МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Быков Владимир Владиславович

Верхнепредельные ляпуновские характеристики линейных дифференциальных систем

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный консультант:	**Сергеев Игорь Николаевич**, д.ф.-м.н., профессор
Официальные оппоненты:	**Изобов Николай Алексеевич**, д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Беларуси, Институт математики Национальной академии наук Беларуси, главный научный сотрудник;
	Щепин Евгений Витальевич, д.ф.-м.н., член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, главный научный сотрудник;
	Фурсов Андрей Серафимович, д.ф.-м.н., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, профессор.

Защита диссертации состоится «29» июня 2022 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, строение 52, факультет ВМК, аудитория 685.

E-mail: `ilgova@cs.msu.ru`.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:

`https://istina.msu.ru/dissertations/453193649/`

Автореферат разослан «___» ________ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН — А. В. Ильин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Важным направлением качественной теории дифференциальных уравнений, основы которой были заложены ещё в работах А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова, является изучение характеристических показателей, введённых А. М. Ляпуновым в связи с исследованием устойчивости.

Развитие теории линейных систем привело к возникновению целого ряда характеристик асимптотического поведения их решений, а также характеристик, описывающих реакцию различных свойств системы на возмущения её коэффициентов, таких как показатели Боля, центральные показатели Винограда—Миллионщикова, сигма-показатели и экспоненциальные показатели Изобова, показатели Перрона, коэффициенты неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, частоты Сергеева (нулей, знаков и корней) и многие другие. Библиография в обзорах Н. А. Изобова[1,2] и его монографии[3] по теории показателей Ляпунова насчитывает несколько сотен наименований.

Направление в теории показателей Ляпунова, ставящее своей целью исследование зависимости от параметра асимптотических свойств и характеристик параметризованных семейств дифференциальных уравнений и систем, своим возникновением обязано В. М. Миллионщикову, начавшему систематические исследования по этой тематике серией работ[4]. Ему же принадлежит идея использовать теорию Бэра разрывных функций для описания такой зависимости. Эти работы В. М. Миллионщикова были продолжены и продолжаются учениками его научной школы И. Н. Сергеевым, О. И. Морозовым, В. Г. Агафоновым, В. Г. Феклиным, К. Е. Ширяевым, А. Н. Ветохиным, Ю. И. Дементьевым, Е. Е. Саловым, А. Ф. Рожиным и многими другими, а также представителями алмаатинской школы — М. И. Рахимбердиевым, Т. М. Алдибековым, А. М. Дауылбаевым, Т. И. Смирновым, А. О. Султанбековой и другими.

В тот же период времени (80-е годы прошлого столетия) в минской школе по асимптотической теории дифференциальных уравнений начали исследовать асимптотические свойства однопараметрических линейных дифференциальных систем как функции параметра. Эти исследования инициировала поставленная Ю. С. Богдановым задача о сохранении свойства правильности линейной дифференциальной системы после умножения её

[1] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Мат. анализ. / ВИНИТИ. – М., 1974. – Т. 12. – С. 71–146.

[2] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 12. – С. 2034–2055.

[3] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. – Мн.: БГУ, 2006. – 320 с.

[4] Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 8. – С. 1408–1416.

матрицы коэффициентов на ненулевое вещественное число. Как показал Н. А. Изобов, эта задача имеет отрицательное решение. Вследствие этого естественно возникает задача[5] полного описания совокупности множеств неправильности, т. е. значений параметра-множителя, при умножении на которые матрицы коэффициентов некоторой линейной системы последняя становится неправильной. Задачу Н. А. Изобова можно ставить для любого асимптотического свойства — например, для свойств типа устойчивости, и не только для семейств линейных дифференциальных систем с линейной зависимостью от параметра, но и для семейств общего вида с непрерывной зависимостью их коэффициентов от параметра. К тому же кругу исследований примыкает и поставленная В. И. Зубовым[6] задача об описании показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем с вещественным параметром-множителем как функций параметра. В направлении решения этих и родственных с ними задач ряд важных результатов получен Н. А. Изобовым, Е. А. Барабановым, Е. К. Макаровым, А. В. Липницким, С. Г. Красовским, А. Ф. Касабуцким, М. В. Карпуком и А. С. Войделевичем.

Таким образом, вопрос о характере зависимости асимптотических характеристик дифференциальных систем от их правых частей занимает центральное место в современной теории показателей Ляпунова.

Цели и задачи исследования. Основной целью диссертации является изучение свойств верхнепредельных ляпуновских характеристик на пространстве линейных систем с компактно-открытой или равномерной топологией с точки зрения дескриптивной теории функций. В исследовании делается акцент на отказе от требования ограниченности коэффициентов рассматриваемых систем на временно́й полуоси.

В работе поставлены и решены следующие задачи:

— построить семейство линейных дифференциальных систем с коэффициентами, непрерывно в равномерной топологии зависящими от параметра из метрического пространства, показатели Ляпунова которого совпадают с заданными функциями на этом пространстве (во всех случаях, когда это в принципе возможно);

— установить признаки принадлежности второму классу Бэра верхней и нижней границ подвижности верхнепредельных ляпуновских характеристик при возмущениях коэффициентов линейной системы, ограниченных заданной функцией;

— для каждой пары порядковых чисел, подчинённых естественным ограничениям, построить ляпуновскую характеристику, имеющую указанные наименьшие номера классов Бэра в компактно-открытой и равномер-

---

[5]Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 12. – С. 2037, задача 2.

[6]Зубов В.И. Колебания и волны. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1989. – С. 408, проблема 1.

ной топологиях;

— доказать, что в пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией каждый функционал первого класса Бэра представляется в виде поточечного предела от последовательности непрерывных функционалов с компактным носителем.

Объектом исследования являются пространство линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-непрерывными на временно́й полуоси коэффициентами, наделённое одной из двух топологий: компактно-открытой или равномерной, а также непрерывные параметрические семейства таких систем.

Предметом исследования являются свойства характеристик асимптотического поведения решений линейных систем, рассматриваемых как функционалы на пространстве систем, а также порождаемых ими функций параметра с точки зрения дескриптивной теории функций.

