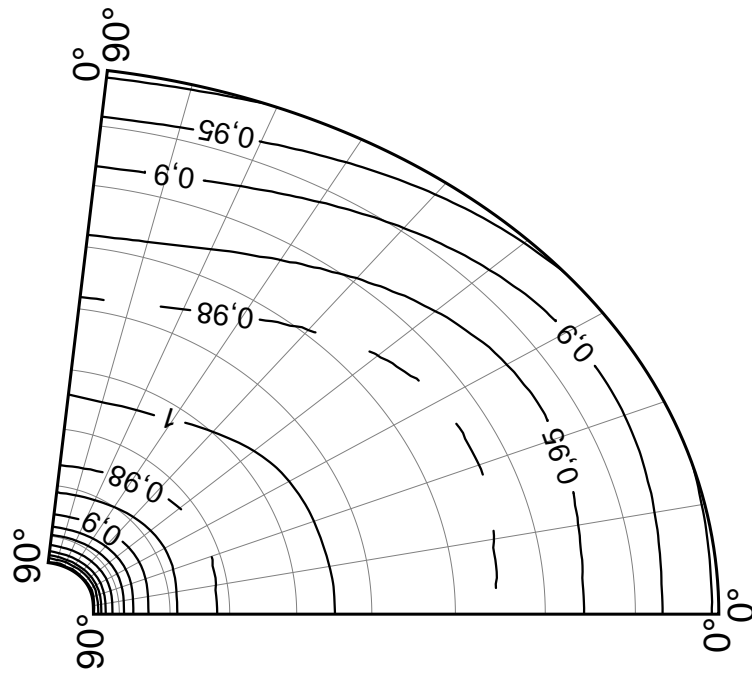
$a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км

Равновеликая коническая проекция

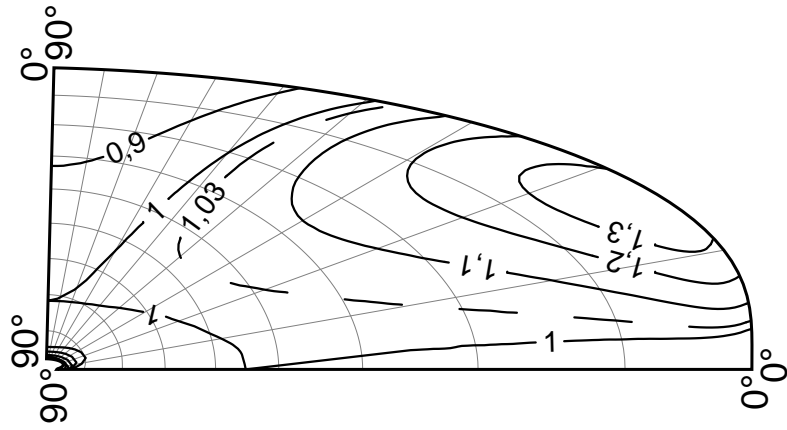
Масштаб длин вдоль меридианов



Спутник Марса Фобос
 $a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км



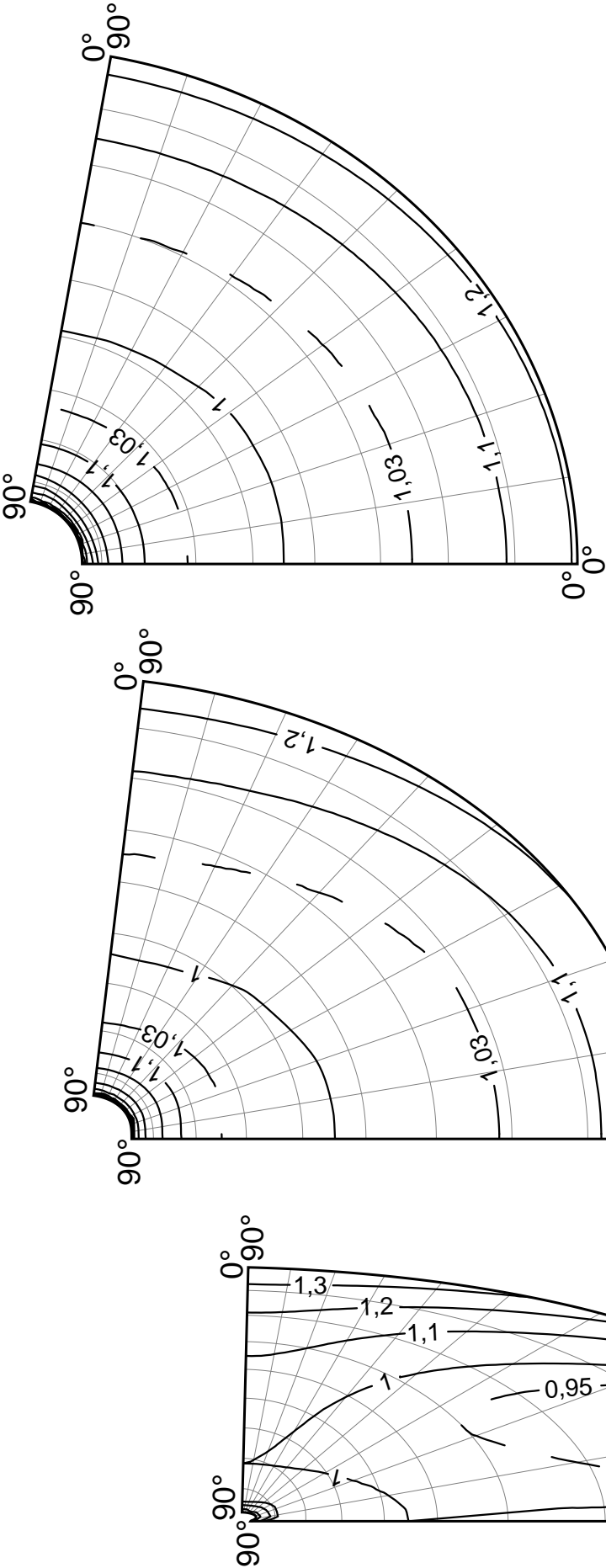
Спутник Сатурна Гиперион
 $a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км



Астероид 433 Эрос
 $a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км

Равновеликая коническая проекция

Масштаб длин вдоль параллелей



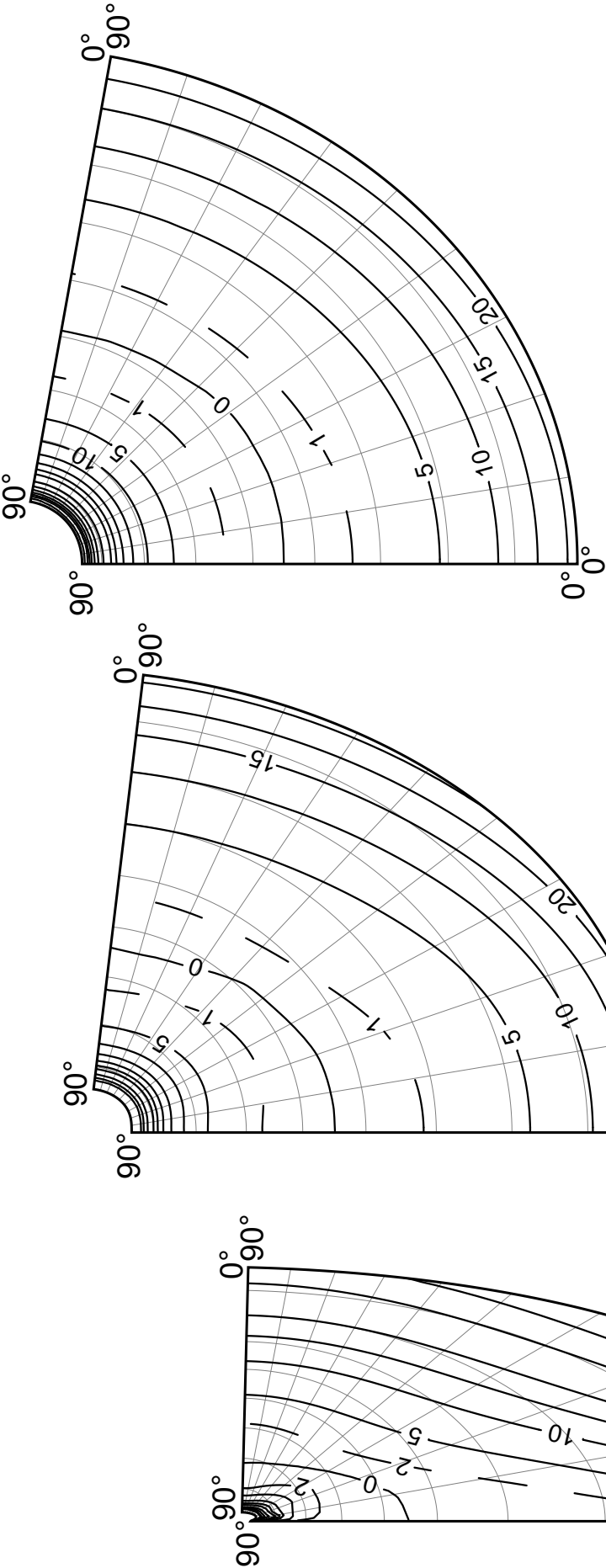
Спутник Марса Фобос
 $a = 13 \text{ км}$, $b = 11,4 \text{ км}$, $c = 9,1 \text{ км}$

Спутник Сатурна Гиперион
 $a = 177,6 \text{ км}$, $b = 128,5 \text{ км}$, $c = 105,6 \text{ км}$

Астероид 433 Эрос
 $a = 17 \text{ км}$, $b = 5,5 \text{ км}$, $c = 5,5 \text{ км}$

Равновеликая коническая проекция

Наибольшее искажение углов (°)



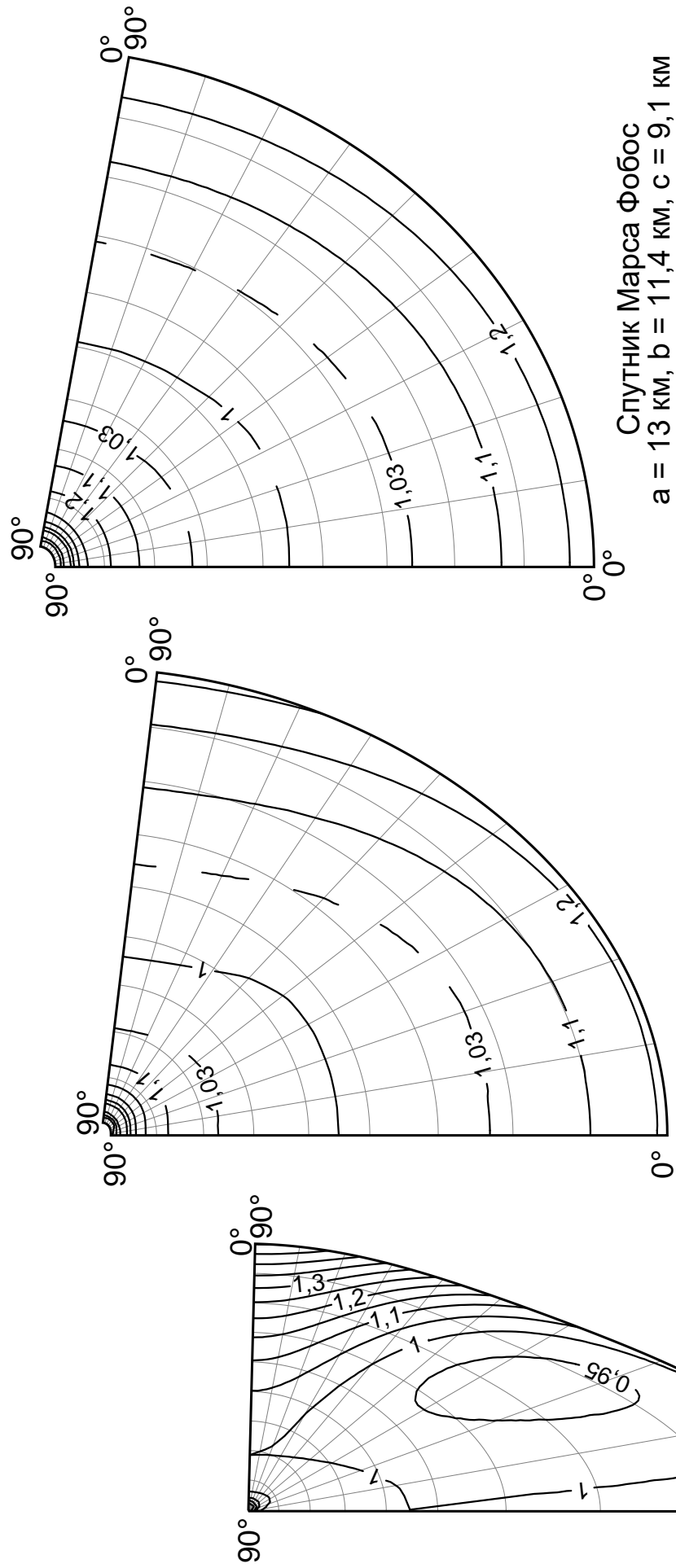
Спутник Марса Фобос
 $a = 13 \text{ км}$, $b = 11,4 \text{ км}$, $c = 9,1 \text{ км}$

Спутник Сатурна Гиперион
 $a = 177,6 \text{ км}$, $b = 128,5 \text{ км}$, $c = 105,6 \text{ км}$

Астероид 433 Эрос
 $a = 17 \text{ км}$, $b = 5,5 \text{ км}$, $c = 5,5 \text{ км}$

Коническая проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов

Масштаб длин вдоль параллелей

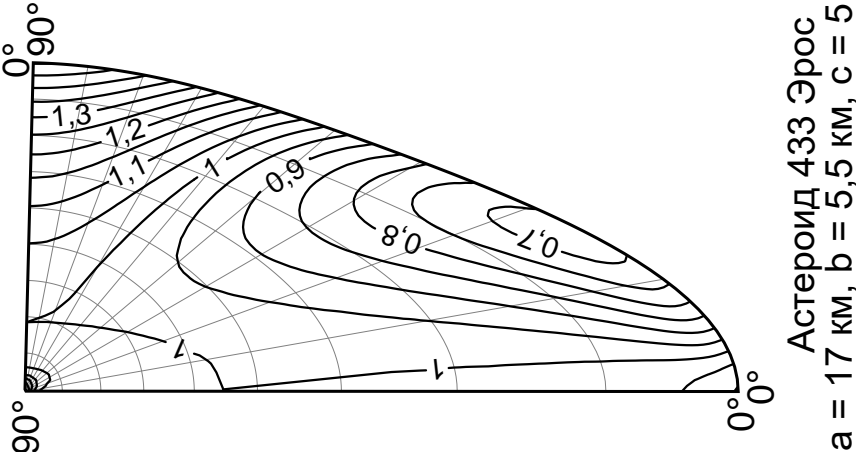
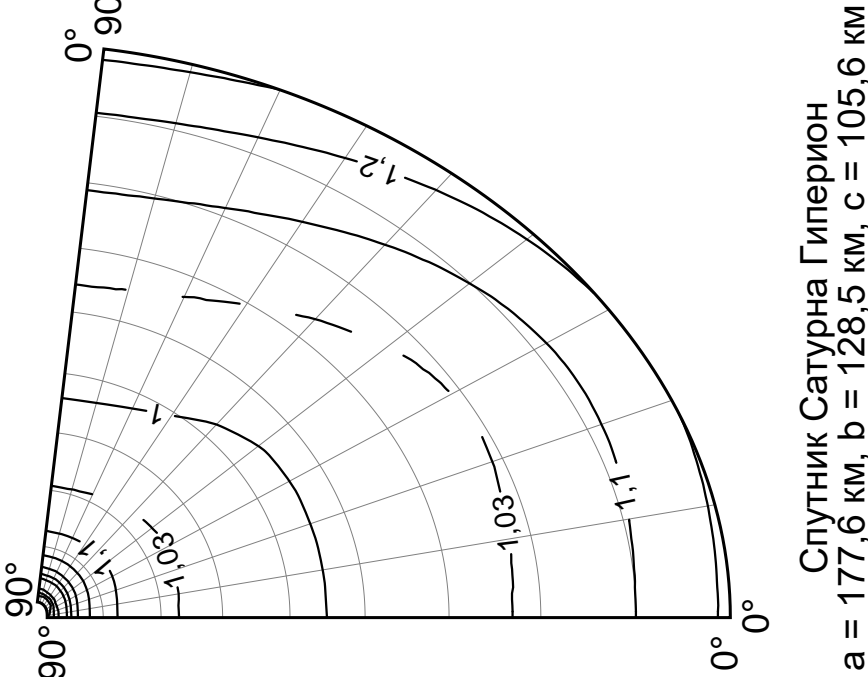
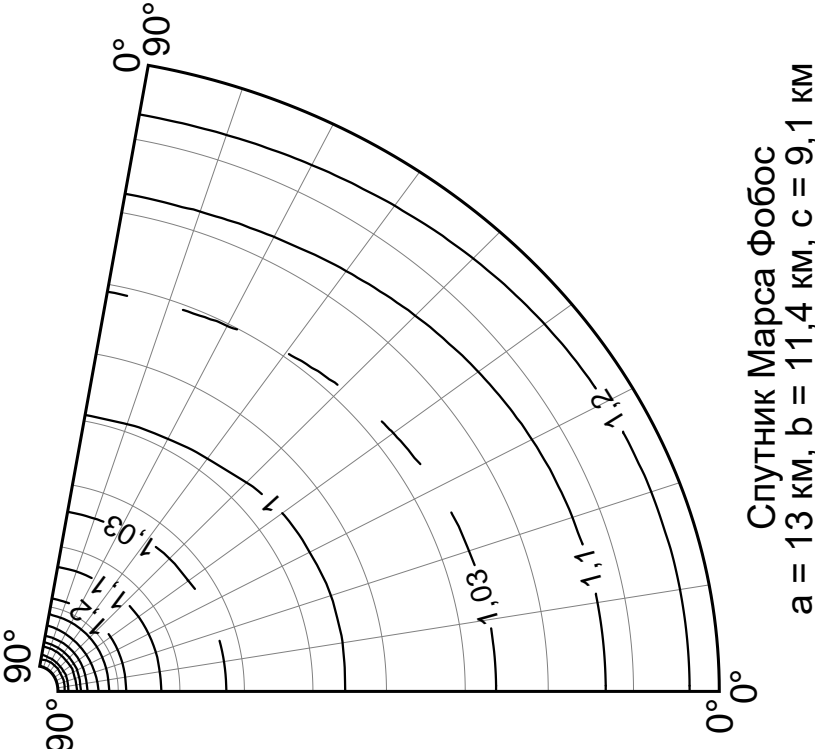


Спутник Сатурна Гиперион
 $a = 177,6 \text{ км}$, $b = 128,5 \text{ км}$, $c = 105,6 \text{ км}$

