МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Булинская Екатерина Владимировна

Вероятностно-геометрические свойства пространственного ветвящегося случайного блуждания

1.1.4— теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:	**Лифшиц Михаил Анатольевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор факультета математики и компьютерных наук Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Санкт-Петербургский государственный университет"
	Смородина Наталия Васильевна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории прикладных вероятностных и алгоритмических методов Федерального государственного бюджетного учреждения науки "Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук"
	Топчий Валентин Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики Омского филиала Федерального государственного бюджетного учреждения науки "Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук"

Защита диссертации состоится 13 сентября 2024 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д.1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3043.

Автореферат разослан   июля 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
доктор физико-математических наук   ВШер   В. Б. Шерстюков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная диссертация посвящена исследованию стохастических моделей распространения популяций (частиц, генов, особей) в пространстве с течением времени. Одна из первых детерминированных моделей такого рода была предложена в известной статье[1], где было выведено знаменитое КПП-уравнение. В последние 20 лет большое число публикаций, выполненных в ведущих научных центрах России и за рубежом, посвящено моделям, описывающим эволюцию популяций с помощью *ветвящихся случайных блужданий* (ВСБ) (см., например,[2],[3],[4]). Эти стохастические модели позволяют одновременно учитывать два механизма случайности. Один связан со случайными перемещениями частиц в пространстве, а другой позволяет описывать (случайные) процессы размножения и гибели частиц. Таким образом, ВСБ может рассматриваться как обобщение и случайного блуждания, и ветвящегося процесса – классических объектов теории вероятностей.

К настоящему времени предложено множество разнообразных моделей ВСБ, в которых используются различные виды ветвления и блуждания, причем в разных сочетаниях. Достаточно указать на труды В. А. Ватутина, М. А. Лифшица, С. А. Молчанова, Н. В. Смородиной, В. А. Топчия, Е. Б. Яровой, S. Albeverio, Ph. Carmona, J.-F. Le Gall, F. den Hollander, Y. Hu, B. Mallein, Z. Shi, O. Zeitouni и других ученых (см., например, [5], [6] и [7]). Родственные модели возникают в предположении, что частицы движутся непрерывно, а не совершают скачки. Непрерывным аналогом ВСБ служит *ветвящееся броуновское движение* (см., например, [8], [9] и [10]). Различные модели ВСБ представляют большой теоретический интерес и важны для различных приложений в биологии, эпидемиологии,

[1] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1(6), 1937, 1-16.

[2] Shi Z. *Branching Random Walks*. Springer, Cham, 2015, 136 pp.

[3] Brunet E., Le A.D., Mueller A.H., Munier S. How to generate the tip of branching random walks evolved to large times. *EPL*, 131(4), 2020, 1-5.

[4] Roy R. A branching random walk in the presence of a hard wall. *J. Appl. Probab.*, 61(1), 2024, 1-17.

[5] Лифшиц М.А. Циклическое поведение максимума сумм независимых величин. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 412, 2013, 207-214.

[6] Mallein B. Asymptotic of the maximal displacement in a branching random walk. *Graduate J. Math.*, 1, 2016, 92-104.

[7] Смородина Н.В., Яровая Е.Б. Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий. *Теория вероятн. и ее примен.*, 68(4), 2023, 779-795.

[8] Shiozawa Y. Maximal displacement and population growth for branching Brownian motions. *Illinois J. Math.*, 63(3), 2019, 353-402.

[9] Bovier A., Hartung L. Branching Brownian motion with self repulsion. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 24(3), 2023, 931-956.

[10] Berestycki J., Kim Y.H., Lubetzky E., Mallein B., Zeitouni O. The extremal point process of branching Brownian motion in $\mathbb{R}^d$. *Ann. Probab.*, 52(3), 2024, 955-982.

химической кинетике, статистической физике, теории гомополимеров, теории массового обслуживания и др. (см., например, статьи [11] и [12]). Таким образом, тематика диссертационной работы является весьма актуальной.

Результаты большинства работ, как правило, относятся к изучению пространственно-однородных ВСБ, в которых законы размножения и гибели частицы не зависят от ее местоположения. Однако особых методов исследования требуют модели ВСБ, в которых среди всех точек пространства есть конечное или счетное фиксированное множество так называемых источников размножения и гибели частиц (именуемых также источниками ветвления или катализаторами). Только попадая в точки множества катализаторов, частица может произвести потомков или погибнуть, а вне этого множества она совершает блуждание без ветвления. Такие модели называются *каталитическими ветвящимися случайными блужданиями* (КВСБ). Наличие даже единственного катализатора уже вызывает сложности в исследовании (см., например, [13],[14]). Диссертация посвящена анализу КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с произвольным конечным или периодическим счетным множеством катализаторов, некоторые аспекты которого изучались, например, в статьях [15], [16] и [17]. Непрерывный аналог КВСБ, называемый *каталитическим ветвящимся броуновским движением*, исследовался в работах [18] и [19]. Отметим также связь КВСБ с *каталитическими супер-процессами* (см., например, [20] и [21]), а также параболической задачей Андерсона (см., например, [22]). Интересно, что КВСБ может рассматриваться и как система массового обслуживания со случайным числом

---

[11] Bai T., Rousselin P. Branching random walks conditioned on particle numbers. *J. Stat. Phys.*, 185(3), 2021, 1-15.

[12] Chernousova E., Hryniv O., Molchanov S. Branching random walk in a random time-independent environment. *Math. Popul. Stud.*, 30(2), 2023, 73-94.

[13] Ватутин В.А., Топчий В.А. Каталитические ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с ветвлением в нуле. *Матем. тр.*, 14(2), 2011, 28-72.

[14] Rytova A., Yarovaya E. Survival analysis of particle populations in branching random walks. *Commun. Stat. Simul. Comput.*, 50(10), 2019, 3031-3045.

[15] Carmona Ph., Hu Y. The spread of a catalytic branching random walk. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 50(2), 2014, 327-351.

[16] Liu R. The spread speed of multiple catalytic branching random walks. *Acta Math. Appl. Sin., Eng. Ser.*, 39(2), 2023, 262-292.

[17] Платонова М.В., Рядовкин К.С. Ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с периодически расположенными источниками ветвления. *Теория вероятн. и ее примен.*, 64(2), 2019, 283-307.

[18] Бочаров С.С. Флуктуации крайней правой частицы каталитического ветвящегося броуновского движения. *Труды МИАН*, 316, 2022, 79-104.

[19] Nishimori Y. Limiting distributions for particles near the frontier of spatially inhomogeneous branching Brownian motions. *Acta Appl. Math.*, 184(1), 2023, 1-31.

[20] Mörters P., Vogt P. A construction of catalytic super-Brownian motion via collision local time. *Stoch. Proc. Appl.*, 115(1), 2005, 77-90.

[21] Neuman E., Schied A. Optimal portfolio liquidation in target zone models and catalytic superprocesses. *Finance Stoch.*, 20(2), 2016, 495-509.

[22] Koralov L., Vainberg B. Global limit theorem for parabolic equations with a potential. *SIAM J. Math. Anal.*, 54(2), 2022, 2097-2113.

независимых серверов. Это дает возможность широких приложений для устанавливаемых результатов, см. [23].

В процессе исследования КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ оказалось, что некоторые результаты автора диссертации справедливы, даже если случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d$ заменить на более общий процесс, управляющий перемещением частиц, например, на марковскую цепь с произвольным конечным или счетным пространством состояний. Соответствующая модель носит название *каталитического ветвящегося процесса* (КВП) и в такой общей постановке стала изучаться в работе [24].

Главное внимание в диссертации уделяется различным вероятностно-геометрическим аспектам асимптотического поведения фронта распространения популяции частиц. Выполнено целостное исследование взаимосвязанных сложных задач (в частности, для доказательства теоремы 15 потребовалось установить 14 лемм). С помощью развития вероятностно-аналитической техники в диссертации получен ряд неулучшаемых результатов, многие из которых носят приоритетный характер. К ним относится описание предельной формы фронта распространения надлежащим образом нормированного случайного облака частиц. При этом обнаружены новые эффекты, связанные с тяжестью распределения скачков перемещающихся частиц.