Методика исследования. При доказательстве утверждений в диссертации широко используются методы и результаты теории линейных дифференциальных систем, линейной алгебры, математического анализа, теории функций действительного переменного и общей топологии. В качестве специального метода применяется метод поворотов В.М. Миллионщикова.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются существенно новыми. Даны окончательные ответы на некоторые долгое время остававшиеся открытыми вопросы о характере зависимости от коэффициентов показателей Ляпунова и ряда других характеристик асимптотического поведения решений линейных дифференциальных систем. В частности, в работе:

1) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова об описании каждого из показателей Ляпунова параметрического семейства линейных дифференциальных систем, коэффициенты которых непрерывно зависят от параметра равномерно на временно́й полуоси (при условии ограниченности коэффициентов систем семейства и без него);

2) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова о наименьшем номере бэровского класса каждого из максимальных показателей линейной системы как функции параметра;

3) получено частичное решение задачи В. М. Миллионщикова о минимальных показателях: вычислен точный номер бэровского класса каждого из минимальных показателей линейной системы как функции параметра для семейства систем с ограниченной скоростью роста коэффициентов;

4) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова об одновременной достижимости максимальных показателей показателями Ляпунова для системы с неограниченными коэффициентами;

5) получено полное решение задачи В. М. Миллионщикова о наименьшем номере бэровского класса мажоранты (минимальной полунепрерывной сверху в равномерной топологии на пространстве линейных систем) каждого из условных показателей Боля как функции параметра;

6) получено полное решение задачи И. Н. Сергеева о совпадении класса Бэра и класса формул с одинаковым положительным номером.

Положения, выносимые на защиту.

1. Полное описание каждого из показателей Ляпунова параметрического семейства линейных дифференциальных систем, коэффициенты которых непрерывно зависят от параметра равномерно на временно́й полуоси (для систем с ограниченными и неограниченными коэффициентами).

2. Полное описание максимальных показателей непрерывного параметрического семейства линейных систем как функций параметра.

3. Принадлежность третьему классу Бэра минимальных показателей непрерывного параметрического семейства линейных систем для локально компактного метрического пространства параметров.

4. Верхнепредельность верхних сигма-показателей Изобова непрерывного параметрического семейства линейных систем.

5. Представимость всякого функционала m-го класса Бэра ($m \in \mathbb{N}$) на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией в виде m-кратного повторного предела от m-индексной последовательности непрерывных функционалов с компактным носителем.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть полезны специалистам, занимающимся качественной теорией дифференциальных уравнений, в частности, теорией показателей Ляпунова и её приложениями к вопросам устойчивости.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности “математика”.

Достоверность результатов обоснована строгими математическими доказательствами.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались:

— на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском государственном университете (сделано более 20 докладов по теме диссертации в 1999–2021 гг.);

— на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённой памяти И. Г. Петровского (Москва; май 2004 г., май 2007 г., май-июнь 2011 г., декабрь 2021 г.);

— на международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложения», посвящённой 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва; март–апрель 2009 г);

— на международной математической конференции «Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвящённой памяти профессора Ю. С. Богданова (Респ. Беларусь, Минск; декабрь 2010 г., декабрь 2015 г., июнь 2021 г.);

— на международной научной конференции «Научное наследие Владимира Михайловича Миллионщикова», посвящённой 75-летию со дня рождения В. М. Миллионщикова (Москва; декабрь 2014 г.);

— на международных научных конференциях по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2014» (Респ. Беларусь, Новополоцк; май 2014 г.), «Еругинские чтения – 2017» (Респ. Беларусь, Минск; май 2017 г.), «Еругинские чтения – 2018» (Респ. Беларусь, Гродно; май 2018 г.) и «Еругинские чтения – 2019» (Респ. Беларусь, Могилев; май 2019 г.);

— на Всероссийской математической конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвящённой памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск; июнь 2015 г. и июнь 2020 г.);

— на международных математических конференциях по качественной теории дифференциальных уравнений (Грузия, Тбилиси; декабрь 2016 г., декабрь 2017 г., декабрь 2018 г., декабрь 2019 г., декабрь 2020 г., декабрь 2021 г.);

— на международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп; октябрь 2017 г., октябрь 2021 г.);

— на IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики» (Нальчик; май 2018 г.);

— на международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвящённой 80-летию академика В. А. Садовничего (Москва; май 2019 г);

— на международной конференции «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), посвящённой 95-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского (Екатеринбург; сентябрь 2019 г.);

— на международной научной конференции «Качественная теория дифференциальных уравнений», посвящённой 80-летию со дня рождения В. М. Миллионщикова (Москва; ноябрь 2019 г.);

— на IV Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», посвящённой 95-летию со дня рождения чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича (Респ. Беларусь, Гродно; декабрь 2019 г.);

— на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль; июль 2020 г.);

— на XIII Белорусской математической конференции (Респ. Беларусь, Минск; ноябрь 2021 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 69 печатных работах, среди которых 17 статей в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК [1–17] (из них 12 без соавторов) и 52 публикации с тезисами выступлений на математических конференциях и семинарах.

Личный вклад автора. В диссертацию включены только результаты, полученные лично автором. В совместных работах [1, 10, 11, 13, 14] применяются методы, разработанные в настоящей диссертации её автором; результаты этих работ не включены в диссертацию и на защиту не выносятся. В совместной работе [1] автору диссертации принадлежат леммы 2–5, в работе [10] — следствия 1 и 2, в работе [11] — доказательства теорем 5 и 6, в работе [13] — теоремы 2 и 3, а в работе [14] – леммы 1–3 и следствие 1.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, перечня условных обозначений, семи глав, содержащих 29 разделов, заключения и списка цитируемой литературы. Полный объём диссертации составляет 252 страницы текста, из которых 27 страниц занимает библиографический список, содержащий 320 наименований (с учётом 69 публикаций соискателя).

Содержание работы

Во **введении** описывается предмет исследования, обосновывается актуальность темы диссертации и обсуждается степень разработанности рассматриваемых проблем. Определяются цели и задачи работы, а также формулируются её основные результаты.

В **первой главе** вводятся необходимые обозначения и приводятся известные факты об объектах исследования. В конце этой главы даётся обзор литературы по теме диссертации.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными функциями $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (которые мы отождествляем с соответствующими системами), а через $\mathcal{M}^n$ — его подмножество, состоящее из систем с ограниченными коэффициентами. Множество

$\widetilde{\mathcal{M}}^n$ наделим структурой линейного пространства над $\mathbb{R}$ с естественными для функций операциями сложения и умножения на число.

В теории показателей Ляпунова чаще всего используются две топологии на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$: *компактно-открытая,* задаваемая метрикой

$$\rho_C(A,B) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A(t)-B(t)|, 1/(t+1)\}, \quad A,B\in\widetilde{\mathcal{M}}^n,$$

и *равномерная,* задаваемая метрикой

$$\rho_U(A,B) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A(t)-B(t)|, 1\}, \quad A,B\in\widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Полученные топологические пространства условимся обозначать через $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ и $\widetilde{\mathcal{M}}^n_U$ соответственно, аналогичные обозначения будем использовать и для их подпространств.

