ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА

на диссертацию
Добровольского Николая Николаевича
«Дзета-функции моноидов натуральных чисел
и смежные вопросы»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

Диссертация Н. Н. Добровольского посвящена новым направлениям исследований в аналитической теории чисел, которые возникли в рамках развития теоретико-числового метода Н. М Коробова в Тульской школе теории чисел.

Первая тема, рассматриваемая в диссертации, это логарифмы эйлеровых произведений и их ветви вблизи абсциссы абсолютной сходимости. Здесь соискателю принадлежит очень важное наблюдение, что, логарифмируя почленно эйлерово произведение и беря для каждого сомножителя главное значение логарифма, в сумме получаем непрерывную функцию, которая при приближении справа к абсциссе абсолютной сходимости пробегает все ветви логарифмической функции. Это наблюдение позволило соискателю получить интересные утверждения о поведении дзета-функции Римана вблизи абсциссы абсолютной сходимости.

Другая тема связана с построением теории гиперболической дзета-функции Гурвица, которая естественным образом возникает в теоретико-числовом методе Коробова. Соответствующая глава достаточно объемная по содержанию демонстрирует высокую аналитическую технику соискателя, которая позволяет ему детально разобрать различные аспекты этой теории.

Третья тема – дзета-функции моноидов натуральных чисел является главной для всей диссертации и её раскрытию посвящено семь глав из двенадцати.

Во-первых, необходимо отметить богатство самого объекта исследования. Имеется континуум различных моноидов натуральных чисел и, как следствие, континуум дзета-функций моноидов натуральных чисел, среди которых, несомненно, самым ярким представителем является дзета-функция Римана.

Во-вторых, среди этого многообразия дзета-функций имеются те, для которых абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда есть любое число от 0 до 1. Оказывается, что если множество простых элементов моноида имеет малую логарифмическую плотность, то областью голоморфности соответствующей дзета-функции является полуплоскость с положительной действительной частью, а мнимая ось вся состоит из особых точек.

Очевидно, что самым тривиальным примером моноида натуральных чисел является геометрическая прогрессия с первым членом равным 1 и натуральным знаменателем. Для этого базового объекта теории дзета-функция является аналитической функцией с абсциссой абсолютной сходимости равной 0, которая имеет счетное число полюсов на мнимой оси.

Необходимо отметить, что множество всех моноидов делится на два больших класса: моноиды с однозначным разложением на простые элементы и моноиды без однозначного разложения. Соискателю удалось дать явное описание всех моноидов с однозначным разложением на простые элементы. Работая вместе с соавторами над обобщением теоремы С. М. Воронина об универсальности дзета-функции Римана на случай дзета-функций регулярных моноидов Сельберга-Бредихина, он установил простую лемму, что необходимым и достаточным условием однозначности разложения на простые элементы моноида является линейная независимость над полем рациональных чисел любого набора логарифмов простых элементов.

В диссертации соискатель рассматривает многочисленные примеры распределения простых элементов моноида, а также решает обратную задачу для некоторых классов моноидов. А именно, по закону распределения простых элементов моноида определяет закон распределения элементов моноида в натуральном ряде.

Как уже отмечалось выше теория, построенная соискателем, возникла в процессе развития теоретико-числового метода Коробова. В этом методе после работ К. К. Фролова особую роль стали играть алгебраические сетки и решётки. Поэтому не случайной для данной диссертации является теория приведённых алгебраических иррациональностей произвольной степени и обобщённых чисел Пизо. Прежде всего, заметим, что множество абсолютных величин норм целых алгебраических чисел образует моноид натуральных чисел.

Про цепные дроби алгебраических чисел степени выше второй мало что известно. Изучая минимальные многочлены остаточных дробей разложения алгебраического числа в цепную дробь, соискатель установил удивительный факт, что если алгебраическая иррациональность принадлежит чисто вещественному алгебраическому полю, то с некоторого места все её остаточные дроби являются приведенными иррациональностями, то есть все её сопряженные числа являются отрицательными иррациональностями большими -1. Если алгебраическая иррациональность имеет комплексные сопряженные иррациональности, то с некоторого места все её остаточные дроби являются обобщенными числами Пизо. Обобщенные числа Пизо отличаются от чисел Пизо отсутствием требования их целочисленности.

Последняя тема диссертации, связанная с квадратурными формулами с алгебраическими сетками посвящена изучению гиперболической дзета-функции алгебраических решёток. Соискатель разработал новый метод параметрических множеств, который позволил ему найти новую асимптотическую формулу для гиперболической дзета-функции алгебраических решёток, в константах которой фигурируют дзета-функции Дедекинда главных идеалов кольца целых алгебраических чисел. Другая асимптотическая формула связана с количеством точек решётки в гиперболических крестах.

Таким образом, соискатель получил в аналитической теории чисел важные результаты, которые показывают перспективность предлагаемых новых направлений исследований в ней.

Характеризуя личность соискателя, необходимо отметить его активность в организационной работе в области науки. Он ответственный секретарь математического журнала Чебышевский сборник, ответственный секретарь регулярных Международных конференций по теории чисел и смежным вопросам, участник нескольких грантов РФФИ и РНФ, был руководителем гранта РФФИ. В настоящее время является руководителем молодежной научно-исследовательской лаборатории по теоретико-числовым методам в приближенном анализе, работающей по выполнению государственного задания Министерства просвещения РФ, соглашение № 073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г., тема научного исследования "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике".

Считаю, что диссертация полностью отвечает всем требованиям к докторским диссертациям, а ее автор, Добровольский Николай Николаевич, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Иванов Валерий Иванович, [redacted]
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры прикладной математики и информатики
Института прикладной математики и компьютерных наук
ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»

30.11.2023

Подпись В.И. Иванова заверяю

Начальник административно-
кадрового управления ТулГУ [redacted] М.В. Лунев

30.11.2023