Астероид 433 Эрос
 $a = 17 \text{ км}, b = 5,5 \text{ км}, c = 5,5 \text{ км}$

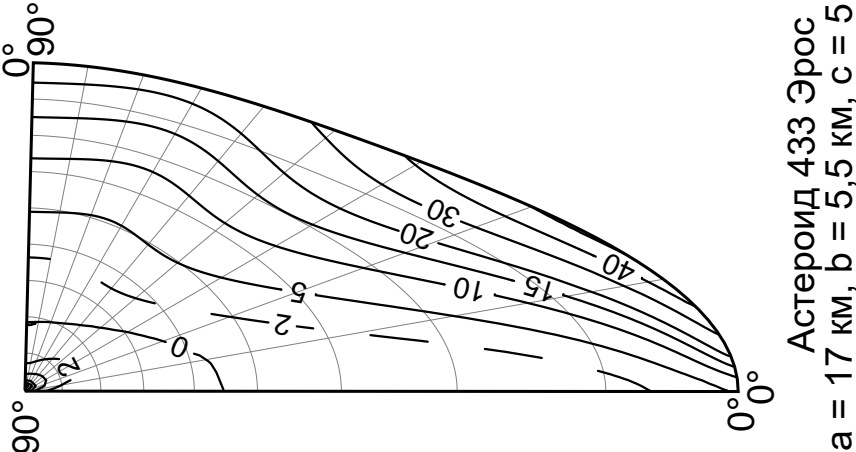
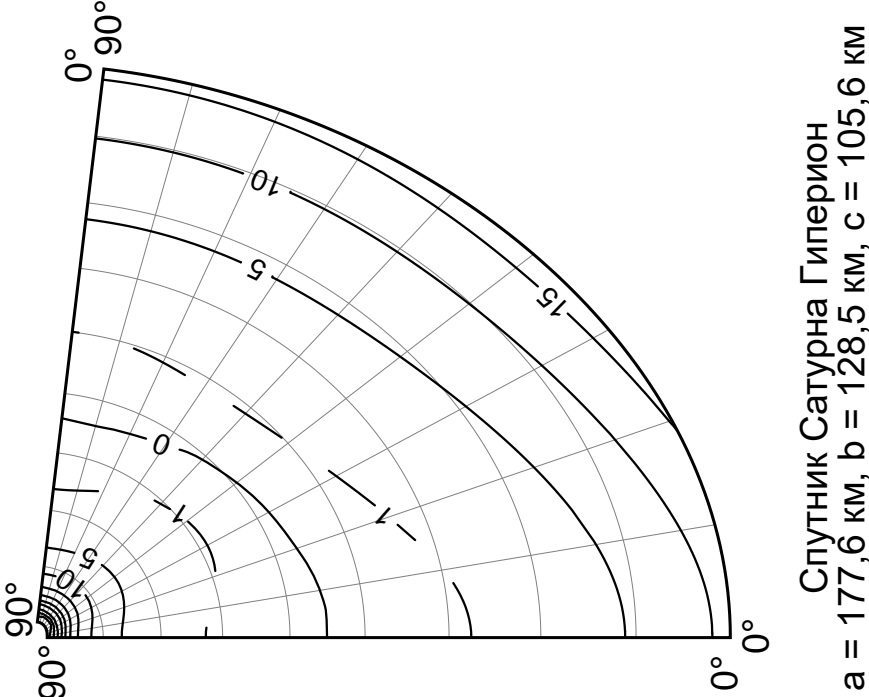
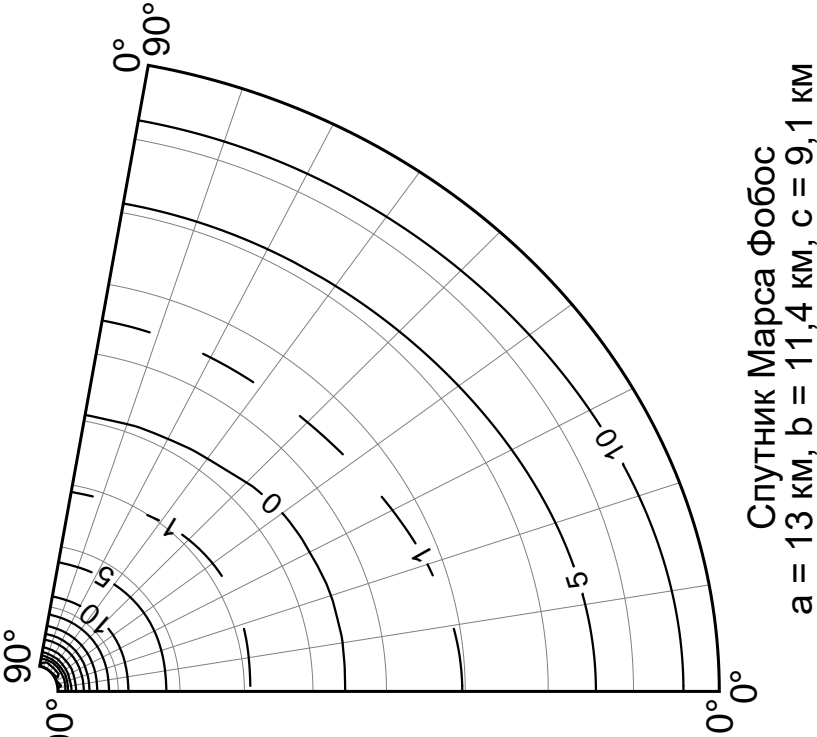
Коническая проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов

Масштаб площадей



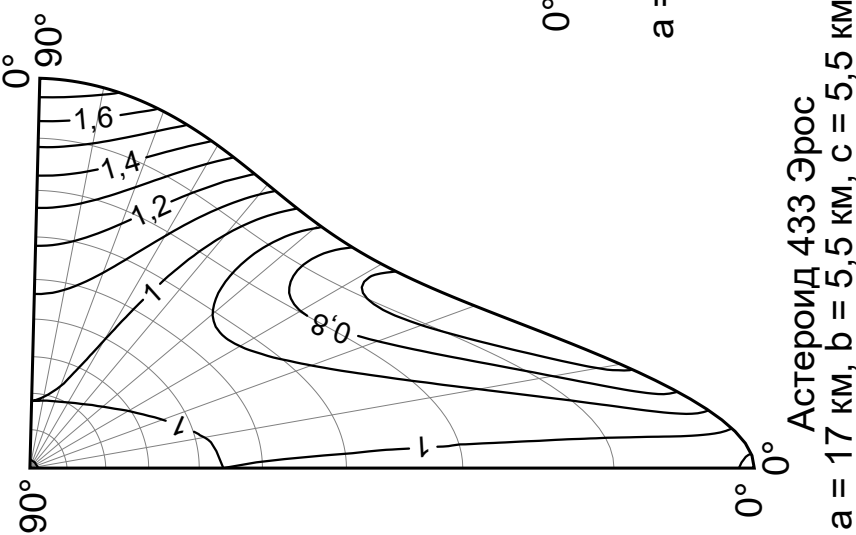
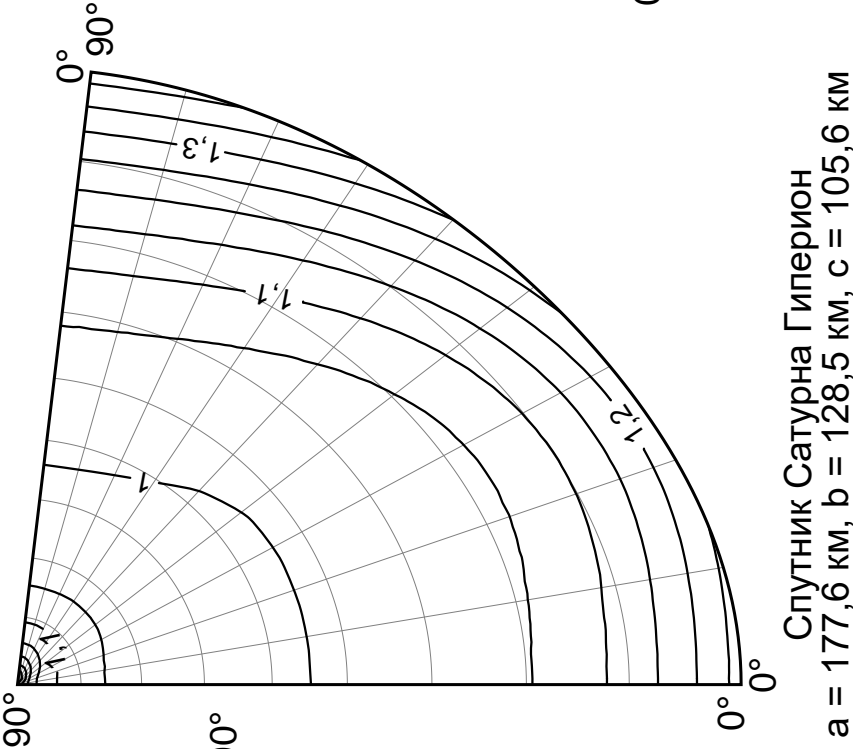
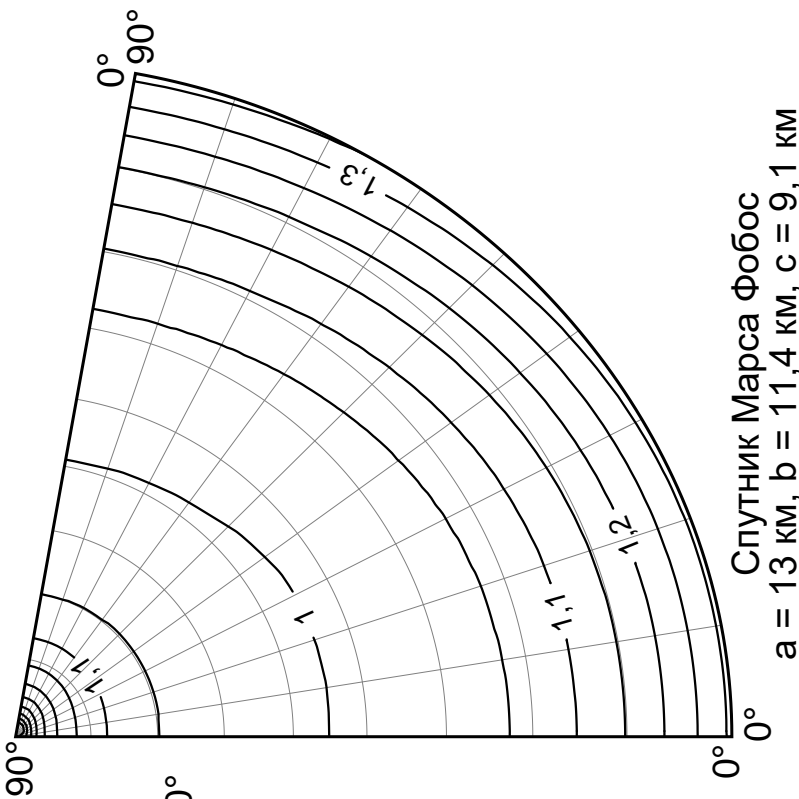
Коническая проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов

Наибольшее искажение углов (°)



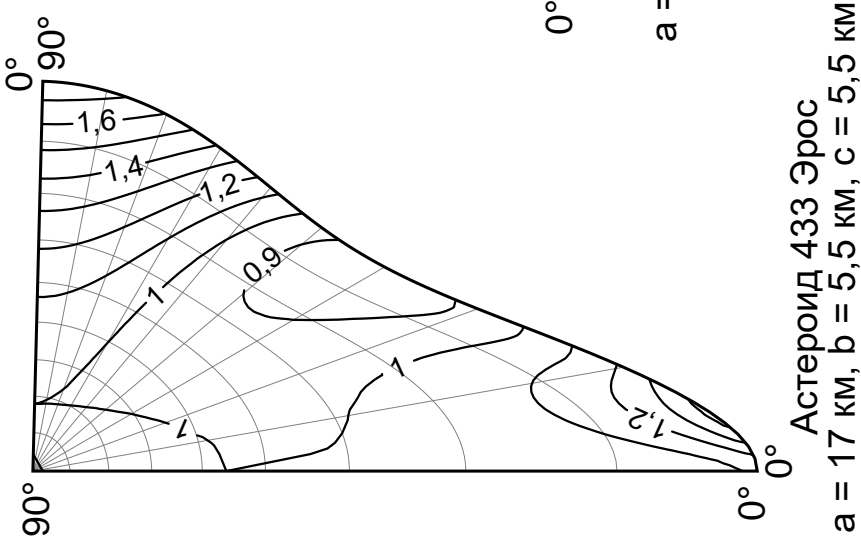
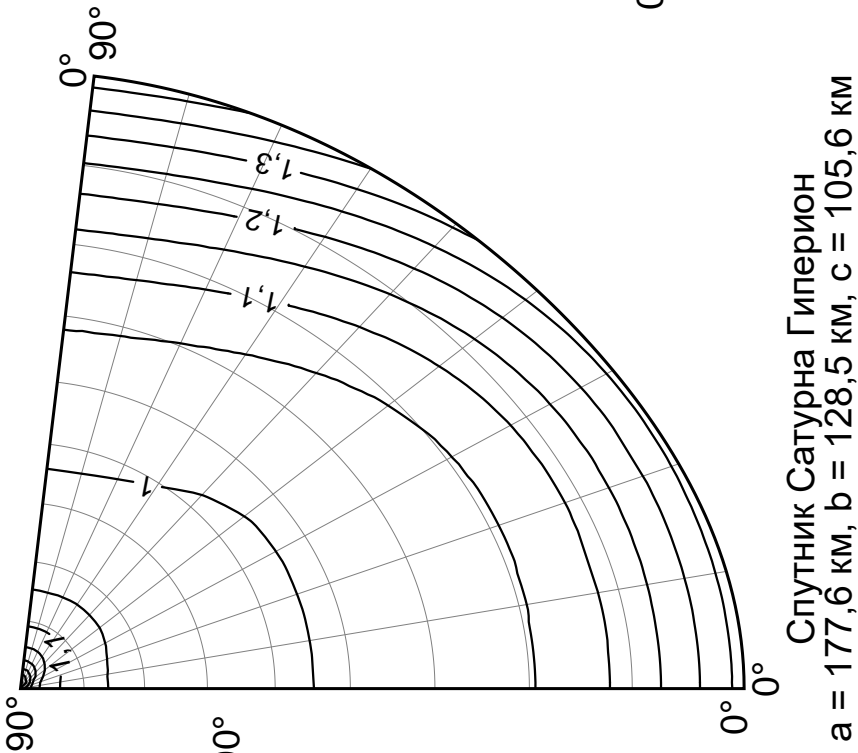
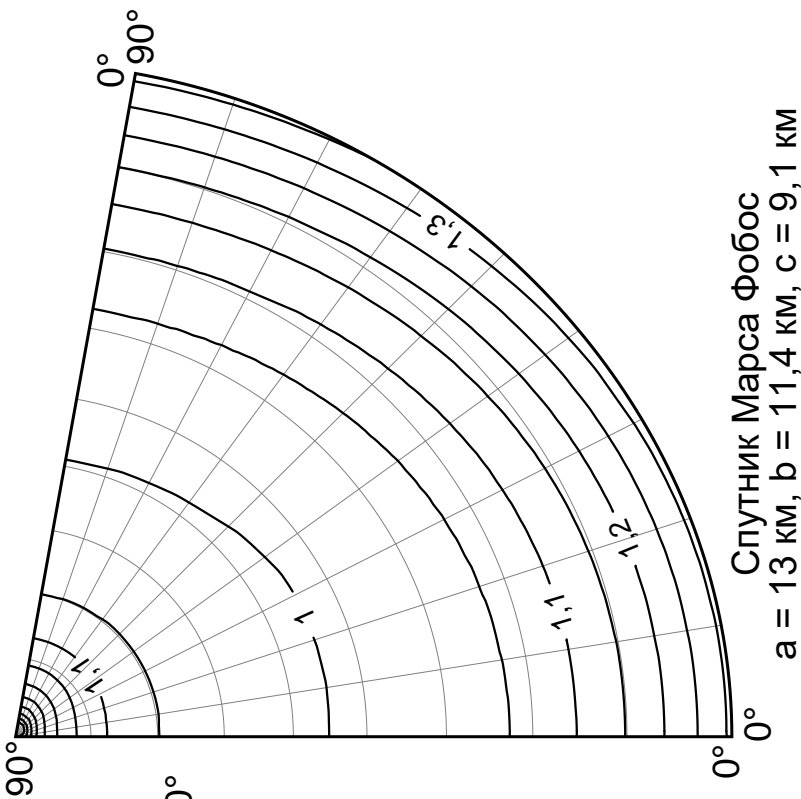
Коническая проекция меридианного сечения

Масштаб длин вдоль меридианов



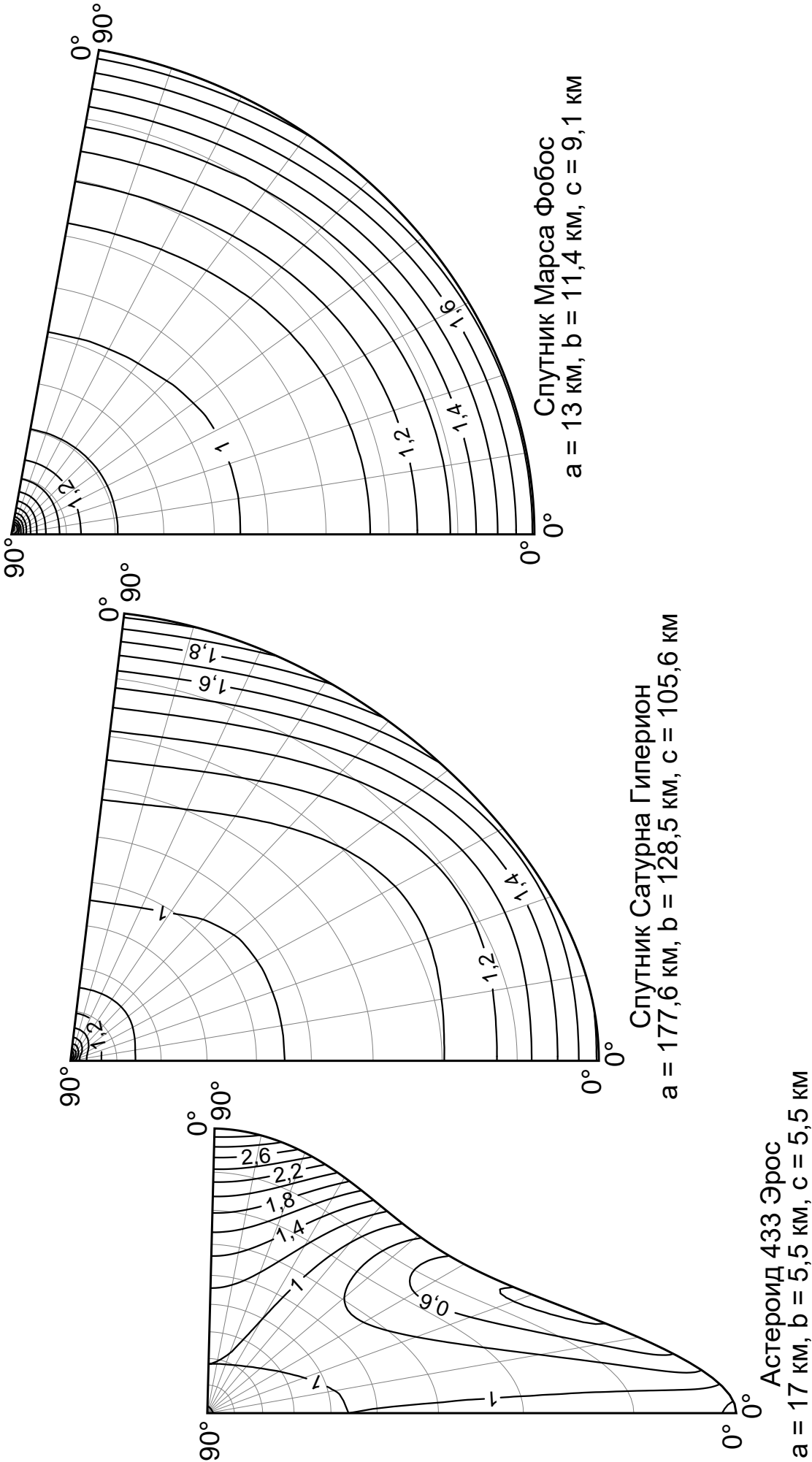
Коническая проекция меридианного сечения