Можно сказать, что диссертация направлена на решение актуальных задач современной теории эволюции популяций в рамках стохастических моделей, которые сочетают размножение, гибель и перемещение частиц в неоднородной среде, содержащей источники катализа.

Целью работы является изучение асимптотического (при растущем времени) поведения общих и локальных численностей частиц в КВП с произвольным конечным числом катализаторов, установление предельных теорем в смысле сильной и слабой сходимости для фронта распространения популяции частиц в КВСБ по решетке любой размерности при различных предположениях о скорости убывания хвоста распределения скачка блуждания, а также решение других разнообразных задач, относящихся к исследованию этих и иных моделей ВСБ.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Проведена полная классификация КВП с произвольным конечным числом катализаторов, которая соответствует выполненному автором моментному анализу общих и локальных численностей частиц.

[23]Vatutin V.A., Topchii V.A., Yarovaya E.B. Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. *Theory Probab. Math. Statist.*, (69), 2004, 1-15.

[24]Döring L., Roberts M. Catalytic branching processes via spine techniques and renewal theory. In: Donati-Martin C., Lejay A., Rouault A. (Eds.) *Séminaire de Probabilités* XLV, *Lecture Notes in Math.*, 2078, Springer, Heidelberg, 2013, 305-322.

2. Доказаны предельные теоремы в сильной и слабой формах для нормированных общих и локальных численностей частиц в КВП с произвольным конечным числом катализаторов.
3. Найдены функции, нормирующие положения частиц в надкритическом КВСБ, для существования нетривиальной предельной формы фронта распространения популяции. Установлен детерминированный предел в смысле сходимости почти наверное для легких и умеренно тяжелых хвостов распределения скачка блуждания, а в случае тяжелых хвостов получен случайный предел в смысле слабой сходимости.
4. Выявлен характер флуктуаций нормированного семейства частиц в окрестности предельной формы фронта.
5. Разработаны методы вычислений вероятностей конечности времен достижения с запретами для марковских цепей с произвольным пространством состояний.
6. В случае надкритического КВСБ по целочисленной прямой доказана предельная теорема для момента первого достижения популяцией высокого уровня, а при исследовании критического и докритического КВСБ установлены предельные теоремы для максимума положений всех частиц, когда-либо существовавших в рамках изучаемого процесса.
7. Для докритического КВСБ с одним катализатором получено полное описание предельного поведения локальных численностей частиц, при условии их невырождения, в предположениях о конечной или бесконечной дисперсии числа потомков одной частицы.
8. Для надкритического ВСБ с бесконечным периодическим множеством катализаторов доказаны предельные теоремы о расстоянии Хаусдорфа между случайным нормированным облаком частиц и предельным детерминированным множеством в $\mathbb{R}^d$ отдельно в случаях одинаковых и различных характеристик катализаторов.

Научная новизна.

1. Впервые получена полная классификация КВП с произвольным конечным числом катализаторов, причем естественность ее выбора подтверждена моментным анализом, проведенным для общих и локальных численностей частиц.
2. Впервые доказаны сильные предельные теоремы для фронта распространения КВСБ в многомерной постановке, причем исследованы все случаи: легкие, умеренно тяжелые и тяжелые хвосты распределения скачка блуждания.
3. Выполнено оригинальное исследование скорости распространения популяции частиц в ВСБ с бесконечным периодическим множеством катализаторов, причем результаты сформулированы в виде сильных предельных теорем для расстояния Хаусдорфа между

случайным множеством нормированных положений частиц и предельным детерминированным множеством.

Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны специалистам Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Математического института имени В. А. Стеклова РАН, Института математики имени С. Л. Соболева СО РАН и других учебных и научных организаций. Установленные результаты могут отражаться в специальных курсах современной теории случайных процессов.

Методология и методы исследования. Для доказательства выносимых на защиту результатов использовался разнообразный вероятностный и аналитический аппарат. А именно, потребовалось задать вспомогательные многотипные ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса с финальным типом частиц, ввести времена достижения с запретами для марковских цепей, построить многотипные марковские ветвящиеся процессы и вспомогательное пространственно-однородное общее ВСБ. Использовались теория восстановления и теория больших уклонений, мартингальная замена меры и метод каплинга, преобразования Лапласа и Лежандра–Фенхеля, выпуклый анализ и спинальная техника (так называемая лемма "от многого к малому", т.е. "many-to-few"), представление комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр и тауберовы теоремы, результаты о связи между дробными моментами случайных величин и дробными производными их преобразований Лапласа, наряду с анализом решений систем нелинейных интегральных уравнений.

Достоверность полученных результатов обеспечивается полными доказательствами, опубликованными в рецензируемых журналах. Результаты находятся в соответствии с утверждениями, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты диссертации прошли всестороннюю апробацию. Следует отметить, что в 2022 году автор диссертации стала победителем Первого Всероссийского конкурса молодых математиков России в номинации «молодые ученые в возрасте до 35 лет» (жюри конкурса возглавлял лауреат Филдсовской медали профессор А. Ю. Окуньков). На конкурс выдвигался цикл статей без соавторов (общий объем представленных на конкурс статей примерно 200 журнальных страниц), написанных и опубликованных после защиты кандидатской диссертации. Эти работы составили основу данной диссертации.

Кроме того, основные результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах.

1. Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (2023), руководитель академик РАН А. Н. Ширяев.
2. Семинар отдела теории вероятностей Математического института им. В. А. Стеклова (2020), руководитель академик РАН А. С. Холево.
3. Городской семинар по теории вероятностей и математической статистике ПОМИ РАН (2019, 2014), руководитель академик РАН И. А. Ибрагимов.
4. Общемосковский научный семинар “Спектральная теория дифференциальных операторов” МГУ им. М. В. Ломоносова (2019), руководитель академик РАН В. А. Садовничий.
5. Семинар Добрушинской лаборатории Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН (2019), руководитель профессор М. Л. Бланк.

Результаты диссертации прошли апробацию на следующих конференциях.

1. Международная конференция “Математика в созвездии наук”, посвященная юбилею ректора МГУ академика РАН В. А. Садовничего, 1-2 апреля 2024, Москва, Россия.
2. Ломоносовские чтения 2024, МГУ им. М.В. Ломоносова, 20 марта-3 апреля 2024.
3. Конференция по теории ветвящихся процессов и дискретной математике, посвященная 100-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Б. А. Севастьянова, 3 октября 2023, Москва, МИАН, Россия.
4. International conference “Branching Processes and their Applications”, September 18-22, 2023, Tashkent, Samarkand, Uzbekistan.
5. International conference “A Perpetual Search: Mathematics, Physics, Life”. Conference dedicated to the 85-th Anniversary of Professor V. A. Malyshev (1938-2022), June 26-30, 2023, Moscow, Russia.
6. The 20th International conference “ASMDA 2023” (Applied Stochastic Models and Data Analysis), June 6-9, 2023, Heraklion, Crete, Greece.
7. International conference “Limit Theorems of Probability Theory and Mathematical Statistics”, September 26-28, 2022, Tashkent, Uzbekistan.
8. International conference “Branching processes, random walks and probability on discrete structures”, June 21-24, 2022, Moscow, Russia.
9. The 19th International conference “ASMDA 2021” (Applied Stochastic Models and Data Analysis), June 1-4, 2021, Athens, Greece.
10. The 5th International workshop on branching processes and their applications, April 6-22, 2021, Badajoz, Spain.
11. International conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”, February 20-21, 2021, Tashkent, Uzbekistan.

12. Applied Probability Workshop 2020, August 26-28, 2020, Mathematical Center in Academgorodok, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
13. The 3rd BRICS Mathematics Conference, June 21-26, 2019, Innopolis, Russia.
14. The 2nd International Conference on Mathematics and Statistics, July 8-10, 2019, Prague, Czech Republic.
15. Понтрягинские чтения XXX, 3-9 мая, 2019, Воронеж, Россия.
16. International conference "Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications" – ACMPT-2017, October 23-28, 2017, Moscow, Russia.
17. International Workshop "Probability, Analysis and Geometry", September 2-6, 2013, Ulm, Germany.
18. European Meeting of Statisticians, July 20-25, 2013, Budapest, Hungary.
19. Russian-Chinese Seminar on Asymptotic Methods in Probability Theory and Mathematical Statistics, June 10-14, 2013, St. Petersburg, Russia.
20. The 7th International Workshop on Simulation, May 21-25, 2013, Rimini, Italy.