Отметим, что показатели Ляпунова системы $A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$ могут принимать несобственные значения, т. е. являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}\equiv\mathbb{R}\sqcup\{-\infty,+\infty\}$, которую мы наделим стандартным порядком и порядковой топологией.

Пусть M — метрическое пространство. Для заданного $n\in\mathbb{N}$ рассмотрим семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{2}$$

с непрерывной матрицей коэффициентов $A(\cdot,\mu)$, зависящей от параметра $\mu\in M$. Зафиксировав $i=1,\ldots,n$ и поставив каждому $\mu\in M$ в соответствие i-й (в порядке нестрогого возрастания) показатель Ляпунова системы (2), получим функцию параметра $\lambda_i(\,\cdot\,;A)\colon M\to\overline{\mathbb{R}}$, которая называется i-м *показателем Ляпунова семейства* (2). Аналогично определяются и другие характеристики семейства (2).

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ класс семейств (2), для которых отображение $\mu\mapsto A(\,\cdot\,,\mu)$ непрерывно в равномерной топологии на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$, а через $\mathcal{U}^n(M)$ — его подкласс, состоящий из отображений, ограниченных по $t\in\mathbb{R}_+$ при каждом фиксированном $\mu\in M$ (т. е. задающих семейства систем с ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами). В дальнейшем будем отождествлять семейство (2) и задающее его отображение $A(\cdot,\cdot)$.

В. М. Миллионщиков поставил[7,8] задачу описания показателей Ляпунова семейства морфизмов метризованного векторного расслоения с точки зрения дескриптивной теории функций. Важными частными случаями этой весьма общей задачи являются задачи описания показателей Ляпу-

[7] Миллионщиков В.М. Формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Матем. заметки. – 1986. – Т. 39, вып. 1. – С. 29–51.

[8] Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова как функции параметра // Матем. сборник. – 1988. – Т. 137, № 3. – С. 364–380.

нова семейств из классов $\mathcal{U}^n(M)$ и $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$. Из полученных В. М. Миллионщиковым результатов[9], в частности, следует, что показатели Ляпунова любого семейства (2) из класса $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ принадлежат второму классу Бэра. Более того, если M полно, то в любой точке некоторого плотного G_δ-подмножества пространства M все показатели Ляпунова такого семейства полунепрерывны сверху.

М. И. Рахимбердиев для каждых $n \geq 2$ и $i = 1, \ldots, n$ построил[10] пример семейства из класса $\mathcal{U}^n([0,1])$, для которого i-й показатель Ляпунова является всюду разрывной функцией и, следовательно, не принадлежит первому классу Бэра, а А. Н. Ветохин в работе[11] усилил этот результат, указав пример семейства из того же класса, для которого множество точек полунепрерывности снизу i-го показателя Ляпунова пусто. А. Н. Ветохин развил результат М. И. Рахимбердиева и в другом отношении: для $n \geq 2$ он построил[12,13] такие пространство M и семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, для которых множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) < 0\}$ не является F_σ-множеством, а также пространство M и семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, для которых множество $\{\mu \in M : \lambda_i(\mu; A) \leq 0\}$ не является $G_{\delta\sigma}$-множеством.

Вторая глава диссертации посвящена главным образом решению указанных выше задач В. М. Миллионщикова. В п. 2.1.1 доказано утверждение, обобщающее цитированные результаты М. И. Рахимбердиева и А. Н. Ветохина и полностью решающее задачу В. М. Миллионщикова для случая ограниченных коэффициентов. Прежде чем его сформулировать, дадим следующее

Определение 1. Функцию $\varphi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, заданную на топологическом пространстве X, назовём *верхнепредельной*, если существует последовательность непрерывных функций $\varphi_k\colon X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\varphi(x) = \varlimsup_{k\to\infty} \varphi_k(x), \quad x \in X.$$

Теорема I (теорема 2.1). *Для любых чисел $n \geq 2$, $i = 1, \ldots, n$ и метрического пространства M функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ является i-м показателем Ляпунова некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$ тогда и только*

---

[9] Миллионщиков В.М. Формулы для показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. ин-та прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тб., 1987. – Т. 22. – С. 150–179.

[10] Рахимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1986. Т. 40, вып. 2. С. 925–931.

[11] Ветохин А.Н. Пустота множества точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 3. – С. 282–291.

[12] Ветохин А.Н. Лебеговские множества показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 849.

[13] Ветохин А.Н. Точный бэровский класс некоторых ляпуновских показателей на пространстве линейных систем с компактно-открытой и равномерной топологиями // Современные проблемы математики и механики. Том IX. Математика. Вып. 3. К 80-летию механико-математического факультета. Дифференциальные уравнения / Под ред. И.В. Асташовой и И.Н. Сергеева. – Т. 9. – Попечительский совет механико-математического факультета МГУ. – 2015. – С. 54–71.

тогда, когда она верхнепредельна и обладает непрерывными минорантой и мажорантой.

На основании этого результата в п. 2.1.2 устанавливается теорема о строении множеств точек полунепрерывности показателей Ляпунова семейств рассматриваемого класса, а в п. 2.1.3 — теоремы о строении их множеств значений и лебеговских множеств.

В п. 2.1.4 получено описание каждого отдельного показателя Ляпунова, а также их *спектра* $(\lambda_1(\cdot\,;A),\ldots,\lambda_n(\cdot\,;A))$ для семейств из класса $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$, а именно, установлена

Теорема II (следствие 2.5). *Для любых числа $n \geqslant 2$ и метрического пространства M функция $f\colon M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$ является спектром показателей Ляпунова некоторого семейства $A \in \widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ тогда и только тогда, когда её компоненты являются верхнепредельными функциями и удовлетворяют условию упорядоченности $f_1 \leq \ldots \leq f_n$.*

Теорема II полностью решает задачу В. М. Миллионщикова об описании показателей Ляпунова для параметрических семейств (2) из класса $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$.

В п. 2.2 рассматриваются различные определения классов Бэра в точке топологического пространства и устанавливаются теоремы о принадлежности показателей Ляпунова первому классу Бэра в точке $A \in \mathcal{M}_U^n$.

О. Перрон построил[14] пример, показывающий, что при $n \geq 2$ каждый из показателей Ляпунова, рассматриваемый как функционал на пространстве $\mathcal{M}_U^n$, разрывен. Более того, из этого примера следует, что ни один из указанных функционалов не является даже полунепрерывным. В частности, под действием малых возмущений коэффициентов устойчивая система может стать неустойчивой и наоборот. По этой причине важное значение приобретает изучение минимальной полунепрерывной сверху мажоранты $\overline{\lambda}_i$ и максимальной полунепрерывной снизу миноранты $\underline{\lambda}_i$ i-го $(i = 1,\ldots,n)$ показателя Ляпунова в равномерной топологии, называемых также максимальным[15] и минимальным[16] i-м показателем соответственно.

