МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Балашова Дарья Михайловна

Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными источниками

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	**Яровая Елена Борисовна** доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
Официальные оппоненты:	**Жижина Елена Анатольевна** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН
	Ульянов Владимир Васильевич доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической статистики ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова
	Рядовкин Кирилл Сергеевич кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится «16» декабря 2022 г. в 13 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.3(01.07) Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, ауд. 12-25.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/507231363/.

Автореферат разослан «15» ноября 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3(01.07),
кандидат физико-математических наук,
доцент Н.А. Раутиан

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена ветвящимся случайным блужданиям (ВСБ) – одной из интенсивно развивающихся областей теории стохастических процессов. В работе рассматриваются ВСБ с непрерывным временем на дискретных структурах.

Ветвящиеся процессы с диффузией частиц были впервые представлены в статье Б. А. Севастьянова[1]. С тех пор моделям ВСБ было посвящено множество публикаций, важные результаты для подобных процессов были получены А. В. Скороходом[2]. Необходимость исследования сложных вероятностных моделей с делением, гибелью и пространственным движением частиц привело к развитию теории ВСБ. Следует заметить, что подобные модели способны описать процессы, возникающие в статистической физике[3,4], химической кинетике[5], теории гомополимеров[6], биологии[7] и иммунологии[8,9,10].

ВСБ с одним источником ветвления изучались рядом авторов, в качестве примера можно привести монографию Е. Б. Яровой[11] и библиографию к ней. Случайные блуждания, лежащие в основе ВСБ, с

[1] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами // Теория вероятностей и ее применения. — 1958. — Т. 3. — С. 121—136.

[2] Скороход А. В. Ветвящиеся диффузионные процессы // Теория вероятностей и ее применения. — 1964. — Т. 9, № 3. — С. 492—497; Theory Probab. Appl. —1964. — V. 9, N. 3. — C. 445—449.

[3] Zeldovich Y., Molchanov S., Ruzmaikin A., Sokoloff D. Intermittency, Diffusion and Generation in a Non-stationary Random Medium // Cambridge: Cambridge Scientific Publishers Ltd. — 2015. — V. 15.

[4] Gärtner J., Molchanov S. Parabolic problems for the Anderson model // Probability Theory and Related Fields. — 1998. — V. 111. — P. 17—55.

[5] Gärtner J., Molchanov S.A. Parabolic problems for the Anderson model // Communications in Mathematical Physics. — 1990. — V. 132. — P. 613—655.

[6] Cranston M., Koralov L., Molchanov S., Vainberg B. Continuous model for homopolymers // Journal of Functional Analysis. — 2009. — V. 256. — P. 2656—2696.

[7] Getan A., Molchanov S., Vainberg B. Intermittency for branching walks with heavy tails // Stochastics and Dynamics. — 2017. — V. 17, N. 6.

[8] Balelli I., Milišić V., Wainrib G. Random walks on binary strings applied to the somatic hypermutation of B-cells // Mathematical Biosciences. — 2018. — V. 300. — P. 168—186.

[9] Balelli I., Milišić V. and Wainrib G. Multi-type Galton–Watson Processes with Affinity-Dependent Selection Applied to Antibody Affinity Maturation // Bull Math Biol. — 2019. —V. 81. — P. 830—868.

[10] Balashova D., Yarovaya E. Branching random walks applied to modeling of germinal center reaction // Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress. — 2021. — P. 1220—1223.

[11] Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде // Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. — 2007.

нарушением условия однородности были рассмотрены в работах Е. А. Жижиной и Р. А. Минлоса[12,13]. В работе Е. Б. Яровой[14] была предложена модель с конечной дисперсией скачков случайного блуждания и конечным количеством источников трех типов, в некоторых из которых допускается нарушение симметричности блуждания, в другой работе Е. Б. Яровой[15] рассмотрено ВСБ с бесконечной дисперсией скачков в случае одинаковой интенсивности источников ветвления, в работе И. И. Христолюбова и Е. Б. Яровой[16] исследована модель с источниками генерации частиц различной положительной интенсивности, в которых интенсивность деления частиц превосходит интенсивность гибели. В работе А. И. Рытовой[17] рассмотрена модель ВСБ с бесконечной дисперсией скачков. В работе Е. Вл. Булинской[18] изучается каталитический ветвящийся процесс с произвольным конечным множеством катализаторов, в ней предложена полная классификация каталитических ветвящихся процессов. В работах М. В. Платоновой и К. С. Рядовкина[19,20] ВСБ с непрерывным временем обобщаются на решетки с источниками ветвления, расположенными периодически.

[12]Жижина Е. А., Минлос Р. А. Локальная предельная теорема для неоднородного случайного блуждания по решетке // Теория вероятн. и ее примен. — 1994. — Т. 39, № 3. — С. 513—529; Zhizhina E. A., Minlos R. A. A local limit theorem for nonhomogeneous random walk on a lattice // Theory Probab. Appl. — 1994. — V. 39, N, 3. — P. 490—503.

[13]Минлос Р. А., Жижина Е. А. Предельный диффузионный процесс для неоднородного случайного блуждания на одномерной решетке // УМН. — 1997. — Т. 52, № 2(314). — С. 87—100; Minlos R. A., Zhizhina E. A. Limit diffusion process for a non-homogeneous random walk on a one-dimensional lattice // Russian Math. Surveys. — 1997. — V. 52, N. 2. — P. 327—340.

[14]Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 123—140; Math. Notes. — 2012. — V. 92, N. 1. — P. 115—131.

[15]Яровая Е. Б. Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания // Теория вероятн. и ее примен. — 2017. — Т. 62, № 3. — С. 518—541.