Публикации и личный вклад автора. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно и изложены в 15 статьях без соавторов, 15 из которых ([1]–[15]) опубликованы в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК (индексируемых в базах данных Web of Science, SCOPUS или РИНЦ).

Соответствие паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 — "Теория вероятностей и математическая статистика" (физико-математические науки) по направлениям "6. Предельные теоремы", "7. Стохастические процессы (точечные, гауссовские, мартингалы и др.)" и "10. Марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели".

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет **238** страниц, включая **6** рисунков. Список литературы содержит **170** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых по теме диссертационной работы, приводится обзор научной литературы в рассматриваемой области, формулируются основные цели исследования, описываются решаемые автором задачи, объясняется научная новизна и практическая значимость представленной работы.

Первая глава посвящена исследованию каталитических ветвящихся процессов (КВП). Результаты этой главы установлены в работах автора [2], [3] и [4]. Напомним, что теория ветвящихся процессов представляет собой классический раздел теории вероятностей (см., например, известные монографии [25] и [26]). Его возникновение восходит к середине XIX века, когда Ф. Гальтон и Г. В. Ватсон предложили модель, объясняющую вырождение фамилий. В рамках этой модели появился простейший ветвящийся процесс, называемый процессом Гальтона–Ватсона (в современной литературе также используется термин "процесс Бьенеме–Гальтона–Ватсона", поскольку согласно[27] И. Ж. Бьенеме был первым, кто рассмотрел задачу вырождения популяции и дал ее верное решение для определенной дискретной модели). Термин "ветвящийся процесс" был введен А. Н. Колмогоровым в статье[28]. Оказалось, что величина вероятности вырождения, а также средний размер популяции существенно зависят от того, является ли среднее число потомков представителя популяции большим, равным или меньшим единицы. Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с таким средним числом потомков называется соответственно надкритическим, критическим или докритическим. Только для надкритического процесса вероятность вырождения меньше единицы, а средний размер популяции стремится к бесконечности с ростом времени. Поэтому после решения задачи о нахождении вероятности вырождения возникает вопрос, как быстро разрастается популяция в случае ее выживания. Ответ на него дают предельные теоремы для численности популяции. Результаты, относящиеся к процессу Гальтона–Ватсона, содержатся, например, в книге[29], разделы 1–6 и 9.

В диссертационной работе рассматривается более сложная модель, чем процесс Гальтона–Ватсона, а именно, КВП с произвольным конечным числом центров катализа. Ее особенностью является возможность для представителей популяции (которые в дальнейшем называются частицами) не только оставлять потомков, но и перемещаться согласно марковской цепи с произвольным пространством состояний. Кроме того, предполагается, что частицы производят потомков исключительно в присутствии катализаторов, которые расположены в конечном подмножестве состояний марковской цепи. Для КВП естественно ставить вопрос не только о глобальном вырождении популяции, но и о локальном вырождении, а

[25]Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы.* Москва, Наука, 1971, 436 с.

[26]Kimmel M., Axelrod D. *Branching Processes in Biology.* Springer, New York, 2015, 2nd ed., 300 pp.

[27]Heyde C.C., Seneta E. *I. J. Bienayme. Statistical Theory Anticipated.* Springer, New York, 1977, 186 pp.

[28]Колмогоров А.Н., Дмитриев Н.А. Ветвящиеся случайные процессы. *Докл. АН СССР*, 56(1), 1947, 7-10.

[29]Ватутин В.А. *Ветвящиеся процессы и их применения.* Лекц. курсы НОЦ, **8**, Москва, МИАН, 2008, 108 с.

также изучать асимптотическое поведение общих и локальных численностей частиц. Решению задач о классификации КВП на надкритический, критический и докритический процессы, об асимптотическом по времени поведении средних общих и локальных численностей частиц, о вероятностях локального и глобального вырождения КВП, а также предельным теоремам для общих и локальных численностей частиц в КВП в смысле сильной и слабой сходимости посвящена основная часть главы 1. При этом для введения классификации КВП потребовалось развить в начале главы 1 аппарат времен достижения с запретами для марковских цепей, основы которого заложены в [30] и [31]. Предложенная классификация основана на перроновом корне матрицы, введенной автором, и ее элементы явно выражаются через вероятности конечности времен достижения с запретами.

Дадим описание КВП. В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые случайные объекты определены на некотором полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$.

Пусть в момент времени $t = 0$ имеется одна частица, движение которой по некоторому конечному или счетному множеству $\mathcal{S}$ задается марковской цепью $\eta = \{\eta(t),\ t \geq 0\}$ с непрерывным временем и инфинитезимальной матрицей $Q = (q(x,y))_{x,y\in\mathcal{S}}$. Основные определения теории марковских цепей см., например, в книге[32]. Будем считать, что марковская цепь η является неприводимой, а матрица Q консервативна (другими словами, $\sum_{y\in\mathcal{S}} q(x,y) = 0$, где $q(x,y) \geq 0$ при $x \neq y$ и $q(x,x) \in (-\infty,0)$ для любого $x \in \mathcal{S}$). Когда частица достигает конечного множества катализаторов $W = \{w_1,\ldots,w_N\} \subset \mathcal{S}$, скажем, в точке w_k, она проводит там случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $\beta_k > 0$. Затем частица либо гибнет, либо покидает точку w_k соответственно с вероятностями α_k и $1-\alpha_k$ $(0 \leq \alpha_k < 1)$. Если частица погибает (в точке w_k), то в момент гибели она замещается случайным числом $\xi_k \geq 0$ потомков, расположенных в той же точке w_k. Если частица покидает w_k, то она совершает скачок в точку $y \neq w_k$ с вероятностью $-q(w_k,y)q(w_k,w_k)^{-1}$ и продолжает движение согласно динамике, задаваемой марковской цепью η, до следующего попадания во множество катализаторов W. Все новорожденные частицы ведут себя как независимые копии родительской частицы и эволюционируют независимо от других частиц.

Обозначим $f_k(s) := \mathsf{E}s^{\xi_k}$, $s \in [0,1]$, вероятностную производящую функцию случайной величины ξ_k, $k = 1,\ldots,N$. Будем придерживаться стандартного предположения, что существует конечная производная $f_k'(1)$, т.е. $\mathsf{E}\xi_k < \infty$ для любого $k = 1,\ldots,N$.

[30] Чжун К.Л. *Однородные цепи Маркова.* Мир, Москва, 1964, 429 стр.

[31] Зубков А.М. Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения. *Матем. сб.*, 151(4), 1979, 491-532.

[32] Brémaud P. *Markov chains: Gibbs Fields, Monte-Carlo Simulation, and Queues.* Springer, New York, 1999, 444 pp.

Пусть $\mu(t)$ является общим числом частиц, существующих в КВП в момент $t \geq 0$. Аналогично определим локальные численности $\mu(t;y)$ как количества частиц, расположенных в различных точках $y \in \mathcal{S}$ в момент t.