В докладе[17] В. М. Миллионщиков поставил задачу о наименьшем классе Бэра, которому принадлежит каждый из максимальных показателей линейной параметрической системы как функция параметра. Им же было установлено[18], что при выполнении некоторого дополнительного условия

[14] Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. – 1930. – Bd. 31, Hf. 4. – S. 761.

[15] Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 1983. Вып. 9. – С. 111–166.

[16] Изобов Н.А. Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 1954–1966.

[17] Миллионщиков В.М. Нерешенная задача о мажорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1991. Т. 27, № 8. – С. 1457.

[18] Миллионщиков В.М. Задача о мажорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1993. Т. 29, № 11. С. 2013.

на непрерывное отображение $A(\cdot,\cdot)$ (которому, в частности, удовлетворяют все отображения, ограниченные по $\mu \in M$ при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$) каждый из максимальных показателей как функция параметра принадлежит второму классу Бэра. Аналогичное утверждение вытекает из результата И. Н. Сергеева[19] в случае, когда при каждом значении параметра μ система (2) имеет ограниченные коэффициенты. То, что указанные функции параметра, вообще говоря, не принадлежат первому классу Бэра, установлено А. Н. Ветохиным[20]. Отметим, что формулы для вычисления максимальных показателей известны только в случае ограниченных коэффициентов системы (1).

Определение 2. Системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ называются *слабо ляпуновски эквивалентными*, если существуют фундаментальные матрицы $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ этих систем, такие, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(|X(t)Y^{-1}(t)| + |Y(t)X^{-1}(t)|) < \infty.$$

Определение 3. Фунционал $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ условимся называть *ляпуновской характеристикой* (или *слабо ляпуновским инвариантом*), если для любых слабо ляпуновски эквивалентных систем $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ выполнено равенство $\varphi(A) = \varphi(B)$.

В **третьей главе** разработаны методы доказательства принадлежности минимальной полунепрерывной сверху мажоранты $\overline{\varphi}$ и максимальной полунепрерывной снизу миноранты $\underline{\varphi}$ ляпуновской характеристики $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_U \to \overline{\mathbb{R}}$ второму и третьему классам Бэра соответственно в компактно-открытой топологии, исходя непосредственно из определений этих величин:

$$\overline{\varphi}(A) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\ \sup_{\rho_U(A,B)\le\varepsilon}\varphi(B), \quad \underline{\varphi}(A) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\ \inf_{\rho_U(A,B)\le\varepsilon}\varphi(B), \quad A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

В п. 3.1 с точки зрения классификации Бэра в компактно-открытой топологии на пространстве линейных систем изучается верхняя граница подвижности верхнепредельной ляпуновской характеристики при возмущениях, ограниченных заданной непрерывной функцией.

В п. 3.2 ряд известных результатов о максимальных показателях линейных дифференциальных систем с ограниченными на полуоси коэффициентами (таких, как их одновременная достижимость в классе бесконечно малых возмущений, принадлежность второму классу Бэра в компактно-открытой топологии и др.) перенесён на системы с неограниченными ко-

[19]Сергеев И.Н. Класс Бэра максимальных показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 11. – С. 1574.

[20]Ветохин А.Н. К бэровской классификации остаточных показателей // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 8. – С. 1039–1042.

эффициентами.

Следующая теорема, установленная в п. 3.2, полностью решает задачу В. М. Миллионщикова о классе Бэра максимальных показателей.

Теорема III (теорема 3.2). *Для любых числа $n \in \mathbb{N}$, топологического пространства M и непрерывного отображения $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ каждый из максимальных показателей является верхнепредельной функцией параметра и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

Теорема III вместе с результатами М. В. Карпука[21,22] даёт полное описание каждого из максимальных показателей как функции параметра.

Следующая теорема решает другую задачу В. М. Миллионщикова[23] — об одновременной достижимости максимальных показателей.

Теорема IV (теорема 3.4). *Для любых системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует система $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющая условиям*

$$\rho_U(A,B) < \varepsilon, \quad \lim_{t\to+\infty} |B(t) - A(t)| = 0, \quad \lambda_i(B) = \overline{\lambda}_i(A), \quad i = 1,\ldots,n.$$

В. М. Миллионщиковым была также поставлена[24] задача о наименьшем классе Бэра, которому принадлежит минимальный i-й ($i = 1,\ldots,n$) показатель семейства (2). Последняя равносильна задаче о наименьшем классе Бэра минимального i-го показателя как функционала на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$.

А. Н. Ветохин установил[25], что для любого $n \geq 2$ все минимальные показатели не принадлежат второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_C$. Из результатов Р. Э. Винограда[26,27] и В. М. Миллионщикова[28], вследствие установленной ими формулы вычисления величины $\underline{\lambda}_1(A)$ по матрице Коши системы A, следует, что младший минимальный показатель $\underline{\lambda}_1$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_C$, а значит, при $n \geq 2$ в силу результата А. Н. Ветохина — в точности третьему классу Бэра. И. Н. Серге-

[21] Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1332–1338.

[22] Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов обобщённых расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2016. – Т. 24, № 2. – С. 55–71.

[23] Миллионщиков В.М. Задача о мажорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1993. Т. 29, № 11. С. 2013.

[24] Миллионщиков В.М. Задачи о минорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1993. Т. 29, № 11. С. 2014–2015.

[25] Ветохин А.Н. Класс Бэра минимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 10. – С. 1313–1317.

[26] Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1957. – Т. 42, № 2. – С. 207–222.

[27] Виноград Р.Э. Оценка скачка характеристического показателя при малых возмущениях // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 3. – С. 459–461.

[28] Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей // Сиб. мат. журнал. – 1969. – Т. 10, № 1. – С. 99–104.

евым[29,30] на основании полученных им формул вычисления минимальных показателей системы по её матрице Коши была установлена принадлежность величин $\underline{\lambda}_n$ при $n = 3$ и $\underline{\lambda}_2$ для произвольного n третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_C^n$. Для произвольного n принадлежность третьему классу Бэра на том же пространстве старшего минимального показателя $\underline{\lambda}_n$ установлена В. В. Быковым[31], а остальных минимальных показателей — Е. Е. Саловым[32,33].

В п. 3.3 получено обобщение приведённых выше результатов.