[16]Христолюбов И. И., Яровая Е. Б. Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности // Теория вероятн. и ее примен. — 2019. — Т. 64, № 3. — С. 456—480.

[17]Рытова А. И., Яровая Е. Б. Моменты численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании с тяжелыми хвостами // УМН. — 2019. — Т. 74, № 6(450). — С. 165—166.

[18]Булинская Е. Вл. Полная классификация каталитических ветвящихся процессов // Теория вероятн. и ее примен. — 2014. —Т. 59, № 4. — С. 639—666; Bulinskaya E. Vl. Complete classification of catalytic branching processes // Theory Probab. Appl. — 2015. V. 59, N. 4. — P. 545—566.

[19]Платонова М. В., Рядовкин К. С. Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^d$ с периодическими источниками ветвления // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2017. — Т. 466. — С. 234—256.

[20]Платонова М. В., Рядовкин К. С. Ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с периодически расположенными источниками ветвления // Теория вероятн. и ее примен. — 2019. — Т. 64, № 2. — С. 283—307; Platonova M. V., Ryadovkin K. S. Branching random walks on $\mathbb{Z}^d$ with periodic branching sources // Theory Probab. Appl. — 2019. — V. 64, N. 2. — P. 229—248.

Остановимся на работах, посвященных исследованиям стационарных распределений частиц и перемежаемости в моделях ВСБ с источниками, расположенными в каждой точке решетки. В работе С. Молчанова, Дж. Витмайера[21] доказано существование устойчивого состояния для критического ветвящегося процесса с делением на двух потомков и возвратным случайным блужданием на решетке. В работе Е. Черноусовой, С. Молчанова[22] рассмотрено произвольное общее количество потомков в каждом источнике, которые случайным образом распределяются в пространстве вокруг родительской частицы. В работе Е. Черноусовой с соавторами[23] представлено ВСБ с иммиграцией в непрерывном пространстве $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$. Если основной механизм ветвления является докритическим, модель имеет уникальное устойчивое состояние для каждого значения интенсивности иммиграции. Следует заметить, что методы, используемые в доказательстве, различны в решетчатой модели и в модели непрерывного пространства. Работа Д. Хан с соавторами[24] содержит результаты о существовании пределов для первых двух моментов численностей частиц ВСБ с непрерывным временем на многомерной решетке с иммиграцией и бесконечным числом начальных частиц. В работе Е. Черноусовой[25] с докритическим ВСБ с внешней иммиграцией частиц оцениваются кумулянты и доказывается существование стационарного состояния.

Естественным обобщением перечисленных направлений является рассмотрение ВСБ с нарушением симметрии случайного блуждания в конечном числе точек решетки и знакопеременными интенсивностями источников, а также переход к бесконечному количеству источников на решетке и бесконечному числу начальных частиц. Новым направлением является изучение многотипных ветвящихся случайных блужданий и получение предельных теорем для популяций и субпопуляций частиц различных типов.

Цель работы. Целью работы является анализ предельной пространственной структуры популяций и субпопуляций частиц в ВСБ на $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$,

[21] Molchanov S. and Whitmeyer J. Spatial models of population processes. In Modern problems of stochastic analysis and statistics // Springer Proc. Math. Stat. — 2017. — V. 208. — P. 435—454.

[22] Chernousova E., Molchanov S. Steady state and intermittency in the critical branching random walk with arbitrary total number of offspring // Mathematical Population Studies. — 2019. — V. 26. — P. 47—63.

[23] Chernousova E., Hryniv O., Molchanov S. Population model with immigration in continuous space // Mathematical Population Studies. — 2020. — V. 27. — P. 199—215.

[24] Han D., Makarova Y., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Immigration // Rykov, V.V., Singpurwalla, N.D., Zubkov, A.M. (Eds.), Analytical and Computational Methods in Probability Theory, Lecture Notes in Computer Science. Springer International Publishing. — 2017. — P. 401—408.

[25] Chernousova E., Feng Y., Hryniv O., Molchanov S., Whitmeyer J. Steady states of lattice population models with immigration // Mathematical Population Studies. — 2021. — V. 28. — P. 63—80.

с конечным или бесконечным числом источников ветвления произвольных интенсивностей и различными начальными распределениями частиц, асимптотический анализ численностей частиц и их целочисленных моментов.

Научная новизна. Получены новые результаты для ВСБ со знакопеременными источниками, а также для ВСБ с бесконечным числом источников в условиях критического и надкритического ветвления. В отличие от предыдущих исследований, в диссертационной работе, по-видимому, впервые рассмотрены многотипные ВСБ. Для них был изучен эффект пространственной кластеризации в том случае, когда в основе процесса лежит возвратное случайное блуждание. Полученные результаты проиллюстрированы численным моделированием.

Методы исследования. В работе использованы методы теории вероятностей и случайных процессов, спектральной теории, теории дифференциальных уравнений, метод интеграла Лапласа и преобразование Фурье, а также численные моделирования на программном пакете Wolfram|Alpha и языке программирования Python.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории ветвящихся случайных блужданий, а также для практического моделирования биологических процессов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема о собственных значениях эволюционного оператора для ВСБ со знакопеременными источниками ветвления, находящимися в симплициальной конфигурации.
2. Теорема об экспоненциальном росте числа частиц без предположений о дисперсии скачков основного случайного блуждания для ВСБ со знакопеременными источниками и псевдо-источниками ветвления.
3. Теорема о нерегулярности роста субпопуляций частиц в случае критического закона ветвления в каждой точке решетки с бесконечным числом начальных частиц.
4. Достаточные условия существования предельного стационарного распределения поля частиц.
5. Теорема о наличии зоны регулярного роста моментов в предположении суперэкспоненциально легких хвостов случайного блуждания и надкритичности ветвящегося процесса в точках решетки.
6. Теоремы об асимптотике второго условного момента численности субпопуляции в случаях суперэкспоненциально легких и тяжелых хвостов случайного блуждания.
7. Теорема об асимптотике численности субпопуляции частиц при условии ее невырождения для многотипного ВСБ с критическим ветвящимся процессом.