Теперь для введения классификации КВП потребуется напомнить определение времени достижения с запретами для марковской цепи (без ветвления), см., например, монографию[30], гл. 2, раздел 11. Для заданной выше марковской цепи η и $x \in \mathcal{S}$ положим

$$\tau_x := \mathbb{I}\{\eta(0) = x\} \inf\{t \geq 0 : \eta(t) \neq x\},$$

где $\mathbb{I}\{B\}$ – индикатор множества B. Момент остановки τ_x (по отношению к естественной фильтрации процесса η) – это *момент первого выхода из состояния* x и $\mathsf{P}_x(\tau_x \leq t) = 1 - e^{q(x,x)t}$, $t \geq 0$, (см., например, теорему 5 в книге[30], гл. 2, раздел 5), где индекс x обозначает стартовую точку марковской цепи или КВП (в зависимости от контекста). Для произвольного, возможно пустого, множества $H \subset \mathcal{S}$ ("$\subset$" всегда означает "$\subseteq$"), именуемого далее *множеством запретов*, и для $t \geq 0$ пусть

$$_H\tau_{x,y} := \mathbb{I}\{\eta(0) = x\} \inf\{t \geq \tau_x : \eta(t) = y, \eta(u) \notin H, \tau_x < u < t\}, \quad x,y \in \mathcal{S},$$

где, как обычно, предполагается, что $\inf\{t \in \varnothing\} = \infty$. Марковский момент $_H\tau_{x,y}$ – это *момент первого достижения состояния* y *при старте из состояния* x *с запретом на множество* H, если $x \neq y$, и *момент первого возвращения в состояние* x *с запретом на множество* H, если $x = y$. Пусть $_HF_{x,y}(t) := \mathsf{P}_x(_H\tau_{x,y} \leq t)$ и $F_{x,y}(t) := \mathsf{P}_x(\tau_{x,y} \leq t)$, $t \geq 0$, суть (несобственные) функции распределения соответственно случайных величин $_H\tau_{x,y}$ и $\tau_{x,y} := {}_\varnothing\tau_{x,y}$.

В дополнение к $_H\tau_{x,y}$ определим время достижения состояния y с запретом на множество H *после выхода из стартового состояния* x как

$$_H\overline{\tau}_{x,y} := \mathbb{I}\{\eta(0) = x\} \inf\{t \geq 0 : \eta(t + \tau_x) = y, \eta(u) \notin H, \tau_x < u < t + \tau_x\}.$$

Очевидно, $_H\tau_{x,y} = \tau_x + {}_H\overline{\tau}_{x,y}$. Более того, в силу строго марковского свойства цепи η случайные величины τ_x и $_H\overline{\tau}_{x,y}$ независимы. Следовательно, учитывая формулу свертки и выражение для $\mathsf{P}_x(\tau_x \leq t)$, получаем

$$_HF_{x,y}(t) = \int_{0-}^{t} \left(1 - e^{q(x,x)(t-u)}\right) d\,_H\overline{F}_{x,y}(u),$$

где $_H\overline{F}_{x,y}(t) := \mathsf{P}_x\left(_H\overline{\tau}_{x,y} \leq t\right)$, $t \geq 0$. Поэтому $_H\overline{F}_{x,y}(\infty) = {}_HF_{x,y}(\infty)$ при любых $x,y \in \mathcal{S}$, $H \subset \mathcal{S}$, где $P_{x,y}(\infty) := \lim_{t\to\infty} P_{x,y}(t)$ для несобственной функции распределения $P_{x,y}(t)$, $t \geq 0$.

Теперь вернемся к КВП с N катализаторами. Автором диссертации предложена следующая классификация КВП.

Определение 1. *КВП называется надкритическим, критическим или докритическим, если для перронова корня $\rho(D)$ матрицы D выполнено соответственно $\rho(D) > 1$, $\rho(D) = 1$ или $\rho(D) < 1$, где элементы неразложимой матрицы D размера $N \times N$ задаются формулой*

$$d_{i,j} = \delta_{i,j}\, \alpha_i f_i'(1) + (1-\alpha_i)\,{}_{W_j}\overline{F}_{w_i,w_j}(\infty), \quad i,j = 1,\ldots,N.$$

Матрица D в определении 1 является неразложимой в силу неприводимости марковской цепи η. Напомним, что перронов корень такой матрицы – это ее положительное собственное значение, которое превосходит модули всех остальных собственных значений (см., например, монографию[33], гл. 1, раздел 4).

Таким образом, в определении матрицы D, отвечающей за классификацию КВП, используются значения ${}_{W_j}\overline{F}_{w_i,w_j}(\infty)$, $i,j = 1,\ldots,N$. Эти значения вычисляются для марковской цепи η, управляющей перемещением частиц в КВП, и представляют собой вероятности достижения катализатора w_j раньше остальных катализаторов, образующих множество $W_j := W \setminus \{w_j\}$, мощности $N-1$, при старте из катализатора w_i. Способы вычисления этих вероятностей описываются в теоремах 1–3 раздела 1.1 главы 1.

Предложенная в диссертации классификация базируется на построении вспомогательного ветвящегося процесса Беллмана–Харриса с $N^2 + N + 1$ типом частиц. Для изучаемых процессов можно ввести так называемый мальтусовский параметр ν, который, как показано в теореме 4, приводимой ниже, отвечает за скорость экспоненциального роста средних общих и локальных численностей частиц. А именно, параметр ν определяется как единственный корень уравнения $\rho(D(\nu)) = 1$, где матричная функция $D(\lambda) = (d_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^N$, $\lambda \geq 0$, имеет элементы

$$d_{i,j}(\lambda) := \delta_{i,j}\, \alpha_i f_i'(1)\check{G}_i(\lambda) + (1-\alpha_i)\check{G}_i(\lambda)\,{}_{W_j}\check{\overline{F}}_{w_i,w_j}(\lambda),$$

а $\check{G}_i(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, и ${}_{W_j}\check{\overline{F}}_{w_i,w_j}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, обозначают соответственно преобразования Лапласа функций $G_i(t) := 1 - e^{-\beta_i t}$, $t \geq 0$, $i = 1,\ldots,N$, и ${}_{W_j}\overline{F}_{w_i,w_j}(t)$, $t \geq 0$. Нетрудно видеть, что $D = D(0)$.

Естественность введенной классификации подтверждается следующей теоремой для n-х факториальных моментов общих и локальных численностей частиц, т.е. для $M_n(t;x) := \mathsf{E}_x \mu(t)(\mu(t)-1)\ldots(\mu(t)-n+1)$ и $m_n(t;x,y) := \mathsf{E}_x \mu(t;y)(\mu(t;y)-1)\ldots(\mu(t;y)-n+1)$.

Теорема 4. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$, для которого $\mathsf{E}\xi_i^n < \infty$ при всех $i = 1,\ldots,N$, функции $m_n(t;x,y)$ и $M_n(t;x)$ ограничены на произвольном*

---

[33] Seneta E. *Non-negative Matrices and Markov Chains.* Springer, New York, 2006, 2nd ed., 279 pp.

конечном интервале из $[0,\infty)$ *при любых фиксированных* $x,y \in \mathcal{S}$. *Более того, асимптотическое поведение* $m_n(t;x,y)$ *и* $M_n(t;x)$ *при* $t \to \infty$ *зависит существенно от класса КВП и описывается следующим образом.*

1. *Если* $\rho(D) > 1$, *то* $\nu > 0$ *и*

$$\begin{aligned} m_n(t;x,y) &= a_n(x,y)e^{n\nu t} + o\left(e^{n\nu t}\right), \\ M_n(t;x) &= A_n(x)e^{n\nu t} + o\left(e^{n\nu t}\right), \quad t \to \infty, \end{aligned}$$

   где функции $a_n(x,y)$ *и* $A_n(x)$, $x,y \in \mathcal{S}$, *строго положительны.*

2. *Если* $\rho(D) = 1$, *то*

$$\begin{aligned} m_n(t;x,y) &= b_n(x,y)t^{n-1} + o\left(t^{n-1}\right), \\ M_n(t;x) &= B_n(x)t^{2n-1} + o\left(t^{2n-1}\right), \quad t \to \infty, \end{aligned}$$

   где функция $b_n(x,y)$ *строго положительна при всех значениях* $x,y \in \mathcal{S}$, *если и только если* $\int_0^\infty u\, d_{W_j}\overline{F}_{w_i,w_j}(u) < \infty$ *при любых* $i,j = 1,\ldots,N$ *и, дополнительно, в случае возвратной цепи* η, *когда* $n \geq 2$, *верно* $\sum_{i=1}^N \alpha_i\,|f_i(s) - s| > 0$ *для некоторого* $s \in [0,1)$. *Далее, функция* $B_n(x)$ *строго положительна для любого* $x \in \mathcal{S}$ *тогда и только тогда, когда марковская цепь* η *невозвратна и* $\int_0^\infty u\, d_{W_j}\overline{F}_{w_i,w_j}(u) < \infty$ *при всех* $i,j = 1,\ldots,N$. *Иначе соответственно* $b_n(\cdot,\cdot) \equiv 0$ *и* $B_n(\cdot) \equiv 0$.

