ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Трифоновой Екатерины Евгеньевны
на тему: «О свойствах конечно порождающих систем булевых функций для классов рациональных вероятностей»
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

В диссертационной работе Е.Е. Трифоновой переплетаются решения двух задач: порождения множества бернуллиевских случайных величин с помощью базового набора независимых бернуллиевских случайных величин и логических функций, и изучения свойств бесповторного замыкания на булевых функциях. Эти задачи тесно связаны. Новые случайные величины порождаются с помощью подстановки уже полученных величин в функции, порожденные суперпозициями из исходного набора функций, а требование независимости означает, что ни одна случайная величина не может быть подставлена дважды.

Порождение реализаций случайных величин с заданными свойствами — классическая задача, представляющая несомненный теоретический и практический интерес, например, в контексте применения метода Монте-Карло. Логический подход к решению этой задачи восходит к А.А. Ляпунову. В этой области был получен ряд ярких результатов, в том числе усилиями научных руководителей Е.Е. Трифоновой, и осталось значительное число открытых вопросов.

Исследование структуры и свойств замкнутых классов функциональных систем — еще одна классическая задача с более чем столетней историей. Для некоторых примеров, таких как булевы функции с канонической операцией суперпозиции, практически все вопросы к настоящему моменту закрыты, однако для булевых функций с операцией бесповторной суперпозиции результаты не столь впечатляющи.

В работе Е.Е. Трифоновой получены существенные продвижения в обеих задачах, что обосновывает **актуальность** и **значимость** диссертационного исследования.

Работа имеет следующую структуру. Во **введении** автор описывает цели и задачи работы, обосновывает актуальность задачи и значимость, приводит основные результаты.

В **первой главе** изучается возможность порождения множества бернуллиевских случайных величин со всевозможными рациональными вероятностями успеха с помощью функции голосования. Основным результатом здесь является теорема 1.8, устанавливающая отсутствие в этом случае конечных полных систем бернуллиевских случайных величин.

Во **второй главе** вводится ключевое для работы свойство p-сократимости, где p — некоторое простое число. По булевой функции строится многочлен, задающий вероятность успеха порожденной случайной величины в зависимости от вероятностей успеха величин-аргументов, и рассматривается коэффициент при мономе максимально возможной степени. Если этот коэффициент нулевой, функция называется p-сократимой первого типа (очевидно, что здесь на самом деле зависимости от p нет). Если коэффициент отличен от 0, но делится на p, получается p-сократимая функция второго типа. В оставшемся случае функция называется p-несократимой. Доля p-сократимых функций первого типа стремится к 0 при стремлении арности к бесконечности (теорема 2.6). Доля p-сократимых функций второго типа асимптотически не превышает $1/p$ при фиксированном p и стремлении арности к бесконечности (теорема 2.7). Таким образом, большая часть булевых функций оказывается p-несократимой. Другими важными результатами главы являются необходимые условия конечной порождаемости классов бернуллиевских случайных величин в терминах условий на используемые булевы функции (теоремы 2.12 и 2.14).

Третья глава посвящена изучению бесповторной суперпозиции. Автор устанавливает замкнутость классов всех функций, являющихся *p*-сократимыми первого типа; всех функций, являющихся *p*-сократимыми второго типа; всех функций, являющихся *p*-несократимыми (следствие 3.4). Доказывается континуальность множества замкнутых классов (следствие 3.7; в случае канонической суперпозиции это множество счетно), существование замкнутых классов, не имеющих конечного базиса (следствие 3.10; в каноническом случае все замкнутые классы имеют конечный базис) и возможность разбиения множества функций в дизъюнктное объединение непустых замкнутых классов (теорема 3.12; в каноническом случае из-за существования шефферовой функции такое разбиение невозможно). Глава завершается рядом утверждений о взаимосвязи канонических замкнутых классов (очевидным образом являющихся и бесповторно замкнутыми) и новых классов, введенных в работе.

Четвертая глава является наиболее объемной и технически сложной. Автор вводит интересное представление натуральных чисел, с помощью которого удается доказать основные результаты главы: теорему 4.13 о том, что множество всех 5-несократимых функций и бернуллиевских случайных величин с вероятностью успеха, в которой знаменатель равен 5 или 25, порождают все бернуллиевские случайные величины со знаменателем, являющимся степенью 5, и теорему 4.14, аналогичную теореме 4.13, но с заменой множества всех 5-несократимых функций на множество всех 5-сократимых. Отмечается, что полученные другими авторами конечно порождающие системы содержали как сократимые, так и несократимые функции, так что открытый эффект является принципиально новым.