Масштаб длин вдоль параллелей



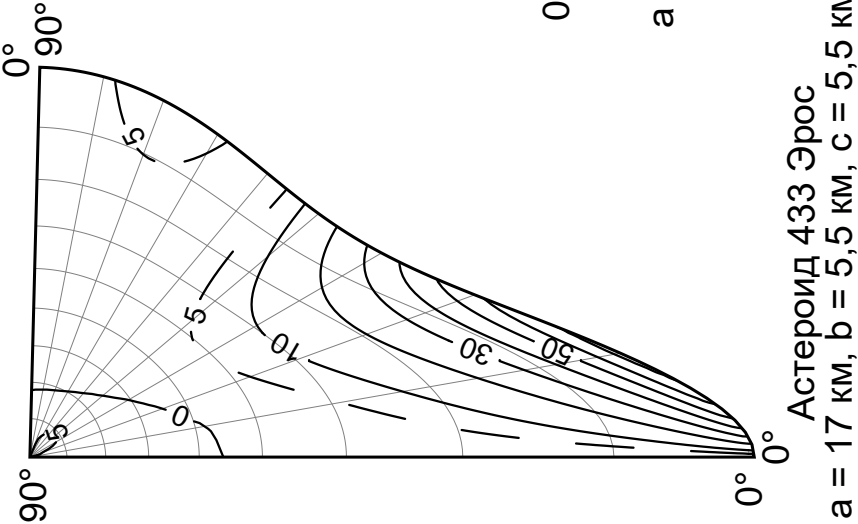
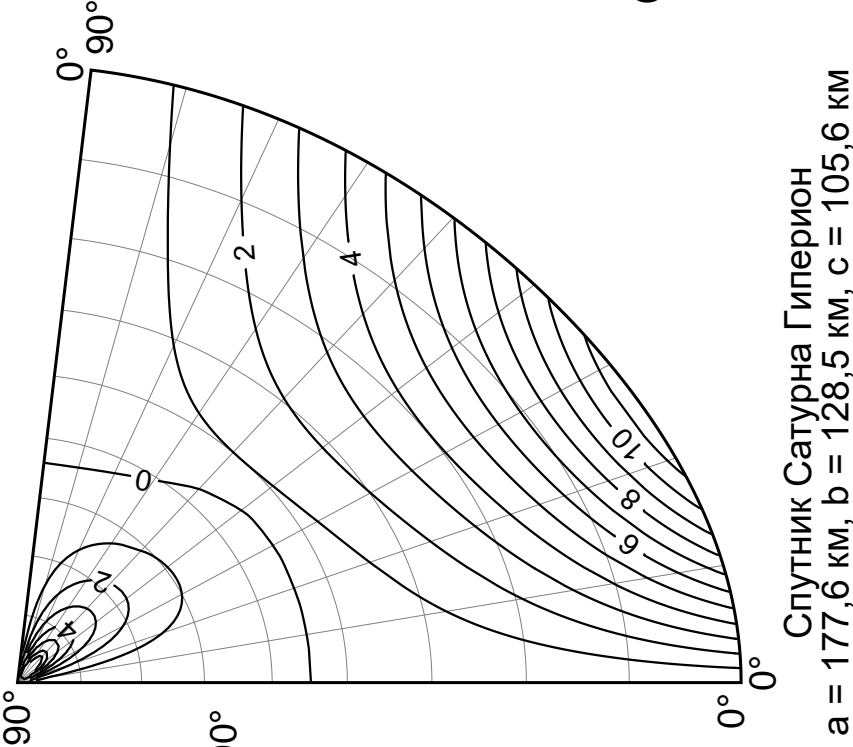
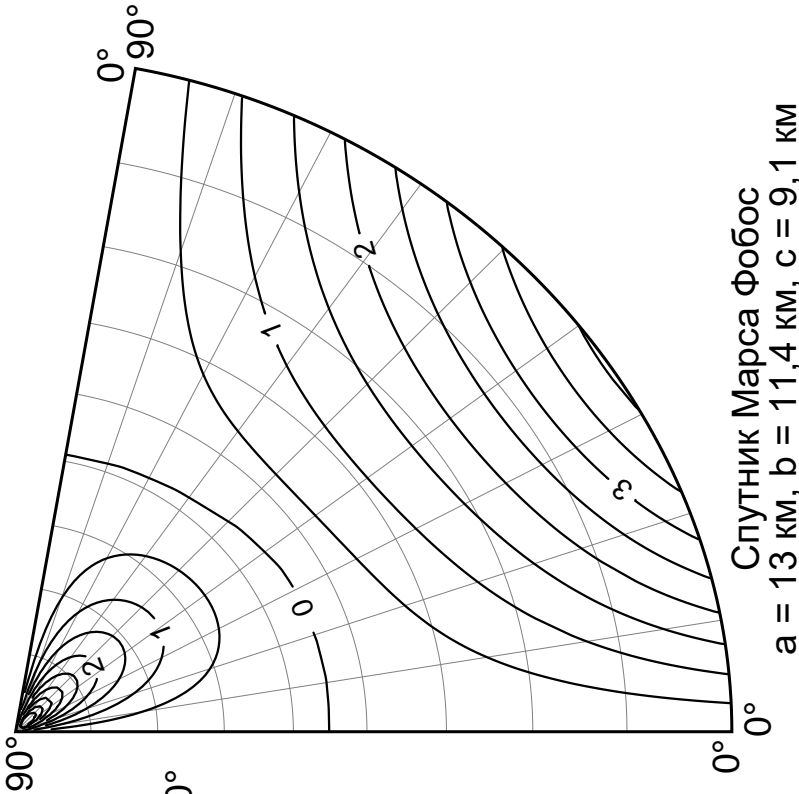
Коническая проекция меридианного сечения

Масштаб площадей



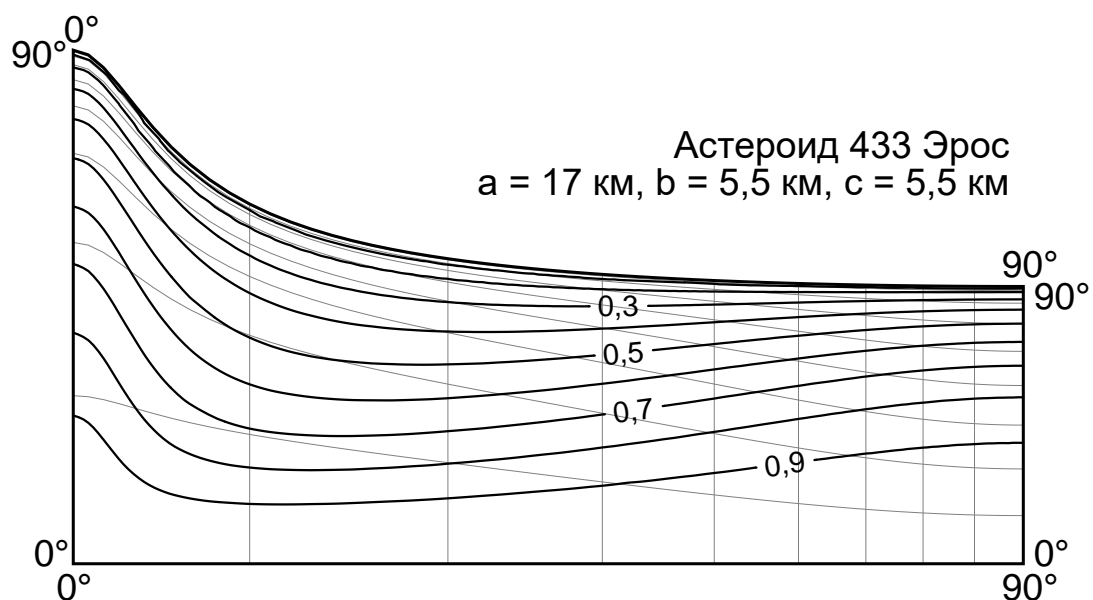
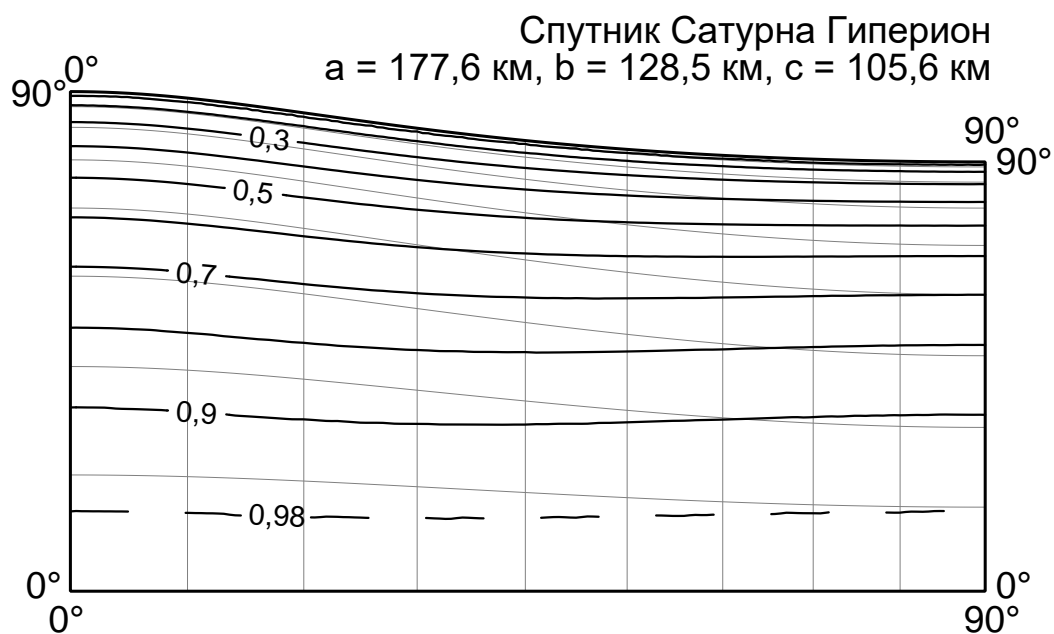
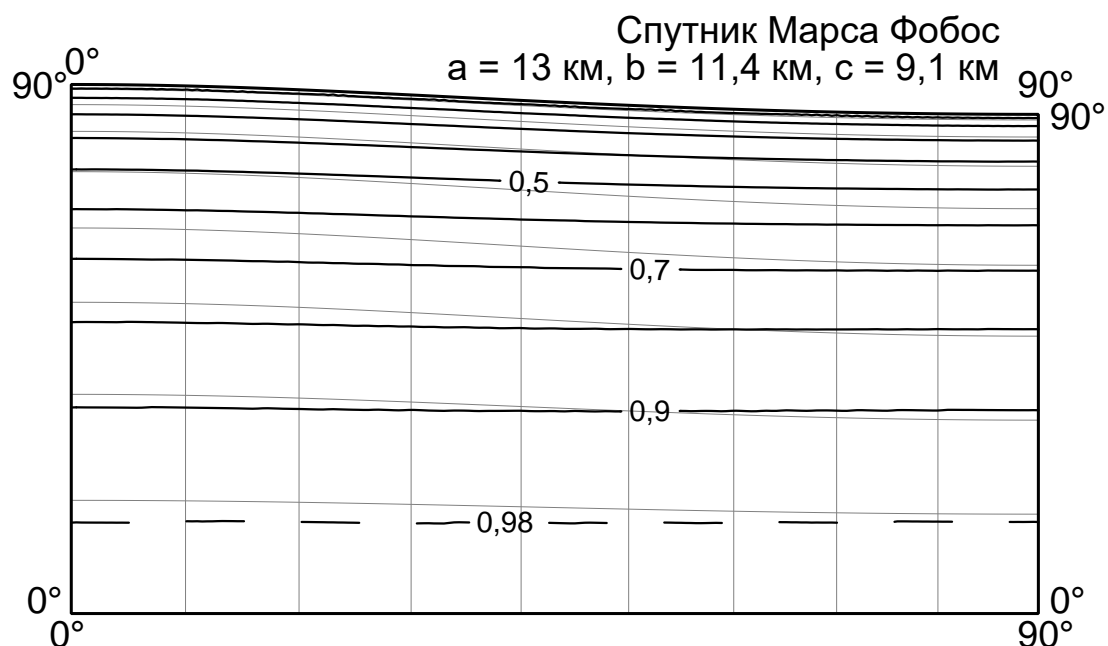
Коническая проекция меридианного сечения

Наибольшее искажение углов (°)

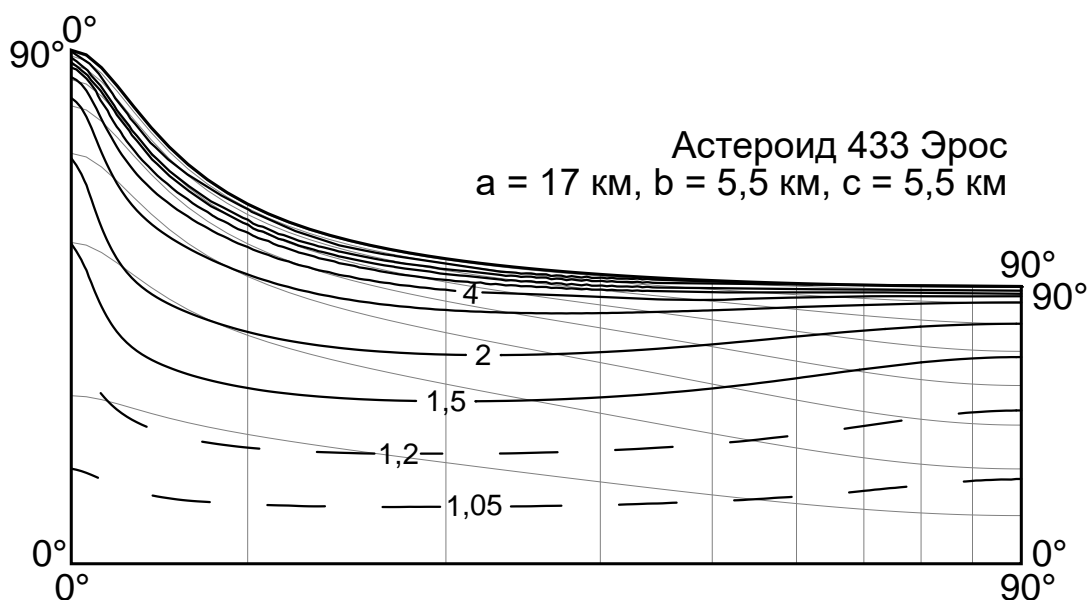
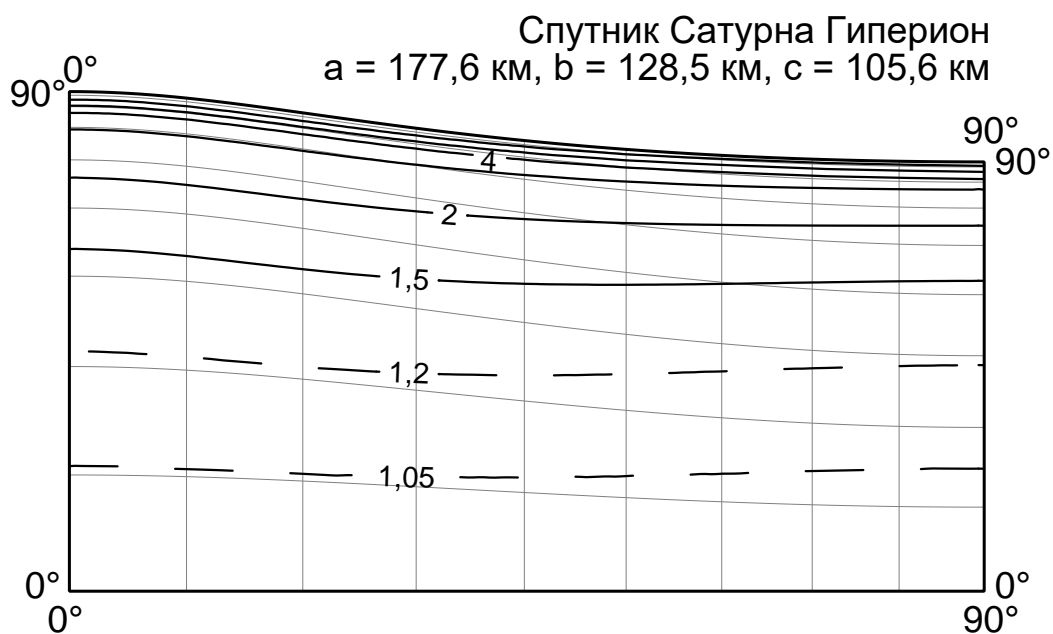
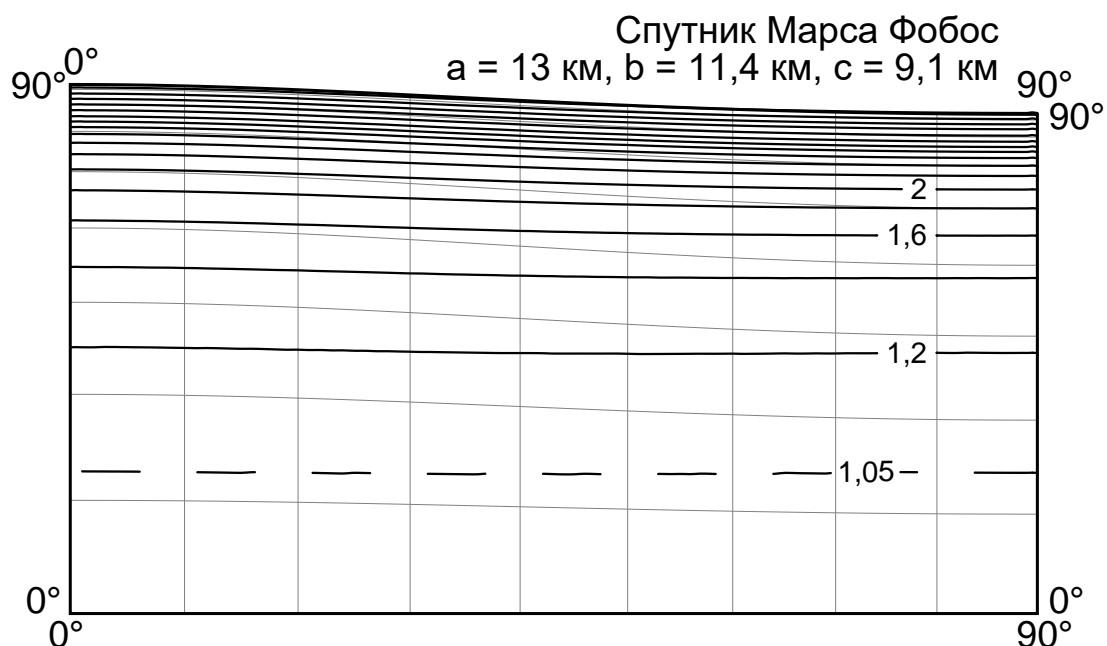