8. Теорема о нерегулярности предельного поведения поля частиц в пространствах размерности $d = 1, 2$ при условии конечности дисперсии скачков случайного блуждания, лежащего в основе процесса.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

– XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов – 2017 Москва, Россия, 20 апреля 2017
– Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (ACMPT-2017), Москва, Россия, 23-28 октября 2017
– Аспирантский коллоквиум кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, Москва, Россия, 13 декабря 2017 и 23 октября 2019
– 9th International Workshop on Applied Probability (IWAP 2018), Будапешт, Венгрия, 18-21 июня 2018
– IX Московская международная конференция по Исследованию Операций (ORM2018-Germeyer100), Москва, Россия, 22-27 октября 2018
– Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 24-26 декабря 2018
– ASMDA 2019 (Applied Stochastic Models and Data Analysis 2019, June 11-14, Florence, Italy), Флоренция, Италия, 11-14 июня 2019
– 62nd ISI World Statistics Congress, Куала-Лумпур, Малайзия, 18-23 августа 2019
– The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5), Москва, Россия, 23-27 ноября 2020
– Семинар отдела дискретной математики МИАН, Москва, Россия, 1 декабря 2020
– The 5th International workshop on branching processes and their applications, Badajoz, Испания, 6-22 апреля 2021
– 19th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA 2021), Греция, 1-4 июня 2021
– 63rd ISI World Statistics Congress, Virtual, Нидерланды, 11-16 июля 2021

Публикации. Результаты диссертации содержатся в 18 публикациях. В научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI представлено 6 публикаций, 2 из которых – без соавторов. В материалах международных конференций представлено 12 публикаций, 5 из которых – статьи. Список работ автора приведен в конце автореферата и диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация, объемом 91 страница, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 44 наименования. В диссертацию вошли результаты, выполненные при поддержке РФФИ (гранты 17-01-00468 и 20-01-00487, руководитель грантов – профессор Е. Б. Яровая).

Содержание работы

Первая глава посвящена ВСБ с непрерывным временем по многомерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, с конечным числом знакопеременных источников ветвления частиц – в одних интенсивность деления частиц превышает интенсивность гибели, в других – наоборот. Мы предполагаем, что на решетке находится одна начальная источники ветвления трех типов. Каждая частица движется по решетке, пока не достигнет источника, в котором происходит изменение поведения. Если это источник первого типа, то происходит гибель или размножение без нарушения симметричности случайного блуждания. Если источник относится ко второму типу, то возможно нарушение симметричности случайного блуждания, характеризующееся дополнительным параметром, который усиливает степень степень ветвления или блуждания в источнике. В источниках третьего типа возможно только нарушение симметричности случайного блуждания без размножения или гибели частиц. Введем, согласно[26], обозначение $BRW/r/k/m$ для ВСБ с r источниками первого, k источниками второго и m источниками третьего типа.

Мы предполагаем, что базовое случайное блуждание задано матрицей переходных интенсивностей $A = (a(x,y))_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$, обладающей свойствами $a(x,y) = a(y,x) = a(0,y - x) = a(y - x)$ для всех x и y. Таким образом, случайное блуждание симметрично и пространственно однородно. Кроме того, предполагаются выполненными свойства регулярности $\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) = 0$ и неприводимости, то есть для всех $z \in \mathbb{Z}^d$ существует множество векторов $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $z = \sum_{i=1}^k z_i$ и $a(z_i) \neq 0$ для $i = 1,2,\ldots,k$.

Вероятность перехода $p(t, \cdot, y)$ удобно рассматривать как функцию $p(t)$ в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, зависящая от времени t и параметра y. Для времени $h \to 0$ имеют места равенства:

$$p(h,x,y) = a(x,y)h + o(h) \text{ при } y \neq x, \qquad p(h,x,x) = 1 + a(x,x)h + o(h).$$

На множестве функций $u(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, рассмотрим оператор

$$(\mathcal{A}u)(x) = \sum_{x' \in \mathbb{Z}^d} a(x - x')u(x'),$$

[26] Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 123—140; Math. Notes. — 2012. — V. 92, N. 1. — P. 115—131.

где $\mathcal{A}$[27], как оператор в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$, является самосопряженным.

Мы предполагаем, что ветвление определяется инфинитезимальными производящими функциями $f_i(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i,n}u^n, 0 \leq u \leq 1$, где $\sum\limits_n b_n(x_i) = 0$, $b_n(x_i) \geq 0$ при $n \neq 1$ и $b_1(x_i) < 0$, $f_i^{(r)}(1) < \infty$ при всех $r \in \mathbb{N}$. Интенсивностью источника x_i назовем величину $\beta_i = f'(1,x_i)$, характеризующую среднее число рождающихся в нем потомков.