Теорема V (теорема 3.6). *Для любых числа $n \in \mathbb{N}$ и непрерывной функции $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ сужение каждого из минимальных показателей на подпространство пространства $\widetilde{\mathcal{M}_C^n}$, состоящее из всех систем, удовлетворяющих условию $|A(t)| \leq f(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, принадлежит третьему классу Бэра.*

Из теоремы V в качестве следствия извлекается частичное решение задачи В. М. Миллионщикова о минимальных показателях непрерывного семейства (2) для случая, когда пространство параметров M метризуемо и локально компактно.

Уже упоминавшийся пример Перрона показывает, что показатели Ляпунова линейной системы не инвариантны относительно экспоненциально убывающих возмущений её коэффициентов. С другой стороны, для всякой системы с ограниченными коэффициентами инвариантность показателей Ляпунова имеет место относительно возмущений, убывающих быстрее некоторой (своей для каждой системы) экспоненты[34,35]. Естественно возникают задачи вычисления точных границ подвижности показателей Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях, а также описания свойств этих границ как функций параметра.

В **четвёртой главе** указанные границы изучаются с точки зрения дескриптивной теории функций, при этом от коэффициентов рассматриваемых систем не требуется ограниченности на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Определим следующие классы экспоненциально убывающих возмуще-

---

[29] Сергеев И.Н. Класс Бэра минимальных показателей трехмерных линейных систем // Успехи матем. наук. – 1995. – Т. 50, вып. 4. – С. 109.

[30] Сергеев И.Н. О классе Бэра миноранты одного из промежуточных показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 11. – С. 1572.

[31] Быков В.В. Некоторые вопросы теории показателей Ляпунова: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02; Моск. гос. ун-т. – М., 1998.

[32] Салов Е.Е. О наименьшем классе Бэра минорант промежуточных показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1571.

[33] Быков В.В., Салов Е.Е. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2003. – № 1. – С. 33–40.

[34] Богданов Ю.С. К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 104, № 6. – С. 813–814.

[35] Гробман Д.М. Характеристические показатели систем, близких к линейным // Матем. сборник. – 1952. – Т. 30, № 1. – С. 121–166.

ний:

$$\mathcal{E}^n_\sigma = \{Q \in \mathcal{M}^n : \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |Q(t)|e^{\sigma t} < \infty\}, \quad \hat{\mathcal{E}}^n_\sigma = \{Q \in \mathcal{M}^n : \lambda[Q] \le -\sigma\},$$

$$\mathcal{E}^n = \{Q \in \mathcal{M}^n : \lambda[Q] < 0\}, \text{ где } \lambda[Q] = \varlimsup_{t\to+\infty} \ln|Q(t)|^{1/t}.$$

Для каждого $\sigma > 0$ *верхними*[36] и *нижними*[37,38] *сигма-показателями Изобова* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ называются, соответственно, величины

$$\nabla_{\sigma,i}(A) = \sup_{Q\in\hat{\mathcal{E}}^n_\sigma} \lambda_i(A+Q), \quad \Delta_{\sigma,i}(A) = \inf_{Q\in\mathcal{E}^n_\sigma} \lambda_i(A+Q), \quad i = 1,\dots,n,$$

а её *верхними* и *нижними экспоненциальными показателями Изобова*[37] — величины

$$\nabla_i(A) = \sup_{Q\in\mathcal{E}^n} \lambda_i(A+Q), \quad \Delta_i(A) = \inf_{Q\in\mathcal{E}^n} \lambda_i(A+Q), \quad i = 1,\dots,n.$$

В работе[36] Н. А. Изобовым получена формула вычисления старшего верхнего сигма-показателя $\nabla_{n,\sigma}(A)$ системы A с ограниченными коэффициентами по её матрице Коши, а в работе[37] им же найдены аналогичные формулы для показателей $\nabla_n(A)$ и $\Delta_1(A)$. Относительно недавно А. С. Войделевичем получены[39] формулы для остальных верхних экспоненциальных показателей Изобова $\nabla_i(A)$, $i = 1,\dots,n-1$, системы $A \in \mathcal{M}^n$.

В. Г. Агафонов установил[40], что старший верхний экспоненциальный показатель Изобова ∇_n не принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_U$ и принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_C$. А. Н. Ветохин уточнил[41] эти результаты, показав, что при $n \ge 2$ этот показатель не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n_C$. Таким образом, функционал $\nabla_n\colon \mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$ принадлежит в точности третьему классу Бэра. Эти результаты обобщает следующая

Теорема VI (теорема 4.7). *Для любых чисел $n \ge 2$ и $i = 1,\dots,n$ функционал $\nabla_i\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит третьему классу Бэра, а его сужение на пространство $\mathcal{M}^n_C$ не принадлежит второму классу Бэра.*

[36] Изобов Н.А. О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 7. – С. 1186–1192.

[37] Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. – 1982. – Т. 26, № 1. – С. 5–8.

[38] Изобов Н.А. О свойствах младшего сигма-показателя линейной дифференциальной системы // Успехи мат. наук. – 1987. – Т. 42, № 4. С. 179.

[39] Войделевич А.С. Точные границы подвижности вверх показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях матриц коэффициентов // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1312–1324.

[40] Агафонов В.Г. О классе Бэра показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 6. – С. 1092–1093.

[41] Ветохин А.Н. К бэровской классификации сигма-показателя и старшего экспоненциального показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1302–1311.

Отметим, что полученное в диссертации доказательство принадлежности верхних экспоненциальных показателей Изобова третьему классу Бэра опирается непосредственно на их определение, поскольку какие-либо формулы их вычисления для систем с неограниченными коэффициентами не известны.

В работе[42] А. Н. Ветохиным также доказано, что старший верхний сигма-показатель Изобова $\nabla_{\sigma,n}\colon \mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$ для любого $\sigma > 0$ является верхнепредельным. В диссертации этот результат усиливает

Теорема VII (следствие 4.1). *Для любых чисел $n \geq 2$, $i = 1, \ldots, n$ и $\sigma > 0$ функционал $\nabla_{\sigma,i}\colon \widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ является верхнепредельным и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

Приведённая теорема вытекает из полученного в п. 4.1 диссертации полного описания лебеговских множеств верхних сигма-показателей Изобова как функций параметра для семейств (2), непрерывных в компактно-открытой топологии.

В. М. Миллонщиков установил[43,44], что младший нижний экспоненциальный показатель Изобова Δ_1 на пространстве $\mathcal{M}^n_C$ принадлежит второму классу Бэра. В работе[45] показано, что старший нижний экспоненциальный показатель Изобова Δ_n и для каждого $\sigma > 0$ старший нижний сигма-показатель Изобова $\Delta_{\sigma,n}$ также обладают этим свойством, а Е. Е. Салов распространил[46] эти результаты на остальные нижние экспоненциальные показатели и сигма-показатели Изобова (ещё и явно указав, что все перечисленные функционалы являются верхнепредельными).