3. *Если* $\rho(D) < 1$, *то*

$$\begin{aligned} m_n(t;x,y) &= o(1), \\ M_n(t;x) &= C_n(x) + o(1), \quad t \to \infty, \end{aligned}$$

   где функция $C_n(x)$ *строго положительна для каждого* $x \in \mathcal{S}$ *тогда и только тогда, когда марковская цепь* η *невозвратна. Иначе* $C_n(\cdot) \equiv 0$.

Эта теорема обобщает теоремы 4.1, 4.2 из статьи[34] и теорему 1 из[24], а также некоторые утверждения теоремы 2 из статьи[35]. Отметим, что для всех функций $a_n(\cdot,\cdot)$, $A_n(\cdot)$, $b_n(\cdot,\cdot)$, $B_n(\cdot)$, $C_n(\cdot)$, возникающих в теореме 4, в диссертации представлены явные формулы. Таким образом, показано, что рост численностей частиц имеет различный характер для введенных в диссертации классов КВП.

В качестве еще одного важного результата главы 1 приведем теорему о сходимости нормированных общих и локальных численностей частиц в надкритическом КВП с N катализаторами.

---

[34] Яровая Е.Б. Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий. *Теория вероятн. и ее примен.*, 55(4), 2010, 705-731.

[35] Albeverio S., Bogachev L.V., Yarovaya E.B. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(9), 1998, 975-980.

Теорема 8. *Пусть надкритический КВП стартует в точке $x \in \mathcal{S}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых $y_1,\ldots,y_n \in \mathcal{S}$ справедлива следующая альтернатива.*

1. Если $\mathsf{E}\xi_k \ln \xi_k = \infty$ для некоторого $k \in \{1,\ldots,N\}$, то

$$\left(\frac{\mu(t)}{\mathsf{E}_x\mu(t)},\frac{\mu(t;y_1)}{\mathsf{E}_x\mu(t;y_1)},\ldots,\frac{\mu(t;y_n)}{\mathsf{E}_x\mu(t;y_n)}\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathbf{0}, \quad t \to \infty.$$

2. Если $\mathsf{E}\xi_k \ln \xi_k < \infty$ для всех $k = 1,\ldots,N$, то

$$\left(\frac{\mu(t)}{\mathsf{E}_x\mu(t)},\frac{\mu(t;y_1)}{\mathsf{E}_x\mu(t;y_1)},\ldots,\frac{\mu(t;y_n)}{\mathsf{E}_x\mu(t;y_n)}\right) \xrightarrow{d} c(x)\zeta\mathbf{1}, \quad t \to \infty. \tag{1}$$

Здесь $c(x)$, $x \in \mathcal{S}$, – положительная функция, явный вид которой известен, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ – векторы размерности $n+1$ с компонентами, соответственно равными нулю и единице, а ζ – невырожденная случайная величина со следующими свойствами.

(i) $\mathsf{E}_x\zeta = c(x)^{-1}$.

(ii) $\mathsf{P}_x(\zeta = 0) = \mathsf{P}_x\left(\limsup_{t\to\infty} \mu(t;y) = 0\right)$ *для любого $y \in \mathcal{S}$.*

(iii) *Преобразование Лапласа $\varphi(\lambda;x) := \mathsf{E}_x e^{-\lambda\zeta}$, $\lambda \geq 0$, $x \in \mathcal{S}$, случайной величины ζ при $x \in \mathcal{S}\setminus W$ имеет вид*

$$\varphi(\lambda;x) = \sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty \varphi(\lambda e^{-\nu u};w_k)\, d_{W_k}F_{x,w_k}(u) + 1 - \sum_{k=1}^{N} {}_{W_k}F_{x,w_k}(\infty), \tag{2}$$

где функции $\varphi(\cdot;w_j)$, $j = 1,\ldots,N$, удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda;w_j) &= \alpha_j \int_0^\infty f_j(\varphi(\lambda e^{-\nu u};w_j))\, dG_j(u)\\ &+ (1-\alpha_j)\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty \varphi(\lambda e^{-\nu u};w_k)\, dG_{j,k}(u)\\ &+ (1-\alpha_j)\left(1 - \sum_{k=1}^{N} {}_{W_k}\overline{F}_{w_j,w_k}(\infty)\right),\end{aligned} \tag{3}$$

а функции $G_{j,k}(t)$, $t \geq 0$, $j,k = 1,\ldots,N$, определяются следующим образом:

$$G_{j,k}(t) := \beta_j \int_0^t {}_{W_k}\overline{F}_{w_j,w_k}(t-u)e^{-\beta_j u}\, du.$$

Система уравнений (3) имеет единственное решение $\varphi(\,\cdot\,;w_j)$, $j = 1,\ldots,N$, в функциональном классе $\mathcal{C}_\theta$ для каждого $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_N)$, $\theta_i > 0$, $i = 1,\ldots,N$. Здесь класс функций

$$\mathcal{C}_\theta := \left\{(\varphi(\cdot;w_1),\ldots,\varphi(\cdot;w_N)) : \lim_{\lambda\to 0+}\frac{1-\varphi(\lambda;w_i)}{\lambda} = \theta_i,\, i = 1,\ldots,N\right\},$$

где $\varphi(\,\cdot\,; w_i)$ *отображает* $[0,\infty)$ *в* $(0,1]$, $\varphi(0; w_i) = 1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, $\theta_i > 0$, $i = 1, \dots, N$.

(iv) *Условное распределение* ζ *при условии старта КВП в точке* $x \in \mathcal{S}$ *является абсолютно непрерывным на положительной полуоси и имеет непрерывную функцию плотности.*

В теореме 8, как обычно, выражение $s \ln s$ при $s = 0$ полагается равным 0. Теоремы 5 и 6 посвящены нахождению вероятностей соответственно глобального и локального вырождения КВП, а теорема 7 утверждает, что при дополнительных предположениях соотношение (1) справедливо даже в смысле более сильной сходимости – сходимости п.н. Полученные результаты обобщают ряд известных ранее, например, доказанных в статьях[15] (лемма 5.1) и[36]. Так, в[36] были найдены предельные распределения численностей частиц в модели надкритического ВСБ по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с конечным числом источников ветвления. Предполагалось не только существование всех моментов числа потомков каждой частицы, но и определенная скорость роста таких моментов в зависимости от их порядка. В теоремах, установленных в диссертационной работе, рассматривается более общая модель и налагаются весьма слабые ограничения на моменты числа потомков каждой частицы, а также изучается предельное поведение числа частиц в смысле сходимости с вероятностью единица. Эти результаты применяются в диссертации при исследовании характера распространения популяции частиц в КВСБ, но они представляют и самостоятельный интерес.

Подход при доказательствах теорем 4–8 в диссертации состоит в анализе вспомогательных многотипных ветвящихся процессов Беллмана–Харриса, который позволяет не только классифицировать КВП, но также вывести систему уравнений восстановления для средних локальных и общих численностей частиц в КВП. При этом используется многомерная теория восстановления. Такой подход эффективен, поскольку теория многотипных процессов Беллмана–Харриса хорошо развита и ее результаты могут быть применены к вспомогательным процессам Беллмана–Харриса, что приводит к новым результатам для КВП. В этой связи укажем на статьи[37], [38] и [39].

Во второй главе впервые рассмотрены вероятностно-геометрические аспекты формирования фронта распространения должным образом

[36] Яровая Е.Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий. *Матем. заметки*, 92(1), 2012, 123-140.

[37] Ватутин В.А., Топчий В.А. Критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса с долго живущими частицами. *Труды МИАН*, 282, 2013, 257-287.

[38] Li B., Sierra A., Deudero J.J., Semerci F., Laitman A., Kimmel M., Maletic-Savatic M. Multitype Bellman–Harris branching model provides biological predictors of early stages of adult hippocampal neurogenesis. *BMC Syst. Biol.*, 11(90), 2017, 87-102.