Введем оператор $\mathcal{Y}$, полученный в результате возмущения ограниченного самосопряженного оператора $A : l^p(Z^d) \to l^p(Z^d)$ (генератора симметричного случайного блуждания), который имеет вид:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^{r} \beta_i \Delta_{x_i} + \Big(\sum_{i=r+1}^{r+k} \zeta_i \Delta_{x_i} \mathcal{A} + \sum_{i=r+1}^{r+k} \beta_i \Delta_{x_i} \Big) + \sum_{i=r+k+1}^{r+k+m} \zeta_i \Delta_{x_i} \mathcal{A},$$

где $\Delta_y = \delta_y \delta_y^T$, $\delta_y = \delta_y(\cdot)$ - вектор-столбец на решетке, принимающий единичное значение в точке решетки $y \in \mathbb{Z}^d$ и нули в остальных точках, числа β_s и ζ_i – характеристики интенсивности источников.

Пусть $\mu_t(y)$ — число частиц в момент времени t в точке y и $m_1(t,x,y) := \mathbb{E}_x \mu_t(y)$ — математическое ожидание числа частиц в точке y в момент времени t при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ в системе была одна частица, расположенная в точке x. Поведение среднего числа частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке можно описать в терминах эволюционного оператора специального типа

$$\mathcal{H} = \mathcal{A} + \sum_{i=r+1}^{r+k+m} \zeta_i \Delta_{x_i} + \sum_{i=1}^{r+k} \beta_i \Delta_{x_i}, \quad x_i \in \mathbb{Z}^d.$$

Этот оператор[28] можно трактовать как линейный ограниченный оператор, действующий в каждом из функциональных пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1,\infty]$.

Рассмотрим ВСБ с p источниками положительной интенсивности $\beta > 0$ и n источниками отрицательной интенсивности $(-\beta) < 0$, находящимися в вершинах симплекса, $|x_i - x_j| = \text{const}$ для $i \neq j$. Источники с положительной интенсивностью указывают на точки, где степень рождаемости преобладает над степенью смертности, а в источниках с отрицательной интенсивностью — наоборот.

[27] Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 123—140; Math. Notes. — 2012. — V. 92, N. 1. — P. 115—131.

[28] Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 123—140; Math. Notes. — 2012. — V. 92, N. 1. — P. 115—131.

Теорема 1.1. *Предположим $\beta_1 = \ldots = \beta_p = \beta$ и $\beta_{p+1} = \ldots = \beta_{p+n} = -\beta$. Тогда количество собственных значений $\lambda > 0$ эволюционного оператора $\mathcal{H}$ с учетом их кратности не превосходит количества источников ветвления с положительной интенсивностью и максимальное среди собственных значений является простым.*

В дальнейшем будем предполагать, что на решетке могут присутствовать источники трех типов и что параметры β_j вещественны. При таком предположении, обозначив старшее положительное собственное значение оператора $\mathcal{Y}$ через λ_0, будет показано, что если существует λ_0, то оно простое и гарантирует экспоненциальный рост первых моментов m_1 частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке.

Теорема 1.2. *Пусть оператор $\mathcal{Y}$ ВСБ$/r/k/m$ имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 > 0$, и пусть оставшаяся часть его спектра расположена на полупрямой $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leqslant \lambda_0 - \epsilon\}$, где $\epsilon > 0$. Если $\beta_i^{(r)} = O(r!r^{r-1})$ для всех $i = 1, \ldots, N$ и $r \in \mathbb{N}$, то справедливы следующие утверждения в смысле сходимости по распределению*

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t(y)e^{-\lambda_0 t} = \psi(y)\xi, \quad \lim_{t\to\infty} \mu_t e^{-\lambda_0 t} = \xi, \tag{1}$$

где $\psi(y)$ – собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0 and ξ – невырожденная случайная величина.

Таким образом, из теоремы 1.2 вытекает, что $\mu_t(y)$ и μ_t растут экспоненциально. Такое ВСБ мы называем надкритическим. Доказательство теоремы 1.2 основано на изучении спектральных свойств оператора $\mathcal{Y}$.

Введем оператор

$$\mathcal{B} := \lambda I - \mathcal{A} - \sum_{i=1}^{k+m} \zeta_i \Delta_{u_i} \mathcal{A} - \sum_{i=s+1}^{k+r} \beta_i \Delta_{v_i},$$

тогда собственный вектор h, соответствующий собственному значению λ оператора $\mathcal{Y}$, удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{B}h = \sum_{i=1}^{s} \beta_i \delta_{v_i} \langle \delta_{v_i}, h\rangle.$$

Обозначим матрицу $B^{(\lambda)}$ как

$$B^{(\lambda)} := B_{i,j}^{(\lambda)} = \beta_j \langle \delta_{v_i}, \mathcal{B}^{-1} \delta_{v_j}\rangle,\ i, j = 1, \ldots, s.$$

Спектральные свойства оператора $\mathcal{Y}$ показаны в следующей теореме.

Теорема 1.8. *Пусть $\lambda_0 > 0$ — наибольшее собственное значение оператора $\mathcal{Y}$. Тогда λ_0 – простое собственное значение матрицы $\mathcal{Y}$, а 1 – наибольшее собственное значение матрицы $B^{(\lambda_0)}$.*

Во второй главе содержатся результаты для ВСБ с бесконечным количеством начальных частиц и бесконечным количеством источников с возможностью деления на произвольное число потомков. Получены зоны перемежаемости в случае надкритического закона ветвления. Для критического случая деления на двух потомков найдено асимптотическое поведение условного совместного второго момента субпопуляций. Для ВСБ с суперэкспоненциально легкими хвостами блуждания доказана сходимость распределения поля частиц к стационарному.

Рассматривается симметричное ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке с непрерывным временем и марковским ветвящимся процессом в каждой точке решетки. Предполагается, что в начальный момент времени в точках решетки находится по одной частице, и в процессе ветвления частица может произвести произвольное число потомков. Для критического ветвящегося процесса в случае невозвратного случайного блуждания по решетке доказана сходимость распределения поля частиц к предельному стационарному распределению. Показано отсутствие перемежаемости в зоне $|x - y| = O(\sqrt{t})$, где $x - y$ — пространственная координата, а t — время, в предположении *суперэкспоненциально легких хвостов* случайного блуждания и надкритичности ветвящегося процесса в точках решетки.