В **заключении** перечисляются основные результаты диссертации:

- отсутствие конечных полных систем бернуллиевских случайных величин в случае, когда порождение новых случайных величин производится с помощью функции голосования;
- оценка долей *p*-сократимых и *p*-несократимых функций в классе всех функций заданной арности;
- необходимые условия на множества функций, допускающих конечные порождающие системы бернуллиевских случайных величин;
- бесповторная замкнутость классов всех функций, являющихся *p*-сократимыми первого типа; всех функций, являющихся *p*-сократимыми второго типа; всех функций, являющихся *p*-несократимыми;
- континуальность множества всех бесповторно замкнутых классов, существование бесповторно замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, и возможность разбиения множества всех булевых функций в дизъюнктное объединение непустых бесповторно замкнутых классов.

Еще одним интересным результатом, упомянутым в заключении, является конечная порождаемость класса всех бернуллиевских случайных величин с вероятностью успеха со знаменателем, являющимся степенью пятерки, с помощью всех 5-сократимых или 5-несократимых функций.

Завершает работу библиография из 124 источников.

Учитывая изложенное выше, можно утверждать, что содержание диссертации **свидетельствует** о том, что полученные в ходе ее создания **результаты являются новыми и вносят существенный вклад в решение научных задач порождения случайных величин с помощью логических функций и изучения замкнутых классов булевых функций относительно бесповторной суперпозиции**.

Полученные результаты представляют несомненный интерес для специалистов в области изучения функциональных систем и могли бы войти в программу специальных курсов по функциональным системам на математических факультетах. Разработанные методы могут быть использованы для дальнейших продвижений в задаче порождения случайных величин с помощью логического подхода. Практическая ценность заключается в возможности приложения результатов в задаче создания аппаратных генераторов случайных чисел.

Основные результаты работы опубликованы в четырех статьях в рецензируемых журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5, в том числе трех журналах из ядра РИНЦ, а также апробировались на ряде международных конференций и научных семинаров. **Достоверность и обоснованность результатов** подтверждается четкостью формулировок утверждений и строгостью представленных доказательств; полнотой покрытия публикациями в рецензируемых журналах; апробацией на значительном числе семинаров и конференций.

Работа **соответствует специальности** 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика по следующим областям исследования:

13. теория дискретных функций и автоматов, теория управляемых систем.

Работа написана на высоком уровне строгости. Доказательства изложены подробно и понятно. Результаты **являются новыми и получены лично автором**.

Автореферат в полной мере отражает содержание работы.

К работе имеются следующие **замечания**.

1. В доказательстве утверждения 1.1 (стр. 21) стоило явно указать, что добавляются только неконстантные функции.
2. В доказательстве утверждения 1.6 (стр. 25) в качестве аргументов функции φ ошибочно указаны x, y и z вместо k_1, k_2, k_3.

3. В доказательстве теоремы 3.9 при рассмотрении второго случая (стр. 46) стоило явно указать, что A и p различны.
4. В доказательстве теоремы 4.6 на стр. 54 при использовании конструкции прибавления единицы к следующему разряду стоило указать, что определение конструкции будет приведено позже.
5. В заключении зачем-то дважды повторяется мысль, что известные конечно порождающие системы имеют непустое пересечение как с классом p-сократимых, так и с классом p-несократимых функций (стр. 86 и 87).
6. В библиографии часть названий журналов указана в полном формате, часть в сокращенном; в качестве примера можно привести идущие подряд источники 86 и 87, опубликованные в одном и том же журнале. Кроме того, мне не удалось найти в тексте ссылки на некоторые источники (например, номер 112 и 113). В названии статьи в источнике номер 49 пропущена первая буква.
7. Есть мелкие опечатки, например, ошибочно поставленная запятая после слова «типа» во втором абзаце стр. 32; пропущенные запятые (стр. 40, вторая строка, после ссылки на источник [19]; стр. 43, четвертая снизу строка, перед словом «равен»; стр. 52, предпоследняя строка следствия 4.2, после закрывающей фигурной скобки); лишний абзацный отступ после формулы (3.1); фраза «Пусть элементы числа Y — 1 будем обозначать...» на третьей снизу строке стр. 58.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Трифонова Екатерина Евгеньевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математической теории
интеллектуальных систем
механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова

Галатенко Алексей Владимирович

28.11.2025

Контактные данные:

тел.: +7(495)939-4637, e-mail: agalat@msu.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
05.13.11. Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей (физико-математические науки).

Адрес места работы:

119991, ГСП-1, г. Москва, ул. Ленинские горы, д.1.

Подпись доцента кафедры Математической теории интеллектуальных систем
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова
удостоверяю.