Равновеликая цилиндрическая проекция

Масштаб длин вдоль меридианов

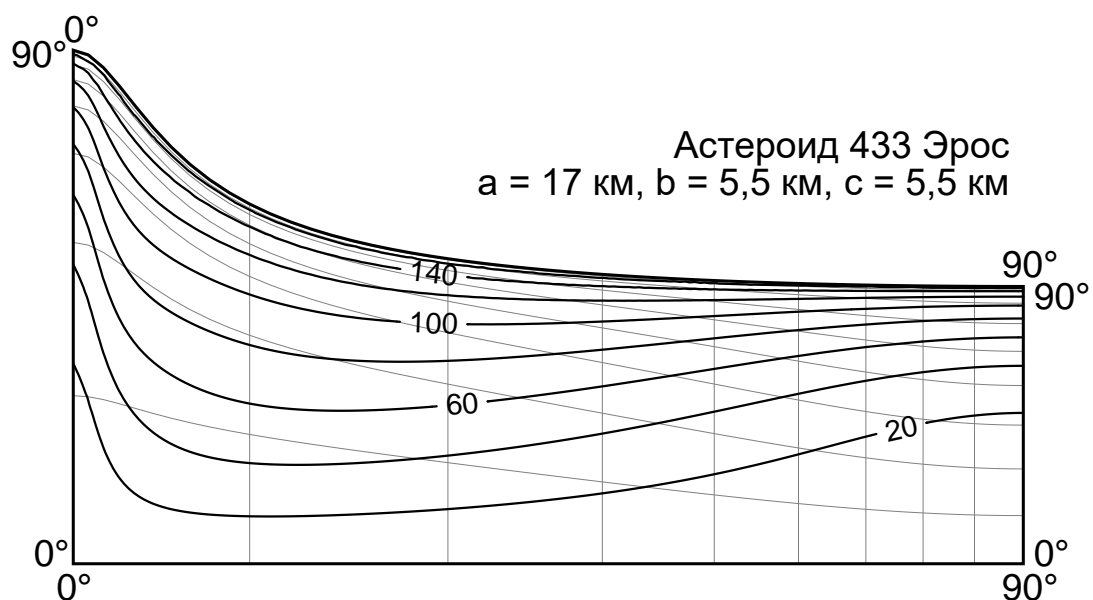
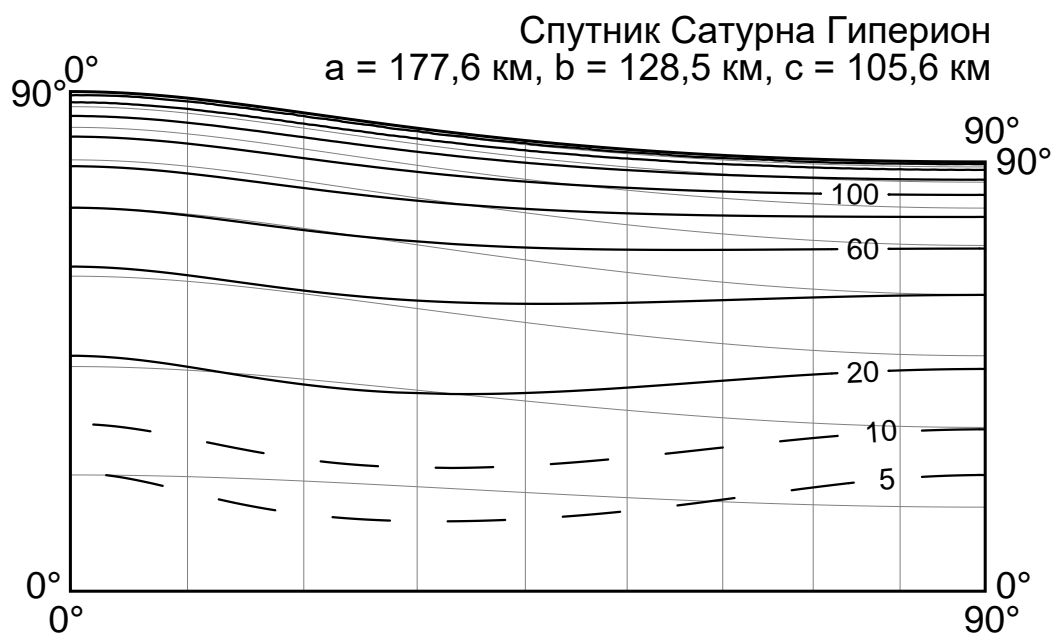
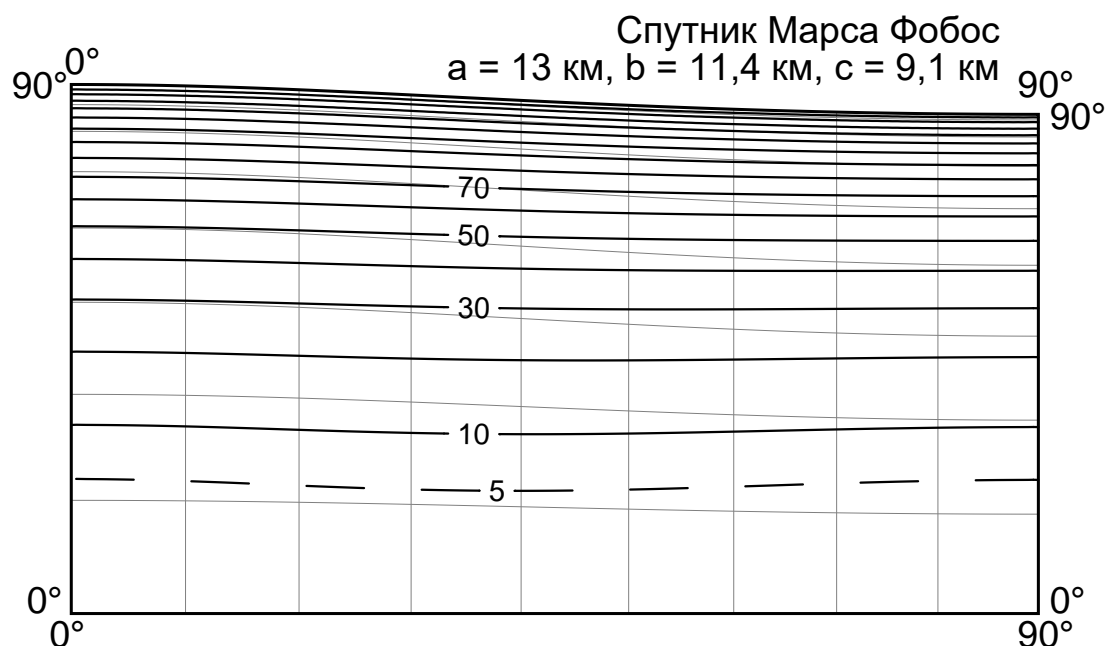


Равновеликая цилиндрическая проекция Масштаб длин вдоль параллелей



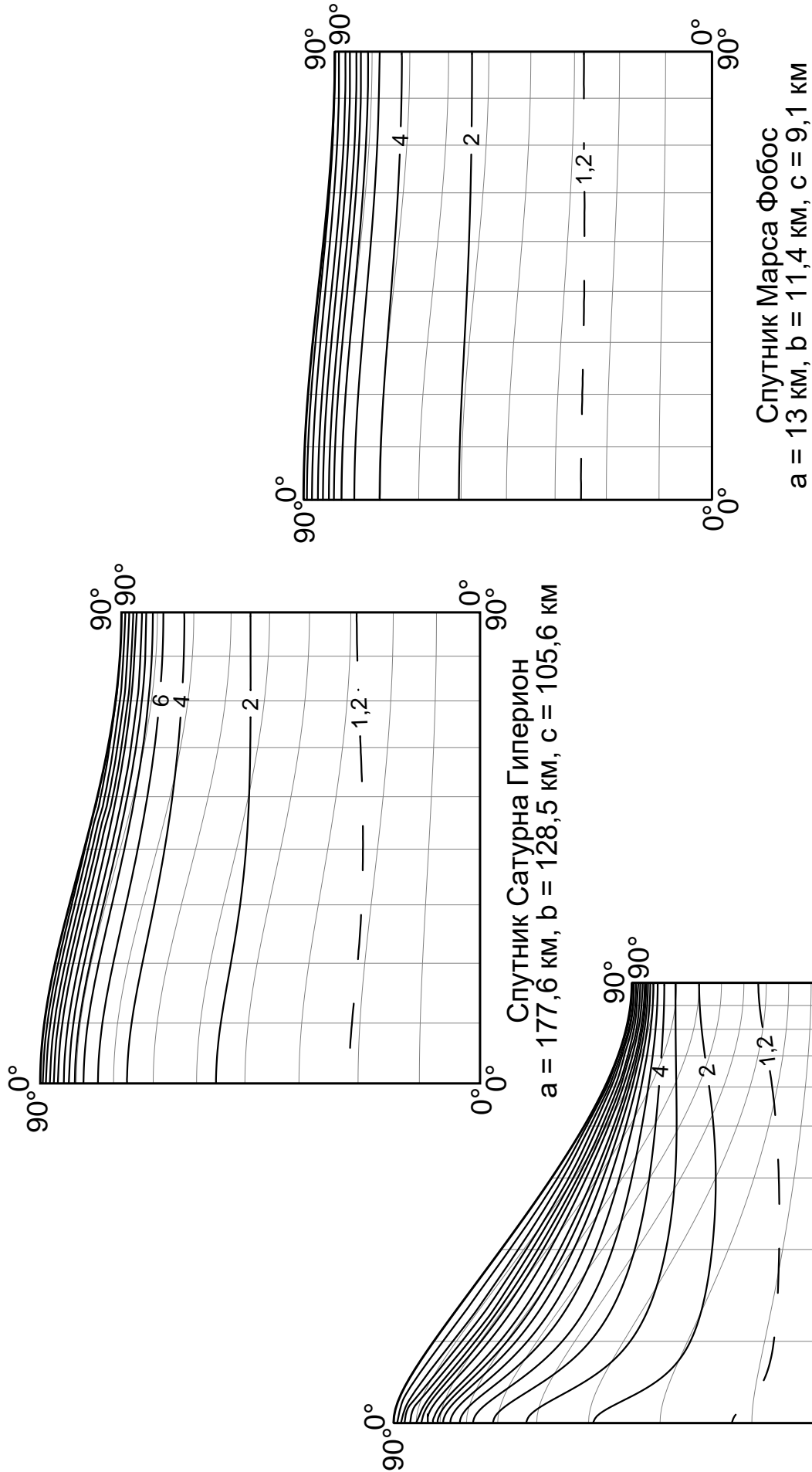
Равновеликая цилиндрическая проекция

Наибольшее искажение углов (°)



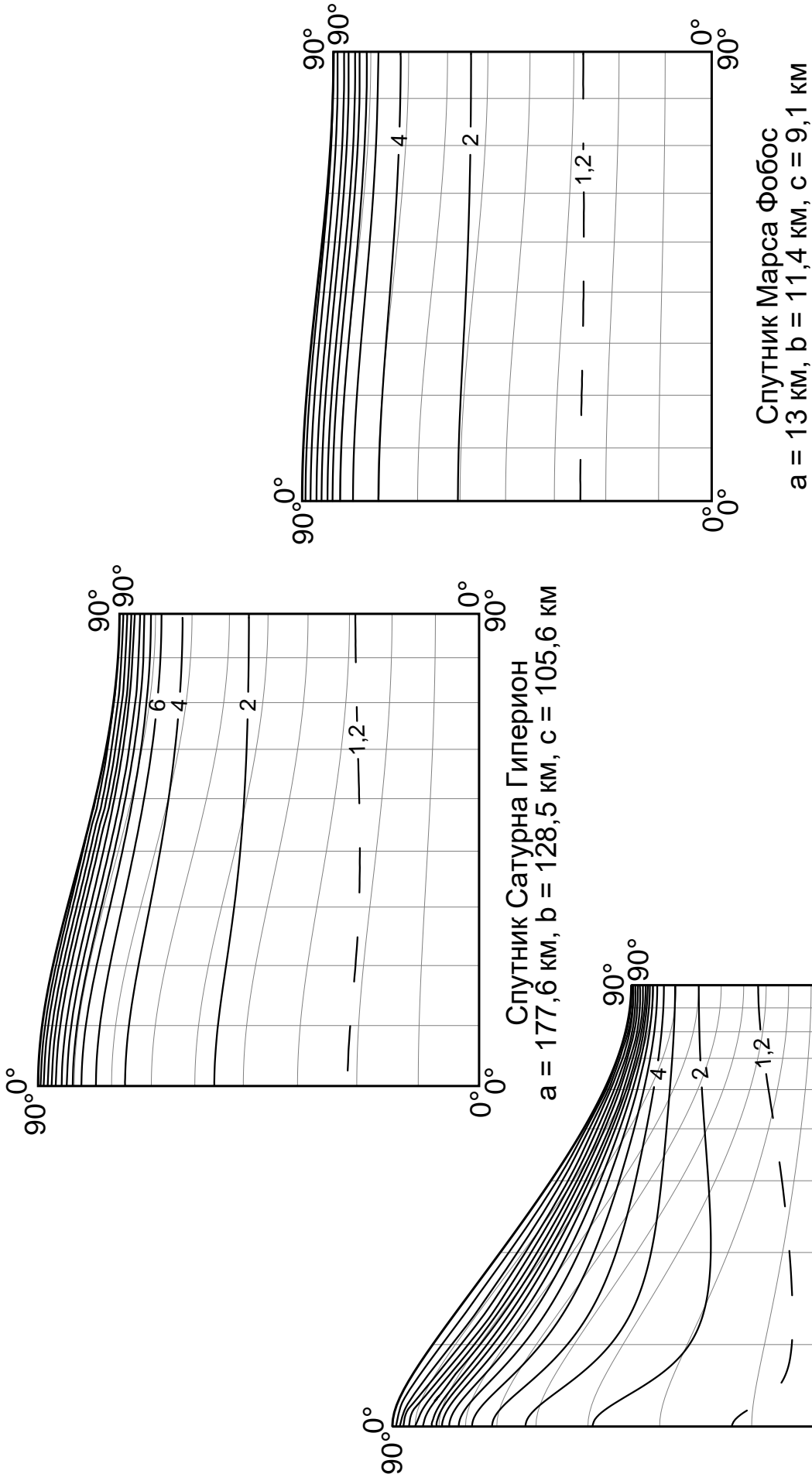
Цилиндрическая проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов

Масштаб длин вдоль параллелей



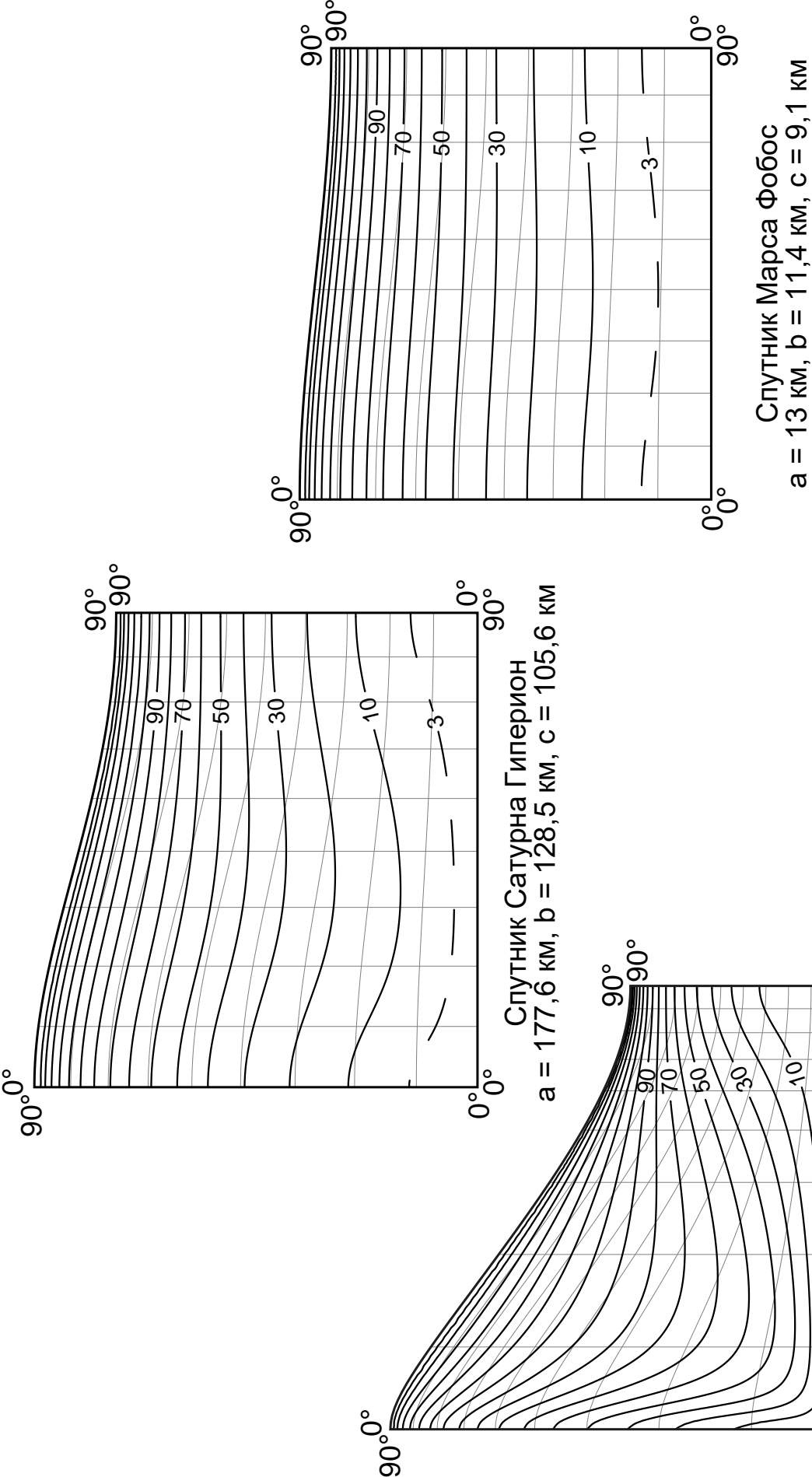
Цилиндрическая проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов

Масштаб площадей

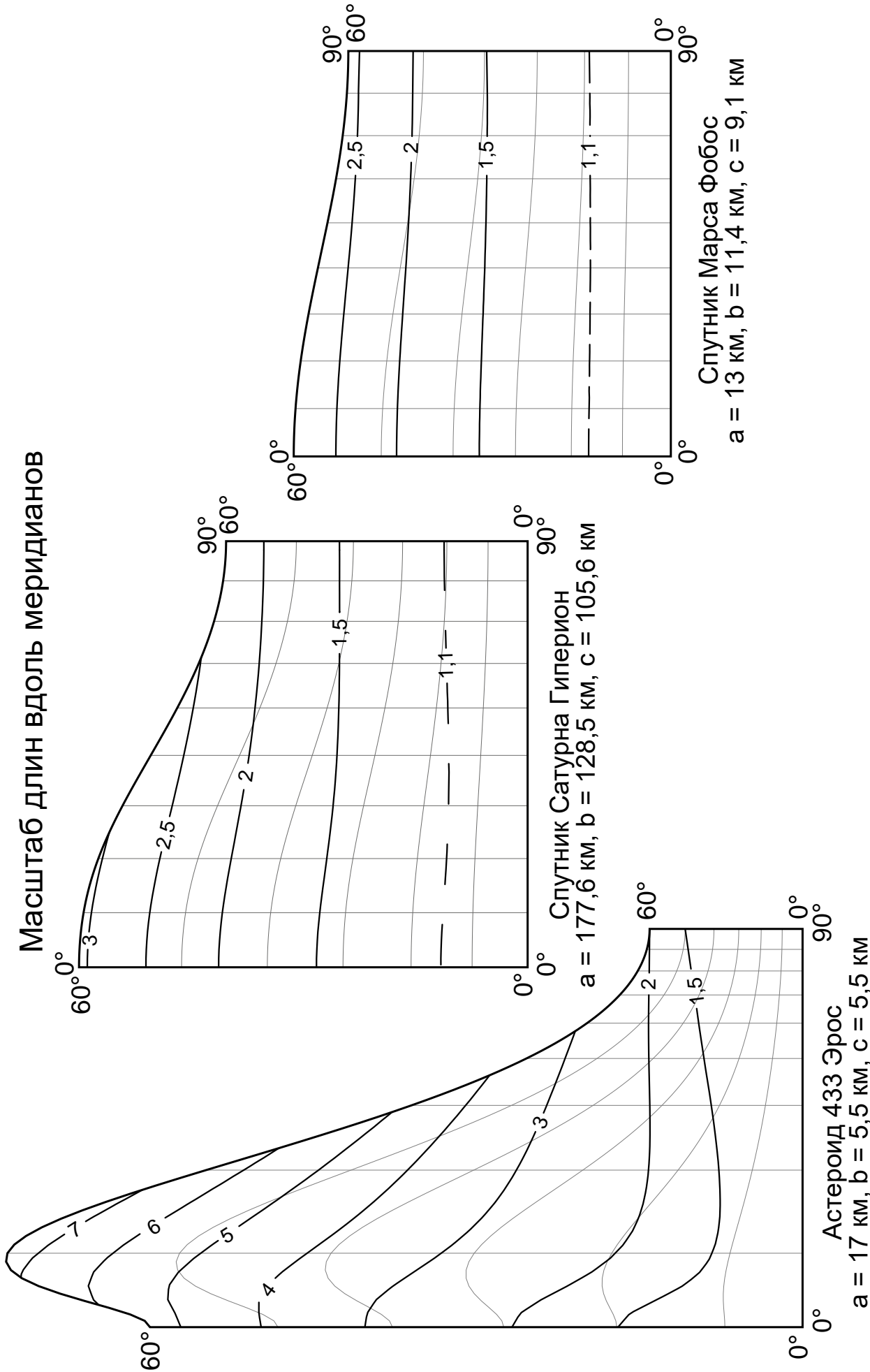


Цилиндрическая проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов

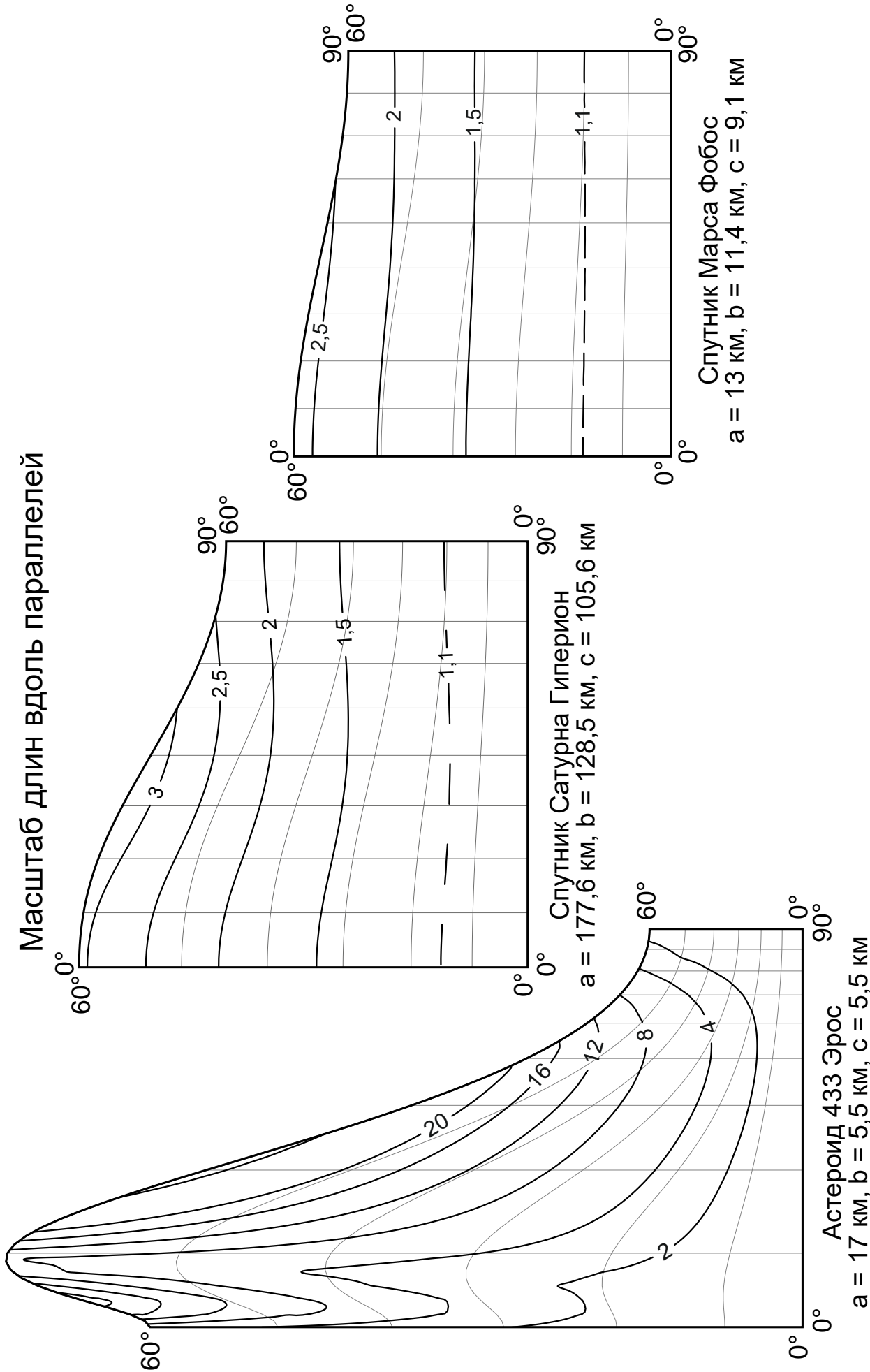
Наибольшее искажение углов (°)



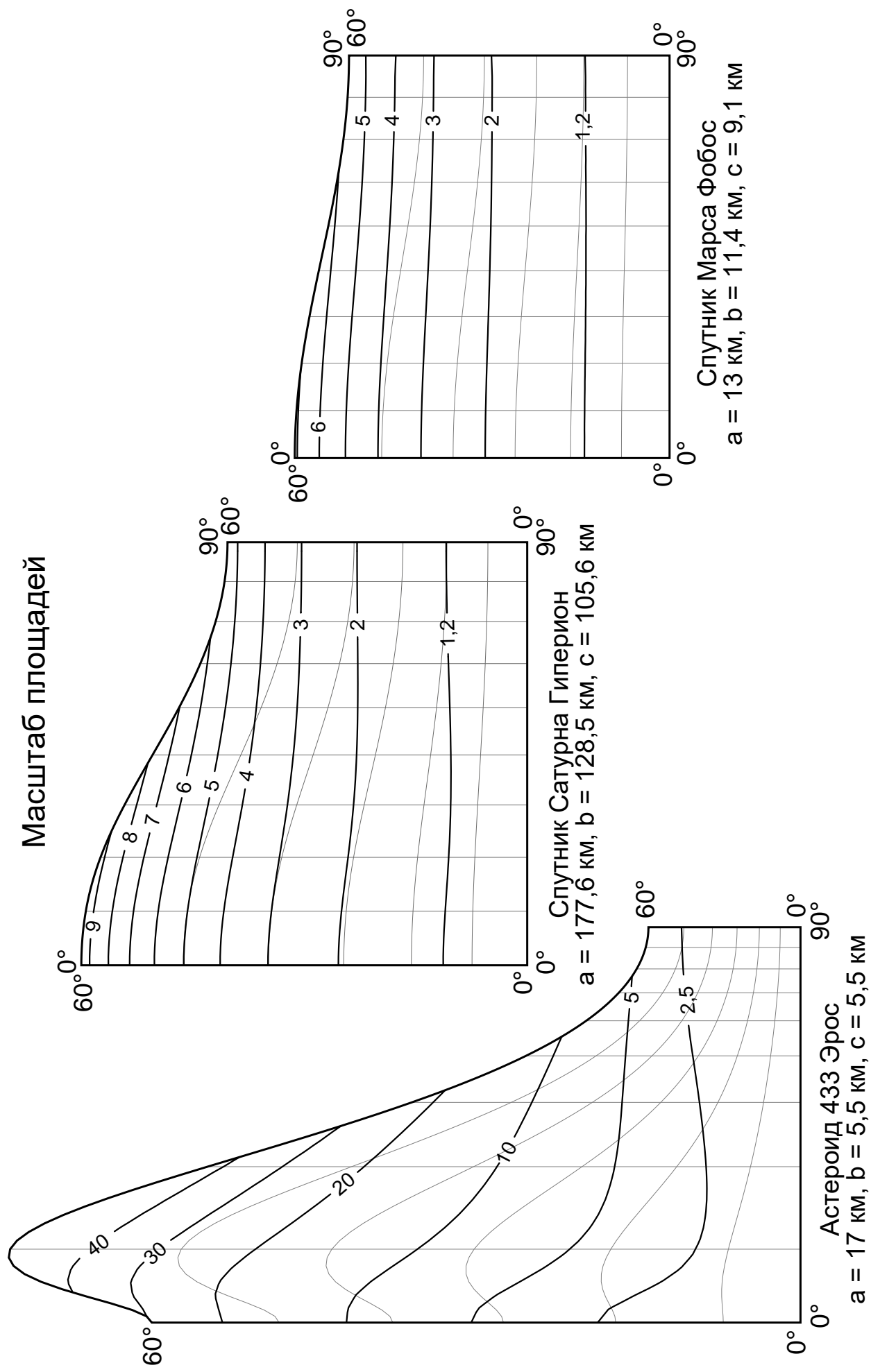
Цилиндрическая проекция меридианного сечения



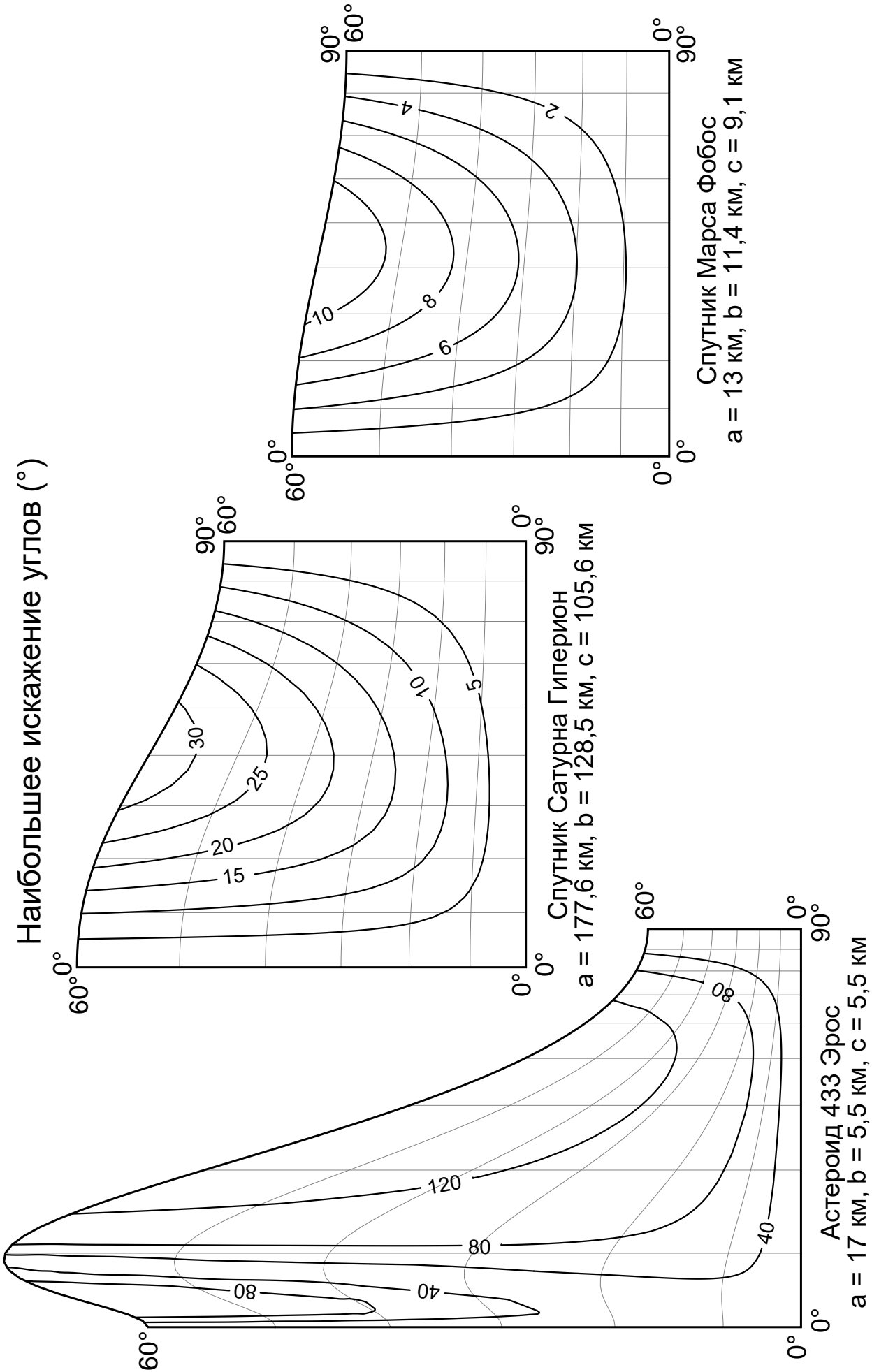
Цилиндрическая проекция меридианного сечения



Цилиндрическая проекция меридианного сечения

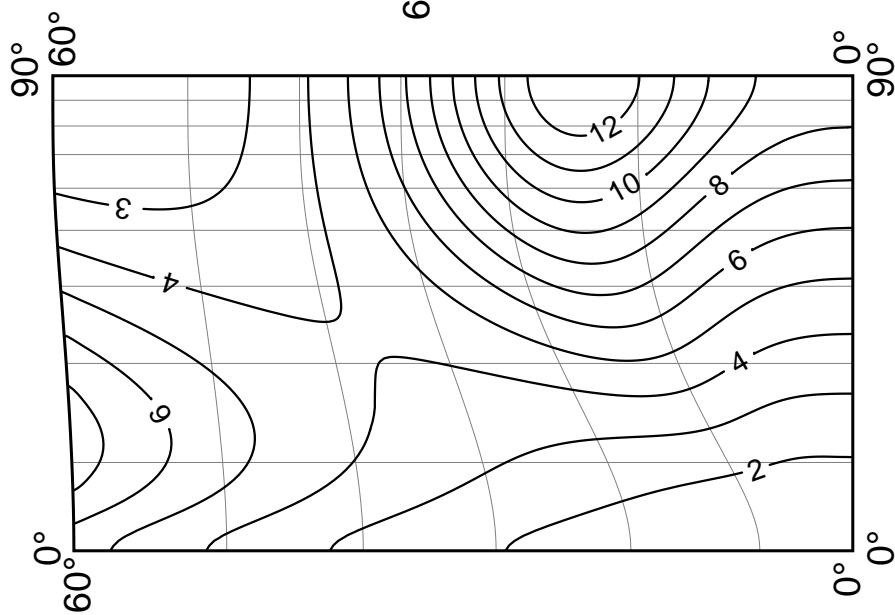


Цилиндрическая проекция меридианного сечения



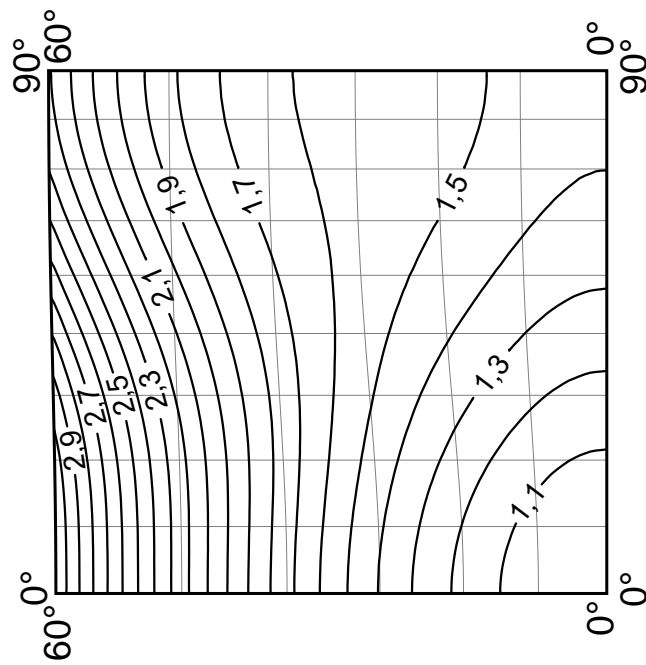
Цилиндрическая проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью

Масштаб длин вдоль меридианов



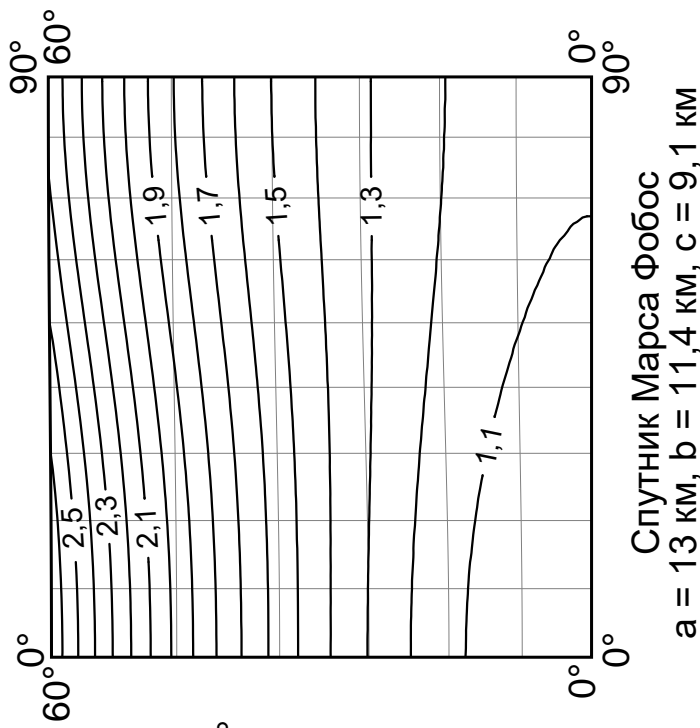
Астероид 433 Эрос

$a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



Спутник Сатурна Гиперион

$a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км

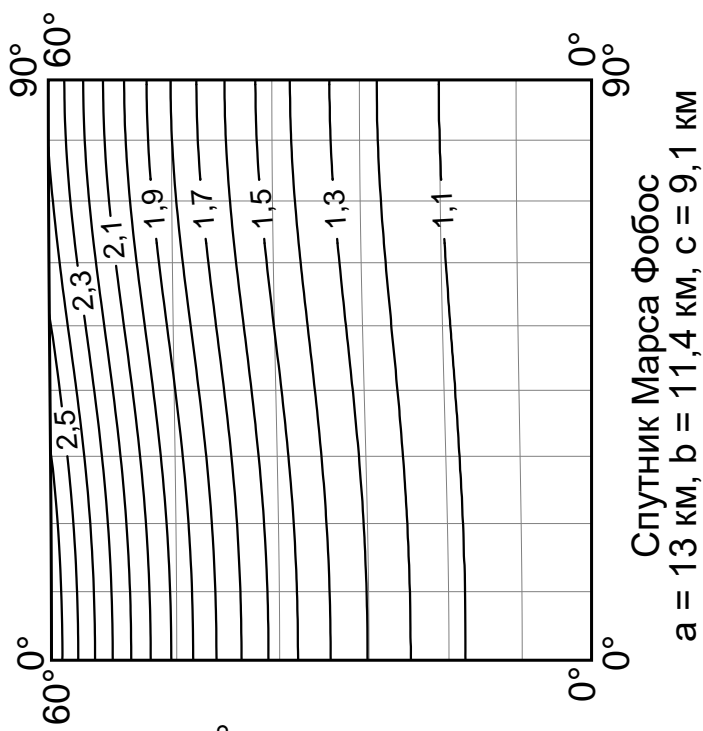
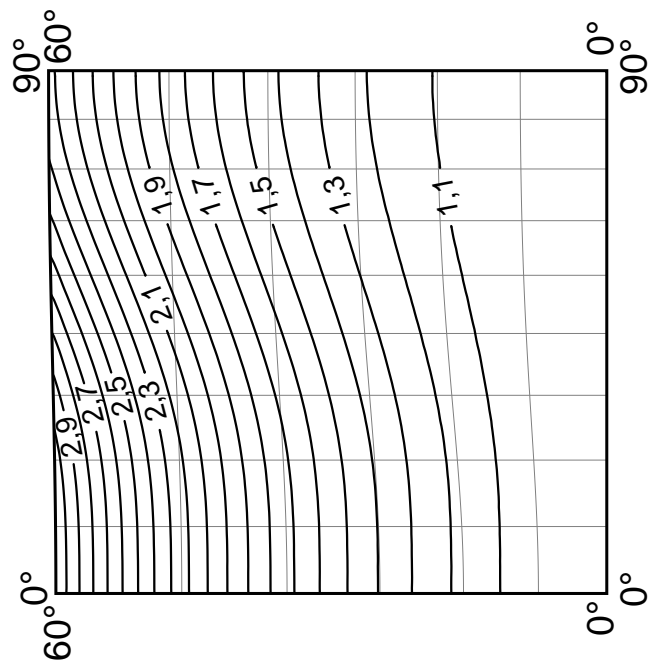
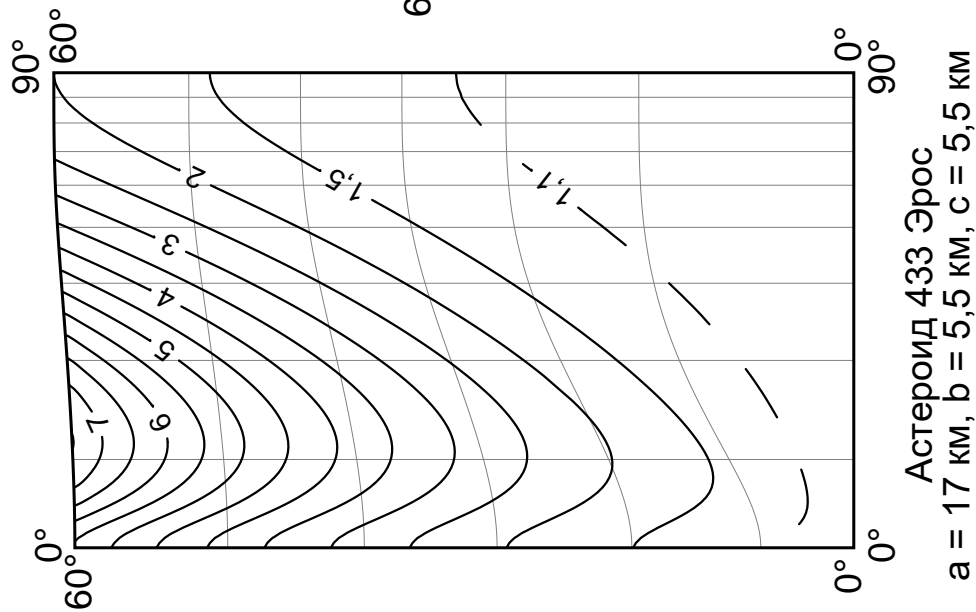


