Отзыв
официального оппонента на диссертацию
Ворушилова Константина Сергеевича на тему
“Инварианты Жордана-Кронекера конечномерных алгебр Ли”,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.3 (01.01.04) - “Геометрия и топология”

В работе К.С. Ворушилова исследуются инварианты Жордана-Кронекера алгебр Ли. Это инварианты пары билинейных форм $\sum_i C^i_{jk} x_i$ и $\sum_i C^i_{jk} a_i$, где C^i_{jk} — структурные константы алгебры Ли, а x_i, a_i — пара общего положения. Инварианты Жордана-Кронекера алгебры Ли были введены А. В. Болсиновым и Pumei Zhang в их работе 2012 года.

Несмотря на простоту определения этих инвариантов, они всё ещё достаточно мало изучены и до недавнего времени не были посчитаны даже для полупрямых сумм $\mathfrak{g} + V^k$, отвечающих сумме стандартных представлений простых алгебр Ли. В диссертации К. С. Ворушилова был восполнен этот пробел.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 30 наименований. Общий объём диссертации составляет 97 страниц.

- Во введении обосновывается актуальность работы, описывается структура работы и формулируются основные результаты.

- В главе 1 вводятся основные определения, связанные с алгебрами Ли и теорией инвариантов Жордана–Кронекера.

- В главе 2 вычислены инварианты Жордана-Кронекера для полупрямой суммы $\mathrm{so}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathrm{sp}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ по стандартному представлению для всех значений n и k;

- В главе 3 вычислены инварианты Жордана-Кронекера для полупрямой суммы $\mathrm{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ по стандартному представлению для всех значений n и k, кроме случаев $k < n$ и n не кратно k;

- В главе 4 вычислены инварианты Жордана-Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ и $Bsp(n)$ для всех возможных n.

- В главе 5 найдены полные наборы полиномиальных функций в биинволюции для всех семимерных нильпотентных алгебр Ли из списка M.-P. Gong.

Результаты К.С. Ворушилова про алгебры Ли $\mathrm{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ особенно интересны — им были найдены примеры смешанных инвариантов, для которых не применимы все ранее известные способы построения полного набора в биинволюции.

Некоторые замечания к работе:

1. В диссертации указаны не все работы, связанные с инвариантами Жордана-Кронекера. Также можно было указать работы А. Гаража, в которых для простых алгебр Ли вычисляются инварианты Жордана–Кронекера для пар x, a, где a — произвольная, а x — общего положения.

2. Допущены опечатки при описании инвариантов Жордана-Кронекера для некоторых алгебр Ли. Ниже приведены правильные ответы:

   (a) Алгебры Ли $\mathrm{sp}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$. При $k = 2l - 1, l \le m$ алгебра Ли имеет кронекеров тип, и кронекеровы индексы равны
   $$\underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{k(k-1)}{2}}, \quad 2k + 1, \dots, n + k.$$
   То есть ответ похож на случай $\mathrm{so}(n)$, но отличается некоторыми знаками и чётностью чисел. В диссертации нечётные индексы почему-то неверно начинаются с $k(k-1) + 1$. Опечатки — на стр. 6 и 23.

   (b) Алгебры Ли серии $\mathrm{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ в случае $k > n$ имеют кронекеров тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются
   - $kn - l \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ блоков размера $2l + 1$,
   - $(l + 1) \operatorname{ind} \mathfrak{g} - kn$ блоков размера $2l - 1$.

   В диссертации неверные количества и размеры блоков. Опечатки — на стр. 6 и 39.

   (c) Алгебры Ли серии $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ в случае $k > n$ имеют кронекеров тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются
   - $kn - l \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ блоков размера $2l + 1$,
   - $(l + 1) \operatorname{ind} \mathfrak{g} - kn$ блоков размера $2l - 1$.

   В диссертации неверные количества и размеры блоков. Опечатки — на стр. 7 и 39.

   Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ инварианты Жордана-Кронекера обязаны удовлетворять следующим свойствам:

   (a) Количество кронекеровых блоков равно $\operatorname{ind} \mathfrak{g}$.

   (b) Сумма размеров всех блоков равна $\dim \mathfrak{g}$.

   Указанные в диссертации неверные ответы не удовлетворяют этим свойствам.

3. Выбран неудачный способ указания размеров жордановых блоков. Размеры жордановых блоков должны быть сгруппированы по собственным значениям. В диссертации просто указываются размеры жордановых блоков.

   Почему нужно группировать жордановы блоки? Например, это не одно и то же — когда n жордановых 2×2 блоков имеют одно и то же собственное значение, и когда у них у всех разные собственные значения. В последнем случае собственные функции будут образовывать набор в биинволюции. А в первом случае — такого набора нет, будет только одна собственная функция.

   В диссертации для семимерных алгебр Ли не указано — для каких жордановых блоков совпадают собственные значения. Для остальных алгебр Ли эта информация содержится в теоремах в Главах 2, 3 и 4. Однако во введении при описании основных результатов на стр. 6-7 эта информация теряется.

4. В диссертации не делается отличий между вещественным и комплексным случаем. Проблема в том, что теорема Жордана-Кронекера выполнена над алгебраически замкнутым полем.

   Для вещественных чисел есть аналогичная теорема. Отличие вещественного от комплексного случая такое же, как для теоремы о жордановой нормальной форме — в вещественном случае возникают овеществлённые жордановы блоки, в которых комплексные числа заданы матрицами 2×2:

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \Lambda & E & & \\ & 0 & & & & \Lambda & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & E \\ & & & & & & & \Lambda \\ \hline -\Lambda & & & & & & & \\ -E & -\Lambda & & & & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -E & -\Lambda & & & & \end{array}\right) \quad B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & E & & & \\ & 0 & & & & E & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & E \\ \hline -E & & & & & & & \\ & -E & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -E & & & & \end{array}\right),$$

   где $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   - При комплексификации алгебры Ли все блоки из теоремы Жордана–Кронекера комплексифицируются. Их размеры и количество не меняются.
   - При овеществлении алгебры Ли из некоторых пар жордановых блоков могут возникнуть вещественные жордановы блоки. В остальном количество и размеры блоков не меняются.

