

ОТЗЫВ научного руководителя
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Белозерова Глеба Владимировича
на тему: «Топология слоений Лиувилля интегрируемых бильярдов
в трехмерном евклидовом пространстве»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Одним из актуальных направлений современной математики является качественное исследование интегрируемых гамильтоновых систем: изучение топологии слоения Лиувилля, описание и классификация особенностей, траекторный анализ, поиск эквивалентных систем. Наиболее наглядными интегрируемыми системами являются софокусные бильярды и их обобщения. Интегрируемость бильярда в области, ограниченной эллипсом, была замечена Дж.Д.Биркгофом. В.В.Козлов и Д.В.Трещев показали, что бильярды, ограниченные дугами софокусных квадриков, тоже являются интегрируемыми. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности стали изучаться в работах В.Драговича, М.Раднович и В.В.Ведюшкиной. В.В.Ведюшкина ввела и рассмотрела новый класс интегрируемых бильярдов – бильярды на столах книжках, т.е. на CW -комплексах, склеенных из элементарных плоских областей, ограниченных софокусными квадриками, вдоль изометричных участков границ. Согласно недавним результатам В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой бильярдные книжки моделируют особенности всех интегрируемых гамильтоновых систем двух степеней свободы на компактных поверхностях постоянной энергии.

Диссертация Г.В.Белозерова посвящена интегрируемым бильярдам в трехмерном евклидовом пространстве, а именно, софокусным геодезическим бильярдам на квадриках, а также трехмерным бильярдам, ограниченным софокусными квадриками. Интегрируемость этих систем следует из знаменитой теоремы Якоби-Шаля.

В отличие от плоских бильярдов софокусные геодезические бильярды «живут» на квадриках (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоид), т.е. на поверхностях ненулевой кривизны. Их конфигурационные пространства – софокусные бильярдные столы – представляют собой компактные области на квадриках, ограниченные дугами софокусных квадриков. При этом предполагается,

что углы излома на границе таких областей равны $\pi/2$. Сама же система задается так. Материальная точка движется внутри бильярдного стола вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. Г.В.Белозеровым в диссертации получена полная комбинаторная классификация бильярдных столов на всех квадраках софокусного семейства. Далее, для каждого типа столов им вычислены инварианты Фоменко-Цишанга соответствующих бильярдных столов. Оказалось, что на эллипсоиде есть ровно 7 лиувиллево неэквивалентных софокусных геодезических бильярдных столов, на однополостном гиперboloиде – тоже 7, на двуполостном – в точности 6. Некоторые бильярдные столы на разных квадраках оказались лиувиллево эквивалентными. В итоге, на всех квадраках софокусного семейства имеется ровно 10 лиувиллево неэквивалентных софокусных бильярдных столов.

Большая часть диссертации посвящена изучению топологии слоения Лиувилля трехмерных софокусных бильярдных столов. Теперь материальная точка движется внутри компактной трехмерной области (трехмерный софокусный бильярдный стол), ограниченной софокусными квадраками, вдоль прямых с постоянной скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. Отмечу, что реальные интегрируемые системы с тремя и более степенями свободы, как правило, довольно трудно поддаются качественному анализу. Поэтому переход к трехмерным бильярдным столом – весьма нетривиальный шаг, тем не менее, вполне естественный. В своей диссертации Г.В.Белозеров ввел комбинаторное отношение эквивалентности на множестве трехмерных столов, сохраняющее грубую лиувиллеву эквивалентность соответствующих бильярдных столов, и доказал теорему классификации. Далее, для каждого типа неэквивалентных трехмерных столов им было описано локальное устройство слоения Лиувилля соответствующих бильярдных столов в ограничении на поверхности постоянной энергии. После чего доказана теорема классификации бильярдных столов. Оказалось, что существует в точности 24 грубо лиувиллево неэквивалентных трехмерных софокусных бильярдных столов. При описании полулокального устройства особенностей Белозеровым предложен метод, позволяющий свести эту задачу к аналогичной, но с меньшим числом степеней свободы. Причем последняя система может качественно отличаться от исходной. Этот метод понижения степени свободы может

быть применен к описанию слоения Лиувилля многомерных софокусных бильярдов, а также других интегрируемых систем.

Одна из важных задач, возникающих при качественном исследовании любой динамической системы, заключается в определении классов гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии. В диссертации Белозеров доказал, что ответ на эту задачу в случае трехмерных софокусных бильярдов зависит лишь от класса гомеоморфности стола. Более того, оказалось, что изоэнергетическая поверхность любого трехмерного софокусного бильярда гомеоморфна либо пятимерной сфере, либо прямому произведению окружности и четырехмерной сферы, либо прямому произведению двумерной и трехмерной сфер. Отмечу, что при доказательстве этого факта интегрируемость задачи не использовалась. Далее, соискатель решил аналогичную задачу для трехмерного бильярда с потенциалом Гука, ограниченного эллипсоидом. В ответе снова фигурируют сферы и их прямые произведения.

Все результаты диссертации являются новыми, получены Белозеровым самостоятельно. Они докладывались на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах.

Хочу отметить, что Г.В.Белозеров является исключительно талантливым математиком. Он получил яркие результаты в весьма нетривиальной области топологии, геометрии, интегрируемых динамических систем. Думаю, что его математическое творчество будет бурно развиваться и вскоре мы услышим о новых достижениях.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3 Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Белозерова Глеба Владимировича удовлетворяет всем требованиям “Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В.Ломоносова” и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН,
заведующий кафедрой
дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

ФОМЕНКО Анатолий Тимофеевич

15 апреля 2025 г.

Подпись заведующего кафедрой дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» Фоменко А.Т. удостоверяю:

Декан механико-математического
факультета МГУ имени М.В.Ломоносова,
член-корреспондент РАН А.И. Шафаревич

15 апреля 2025 г.