Спутник Марса Фобос

$a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

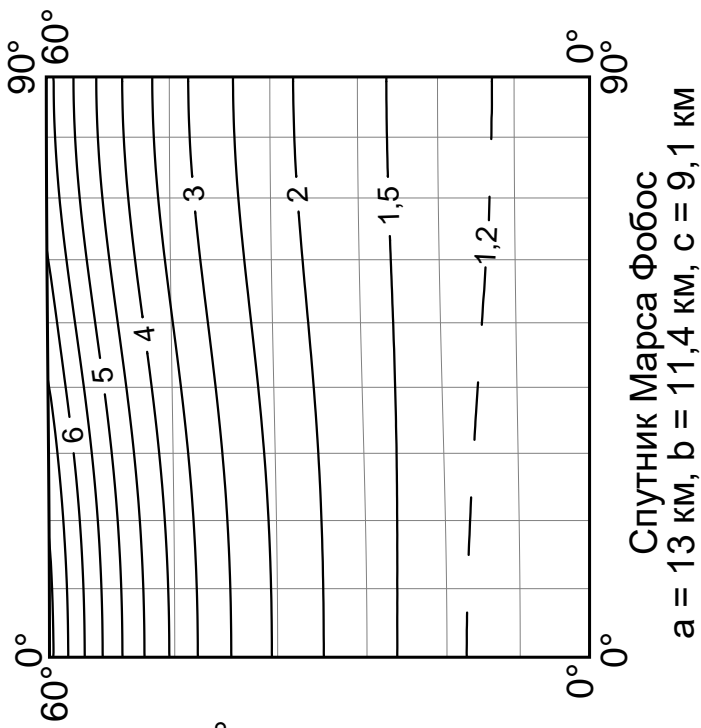
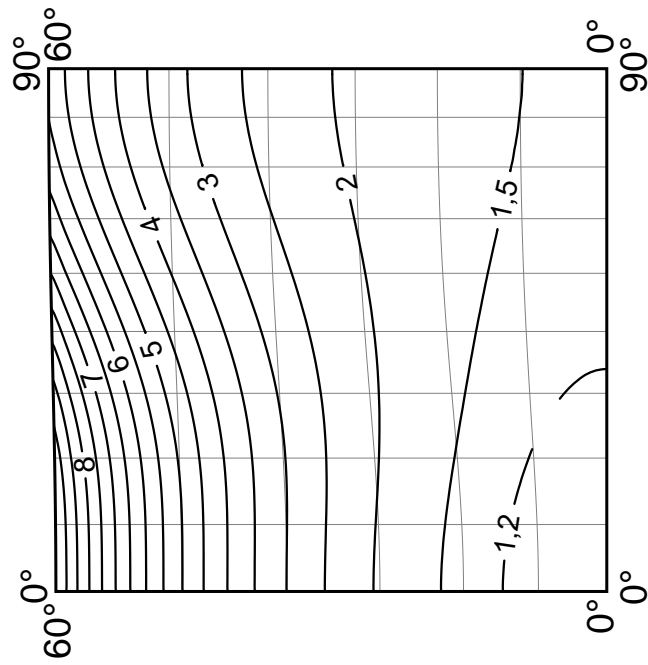
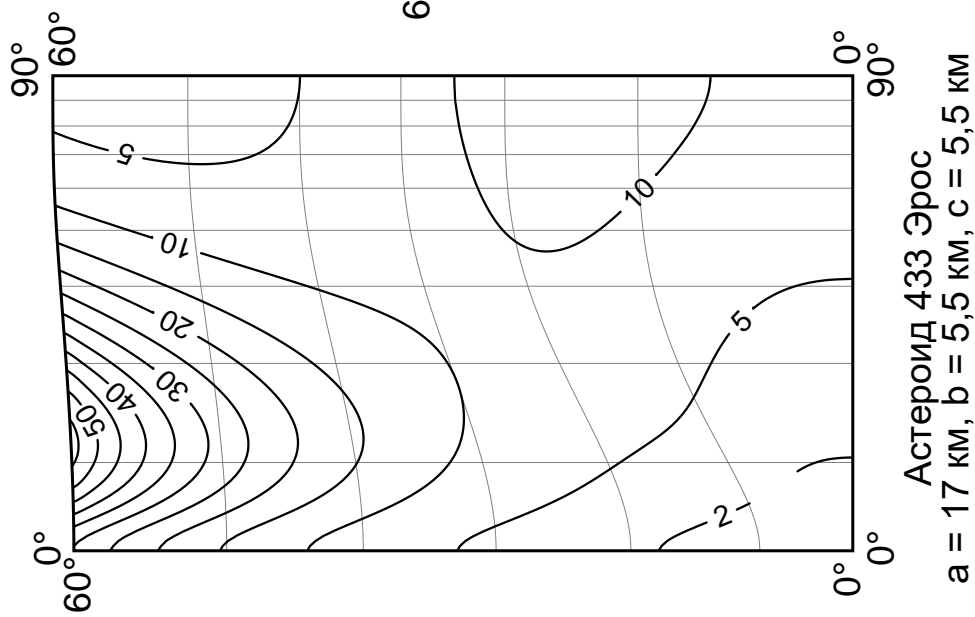
Цилиндрическая проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью

Масштаб длин вдоль параллелей



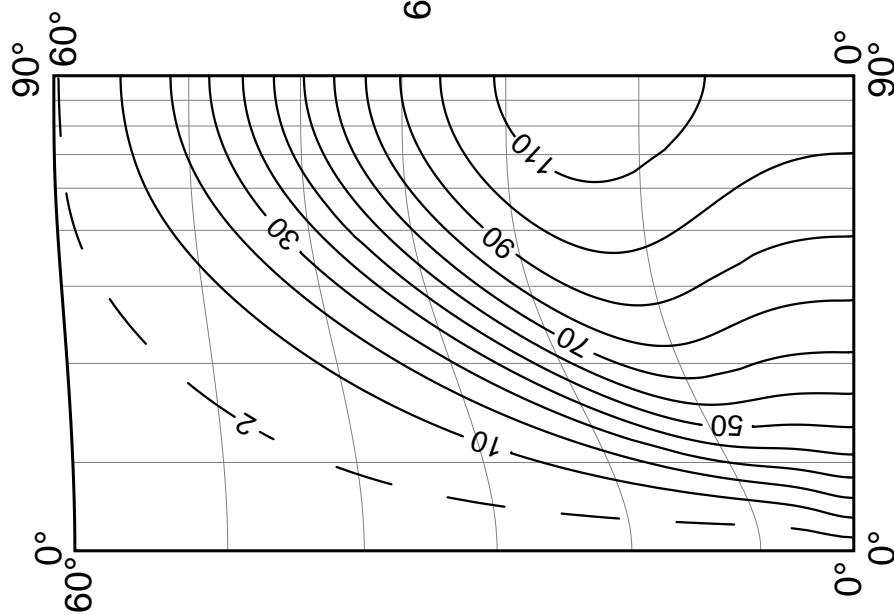
Цилиндрическая проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью

Масштаб площадей



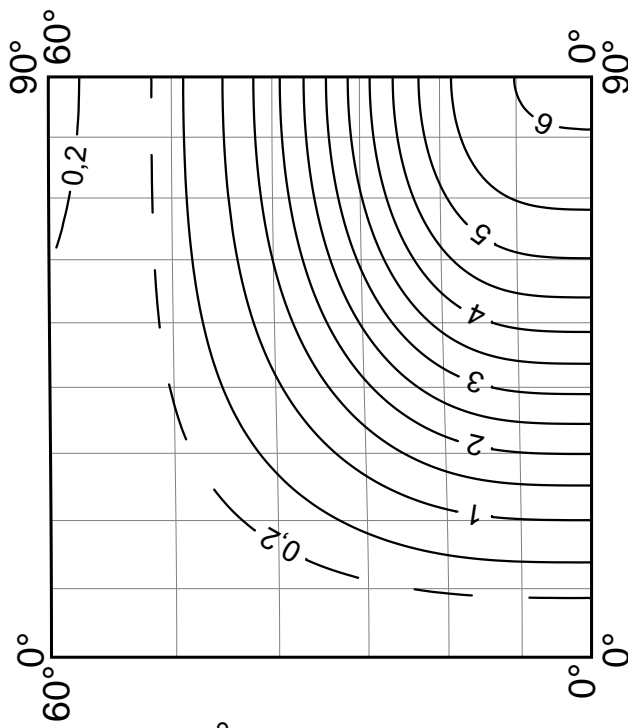
Цилиндрическая проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью

Наибольшее искажение углов (°)



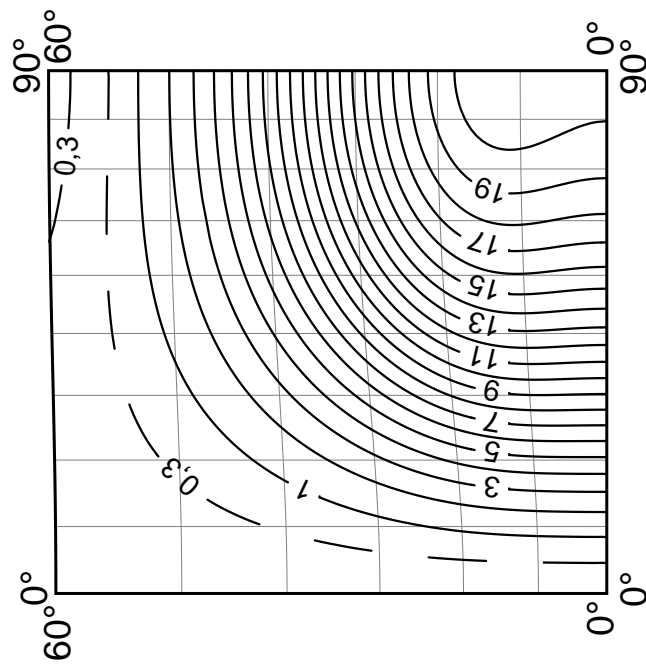
Астероид 433 Эрос

$a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



Спутник Марса Фобос

$a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

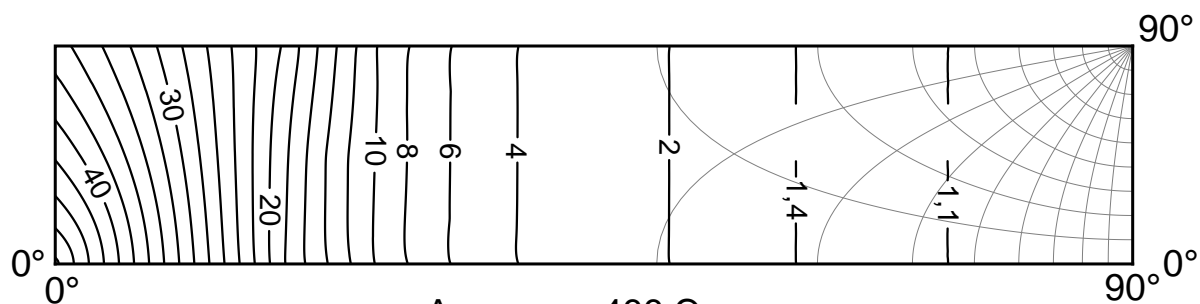


Спутник Сатурна Гиперион

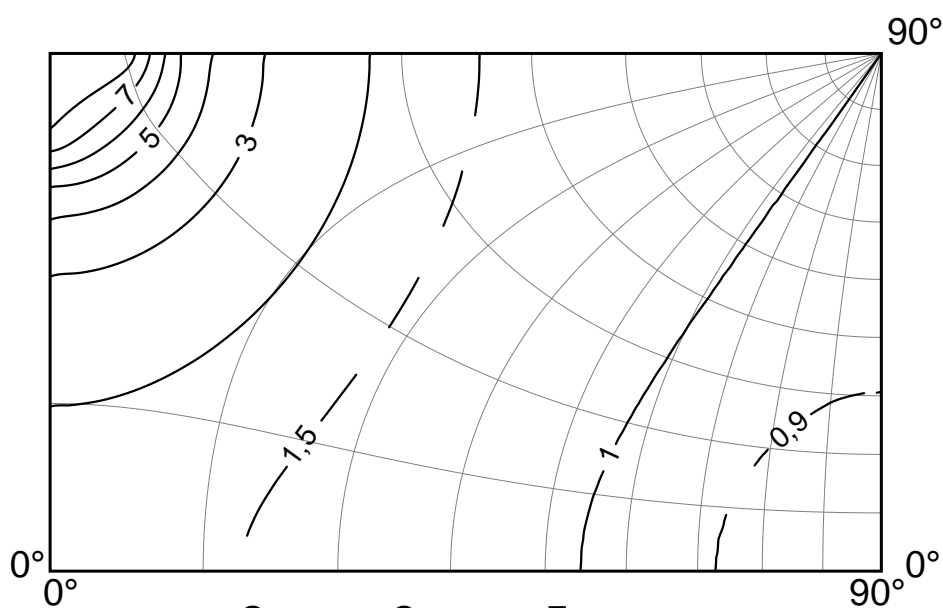
$a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км

Равноугольная проекция Якоби

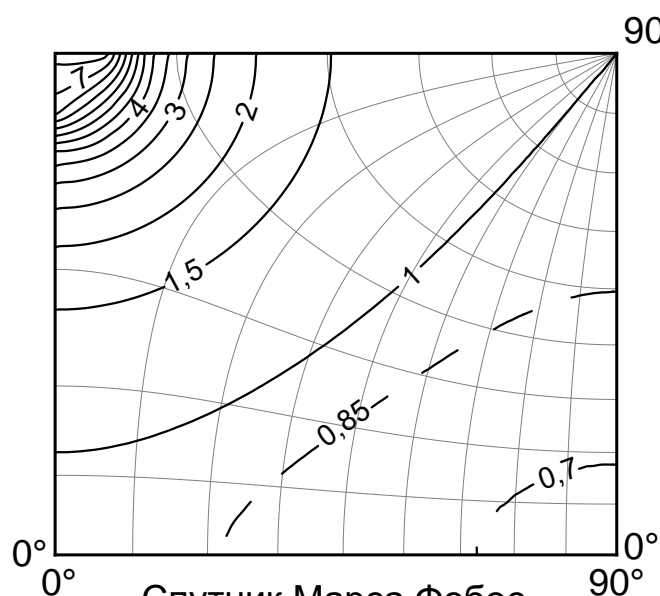
Масштаб длин



Астероид 433 Эрос
 $a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



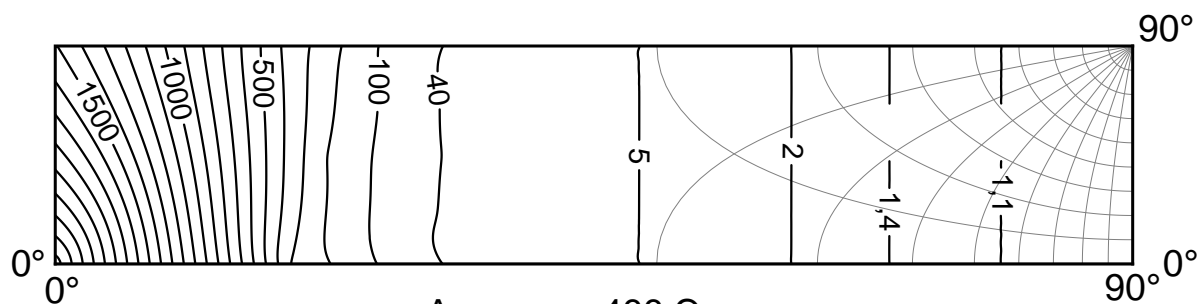
Спутник Сатурна Гиперион
 $a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км



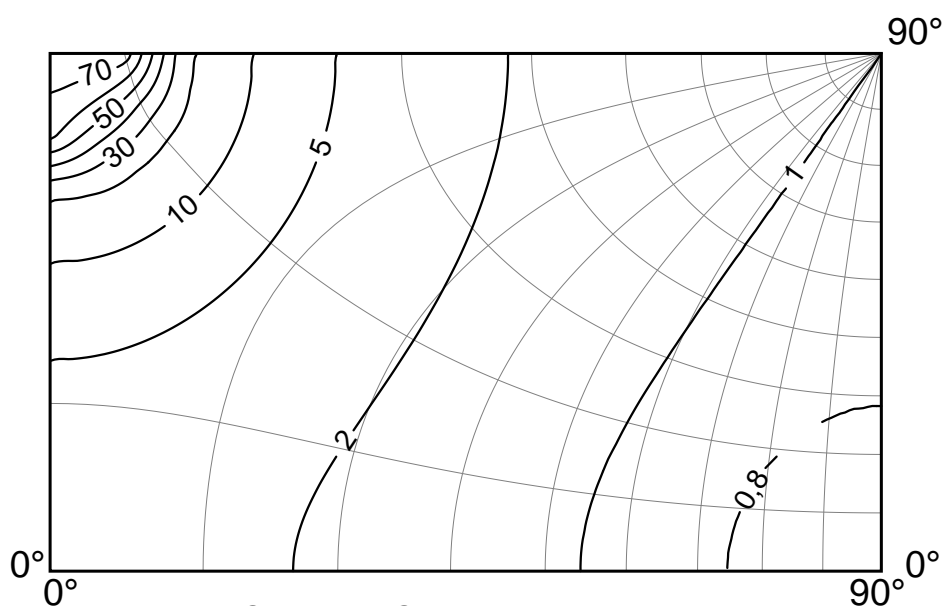
Спутник Марса Фобос
 $a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