   В диссертации рассматриваются вещественные простые алгебры Ли. Автоматически доказан аналогичный ответ в комплексном случае. Будет ли для других вещественных форм простых алгебр Ли (в случаях, когда есть жордановы блоки) такой же ответ — открытый вопрос.

   Также отметим, что в Главе 4 для $Bso(2k)$ и $Bso(2k+1)$ в качестве скалярного произведения берётся антидиагональная матрица $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$. Это не евклидово, а псевдоевклидово скалярное произведение. В вещественном случае алгебры будут $so(p,q)$, а не $so(n)$. Поэтому результат, видимо, нужно понимать над $\mathbb{C}$.

5. Опечатки в таблице для некоторых 7-мерных алгебр Ли:

   (a) Алгебра 2357A: должно быть x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 вместо x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

   (b) Алгебры 12457G, 12457I, 12457J и 12457N: должно быть x_4, x_5, x_6, x_7 вместо x_3, x_4, x_6, x_7.

   (c) Алгебры Ли 23457C, пропущен индекс в $\frac{1}{2}x^2$ (должно быть x_4).

   (d) Алгебры Ли 12357B, не опустил индекс $x5$.

6. Недосчитаны инварианты для алгебр Ли $\mathrm{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ когда $k < n$ и $n \nmid kl$.

(a) Для кронекеровых алгебр Ли, если инварианты независимы, и сумма их степеней равна $\frac{\dim\mathfrak{g}+\operatorname{ind}\mathfrak{g}}{2}$, то их степени равны индексам кронекеровых блоков (Следствие 1, стр. 16).

Отсюда мы немедленно получаем ответ в одном из неразобранных случаев:

Теорема 1. *Рассмотрим алгебру Ли* $\mathrm{sl}(n)+(\mathbb{R}^n)^k$, *в случае* $k<n$,

$$n = kq + r, \qquad r = 1 \quad \textit{или} \quad k-1.$$

Инварианты Жордана–Кронекера — это k кронекеровых блоков с индексами

$$\frac{\dim\mathfrak{g}+\operatorname{ind}\mathfrak{g}}{2\operatorname{ind}\mathfrak{g}} = \frac{(q+1)(n+r)}{2}.$$

Действительно, инварианты преставления известны (раздел 3.1.4, стр. 36) — это определители матриц вида

$$\left(L, Y^TL, \dots, (Y^T)^{q-1}L, \quad (Y^T)^q l_{i_1}, \dots, (Y^T)^q l_{i_r}\right),$$

где $l_{i_1},\dots,l_{i_r}$ — какие-то r различных столбцов матрицы L. Если $r=0,1$ или $r=k-1$, то они независимы, иначе они становятся зависимыми, и мы не можем так просто получить ответ. Для $\mathrm{gl}(n)$ эти функции будут полуинвариантами.

(b) Заметим, что при $k<n$ для $\mathrm{sl}(n)+(\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathrm{gl}(n)+(\mathbb{R}^n)^k$ в разобранных случаях кронекеровы индексы отличаются не более чем на 1. Проще говоря, индексы блоков суть $\dfrac{\dim\mathfrak{g}+\operatorname{ind}\mathfrak{g}}{2\operatorname{ind}\mathfrak{g}}$, округлённое до большего или меньшего целого. Можно высказать общую гипотезу.

Гипотеза 1. *Алгебры Ли* $\mathrm{sl}(n)+(\mathbb{R}^n)^k$ *и* $\mathrm{gl}(n)+(\mathbb{R}^n)^k$ *при* $k<n$ *и* $n\not\equiv 0 \mod k$ *кронекеровы, и их кронекеровы индексы отличаются не более чем на 1.*

7. В работе присутствуют неточности и опечатки. Например, алгебра Ли $\mathrm{sp}(n)$ иногда обозначается как $\mathrm{sp}(2n)$. Наибольшая концентрация опечаток — на стр. 23:

   (a) 1ое предложение. Перепутаны H и L: сказано, что l_i и h_i — столбцы H и L соответственно.

   (b) В формуле (2.2) в матрице должно быть $XYX^{-1}+V$ (знак плюс, а не минус), а ниже должно быть $\Psi_i = WL^TX^{-1}$ (матрица W, а не V).

   (c) Формула (2.3) и матрица выше, неправильные знаки у V^*.

Все эти замечания несущественны, допущенные опечатки легко исправляются, и не вляют на общую положительную оценку работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных Scopus, RSCI и Web of Science. Публикации удовлетворяют пункту 2.3 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Автореферат точно и полно отражает содержание диссертации. Результаты диссертации прошли апробацию на международных научных конференциях и ведущих российских семинарах.

Диссертация содержит решение задач, важных для симплектической и пуассоновой геометрии, теории групп и алгебр Ли, а также в приложениях в задачах механики и математической физики. Диссертация соответствует критериям, определённым пп. 2.1-2.5 “Положение о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова”, и оформлена согласно № 5, 6 “Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова”. Автор диссертации Ворушилов Константин Сергеевич заслуживает присуждение ему искомой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 (01.01.04) - Геометрия и топология.

Кандидат физико-математических наук Козлов И. К.

Подпись Козлова И.К. удостоверяю:

А.И. Шафаревич.