В п. 4.2 диссертации установлена обобщающая эти результаты

Теорема VIII (следствие 4.2 и теорема 4.8). *Для любых чисел $n \geq 2$, $i = 1, \ldots, n$, $\sigma > 0$ и непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ сужение каждого из показателей $\Delta_{\sigma,i}$ и Δ_i на подпространство пространства $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$, состоящее из систем, удовлетворяющих условию $|A(t)| \leq f(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, является верхнепредельным и, в частности, принадлежит второму классу Бэра.*

В **пятой главе** рассматриваются вопросы бэровской классификации введённых В. М. Миллионщиковым условных и относительных показателей Боля линейных систем и локальных диффеоморфизмов риманова мно-

[42]Ветохин А.Н. К бэровской классификации сигма-показателя и старшего экспоненциального показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1302–1311.

[43]Миллионщиков В.М. Класс Бэра показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 11. – С. 2009.

[44]Миллионщиков В.М. Линейные системы, обобщенно приводимые к упорядоченно-диагональному виду // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 11. – С. 2020.

[45]Быков В.В. Некоторые вопросы теории показателей Ляпунова: автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.02; Моск. гос. ун-т. – М., 1998.

[46]Салов Е.Е. О свойстве верхне-предельности показателей Изобова // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 852.

гообразия. Основное изложение ведётся на языке семейств эндоморфизмов метризованного векторного расслоения. Получено усиление результата В. М. Миллионщикова о бэровской классификации относительных показателей Боля локальных диффеоморфизмов риманова многообразия и полностью решена его задача о бэровском классе мажорант условных показателей Боля линейных дифференциальных систем.

Шестая глава посвящена изучению следующего вопроса: можно ли, зная, какому классу Бэра принадлежит некоторая ляпуновская характеристика в равномерной топологии на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$, утверждать принадлежность этой характеристики какому-либо классу Бэра в компактно-открытой топологии на том же пространстве? Очевидно, наименьший номер класса, которому принадлежит произвольный функционал в равномерной топологии не превосходит аналогичного номера в компактно-открытой топологии. В диссертации установлено, что, вообще говоря, ничего, кроме этого, сказать нельзя.

Пусть $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n$. Будем говорить[47], что функционал $\varphi\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ имеет *компактный носитель*, если существует такое $T > 0$, что для любой пары функций $A, B \in \mathcal{M}$, совпадающих на отрезке $[0, T]$, выполнено равенство $\varphi(A) = \varphi(B)$. Отметим, что в докладе[47] функционалы с компактным носителем называются ограниченно-зависимыми.

В **седьмой главе** рассматривается вопрос о представлении функционала на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ в виде повторного предела от последовательности непрерывных функционалов с компактным носителем. Требование компактности носителей допредельных функционалов связано с желанием вычислять их значения, пользуясь информацией о системе лишь на конечных участках времени.

Следуя[47], определим по аналогии с классами Бэра *классы формул* функционалов на $\mathcal{M}$ по индукции следующим образом.

Нулевой класс формул состоит из непрерывных функционалов $\mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ с компактным носителем. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \bigsqcup \{0\}$ класс формул с номером $(m+1)$ состоит из функционалов $\mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$, представимых в виде поточечного предела от последовательности функционалов m-го класса.

И. Н. Сергеев показал[47], что если функционал $\widetilde{\mathcal{M}}^n_C \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит m-му классу Бэра ($m \in \mathbb{Z}_+$), то он принадлежит $(m+1)$-му классу формул и поставил вопрос о совпадении m-го класса Бэра и m-го класса формул при $m \geq 1$ (для $m = 0$ эти классы различаются). Ответ содержит

Теорема IX (теорема 7.1). *Для любых $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^n_C$ и $m \in \mathbb{N}$ m-й класс Бэра и m-й класс формул функционалов $\mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ совпадают между собой.*

Другими словами, любой функционал некоторого класса Бэра можно

[47]Сергеев И.Н. Бэровские классы формул для показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 12. – С. 2092–2093.

получить при помощи того же количества предельных переходов, отправляясь от непрерывных функционалов с компактным носителем.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли уменьшить количество предельных переходов в формуле, если разрешить фигурирующим в ней функционалам с компактным носителем быть разрывными?

Ответ оказывается, вообще говоря, отрицательным, даже в классе ляпуновских характеристик, как показывает следующая

Теорема X (теорема 7.3). *Для любого $m \in \mathbb{N}$ существует ляпуновская характеристика $\mathcal{M}^n_C \to \mathbb{R}$, принадлежащая $(m+1)$-му классу Бэра, но не представимая с помощью m предельных переходов от последовательности функционалов с компактным носителем.*

Приведённые результаты составляют основное содержание диссертации и опубликованы в работах [1] – [17] и тезисах докладов [18] – [69].

В заключении приводятся итоги выполненного исследования, рекомендации по использованию полученных результатов и перспективы дальнейшего развития темы.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за обсуждение работы и ценные замечания и Е. А. Барабанову за помощь и поддержку на всех этапах подготовки диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах Web of Science, Scopus, RSCI

1. Быков В.В., Салов Е.Е. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. (Scopus SJR: 0.123). – 2003. – № 1. – С. 33–40. – Перевод: Bykov V.V., Salov E.E. The Baire class of minorants of the Lyapunov exponents // Moscow Univ. Math. Bull. – 2003. – V. 58, № 1. – P. 36–43.

2. Bykov V.V. Local Baire classification of Lyapunov exponents // J. Math. Sci. (Scopus SJR: 0.146) – 2007. – V. 143, № 4. – P. 3217–3225.

3. Быков В.В. Некоторые свойства мажорант показателей Ляпунова систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.833). – 2014. – Т. 50, № 10. С. 1291–1301. – Перевод: Bykov V.V. Some properties of majorants of Lyapunov exponents for systems with unbounded coefficients // Differ. Equ. (IF WoS: 0.431) – 2014. – T. 50, № 10. C. 1279–1289.

4. Bykov V.V. Bohl exponents and Baire classes of functions // J. Math. Sci. (Scopus SJR: 0.268) – 2015. – V. 210, № 2. – P. 168–185.

5. Bykov V.V. On Baire class one functions on a product space // Topol. Appl. (IF WoS 0.377; Scopus SJR: 0.490). – 2016. – V. 199. – P. 55–62.

6. Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.882). – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 419–425. – Перевод: Bykov V.V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solutions of linear differential equations // Differ. Equ. (IF WoS: 0.371) – 2016. – V. 52, № 4. – P. 413–420.