Равноугольная проекция Якоби

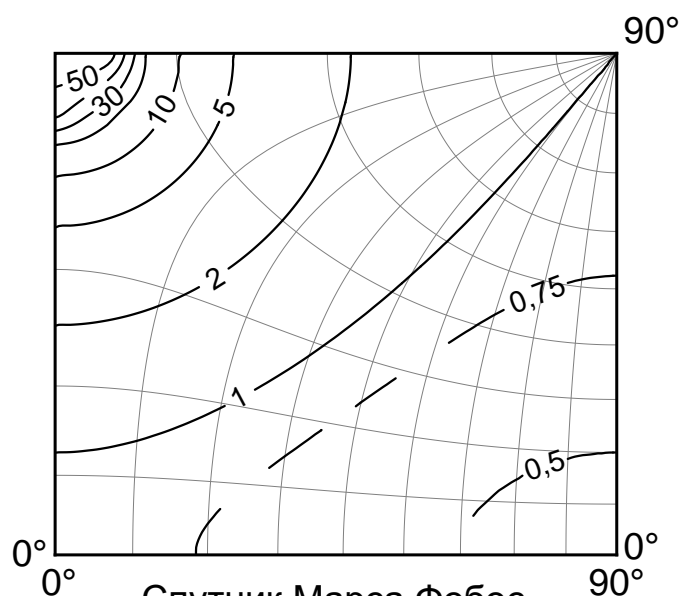
Масштаб площадей



Астероид 433 Эрос
 $a = 17$ км, $b = 5,5$ км, $c = 5,5$ км



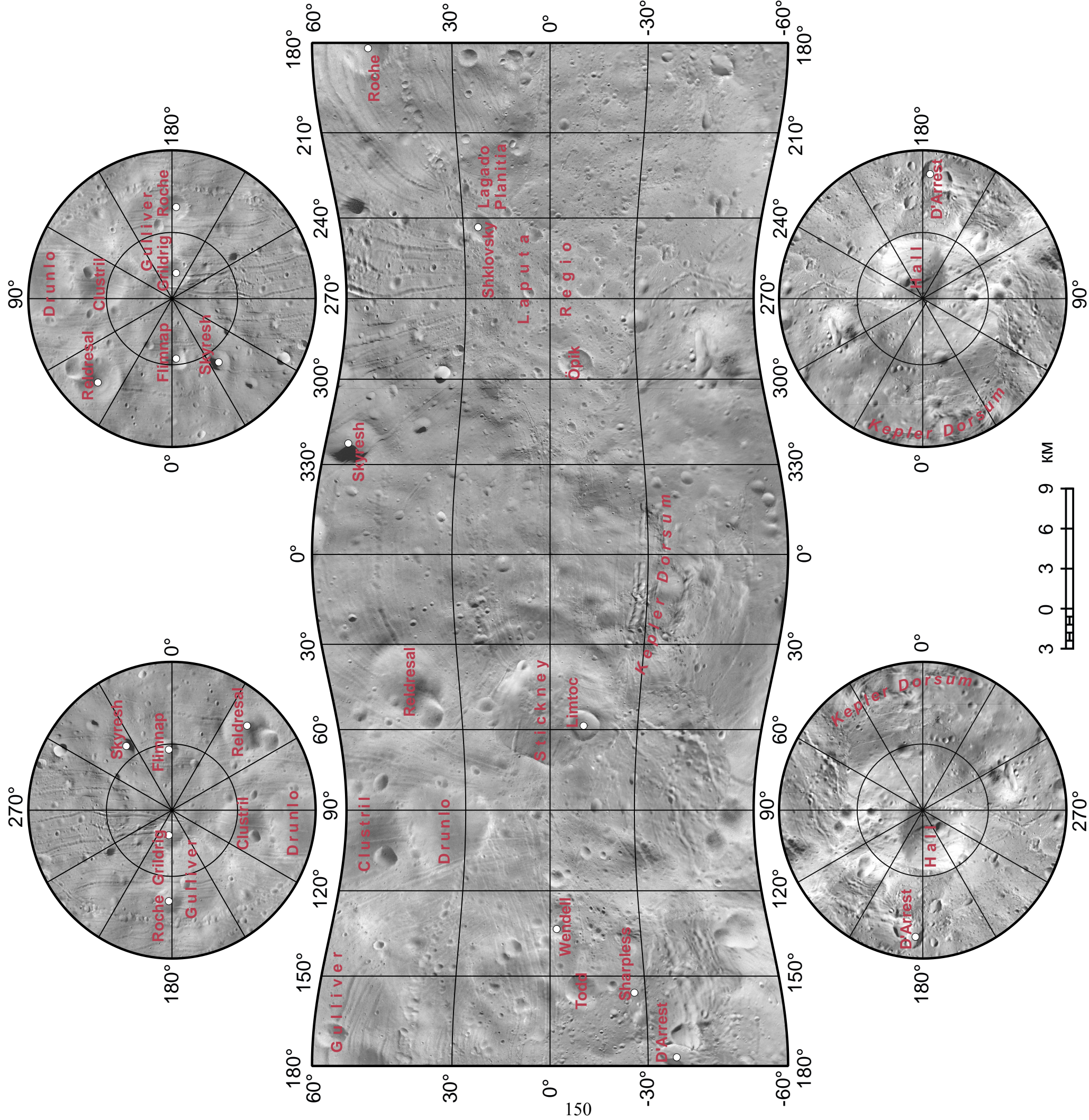
Спутник Сатурна Гиперион
 $a = 177,6$ км, $b = 128,5$ км, $c = 105,6$ км



Спутник Марса Фобос
 $a = 13$ км, $b = 11,4$ км, $c = 9,1$ км

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ФОТОКАРТЫ ПОВЕРХНОСТИ И
ГИПСОМЕТРИЧЕСКИЕ КАРТЫ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ (СПУТНИК
МАРСА ФОБОС, СПУТНИК САТУРНА ГИПЕРИОН, АСТЕРОИД
433 ЭРОС)**

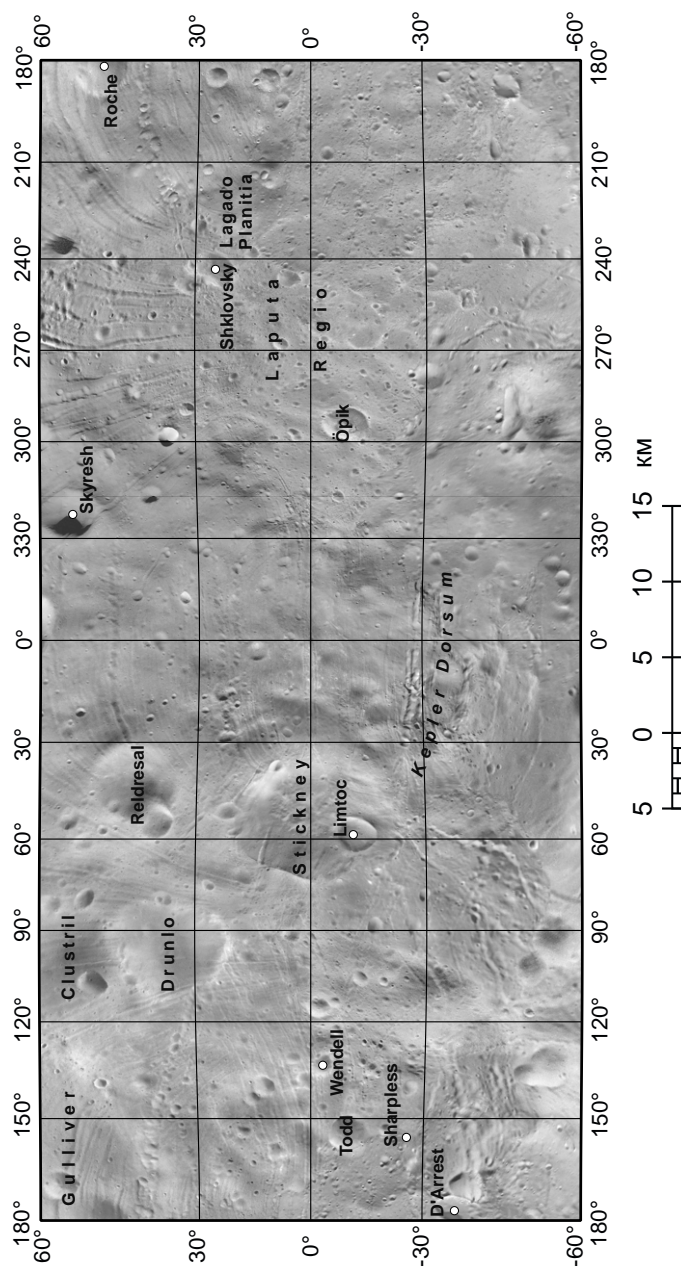
Фотокарта спутника Марса Фобоса



кратеры

Цилиндрическая и азимутальная проекции
меридианного сечения трёхосного эллипсоида
с полуосями 13, 11,4 и 9,1 км

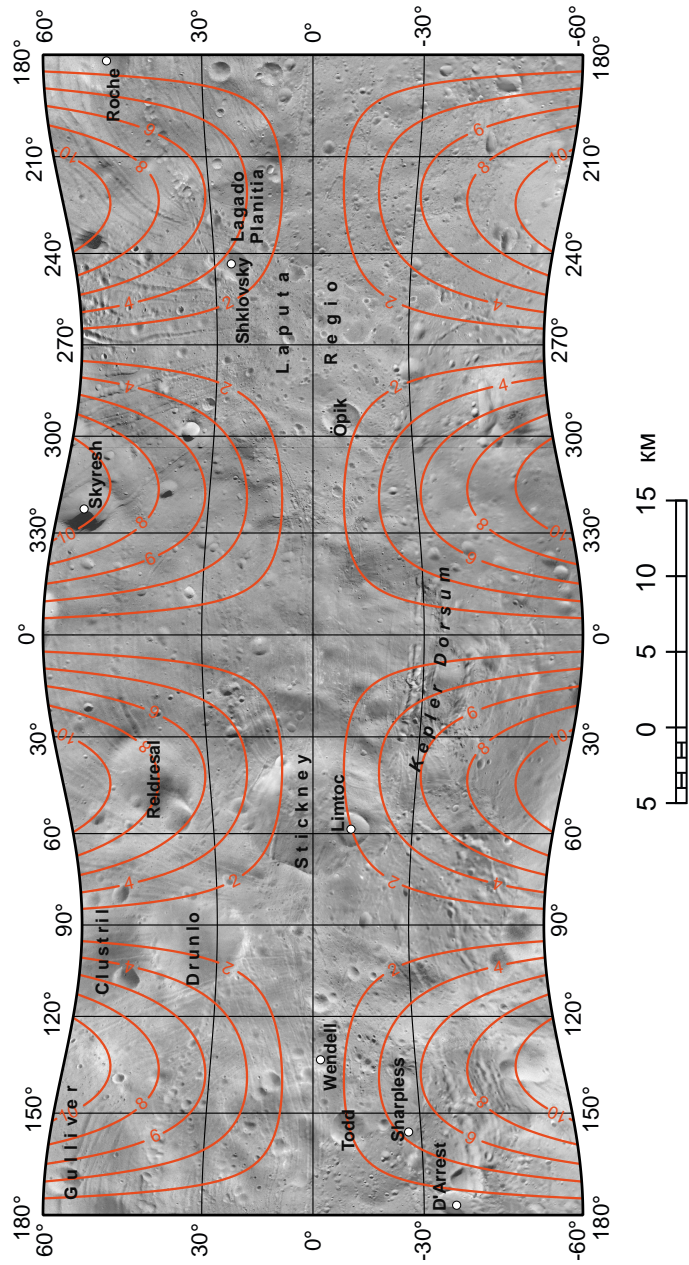
Фотокарта спутника Марса Фобос



Цилиндрическая проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью,
для трёхосного эллипсоида с полуосями 13, 11,4 и 9,1 км

Фотокарта спутника Марса Фобоса

С изоколами наибольшего искажения углов



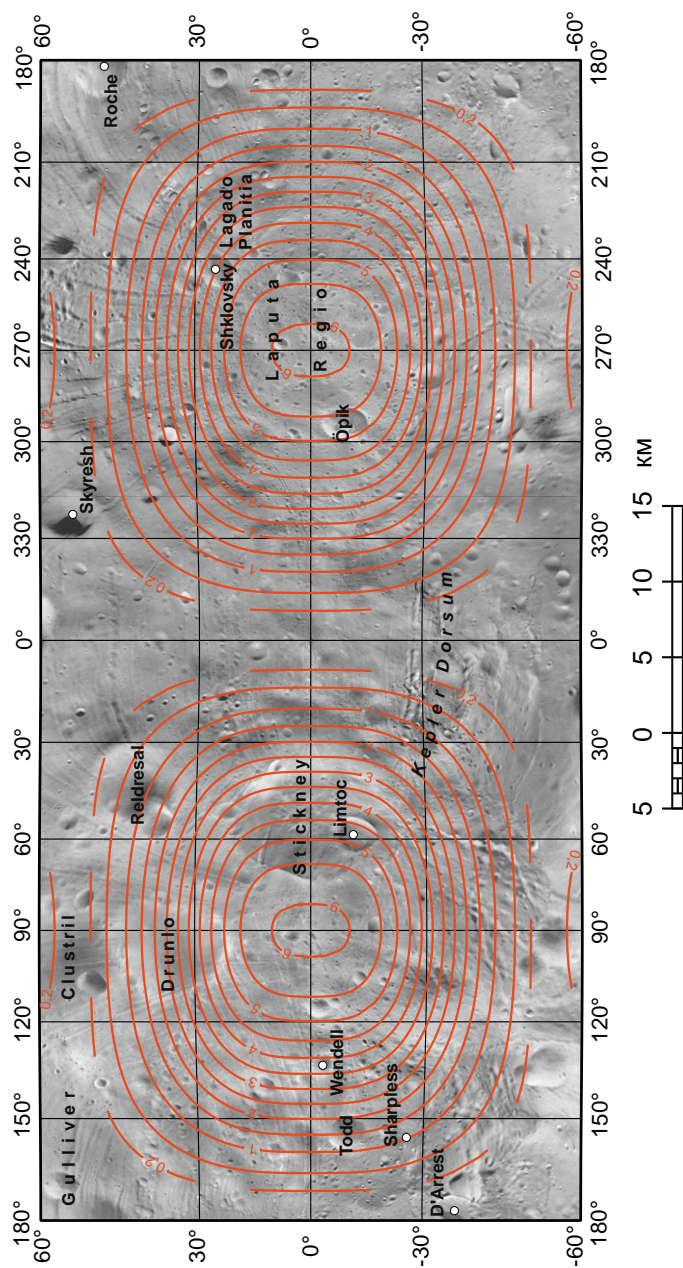
Изоколы наибольшего искажения углов проведены через 2°

Цилиндрическая проекция меридианного сечения

для трёхосного эллипсоида с полуосями 13, 11,4 и 9,1 км

Фотокарта спутника Марса Фобос

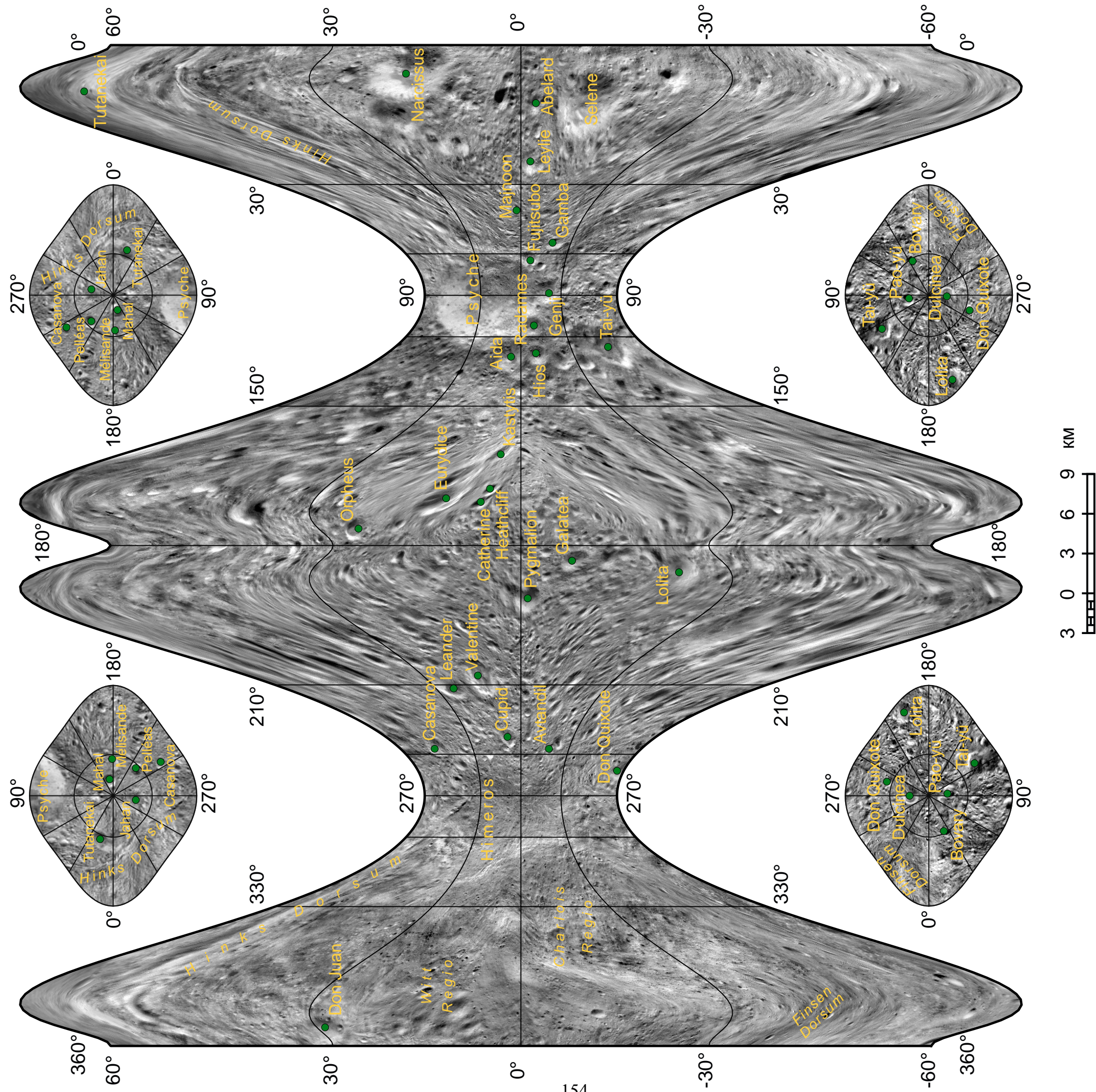
С изоколами наибольшего искажения углов



Основные изоколы наибольшего искажения углов проведены через 0,5°

Цилиндрическая проекция, сохраняющая угол между меридианом и параллелью,
для трёхосного эллипсоида с полуосями 13, 11,4 и 9,1 км