[39] Ватутин В.А., Хонг В., Джи Я. Редуцированные критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса для малых популяций. *Дискрет. матем.*, 30(3), 2018, 25-39.

нормированного случайного облака частиц в КВСБ по $\mathbb{Z}^d$, опирающиеся на теорию сходимости распределений. Результаты этой главы получены в работах автора [5]–[9], [11] и [12].

Показано, что в зависимости от характеристик случайного блуждания частиц асимптотическое разделение пространства на зоны, содержащую частицы (координаты которых должным образом нормируются) и свободную от них, может происходить как в смысле сильной, так и слабой сходимости. Исследованы случаи легких, умеренно тяжелых и тяжелых хвостов распределения скачка случайного блуждания по решетке $\mathbb{Z}^d$ произвольной размерности. В диссертации установлено, что предельной формой фронта является нетривиальная поверхность в $\mathbb{R}^d$. Она оказывается детерминированной в случае легких хвостов и семиэкспоненциального распределения скачка блуждания, но случайной, когда хвосты правильно меняются. Следует отметить, что в работе[40] была решена задача о распространении популяции частиц в надкритическом КВСБ, когда симметричное случайное блуждание имеет легкие хвосты, а воспроизводство частиц бинарное. При этом изучалась скорость распространения фронта популяции, определяемого в терминах ограниченности моментов локальных численностей, с течением времени $t \to \infty$. В диссертации исследуется распространение популяции в надкритическом КВСБ при более широких условиях и с другой точки зрения (с точки зрения сходимости п.н. или по распределению).

Асимптотические результаты для максимума популяции или фронта распространения популяции частиц в КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ соответственно при $d = 1$ или $d > 1$ выводятся на основе анализа решений полученных нами базовых нелинейных систем интегральных уравнений типа свертки. Этот метод является общим при исследовании экстремальных положений частиц в КВСБ с легкими, тяжелыми и умеренно тяжелыми хвостами распределения скачков блуждания. Однако доказательство асимптотически линейного распространения фронта КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с легкими хвостами удобно провести не с помощью анализа решения системы нелинейных интегральных уравнений, а посредством спинальной техники (леммы "от многого к малому"), развитой в работе[41], многомерной теории восстановления, теории больших уклонений, выпуклого анализа, мартингальной замены меры и метода каплинга.

Все результаты главы 1 применимы к КВСБ по $\mathbb{Z}^d$, изучаемому в главе 2, если в качестве пространства состояний $\mathcal{S}$ марковской цепи, отвечающей за перемещение частиц в КВП, рассматривается $\mathbb{Z}^d$, а в качестве самой марковской цепи η возьмем случайное блуждание $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$

[40] Молчанов С.А., Яровая Е.Б. Ветвящиеся процессы с решетчатой пространственной динамикой и конечным числом центров генерации частиц. *ДАН*, 446(3), 2012, 259-262.

[41] Harris S., Roberts M. The many-to-few lemma and multiple spines. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 53(1), 2017, 226-242.

по $\mathbb{Z}^d$ с непрерывным временем. Жирный шрифт подчеркивает, что $\mathbf{S}$ – в общем случае векторнозначный случайный процесс. Если известно, что случайное блуждание происходит по целочисленной прямой $\mathbb{Z}$, то жирный шрифт не используется. Термин "случайное блуждание" подразумевает однородность матрицы Q, т.е.

$$q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = q(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{0}) = q(\mathbf{0},\mathbf{y}-\mathbf{x}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d, \quad q := -q(\mathbf{0},\mathbf{0}) \in (0,\infty). \quad (4)$$

Согласно теореме 1.2 из книги[32] (гл. 9, раздел 1) $\mathbf{S}$ является регулярным скачкообразным процессом с непрерывными справа траекториями и имеет версию вида

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{\Pi(t)} \mathbf{Y}^i, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{x}$ – начальное состояние марковской цепи $\mathbf{S}$, Π – это пуассоновский процесс интенсивности q, построенный с помощью случайной последовательности моментов скачков процесса $\mathbf{S}$, а независимые одинаково распределенные величины $\mathbf{Y}^1,\mathbf{Y}^2,\ldots$ (скачки) таковы, что $\mathsf{P}(\mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}) = q(\mathbf{0},\mathbf{y})/q$, и не зависят от Π. Обычно $\mathbf{S}$ называется сложным пуассоновским процессом и $\sum_{i\in\varnothing} \mathbf{Y}^i := \mathbf{0}$.

Выбор множества состояний $\mathcal{S} = \mathbb{Z}^d$ позволяет изучать распространение популяции в пространстве с течением времени, т.е. выявлять скорость заполнения частицами решетки $\mathbb{Z}^d$ и находить предельную форму фронта распространения популяции в случае, если она выживает и ее численности растут с течением времени, как происходит в надкритическом случае в силу результатов главы 1.

Начало такому исследованию положила статья[15], в которой впервые была доказана предельная теорема в смысле сходимости п.н. для максимума КВСБ по целочисленной прямой $\mathbb{Z}$ в случае, когда скачок случайного блуждания имеет легкие хвосты, т.е. удовлетворяет условию Крамера. Далее в диссертации эти результаты удалось обобщить на многомерную решетку $\mathbb{Z}^d$ с $d > 1$, рассматривая вместо максимума фронт распространения популяции. Затем продолжено исследование фронта распространения популяции в предположении, что хвосты распределения скачка имеют различную тяжесть. Приведем основные теоремы главы 2, описывающие распространение популяции частиц в КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ в каждом из трех случаев поведения хвостов распределения скачка блуждания. Для этого потребуются новые обозначения.

Пусть $Z(t) \subset \mathbb{Z}^d$ – (случайное) множество частиц, существующих в КВСБ в момент времени $t \geq 0$. Для частицы $v \in Z(t)$ обозначим $\mathbf{X}^v(t) = (X_1^v(t),\ldots,X_d^v(t))$ ее положение в момент t. Рассмотрим множество

$$\mathcal{I} := \left\{\omega : \limsup_{t\to\infty}\{v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in W\} \neq \varnothing\right\} \in \mathcal{F}. \quad (6)$$

Чтобы избежать операций с континуальным набором множеств $\{A_t\}_{t\geq 0}$, полагаем $\limsup_{t\to\infty} A_t \; := \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_{n/2^m}$, т.е. будем иметь дело только с двоично-рациональными значениями параметра t вместо всех его неотрицательных значений. Для каждого $\omega \in \mathcal{I}$ найдется возрастающая к бесконечности последовательность двоично-рациональных значений $t_l^{br}(\omega)$, $l \in \mathbb{N}$, такая, что в каждый момент $t_l^{br}(\omega)$ имеются частицы во множестве катализаторов W. Событие, состоящее из элементарных исходов ω, для которых существует аналогичная последовательность любых (не только двоично-рациональных) значений $t_l^{any}(\omega)$, $l \in \mathbb{N}$, имеет ту же вероятность $\mathsf{P}(\mathcal{I})$, и $\mathcal{I}$ можно назвать *событием бесконечного числа посещений катализаторов* (учтено, что частицы проводят в точках катализа время, экспоненциально распределенное с ненулевым параметром). Поведение КВСБ на дополнении $\mathcal{I}^c$ этого множества п.н. тривиально. Действительно, при достаточно больших значениях $t \geq t_0(\omega)$ либо КВСБ вырождается, либо КВСБ образует систему нескольких случайных блужданий (без ветвления), стартующих соответственно из $\mathbf{X}^v(\omega,t_0)$, $v \in Z(t_0)$, в момент времени t_0. Надкритический режим КВСБ гарантирует, что $\mathsf{P}(\mathcal{I}) > 0$ (теорема 8 главы 1).

