**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Трифоновой Екатерины Евгеньевны
на тему: «О свойствах конечно порождающих систем булевых
функций для классов рациональных вероятностей»
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика**

Диссертационная работа посвящена исследованию дискретных случайных величин с позиций теории функциональных систем. Началом исследований дискретных случайных величин, по-видимому, можно считать середину XX века, когда в классических работах Дж. фон Неймана, К. Э. Шеннона и Э. Ф. Мура была поставлена задача синтеза надежных устройств из ненадежных элементов. Примерно в это же время были представлены первые результаты Р. Г.Бухараевым, который изучал возможности построения управляемого генератора вероятностей; а А.А.Ляпуновым была сформулирована задача моделирования бернуллиевских случайных величин с наперед заданными вероятностями с помощью логических функций. Именно эти исследования, а также ряд других, послужили основой для развития одного из направлений теории функциональных системы – моделирования бернуллиевских (булевых) случайных величин с наперед заданными вероятностями с помощью логических функций. Одной из ключевых задач, решаемых в рамках данного направления, является задача конечной порожденности для бернуллиевских случайных величин с вероятностями из конечного множества. Основные результаты в этой области для рациональных вероятностей представлены в работах Р. Л. Схиртладзе (1961-66 гг.), Ф. И. Салимова (1979-97 гг,), Р.М.Колпакова (1991-2005 гг.). Часть из результатов Р.М.Колпакова и Ф. И. Салимова были заново впоследствии получены группой зарубежных исследователей в составе В. Квана, М. Ридела, Дж. Брака и Х. Чжоу в работах 2009-2011 гг., что свидетельствует о неугасающем интересе к решению подобных задач и об актуальности рассматриваемой темы. Таким образом, решаемые в рамках диссертационного исследования задачи, представляются несомненно **актуальными**.

Диссертация состоит из введения, четырех глав основной части, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 94 страницы, список литературы включает 124 наименования.

Во **введении** подробно рассмотрена история вопроса и обоснована актуальность темы исследования, дана постановка задачи, а также сформулированы основные результаты диссертации, приведены сведения об апробации результатов, а также изложено основное содержание работы.

В **первой главе** изложены основные определения и базовые утверждения, связанные с постановкой задачи, в частности, введено понятие индуцированной вероятностной функции, приведены примеры построения индуцированных функций для основных булевых функций, а также доказана бесконечная порожденность для функции голосования для классов p-ично-рациональных распределений.

Во **второй главе** предложена оригинальная классификация индуцированных функций по p-сократимости: все индуцированные функции разделены для простого p на p-сократимые и p-несократимые индуцированные функции. Эта классификация естественным образом следует из представления индуцированной функции в виде суммы одночленов, коэффициент перед самым длинным одночленом определяет, к какому классу следует отнести индуцированную функцию. Также в этой главе доказано, что среди всех индуцированных вероятностных функций от n переменных при $n \to \infty$ доля p-сократимых функций первого типа асимптотически убывает как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2^{n/2}}$, а доля p-сократимых функций второго типа асимптотически не превышает значения $\frac{1}{p}$. Тем самым показано, что p-несократимые индуцированные функции составляют большую часть индуцированных функций от n переменных при $n \to \infty$ для простых p. В теореме 2.14 доказано необходимое условие для конечно порождающих систем булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции: в подобных системах должна содержаться хотя бы одна функция, содержащая ровно один ноль в таблице истинности, хотя бы одна функция, содержащая ровно одну единицу в таблице истинности, и хотя бы одна из этих функций существенно зависит от не менее чем от двух переменных. Сформулированное необходимое условие для конечно порождающей системы булевых функций, индуцирующих p-несократимые функции, обобщает результат, полученный в первой главе, поскольку медиана индуцирует p-несократимую функцию для любого простого p, $p \geq 5$.

В **третьей главе** введены классы булевых функций согласно тому, какие они индуцируют виды вероятностных функций. Для введенные подобным образом классов булевых функций доказано свойство бесповторной замкнутости, а также установлены некоторые другие свойства. Вообще говоря, понятие бесповторной суперпозиции и связанное с ним понятие бесповторного замыкания естественным образом возникают, когда мы работаем с дискретными случайными величинами, так как мы полагаем их независимыми в совокупности. Известно, что не существует разбиения множества всех булевых функций P_2 на непересекающиеся замкнутые классы. В рамках данной работы удалось установить, что для бесповторной суперпозиции справедливо обратное: из того, что каждому простому p соответствуют три непустых бесповторно замкнутых класса булевых функций, выведено существование континуума непустых бесповторно замкнутых классов булевых функций. Для класса же всех булевых функций P_2 доказано, что он может быть представлен в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов, при этом подобных разбиений существует бесконечное множество, для каждого простого p свое.

В **четвертой главе** приведено доказательство того, что классы булевых функций, индуцирующие 5-несократимые вероятностные функции и 5-

сократимые вероятностные функции являются конечно порождающими для множества всех пятеричных дробей. В ходе этого доказательства применена оригинальная техника, позволяющая по пятеричной дроби явным образом предъявить булеву функцию, чья индуцированная функция позволяет построить эту дробь.

В **заключении** приведено обобщение полученных результатов.

Таким образом, основные результаты диссертации относятся к двум направлениям в рамках теории функциональных систем: первое относится к выявлению свойств конечно порождающих систем при моделировании бернуллиевских случайных величин булевыми функциями, второе относится к изучению бесповторной суперпозиции булевых функций. Полученные соискателем результаты, свидетельствующие о существовании континуума непустых бесповторно замкнутых классов, а также о возможности представления множества всех булевых функций в виде дизъюнктного объединения непустых бесповторно замкнутых классов, будут несомненно интересен широкому кругу исследователей в области теории функциональных систем. Доказанное необходимое условие для конечно порождающих систем булевых функций и введенная классификация по p-сократимости свидетельствуют о кропотливой работе соискателя по поиску закономерностей и открывают дальнейшие перспективы для получения результатов в этом направлении.

Все результаты диссертации приведены с подробными строгими доказательствами; их **достоверность** не вызывает сомнений. Автореферат корректно и полно отражает содержание диссертации, актуальность темы исследования, новизну и значимость полученных результатов, содержит все основные положения и выводы.

Основные результаты диссертации являются **новыми и получены лично автором**, математически строго доказаны, опубликованы в четырех рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, в том числе в трех изданиях, входящих в ядро РИНЦ. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на международных и российских конференциях, научных семинарах и могут быть интересны специалистам по теории функциональных систем, математической кибернетике и теоретической информатике.

К **замечаниям** по работе стоит отнести:

1. Небольшое количество опечаток, например, на стр.9 вместо слова «распределений» написано «распределенией».
2. Чрезмерно подробный разбор возможных случаев при доказательстве Леммы 4.11, представляется, что часть случаев можно объединить, выделив дополнительные закономерности, и сделать доказательство более коротким.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Трифонова Екатерина Евгеньевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент Академии Наук Республики Татарстан,
ЗАВЕДУЮЩИЙ КАФЕДРОЙ теоретической кибернетики
отделения фундаментальной информатики и информационных технологий
Института вычислительной математики и информационных технологий
ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

АБЛАЕВ Фарид Мансурович

Контактные данные:
тел.: , e-mail: .
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.09. Дискретная математика и математическая кибернетика.

Адрес места работы:
420008, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35,
ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет",
Институт вычислительной математики и информационных технологий.
Тел.: +7 (843) 233-70-37; e-mail: farid.ablayev@kpfu.ru