Фотокарта астероида 433 Эрос



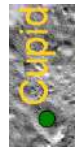
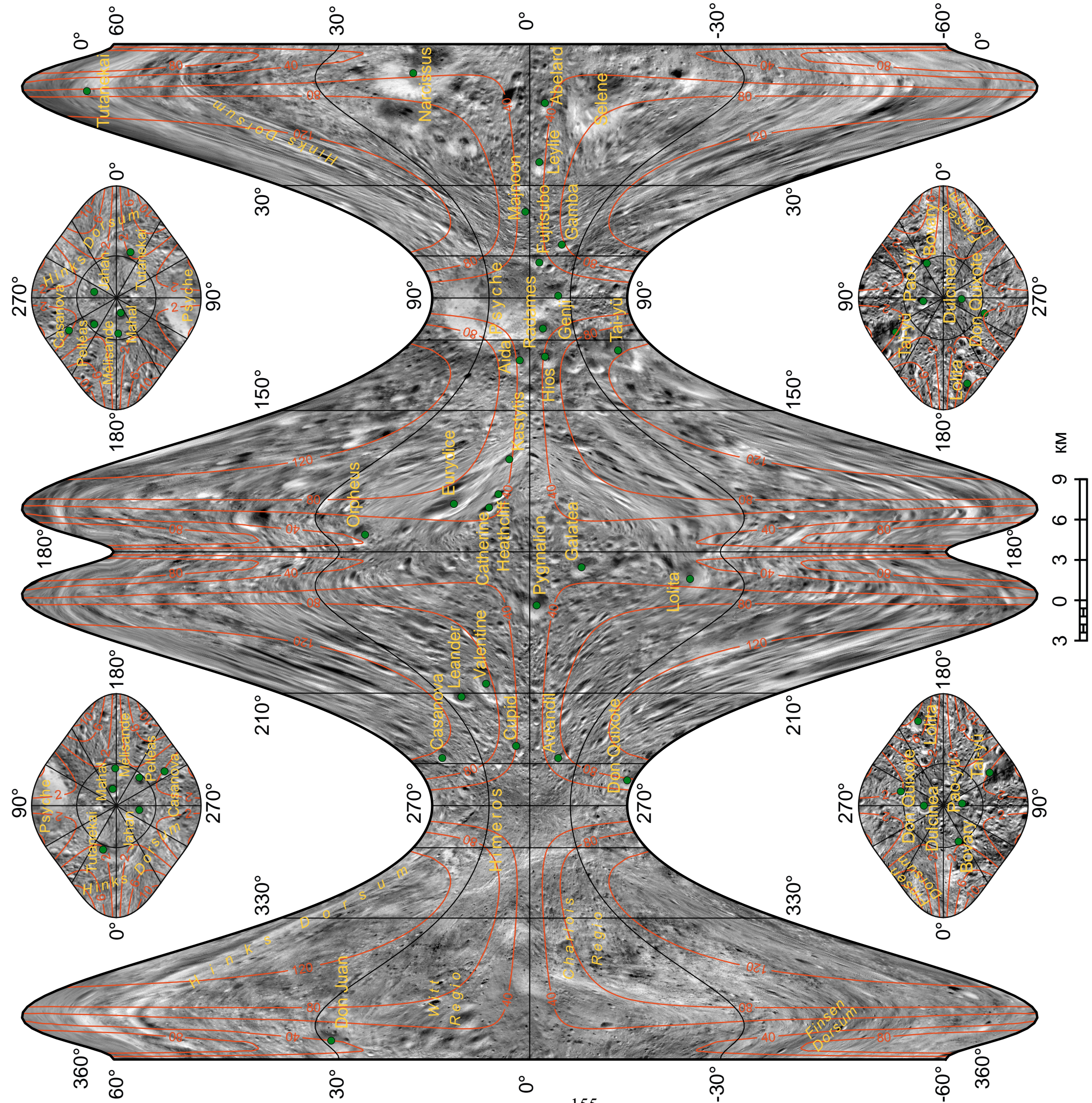
A photograph of the Moon's surface showing a dark, circular crater. The word "Cupid" is written in yellow text above the crater. A green dot is placed on the rim of the crater.

кратеры

Цилиндрическая и азимутальная проекции
меридианного сечения трёхосного эллипсоида
с полуосями 17, 5,5 и 5,5 км

Фотокарта астероида 433 Эрос

С изоколами наибольшего искажения углов



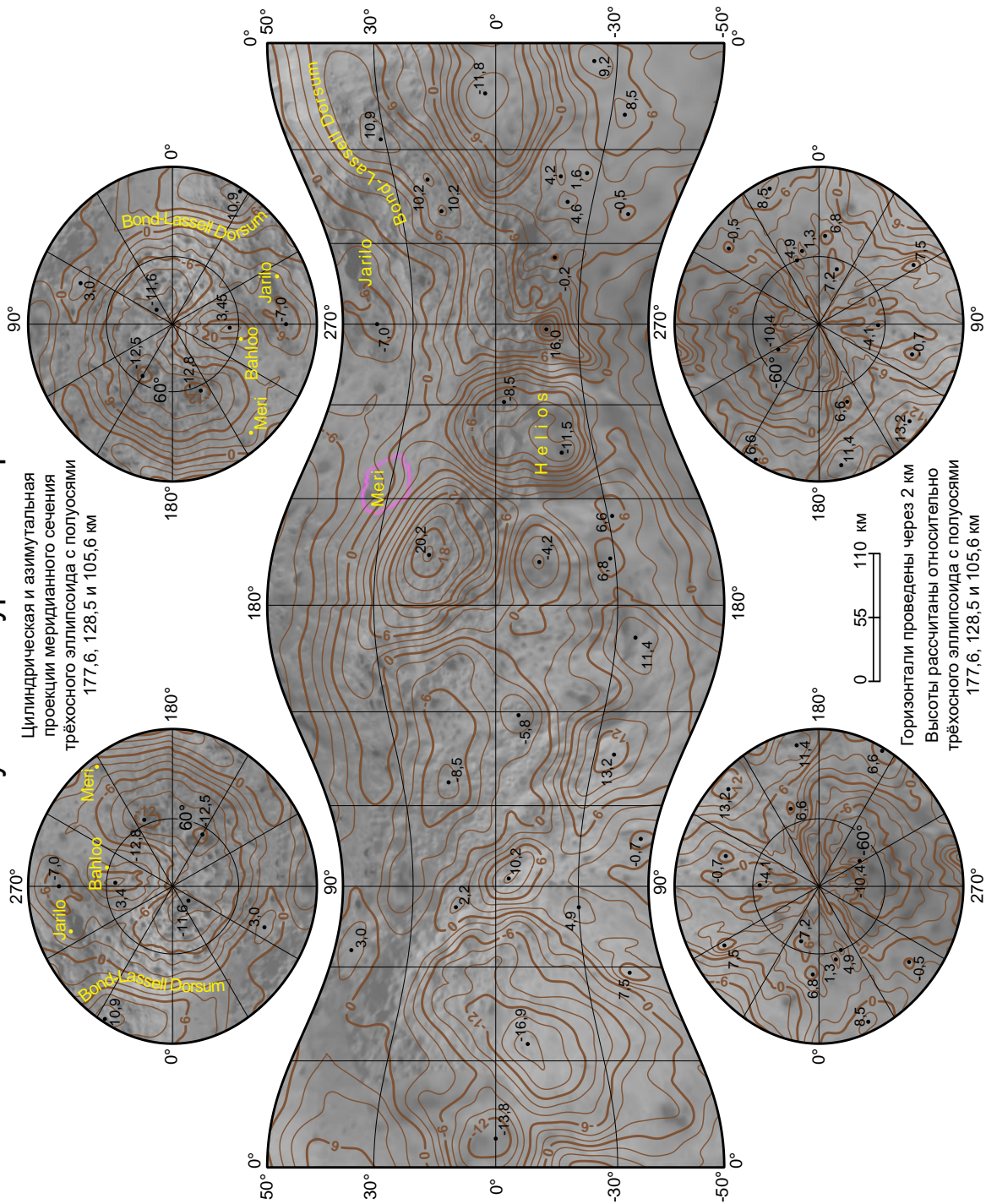
кратеры

Изоколы наибольшего искажения углов проведены через 40° в цилиндрической проекции, через 4° в азимутальной проекции

Цилиндрическая и азимутальная проекции
меридианного сечения трёхосного эллипсоида
с полуосями 17, 5,5 и 5,5 км

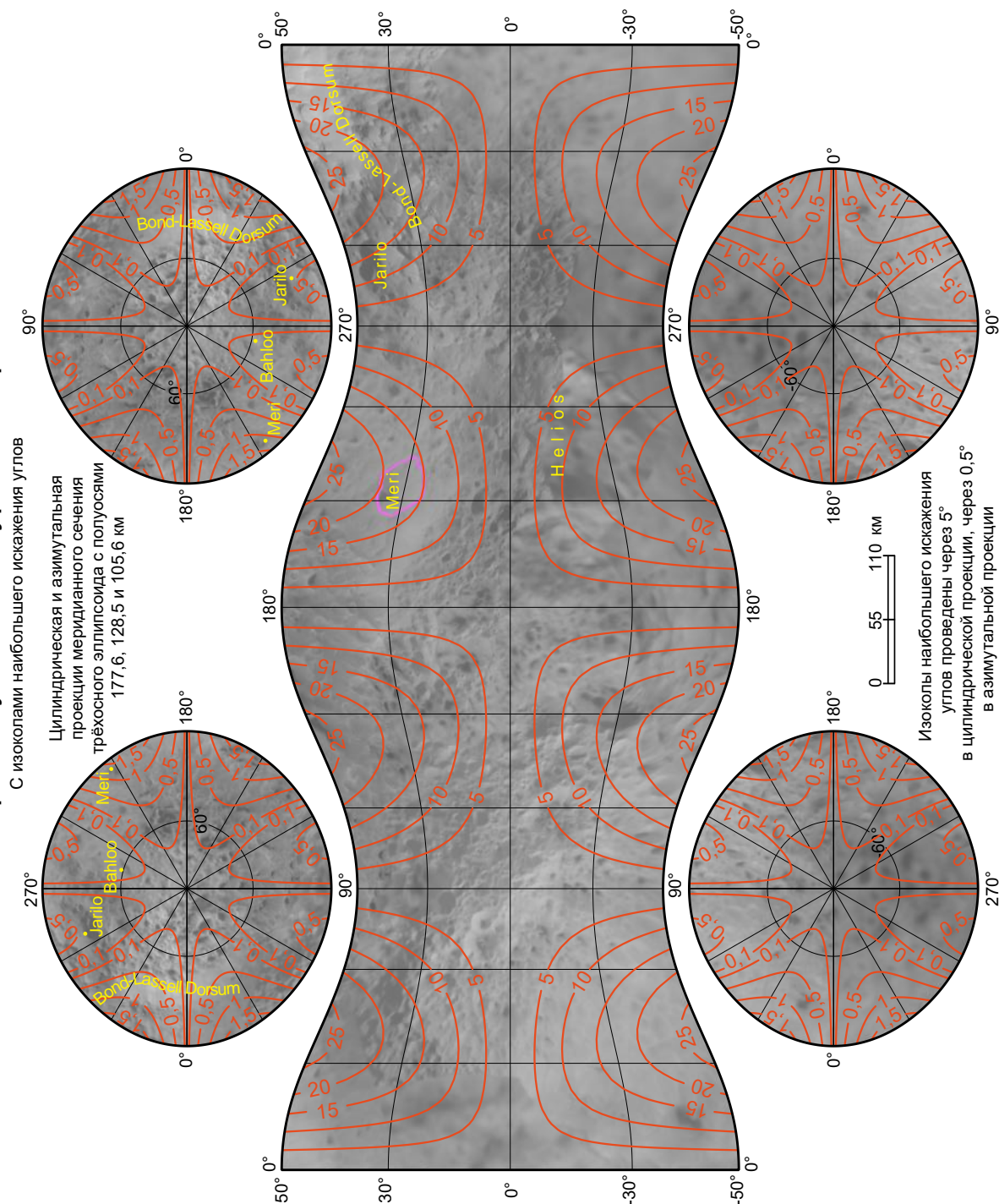
Спутник Сатурна Гиперион

Цилиндрическая и азимутальная проекции меридианного сечения трёхосного эллипсоида с полуосями 177,6, 128,5 и 105,6 км



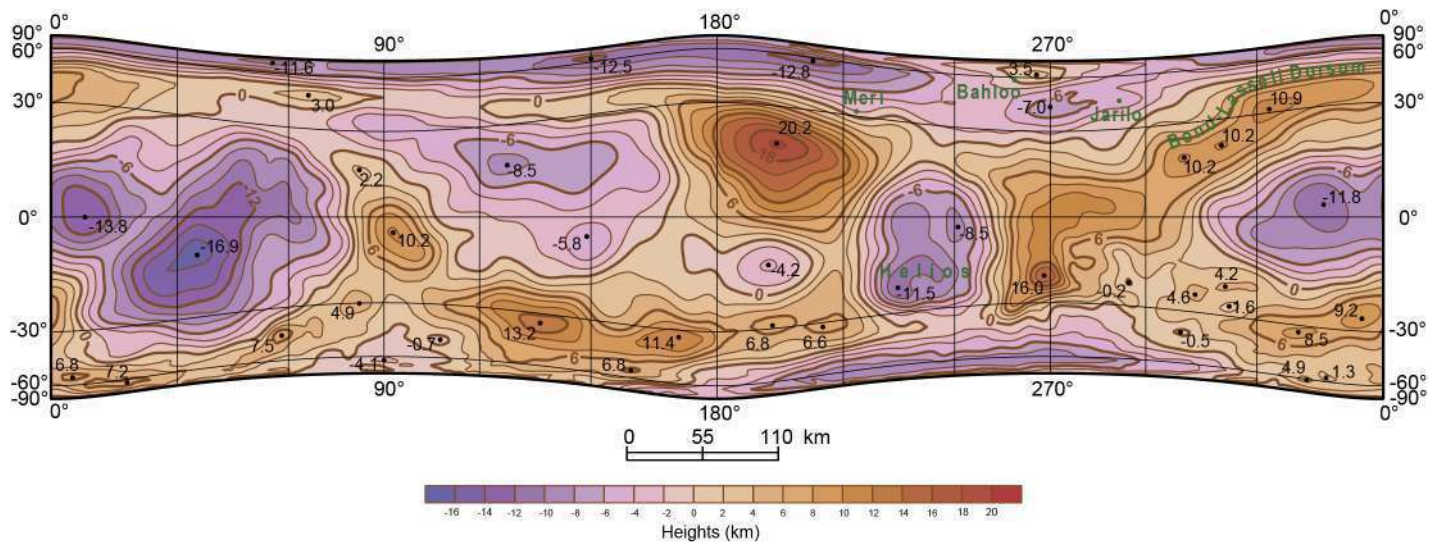
Горизонтали проведены через 2 км
Высоты рассчитаны относительно
трёхосного эллипсоида с полуосями
177,6, 128,5 и 105,6 км

Фотокарта спутника Сатурна Гиперион



Saturn VII Hyperion

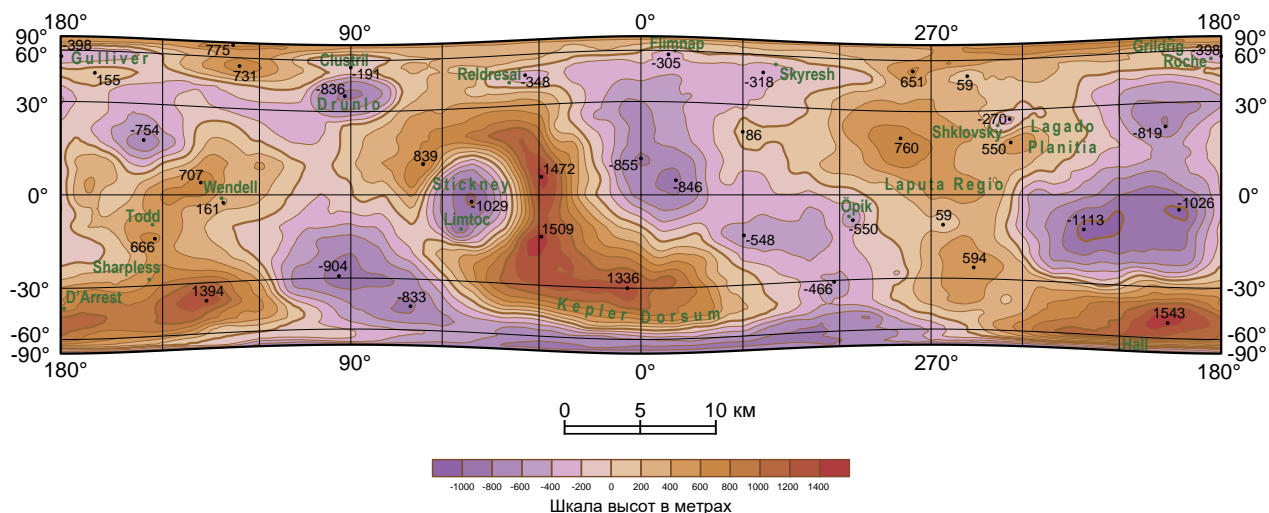
Cylindrical equal-area projection
of the triaxial ellipsoid with semi-axes
177.6, 128.5 and 105.6 km



Heights calculated relative to the triaxial
ellipsoid with semi-axes
177.6, 128.5 and 105.6 km

Спутник Марса Фобос

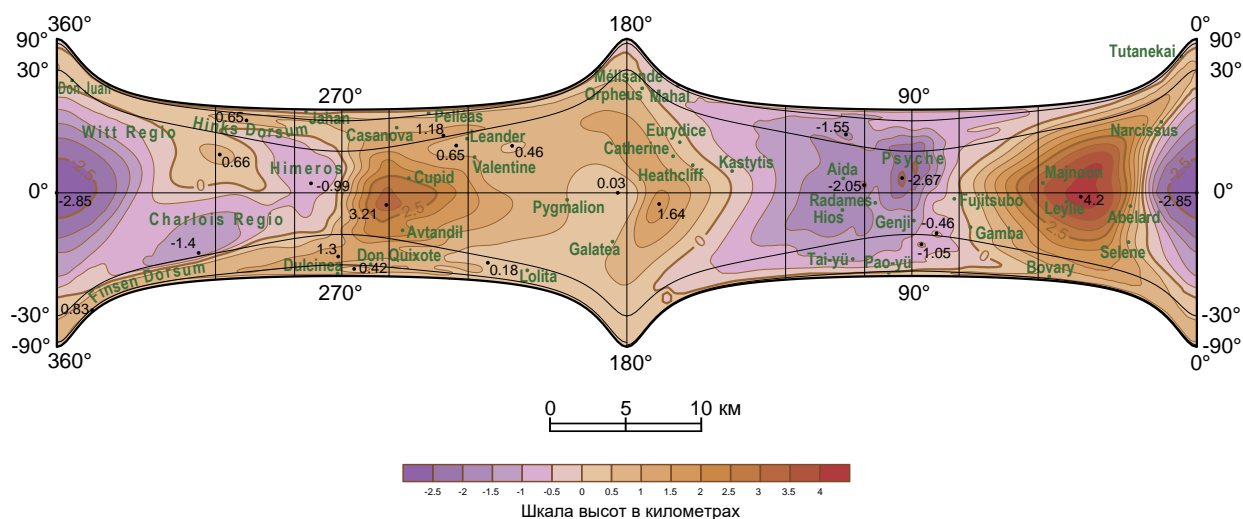
Равновеликая цилиндрическая проекция
трёхосного эллипсоида с полуосями
13, 11,4 и 9,1 км



Высоты вычислены относительно трёхосного
эллипсоида с полуосями 13, 11,4 и 9,1 км

Астероид 433 Эрос

Равновеликая цилиндрическая проекция
трёхосного эллипсоида с полуосями
17, 5,5 и 5,5 км



Высоты вычислены относительно трёхосного
эллипсоида с полуосями 17, 5,5 и 5,5 км

Гипсометрическая карта астероида 433 Эрос

Высоты по нормалям