7. Быков В.В. Строение множеств точек полунепрерывности показателей Ляпунова линейных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.954). – 2017. – Т. 53, № 4. – С. 441–445. – Перевод: Bykov V.V. Structure of the sets of points of semicontinuity for the Lyapunov exponents of linear systems continuously depending on a parameter in the uniform norm on the half-line // Differ. Equ. (IF WoS: 0.674). – 2017. – V. 53, № 4. – P. 433–438.

8. Быков В.В. О классах Бэра ляпуновских инвариантов // Мат. сборник (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.407) – 2017. – Т. 208, № 5. – С. 38–62. – Перевод: Bykov V.V. On Baire classes of Lyapunov invariants // Sb. Math. (IF WoS: 0.865). – 2017. – V. 208, № 5. – P. 620–643.

9. Быков В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.954). – 2017. – Т. 53, № 12. – С. 1579–1592. – Перевод: Bykov V.V. Functions determined by the Lyapunov exponents of families of linear differential systems continuously depending on the parameter uniformly on the half-line // Differ. Equ. (IF WoS: 0.674). – 2017. – V. 53, № 12. – P. 1529–1542.

10. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.969). – 2018. – Т. 54, № 12. – С. 1579–1588. – Перевод: Barabanov E.A., Bykov V.V., Karpuk M.V. Complete description of the Lyapunov spectra of families of linear differential systems whose dependence on the parameter is continuous uniformly on the time semiaxis // Differ. Equ. (IF WoS: 0.659). – 2018. – V. 54, № 12. – P. 1535–1544.

11. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем

как функции параметра // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.020). – 2019. – Т. 55, № 10. – С. 1307–1318. – Перевод: Barabanov E.A., Bykov V.V., Karpuk M.V. Complete description of the exponential stability index for linear parametric systems as a function of the parameter // Differ. Equ. (IF WoS: 0.677). – 2019. – V. 55, № 10. – P. 1263–1274.

12. Быков В.В. К задаче Миллионщикова о бэровском классе центральных показателей диффеоморфизмов // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.478). – 2019. – № 5. – С. 17–22. – Перевод: Bykov V.V. To Millionshchikov's Problem on the Baire Class of Central Exponents of Diffeomorphisms // Moscow Univ. Math. Bull (Scopus SJR: 0.200). – 2019. – V. 74, №. 5. – P. 189–194.

13. Барабанов Е.А., Быков В.В. Коэффициент неправильности Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси, как функция параметра // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.020). – 2019. – Т. 55, № 12. – С. 1587–1599. – Перевод: Barabanov E.A., Bykov V.V. Lyapunov irregularity coefficient as a function of the parameter for families of linear differential systems whose dependence on the parameter is continuous uniformly on the time half-line // Differ. Equ. (IF WoS: 0.677). – 2019. – V. 55, № 12. – P. 1531–1543.

14. Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН (RSCI; Scopus; WoS JCI: 0.19; ИФ РИНЦ: 0.366). – 2019. – Т. 25, № 4. – С. 31–43.

15. Быков В.В. О лебеговских множествах показателей Изобова линейных дифференциальных систем. I // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.067). – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 41–52. – Перевод: Bykov V.V. Lebesgue sets of Izobov exponents of linear differential systems. I // Differ. Equ. (IF WoS: 0.837). – 2020. – V. 56, № 1. – P. 39–50.

16. Быков В.В. О лебеговских множествах показателей Изобова линейных дифференциальных систем. II // Дифференц. уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.067). – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 162–174. – Перевод: Bykov V.V. Lebesgue sets of Izobov exponents of linear differential systems. II // Differ. Equ. (IF WoS: 0.837). – 2020. – V. 56, № 2. – P. 158–170.

17. Быков В.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Изв. РАН. Сер. матем. (RSCI). – 2020. –

Т. 84, № 6. – С. 3–22. – Перевод: Bykov V.V. Complete description of the Lyapunov spectra of continuous families of linear differential systems with unbounded coefficients // Izv. Math. (IF WoS: 1.189; Scopus SJR: 1.057). – 2020. – V. 84, № 6. – P. 1037–1055.

Иные публикации

18. Быков В.В. Классификация Бэра старшего нижнего σ-показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 11. – С. 1573.
19. Быков В.В. Классификация Бэра старшего нижнего показателя Изобова // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 854.
20. Быков В.В. Модификация определения класса Бэра показателя в точке // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1577.
21. Быков В.В. О классе Бэра показателей Ляпунова в точке // Междунар. конф., посв. 103-летию со дня рожд. И.Г. Петровского (XXI совм. засед. ММО и сем. им. И.Г. Петровского). Москва, 16–22 мая 2004 г. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – С. 41–42.
22. Быков В.В. О классе Бэра мажорант показателей Ляпунова линейных систем с неограниченными коэффициентами // Междунар. конф., посв. памяти И.Г. Петровского (XXII совм. засед. ММО и сем. им. И.Г. Петровского). Москва, 21–26 мая 2007 г. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2007. – С. 60–61.
23. Быков В.В. Бэровская классификация мажорант одного класса показателей линейных систем // Междунар. конф. «Современные проблемы математики, механики и их приложения», посв. 70-летию ректора МГУ акад. В.А. Садовничего. Москва, 30 марта – 2 апреля 2009 г. Материалы конференции. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – С. 130.
24. Быков В.В. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 11. – С. 1664.
25. Быков В.В. К задаче о мажорантах условных показателей Боля // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 903–904.
26. Быков В.В. Генеральные показатели и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 11. – С. 1666–1667.
27. Быков В.В. Типичное свойство грубой устойчивости линейной системы, зависящей от параметра // Междунар. матем. конф. «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям».

Минск, 7–10 декабря 2010 г. Тезисы докладов. – Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2010. – С. 53–54.

28. Быков В.В. Показатели Боля и классы функций Бэра // Междунар. конф., посв. 110-й годовщине И.Г. Петровского (XXIII совм. засед. ММО и сем. им. И.Г. Петровского). Москва, 30 мая–4 июня 2011 г. Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2011. – С. 162.

29. Быков В.В. К задаче В.М. Миллионщикова о генеральных показателях диффеоморфизмов // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 901–902.

30. Быков В.В. Условные центральные показатели и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1664–1665.

31. Быков В.В. Относительные мажоранты показателей Ляпунова и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 897–898.

32. Быков В.В. Формула для миноранты старшего показателя Ляпунова линейной системы / // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 6. – С. 812–813.

33. Быков В.В. Об одном свойстве мажорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1507.

34. Быков В.В. Некоторые свойства максимальных показателей Ляпунова // XVI Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2014): тез. докладов Междунар. науч. конф. Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. – Ч. 1. – Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2014. – С. 29–30.

35. Быков В.В. К задаче Миллионщикова о центральных показателях диффеоморфизмов // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 11. С. 1553.