Чтобы сформулировать первую из основных теорем главы 2, объясним, что подразумевается под “легкими” хвостами распределения скачка блуждания. Предположим, что функция

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{s}) \quad &:= \quad \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d} e^{\langle \mathbf{s},\mathbf{x}\rangle} q(\mathbf{0},\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d} \left(e^{\langle \mathbf{s},\mathbf{x}\rangle} - 1\right) q(\mathbf{0},\mathbf{x}) \qquad (7)\\ &= \quad q\left(\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d,\, \mathbf{x}\neq\mathbf{0}} e^{\langle \mathbf{s},\mathbf{x}\rangle} \frac{q(\mathbf{0},\mathbf{x})}{q} - 1\right) = q\left(\mathsf{E}e^{\langle \mathbf{s},\mathbf{Y}^1\rangle} - 1\right) < \infty\end{aligned}$$

для любого $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$ (всюду $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$). Такое предположение представляет собой условие Крамера, выполненное в $\mathbb{R}^d$, для скачка $\mathbf{Y}^1$. Легко проверить, что гессиан функции Ψ положительно определен и, следовательно, Ψ – выпуклая функция. Заметим, что с помощью равенства (5) нетрудно вывести, что $\mathsf{E}e^{\langle \theta,\mathbf{S}(t)\rangle} = e^{t\Psi(\theta)}$, $\theta \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$. По этой причине функцию Ψ называют логарифмической производящей функцией моментов для случайной величины $\mathbf{S}(1)$. Положим также

$$\mathcal{R} := \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d : \Psi(\mathbf{r}) = \nu\right\}. \qquad (8)$$

Как указано выше, при доказательстве асимптотически линейного распространения фронта КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с легкими хвостами применяются методы, отличные от подходов, использованных в остальной части главы 2. В частности, вовлекается спинальная техника, которая подразумевает, что при каждом ветвлении частицы выбирается в точности один представитель из ее непосредственных потомков, причем тот, чей род доживет до рассматриваемого момента t. В результате можно считать, что среди выбранных частиц, которые являются представителями разных поколений, но одного и того же рода, есть одна частица, существующая вплоть до момента t, совершающая случайное блуждание без ветвления. Чтобы ее блуждание было однородным, дополнительно требуется, чтобы времена, проведенные частицей в каждой точке решетки (в том числе и в любом источнике ветвления) до выхода из нее, имели бы экспоненциальные распределения с одним и тем же параметром (см., например,[34]). Таким образом, в теоремах 9–12 считается, что условие однородности случайного блуждания означает выполнение равенств

$$q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = q(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{0}) = q(\mathbf{0},\mathbf{y}-\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \beta_k = q/(1-\alpha_k), \tag{9}$$

для $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ и $k = 1,\dots,N$, где $q = -q(\mathbf{0},\mathbf{0}) \in (0,\infty)$.

Теорема 9. *Пусть условия (7) и (9) справедливы для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$. Тогда для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ при $t \to \infty$ имеем*

$$\mathsf{P}_{\mathbf{x}}\big(\omega:\ \forall\varepsilon>0\ \exists t_0=t_0(\omega,\varepsilon)\ \text{т.ч.}\ \forall t\ge t_0,\ \forall v\in Z(t),\ \frac{\mathbf{X}^v(t)}{t}\notin\mathcal{O}_\varepsilon\big)=1,$$
$$\mathsf{P}_{\mathbf{x}}\big(\omega:\ \forall\varepsilon\in(0,\nu)\ \exists t_1=t_1(\omega,\varepsilon)\ \text{т.ч.}\ \forall t\ge t_1\ \exists v\in Z(t),\ \frac{\mathbf{X}^v(t)}{t}\notin\mathcal{Q}_\varepsilon|\mathcal{I}\big)=1,$$

где множества $\mathcal{O}_\varepsilon$ и $\mathcal{Q}_\varepsilon$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\varepsilon &:= \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\langle\mathbf{x},\mathbf{r}\rangle>\nu+\varepsilon\ \text{хотя бы для одного}\ \mathbf{r}\in\mathcal{R}\},\quad \varepsilon\ge 0,\\ \mathcal{Q}_\varepsilon &:= \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\langle\mathbf{x},\mathbf{r}\rangle<\nu-\varepsilon\ \text{для всех}\ \mathbf{r}\in\mathcal{R}\},\quad \varepsilon\in[0,\nu),\end{aligned}$$

а “т.ч.” обозначает “такое, что”.

Пусть $\mathcal{O} := \mathcal{O}_0$, $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{P} := \partial\mathcal{Q} = \partial\mathcal{O}$. Заметим, что каждое множество $\mathcal{Q}_\varepsilon$, $\mathcal{Q}$ или $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ является выпуклым как пересечение полупространств (см., например, теорему 2.1 в книге[42]).

Теорема 9 означает, что если разделить координаты положения каждой частицы, существующей в КВСБ в момент времени t, на t, а затем устремить t бесконечности, то в пределе п.н. не будет частиц вне множества $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$, и при условии бесконечного числа посещений катализаторов п.н. будут частицы в множестве $\mathcal{P}$. В этом смысле естественно называть границу $\mathcal{P}$ *предельной формой фронта распространения популяции частиц.*

Теорема 10 устанавливает, что каждую точку множества $\mathcal{P}$ можно рассматривать как предельную точку для нормированных положений частиц в КВСБ, а теорема 11 дает альтернативное представление для множества $\mathcal{P}$, благодаря которому в разделе 2.4.3 рассмотрен ряд примеров, иллюстрированных графиками поверхности $\mathcal{P}$ в случаях $d = 2$ и $d = 3$. Кроме того, теорема 12 описывает скорость сходимости в теореме 9.

[42] Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* Мир, Москва, 1973, 472 с.

Перейдем к рассмотрению промежуточного случая между легкими хвостами скачка блуждания и тяжелыми хвостами. Типичным представителем семейства распределений с умеренно тяжелыми хвостами является класс семиэкспоненциальных распределений (см., например, гл. 5 и 7 монографии[43]).

Пусть теперь координаты скачка случайного блуждания имеют семиэкспоненциальное распределение, т.е. для любых $i = 1,\dots,d$ и $y \in \mathbb{Z}_+$ справедливы соотношения

$$\mathsf{P}(Y_i > y) = L_i^{(1,+)}(y)\exp\left(-y^{\gamma_i^+}L_i^{(2,+)}(y)\right) =: R_i^+(y), \tag{10}$$

$$\mathsf{P}(Y_i < -y) = L_i^{(1,-)}(y)\exp\left(-y^{\gamma_i^-}L_i^{(2,-)}(y)\right) =: R_i^-(y), \tag{11}$$

где случайный вектор $\mathbf{Y} = (Y_1,\dots,Y_d)$ распределен так же, как скачки случайного блуждания $\mathbf{Y}^1,\mathbf{Y}^2,\dots$. Знак "+" относится к правому хвосту распределения, а знак "−" – к левому. Здесь

$$\mathsf{P}\left(Y_i > y\right) = q^{-1}\sum_{\mathbf{x}:\, x_i > y} q(\mathbf{0},\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Для каждого $i = 1,\dots,d$ и $\kappa \in \{+,-\}$ функции $L_i^{(1,\kappa)}(y)$ и $L_i^{(2,\kappa)}(y)$, $y \in \mathbb{Z}_+$, медленно меняются, в то время как параметры γ_i^κ лежат в промежутке $(0,1)$. Напомним, что функция $L(t)$, $t \ge 0$, медленно меняется на бесконечности, если $L(ct)/L(t) \to 1$ при $t \to \infty$ для любой постоянной $c > 0$. Функция $R(t)$, $t \ge 0$, называется правильно меняющейся (на бесконечности) с индексом $\gamma \in (-\infty,\infty)$, если $R(ct)/R(t) \to c^\gamma$ при $t \to \infty$ для каждого $c > 0$ (см., например, книгу[44], гл. 1, раздел 1).

В силу формул (10) и (11) функция $-\ln\left(R_i^\kappa(y)\right)$, $y \in \mathbb{Z}_+$, правильно меняется с индексом γ_i^κ. Свойство 5° в монографии[44], гл. 1, раздел 5, влечет, что существует асимптотически однозначно определенная обратная функция $R_i^{-1,\kappa}$ на $\mathbb{R}_+$ такая, что

$$-\ln\left(R_i^\kappa\left(R_i^{-1,\kappa}(y)\right)\right) \sim y, \quad R_i^{-1,\kappa}\left(-\ln R_i^\kappa(y)\right) \sim y$$

при $y \to \infty$, $y \in \mathbb{Z}_+$, и $R_i^{-1,\kappa}(s) = s^{1/\gamma_i^\kappa}L_i^{(3,\kappa)}(s)$, где $L_i^{(3,\kappa)}(s)$, $s \ge 0$, – это медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Функции $R_i^{-1,\kappa}(\cdot)$, $i = 1,\dots,d$, понадобятся для нормировки координат частиц из случайного множества $Z(t)$. Индекс κ означает, что нормировка зависит от ортанта κ (одного из 2^d) в $\mathbb{R}^d$, в котором частица расположена в момент времени t.