Рассмотрим случайное поле частиц на многомерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Через $N(t, y)$ обозначим количество частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени $t \geq 0$. Предполагается, что в начальный момент времени в каждой точке решетки находится по одной частице, и частицы эволюционируют независимо друг от друга и от всей предыстории. Пространственно-временная эволюция поля включает процессы блуждания (транспорта), размножения и гибели частиц.

Блуждание частиц по $\mathbb{Z}^d$ до первого превращения, то есть размножения или гибели, опишем в терминах генератора случайного блуждания $(\mathcal{L}\psi)(x) := \varkappa \sum_{z\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}[\psi(x + z) - \psi(x)]a(z)$, который предполагается действующим в пространстве $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$. Функция $a(z)$ задет распределение случайных скачков, параметр $\varkappa > 0$ будем называть *коэффициентом диффузии* частиц. В дальнейшем предполагается выполнение следующих условий:

1. регулярность: $\sum_{z\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} a(z) = -a(0) = 1,\ a(z) \geq 0$;
2. симметричность: $a(z) = a(-z)$;
3. неприводимость: для каждого $z \in \mathbb{Z}^d$ найдется такой набор векторов $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}^d$, что $z = \sum_{i=1}^k z_i$ и $a(z_i) > 0$ при $i = 1, \ldots, k$.

Структура случайного блуждания существенно зависит от распределения его скачков. Будем говорить, что случайное блуждание имеет *суперэкспоненциально легкие хвосты*, если для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^d$ выполняется условие:

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} e^{\langle\lambda,z\rangle}a(z) < \infty. \tag{2}$$

Перейдем к описанию механизма ветвления. Будем предполагать, что ветвление частиц в каждой из точек решетки определяется одной и той же инфинитезимальной производящей функцией $f(u) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n, \quad 0 \le u \le 1$, где $b_n \ge 0$ при $n \ne 1$, $b_1 < 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0$. Таким образом, каждая из частиц умирает в интервале $(t, t+dt)$ при малом dt с вероятностью $b_0\,dt + o(dt)$ или распадается на $n \ge 2$ потомков с вероятностью $b_n\,dt + o(dt)$. Важной характеристикой интенсивности источника ветвления является параметр $\beta := f'(1)$, который характеризует среднее число потомков частицы. Мы предполагаем, что $\beta < \infty$.

Для частицы, находившейся в начальный момент времени в точке x, обозначим через $n(t,x,y)$ количество потомков, которые в момент времени t попадают в точку y. В этом случае численность $N(t,y)$ общей популяции в точке $y \in \mathbb{Z}^d$, представляющая собой сумму численностей независимых субпопуляций, может быть выражена следующим равенством: $N(t,y) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} n(t,x,y)$, где $n(0,x,y) = \delta_y(x)$ и $N(0,y) \equiv 1$. Объединяя блуждание и ветвление, мы получаем процесс, в котором частица, находящаяся в момент времени t в положении x, за малое время dt может

1. совершить прыжок в положение $x + z \ne x$ с вероятностью $\varkappa a(z)\,dt + o(dt)$;
2. погибнуть с вероятностью $b_0\,dt + o(dt)$;
3. произвести $n \ne 1$ число потомков с вероятностью $b_n\,dt + o(dt)$;
4. не совершить никаких действий с вероятностью $1 - \varkappa\,dt + b_1\,dt + o(dt)$.

При этом каждая новая частица эволюционирует независимо от остальных и всей предыстории. Обозначим моменты численностей частиц:

$$m_1(t,x,y) = \mathsf{E}n(t,x,y), \qquad m_2(t,x,y) = \mathsf{E}[n(t,x,y)(n(t,x,y)-1)].$$

Теорема 2.1. *Пусть $\beta = 0$. Тогда при $d = 1$ или $d = 2$ для любого $y \in \mathbb{Z}^d$ в случае выполнения условия* (2) *и $t \to \infty$ имеет место соотношение*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{m_2(t,y,y)}{m_1^2(t,y,y)} = \infty.$$

Проведем исследование распределения $N(t,y)$ при $t \to \infty$ в перечисленных ниже предположениях:

1. закон ветвления – критический: $\sum_{n=0}^{\infty} n b_n = 0$;

2. $b_n < \vartheta\delta^n$ при всех $n \geq 2$ для некоторых $\vartheta > 0$ и $\delta \in (0,1)$;
3. блуждание, задаваемое оператором $\mathcal{L}$, невозвратно: $\int_0^\infty \bar{p}(t,0)\,dt < \infty$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда* $N(t,y) \xrightarrow{d} N(\infty,y)$ *при* $t \to \infty$.

Введем определение *второго условного момента*

$$M_2(t,x,y,k) := \mathsf{E}[n(t,x,y)(n(t,x,y)-1)|n(t,x)=k].$$

Будем писать $g \asymp f$, если найдутся такие константы $c > 0$ и $C < \infty$, что $c \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq C$ при всех достаточно больших значениях x. В условиях суперэкспоненциально легких хвостов получен следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть выполнено условие* (2) *суперэкспоненциально легких хвостов, тогда при* $|x-y| = O(\sqrt{t})$ *и* $t \to \infty$ *справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}
&M_2(t,x,y,k=t+o(t)) \asymp t && \text{при } d=1;\\
&M_2(t,x,y,k=t+o(t)) \asymp \ln t && \text{при } d=2;\\
&M_2(t,x,y,k=t+o(t)) \asymp t^{1-d/2} && \text{при } d\geq 3.
\end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению асимптотического поведения условного второго момента в случае распределения скачков блуждания с тяжелыми хвостами

$$a(z) = \frac{a_0(\dot{z})}{|z|^{d+\alpha}},\ |z| \to \infty,\ \dot{z} = \frac{z}{|z|},\ a_0(\dot{z}) > \delta > 0,\ 0 < \alpha < 2, \tag{3}$$

где $|z|$ – евклидова норма z. В распределения скачков блуждания с тяжелыми хвостами получен следующий результат.