36. Быков В.В. О классе Бэра верхних сигма-показателей Изобова линейных систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 818.

37. Быков В.В. Об одном свойстве показателей Ляпунова // Тез. докл. Всеросс. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посв. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 9 – 11 июня 2015 г. / Ижевск: Изд-во «Удмурдтский университет»; редкол.: А.С. Банников [и др.]. – Ижевск, 2015. – С. 38 – 40.

38. Быков В.В. Об одном свойстве старшего экспоненциального показателя Изобова линейной системы с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 11. – С. 1558–1559.

39. Быков В.В. Об одном свойстве старшего экспоненциального показателя Изобова системы с неограниченными коэффициентами // Междунар. матем. конф. «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 7–10 декабря 2015 г. – Ч. 1. – Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2015. – С. 19–20.

40. Быков В.В. Об одном свойстве старшего сигма-показателя Изобова линейной системы с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 6. – С. 852–853.

41. Быков В.В. О лебеговских множествах верхних показателей Изобова // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 11. – С. 1590–1591.

42. Быков В.В. On Baire classes of Lyapunov invariants // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2016. – P. 55–58.

43. Быков В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Еругинские чтения – 2017: тез. докл. XVII Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Минск, 16 – 20 мая 2017 г.: в 2 ч. / Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2017. – Ч. 1. – С. 23 – 24.

44. Быков В.В. О функциях, определяемых показателями Ляпунова семейств систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 850–851.

45. Быков В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Материалы II Междунар. науч. конф. «Осенние математические чтения в Адыгее». – Майкоп: Изд-во АГУ, 2017. – С. 47–51.

46. Быков В.В. Описание лебеговских множеств и множеств значений показателей Ляпунова семейств систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 11. – С. 1568.

47. Barabanov E.A., Karpuk M.V., Bykov V.V. Functions defined by n-tuples of the Lyapunov exponents of linear differential systems continuously

depending on the parameter uniformly on the semiaxis // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2017. – P. 16–19.

48. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. О равномерно ограниченных показателях Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем // XVIII Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2018): Тезисы докладов Междунар. науч. конф. Гродно, 15–18 мая 2018 г. – Т. 1. – Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2018. – С. 32–34.

49. Быков В.В. О лебеговских множествах нижних показателей Изобова // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 6. – С. 845–846.

50. Быков В.В. Полное описание лебеговских множеств верхних сигма-показателей Изобова // Актуальные проблемы прикладной математики: Материалы IV Междунар. научн. конф. – ИПМА КБНЦ РАН Нальчик, 2018. – С. 66.

51. Быков В.В. О бэровских классах ляпуновских инвариантов // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 11. – С. 1567–1569.

52. Barabanov E.A., Karpuk M.V., Bykov V.V. On dimensions of subspaces defined by Lyapunov exponents of families of linear differential systems // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2018. – P. 16 – 20.

53. Барабанов Е.А., Быков В.В. Обобщение примеров Перрона и Винограда неустойчивости показателей Ляпунова на линейные дифференциальные системы с параметрическими возмущениями // Современные проблемы математики и механики. Материалы междунар. конф., посв. 80-летию акад. РАН В.А. Садовничего. – Том I. – М: МАКС Пресс, 2019. – С. 220–223.

54. Барабанов Е.А., Быков В.В. Полное описание коэффициента неправильности Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем // XIX Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2019), материалы Междунар. науч. конф. Могилев, 14–17 мая, 2019 г. – Т. 1. – Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2019. – С. 28–29.

55. Быков В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси // XIX Междунар. науч. конф. по диф. уравн. (Еругинские чтения-2019), материалы Междунар. науч. конф. Могилев, 14–17 мая, 2019 г. – Т. 1. – Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2019. – С. 32–36.

56. Быков В.В. О бэровских классах обобщенно ляпуновских инвариантов // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 6. – С. 892–893.

57. Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, убывающих к нулю на бесконечности // Материалы Междунар. конф. «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), посв. 95-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. – Екатеринбург, 2019. – С. 48–53.

58. Барабанов Е.А., Быков В.В. Обобщение примеров Перрона и Винограда неустойчивости показателей Ляпунова на линейные дифференциальные системы с параметрическими возмущениями // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 11. – С. 1578–1579.

59. Быков В.В. Описание показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Е.А. (Респ. Беларусь, Гродно, 17–20 дек. 2019 г.) / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: В. И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2019. – С. 72–74.

60. Barabanov E.A., Bykov V.V. Generalization of Perron's and Vinograd's examples of Lyapunov exponents instability to linear differential systems with parametric perturbations // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2019. – P. 23 – 25.

61. Барабанов Е.А., Карпук М.В., Быков В.В. Потеря устойчивости в линейной системе с экспоненциально убывающим параметрическим возмущением // Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всеросс. конф. с междунар. участием, посвящённой памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 15–19 июня 2020 г.). – Ижевск, Изд. центр «Удмурдтский университет», 2020. – С. 37–38.

62. Быков В.В. Спектры показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Междунар. конф. по диф. уравн. и дин. сист. [Электронный ресурс]: тез. докл. / Суздаль, 3 – 8 июля 2020 г.; Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2020. – С. 38–39.

63. Барабанов Е.А., Карпук М.В., Быков В.В. Потеря устойчивости в линейной системе с экспоненциально убывающим параметрическим воз-

мущением // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 11. – С. 1563–1564.

64. Barabanov E.A., Bykov V.V. Description of the linear perron effect under parametric perturbations exponentially decaying at infinity // Int. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq.; edit.: I. Kiguradze [et. al.]. – Tbilisi, Georgia, 2020. – P. 27–30.

65. Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях системы с неограниченными коэффициентами // Междунар. матем. конф. «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посв. 100-летию со дня рождения проф. Ю.С. Богданова: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. – Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2021. – С. 19–21.

66. Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 6. – С. 851–853.

67. Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях системы с неограниченными коэффициентами // Материалы IV Междунар. науч. конф. «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 13–17 октября 2021 г.) – Майкоп, изд-во АГУ, 2021. – С. 155–157.

68. Быков В.В. Полное описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях системы с неограниченными коэффициентами // XIII Белорусская матем. конф.: материалы Междунар. научн. конф., Минск, 22–25 ноября 2021 г.: в 2 ч. / сост. В. В. Лепин; НАН Беларуси, Ин-т математики, Белорусский гос. ун-т. – Мн.: Беларуская навука, 2021. – Ч. 1. – С. 36–37.

69. Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание показателя Перрона линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами // Междунар. конф., посв. выдающемуся математику И.Г. Петровскому (24-е совм. засед. ММО и сем. им. И.Г. Петровского): Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2021. – С. 173–175.