Теорема 2.5. *Пусть выполнено условие* (3), *тогда при* $t \to \infty$ *и* $|x-y| = O(t^{1/\alpha})$

$$\begin{aligned}
&M_2(t,x,y,k=t+o(t)) \asymp t^{2-2/\alpha} && \text{при } d=1 \text{ и } \alpha>1,\\
&M_2(t,x,y,k=t+o(t)) \asymp \ln t && \text{при } d=1 \text{ и } \alpha=1,\\
&M_2(t,x,y,k=t+o(t)) \asymp t^{1-d/\alpha} && \text{при } d=1 \text{ и } \alpha<1 \text{ и при } d\geq 2.
\end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению ВСБ с надкритическим ветвящемся процессом в каждой точке решетки, которое будем называть *ВСБ в надкритической ветвящейся среде.* Зону поля частиц $n(t,x,y)$ на $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, назовем *перемежаемой,* если

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m_2(t,x,y)}{m_1^2(t,x,y)} = \infty,$$

где $|y-x| \in \Omega(t)$, $\Omega(t)$ некоторое неубывающее семейство множеств и $\cup_{t\geq 0}\Omega(t) = \mathbb{Z}^d$.

Будем предполагать, что в каждой точке решетки размножение и гибель частиц задается надкритическим ветвящемся процессом с одними и теми же интенсивностями деления частиц, т.е. в каждой точке решетки интенсивность источника ветвления равна $\beta > 0$. При $\beta > 0$ имеет место экспоненциальный рост первого момента $m_1(t,x,y) = p(t,x,y)e^{\beta t}$.

Перейдем к исследованию второго момента. Для надкритического ветвления получен следующий результат.

Теорема 2.6. *Пусть $\beta > 0$. Тогда в случае выполнения условия* (2) *при $|x-y| = O(\sqrt{t})$ и $t \to \infty$ имеет место соотношение*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{m_2(t,x,y)}{m_1^2(t,x,y)} \leq \frac{C}{\beta}.$$

Третья глава посвящена непрерывному по времени симметричному ветвящемуся случайному блужданию по многомерной решетке с частицами нескольких типов и марковским процессом ветвления в каждой точке решетки. Предполагается, что в начальный момент времени в каждой точке решетки находится по одной частице каждого из типов, в процессе ветвления частица может произвести произвольное число потомков каждого из типов. В случае возвратности случайного блуждания и критичности процесса ветвления исследуется эффект пространственной кластеризации популяции частиц.

Рассмотрим систему с частицами R типов. Пусть Ψ – множество R-мерных векторов $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_R)$ с целочисленными неотрицательными координатами. Транспорт по $\mathbb{Z}^d$ частиц r-ого типа, $r = 1, \ldots, R$, описывается случайным блужданием с генератором

$$(\mathcal{L}_r\psi)(x) = \kappa_r \sum_{z\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} [\psi(x+z) - \psi(x)]a_r(z),$$

действующим в каждом из пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$. Параметр $\kappa_r > 0$ – коэффициент диффузии. Без ограничения общности можно считать, что $a_r(z) \geq 0$ при $z \neq 0$ и $\sum\limits_{z\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} a_r(z) = -a_r(0) = 1$. Кроме того, случайное блуждание предполагается симметричным: $a_r(z) = a_r(-z)$, и неразложимым: для каждого $z \in \mathbb{Z}^d$ найдется такой набор векторов $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}^d$, что $z = \sum_{i=1}^k z_i$ и $a_r(z_i) > 0$ при $i = 1, \ldots, k$.

Процесс размножения и гибели частиц предполагается марковским, превращения разных частиц в R типов являются независимыми, частицы эволюционируют независимо друг от друга. Обозначим интенсивность порождения частиц типов $1, \ldots, R$ частицей типа r через $b_r(\nu)$, где $\nu =$

$(\nu_1, \ldots, \nu_R)$. Введем производящие функции ветвления

$$F_r(z) := \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_R \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^{R} z_j^{\nu_j} b_r(\nu), \tag{4}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_R)$, где $0 \leq z_r \leq 1, r = 1, \ldots, R$. Далее будем предполагать, что интенсивности таковы, что $\frac{\partial F_r(z)}{\partial z_r}$, $\frac{\partial^2 F_r(z)}{\partial z_r \partial z_j}$, $r, j = 1, \ldots, R$, конечны в точке $z = (z_1, \ldots, z_R) = (1, \ldots, 1)$. Обозначим количество потомков j-ого типа в точке y в момент времени t от одной частицы r-ого типа, стартовавшей в точке x через $n_{rj}(t, x, y)$. Заметим, что $n_{rj}(t, x, y)$ является марковским процессом.

Определим первые моменты $m_{rj}(t, x; y) := \mathsf{E} n_{rj}(t, x, y)$, $r, j = 1, \ldots, R$. Обозначим матрицу производных производящих функций ветвления (4) через $D = \left(d_{rj}\right)$, где $d_{rj} := \frac{\partial F_r(z)}{\partial z_j}\Big|_{z=(1,\ldots,1)}$ при $r, j = 1, \ldots, R$; вторые факториальные моменты $b_{rjk} := \frac{\partial^2 F_r(z)}{\partial z_j \partial z_k}\Big|_{z=(1,\ldots,1)}$ при $r, j, k = 1, \ldots, R$.

Напомним, что в силу предположения на интенсивности, первые и вторые факториальные моменты конечны. В силу идентичности процессов ветвления в каждой точке решетки, $\sum\limits_{y \in \mathbb{Z}^d} m_{rj}(t, x, y)$ идентичны для всех $x \in \mathbb{Z}^d$. Обозначим матрицу $K(t) = \big(k_{rj}(t)\big)$ следующим образом: $k_{rj}(t) := \mathsf{E} \sum\limits_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y), r, j = 1, \ldots, R$. Ветвящийся процесс, в котором все типы образуют один класс сообщающихся типов (для каждой пары типов r и j, $r, j = 1, \ldots, R$, существует возможность перехода из r в j или из j в r), называется неразложимым[29]. Ветвящийся процесс является неразложимым тогда и только тогда, когда матрица D неразложима. В таком случае при $t \to \infty$ имеет место $k_{rj}(t) = u^r v_j e^{ht} + o(e^{h_1 t})$, где $h_1 < h$, h – Перронов корень (старшее собственное значение) матрицы D, u^r и v_j – компоненты соответствующих h правого и левого собственных векторов. Неразложимый ветвящийся процесс называется критическим[30], если $h = 0$ и $\sum\limits_{r=1}^{R} \sum\limits_{j=1}^{R} \sum\limits_{k=1}^{R} v_r b_{rjk} u^j u^k > 0$.

Пусть $n_r(t, x)$ – число частиц в субпопуляции в момент времени t, являющихся прямыми и непрямыми потомками частицы r-ого типа, которая была в положении x в начальный момент времени, тогда $n_r(t, x) = \sum\limits_{j=1}^{R} \sum\limits_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y)$.

[29] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами // Теория вероятностей и ее применения. — 1958. — Т. 3. — С. 121—136.

[30] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами // Теория вероятностей и ее применения. — 1958. — Т. 3. — С. 121—136.

Теорема 3.1. *В ВСБ при условии неразложимости процесса ветвления в каждой точке решетки для каждого n_{rj},$r, j = 1, \ldots, R$, существует константа C_{rj}, такая что* $\mathsf{E}\left(\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} n_{rj}(t,x,y)\Big| n_r(t,x) > 0\right) = C_{rj}t + o(t)$ *при* $t \to \infty$.

Изучим эффект кластеризации частиц (в случае неразложимого критического процесса ветвления в каждой точке) при условии суперэкспоненциально легких хвостов случайного блуждания: для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $r = 1, \ldots, R$, выполняется неравенство $\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} e^{\langle\lambda,z\rangle} a_r(z) < \infty$.

Для критического неразложимого процесса ветвления при конечности b_{rjk} и $t \to \infty$ вероятность невырождения субпопуляции из любой $x \in \mathbb{Z}^d$ имеет следующую асимптотику[31]:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(n_r(t,x) > 0\right) = \frac{c_r}{t} + o(1/t) \to 0,\\
&\mathsf{P}\left(n_r(t,x) = 0\right) = 1 - \frac{c_r}{t} + o(1/t) \to 1,
\end{aligned} \tag{5}$$

где c_r – некоторая константа.

Введем понятие кластера. На одномерной решетке $\mathbb{Z}$ назовем кластером группу потомков частиц типа r, находящихся друг от друга на расстоянии не большем $O(\sqrt{t})$. На двумерное решетке $\mathbb{Z}^2$ назовем вырожденным кластером квадрат со сторонами $O(\sqrt{t \times \ln t})$, внутри которого отсутствуют потомки частиц типа r. Имеет место следующая теорема о кластеризации в пространствах размерностей $d = 1, 2$ при $t \to \infty$.

Теорема 3.2. *Для $d = 1$ вероятность, что кластеры размера $O(\sqrt{t})$ находятся на расстоянии не менее $O(t^{2/3})$ стремится к 1 при $t \to \infty$. Для $d = 2$ и c_r из (5) вероятность нахождения внутри квадрата со стороной $O(\sqrt{t \times \ln t \times t^{c_r+1}})$ квадрата со стороной $O(\sqrt{t \times \ln t})$ без частиц типа r стремится к 1 при $t \to \infty$.*

Заключение. В диссертации изучались ВСБ с нарушением симметрии случайного блуждания в конечном числе точек решетки и знакопеременными интенсивностями источников. Для этого случая описаны фазовые переходы в надкритическом случае. Другим направлением исследований стало ВСБ с бесконечным количеством источников генерации частиц на решетке и бесконечным числом начальных частиц. Для случая критического ветвящегося процесса в каждой точке решетки при возвратном случайном блуждании и однородных начальных условиями описан эффект кластеризации частиц. Изучена структура популяции частиц для ВСБ в однородной среде. Переход к исследованию многотипных ВСБ

[31] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами // Теория вероятностей и ее применения. — 1958. — Т. 3. — С. 121—136.

и получение предельных теорем для популяций и субпопуляций частиц различных типов является новым направлением в теории стохастических процессов. Кратко перечислим основные результаты: доказана теорема о собственных значениях эволюционного оператора для ВСБ со знакопеременными источниками ветвления, находящимися в симплициальной конфигурации; доказана теорема об экспоненциальном росте числа частиц без предположений о дисперсии скачков случайного блуждания для ВСБ со знакопеременными источниками и псевдо-источниками ветвления; доказана теорема о нерегулярности роста субпопуляций частиц в случае критического закона ветвления в каждой точке решетки с бесконечным числом начальных частиц; доказана теорема о наличии зоны регулярного роста моментов в предположении суперэкспоненциально легких хвостов случайного блуждания и надкритичности ветвящегося процесса в точках решетки; доказаны теоремы об асимптотике второго условного момента численности субпопуляции в случаях суперэкспоненциально легких и тяжелых хвостов случайного блуждания; доказана теорема об асимптотике численности субпопуляции частиц при условии ее невырождения для многотипного ВСБ с критическим ветвящимся процессом в каждой точке решетки; доказана теорема о нерегулярности предельного поведения поля частиц на одно- и двумерных решетках при условии конечности дисперсии скачков случайного блуждания, лежащего в основе процесса.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю – профессору Елене Борисовне Яровой – за постановки и обсуждение задач, а также за постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Балашова Д. М. Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными интенсивностями источников ветвления // Фундаментальная и прикладная математика. — 2020. — Т. 23, № 1. — С. 75–88.
Balashova D. M. Branching random walks with alternating sign intensities of branching sources // Fundamental and Applied Mathematics. — 2020. — Vol. 23, no. 1. — P. 75–88.

[2] Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Structure of the particle population for a branching random walk with a critical reproduction law // Methodology and Computing in Applied Probability. — 2021. — Vol. 23. — P. 85–102.
Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову, все результаты получены Д. М. Балашовой самостоятельно.

[3] Yarovaya E., Balashova D., Khristolubov I. Branching walks with a finite set of branching sources and pseudo-sources // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. ICSM-5 2020. — 2021. — Vol.

371. — P. 144–163.
Д. М. Балашовой принадлежит обобщение результатов на знакопеременные источники (раздел 3, теорема 7).

[4] Балашова Д. М., Яровая Е. Б. Структура популяции частиц для ветвящегося случайного блуждания в однородной среде // Труды Математического института им.В.А.Стеклова РАН. — 2022. — Т. 316. — С. 64–78.
Balashova D. M., Yarovaya E. B. Structure of the population of particles for a branching random walk in a homogeneous environment // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2022. — Vol. 316. — P. 57–71.
Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой, все результаты получены Д. М. Балашовой самостоятельно.

[5] I. Makarova I., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching random walks with two types of particles on multidimensional lattices // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 6. — P. 867.
Д. М. Балашовой принадлежат результаты разделов о кластеризации (раздел 5) и численном моделировании (раздел 7).

[6] Балашова Д. М. Эффект кластеризации для многотипного ветвящегося случайного блуждания // Теория вероятностей и ее применения. — 2022. — Т. 67, № 3. — С. 443–455.

Статьи в трудах научных конференций

[7] Balashova D. Numerical analysis of phase transitions in supercritical branching random walks // Proceedings of the International Conference Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications. — RUDN Moscow, 2017. — P. 674–677.

[8] Balashova D. Simulation of branching random walks with different intensity of branching sources // Proceedings of the 62th World Statistics Congress of the International Statistical Institute, ISI2019. — 2019.

[9] Balashova D., Makarova Y., Molchanov S., Yarovaya E. Clustering conditions in branching random walks // Proceedings of the international scientific conference. The 5th international conference on stochastic methods (ICSM-5). — 2020. — P. 24–28.

[10] Makarova Y., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching random walks with two types of particles // Proceedings of the international scientific conference. The 5th international conference on stochastic methods (ICSM-5). — 2020. — P. 97–101.
В [9] и [10] Д. М. Балашовой принадлежат результаты о кластеризации.

[11] Balashova D., Yarovaya E. Branching random walks applied to modeling of germinal center reaction // Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress. — 2021. — P. 1220–1223.

Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой, все результаты получены Д. М. Балашовой самостоятельно.

Тезисы докладов в материалах научных конференций

[12] Балашова Д. М. Численный анализ фазовых переходов в надкритическом ветвящемся случайном блуждании // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов-2017. — Москва: Москва, 2017.

[13] Balashova D. Phase transitions in supercritical branching random walks // Abstracts of the 9-th International Workshop on Applied Probability 18-21 June 2018, Budapest, Hungary. — Eotvos Lorand University Budapest, 2018.

[14] Balashova D. Evolutionary operator for supercritical branching random walk with different branching sources // IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM 2018). — Vol. 1. — Москва: Москва, 2018.

[15] Yarovaya E., Balashova D., Molchanov S. The formation of particle clusters in branching random walks on lattices // 10th International Workshop on Simulation and Statistics (workshop booklet). — Universitat Salzburg Salzburg, Austria, 2019. — P. 30–31.

[16] Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Structure of the particle field for a branching random walk with a critical branching process at every point // Book of abstracts. Applied Stochastic Models and Data Analysis ASMDA 2019 and Demographics 2019. — 2019. — P. 27–27.

[17] Makarova Y., Balashova D., Yarovaya E. Multi-type branching random walks on multidimensional lattices // Programme and Abstracts. 14th International Conference on Computational and Financial Econometrics (Virtual CFE 2020) and 13th International Conference of the ERCIM Working Group on Computational and Methodological Statistics (Virtual CMStatistics 2020). — Econometrics and Statistics (EcoSta), 2020. — P. 149–149.

[18] Balashova D. Structure of the particle field in branching walks with generation centers of particles at every lattice point // Book of abstracts. ASMDA 2021 and Demographics 2021 Workshop. — 2021. — P. 22–22.

Балашова Дарья Михайловна

Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными источниками

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 120 экз.

Типография ______________________________________