[43] Боровков А.А., Боровков К.А. *Асимптотический анализ случайных блужданий. Т.1. Медленно убывающие распределения скачков.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2008, 651 с.

[44] Seneta E. *Regularly Varying Functions.* Springer, Heidelberg, 1976, 116 pp.

В отличие от случайных блужданий, у которых хвосты распределения скачка либо легкие, либо правильно меняющиеся, блуждания с семиэкспоненциальным распределением скачков имеют зоны, для которых вероятности больших уклонений существенным образом отличаются. А именно, выделяются зоны *уклонений Крамера*, *промежуточная* и зона *аппроксимации максимальным скачком* (см., например, монографию[43], гл. 5, раздел 2). В диссертации рассматриваются две последних, поскольку они играют определяющую роль в асимптотическом поведении фронта популяции.

Предположим, что для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, справедливо соотношение

$$\mathsf{P}_{\mathbf{0}}\left(\operatorname{sgn}(\mathbf{x})\mathbf{S}(u)/\mathbf{R}^{-1,\kappa(\mathbf{x})}(t) \in [|\mathbf{x}|\,, +\infty)\right)$$
$$= \;\; h(u)\,(1+\delta(u,t))\prod_{i=1}^{d}\left(\mathsf{P}\left(\operatorname{sgn}(x_i)Y_i \geq |x_i|R_i^{-1,\kappa(x_i)}(t)\right)\right)^{(1-\varepsilon_i(u,t))}, \quad (12)$$

где $h(u) = h(u,\mathbf{x})$, $u \geq 0$, – это положительная неубывающая функция такая, что $h(u) \sim c(\mathbf{x})u^{d-n_0(\mathbf{x})}$, $u \to \infty$, для $c(\mathbf{x}) > 0$ и числа $n_0(\mathbf{x})$, равного количеству нулевых координат вектора $\mathbf{x}$. Для каждого $i = 1,\ldots,d$ неотрицательная функция $\varepsilon_i(u,t) = \varepsilon_i(u,t,\mathbf{x}) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $\vartheta = u/t \in [0,1]$, а для всех достаточно больших t верно, что $\varepsilon_i(u_1,t) \leq \varepsilon_i(u_2,t)$ при $u_1 \leq u_2$, $u_1,u_2 \in [0,t]$. Функция $\delta(u,t) = \delta(u,t,\mathbf{x}) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $\vartheta = u/t \in [0,1]$. Для краткости используется запись $\delta(u,t)$ вместо $\delta(u,t,\mathbf{x})$, поскольку переменная $\mathbf{x}$ фиксирована. В формуле (12) выражение $\operatorname{sgn}(\mathbf{x})\mathbf{S}(u)/\mathbf{R}^{-1,\kappa(\mathbf{x})}(t)$ обозначает вектор в $\mathbb{R}^d$, у которого i-я координата есть $\operatorname{sgn}(x_i)S_i(u)/R_i^{-1,\kappa(x_i)}(t)$, $i = 1,\ldots,d$, а $[|\mathbf{x}|, +\infty) := [|x_1|, +\infty) \times \ldots \times [|x_d|, +\infty)$. Здесь $\kappa(x_i) =$“$+$”, если $x_i \geq 0$, и $\kappa(x_i) =$“$-$”, если $x_i < 0$. Положим $\operatorname{sgn}(x_i)S_i(u)/R_i^{-1,\kappa(x_i)}(t) := 0$, если $R_i^{-1,\kappa(x_i)}(t) = 0$. Напомним, что $\operatorname{sgn}(y) = 1$ при $y > 0$, $\operatorname{sgn}(y) = -1$ при $y < 0$ и $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

В случае, когда координаты вектора скачка случайного блуждания независимы, важное соотношение (12) может вытекать из других предположений о хвостах распределения скачков (см. подраздел 2.5.3 главы 2 диссертации автора). Например, для случая, когда координаты вектора скачка случайного блуждания независимы, в монографии[43], теорема 5.4.1, установлены достаточные условия справедливости соотношения (12). В частности, если абсолютные значения как строго положительных, так и строго отрицательных компонент каждой координаты вектора скачка имеют дискретное распределение Вейбулла, соотношение (12) выполнено (см. подраздел 2.5.3 главы 2). Таким образом, чтобы избежать перечисления достаточных условий справедливости формулы (12), можно потребовать, чтобы эта формула выполнялась.

Обозначим $\mathbf{X}^v(u)/\mathbf{R}^{-1,\kappa}(t)$ вектор в $\mathbb{R}^d$, у которого i-я координата равняется $X_i^v(u)/R_i^{-1,\kappa(X_i^v(u))}(t)$, $u,t \geq 0$, $i = 1,\dots,d$.

Теорема 17. *Пусть для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с мальтусовским параметром ν выполнены соотношения (4), (10), (11) и (12). Тогда для каждой стартовой точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ справедливы следующие равенства:*

$$\mathsf{P}_{\mathbf{z}}\left(\omega : \forall \varepsilon > 0\, \exists t_1 = t_1(\omega,\varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_1, \forall v \in Z(t) \text{ верно } \frac{\mathbf{X}^v(t)}{\mathbf{R}^{-1,\kappa}(t)} \notin \mathcal{O}_\varepsilon\right) = 1,$$

$$\mathsf{P}_{\mathbf{z}}\left(\omega : \forall \varepsilon \in (0,\nu)\, \exists t_2 = t_2(\omega,\varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_2\, \exists v \in Z(t), \frac{\mathbf{X}^v(t)}{\mathbf{R}^{-1,\kappa}(t)} \notin \mathcal{Q}_\varepsilon \middle| \mathcal{I}\right) = 1,$$

где событие $\mathcal{I}$ определено согласно (6), а множества $\mathcal{O}_\varepsilon$ и $\mathcal{Q}_\varepsilon$ задаются следующим образом:

$$\mathcal{O}_\varepsilon := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d} |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} > \nu + \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \mathcal{O} := \mathcal{O}_0,$$

$$\mathcal{Q}_\varepsilon := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d} |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} < \nu - \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon \in [0,\nu), \quad \mathcal{Q} := \mathcal{Q}_0.$$

Введем в $\mathbb{R}^d$ множество

$$\mathcal{P} := \partial\mathcal{O} = \partial\mathcal{Q} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d} |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} = \nu\right\}.$$

Из теоремы 17 следует, что для почти всех ω и для любого $\varepsilon > 0$ через достаточно большое время не существует частиц с нормированными координатами снаружи поверхности $\partial\mathcal{O}_\varepsilon$, и для почти всех $\omega \in \mathcal{I}$ всегда есть такие частицы снаружи поверхности $\partial\mathcal{Q}_\varepsilon$. Для $\omega \in \mathcal{I}$ наиболее удаленные частицы (образующие "фронт" распространения популяции) в результате нормировки через достаточно большое время расположены между $\partial\mathcal{O}_\varepsilon$ и $\partial\mathcal{Q}_\varepsilon$ при достаточно малом ε. Для почти всех $\omega \notin \mathcal{I}$ предел нормированных положений частиц есть $\mathbf{0}$.

Таким образом, поверхность $\mathcal{P} = \partial\mathcal{O} = \partial\mathcal{Q}$ представляет собой предельную форму фронта распространения популяции в КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с семиэкспоненциальным распределением скачков. Важно, что по теореме 18 каждая точка множества $\mathcal{P}$ является предельной для нормированных положений частиц в КВСБ, т.е. поверхность $\mathcal{P}$ в некотором смысле минимальна. Отметим, что доказательство теорем 17 и 18 основано на анализе при $t \to \infty$ решения системы нелинейных интегральных уравнений типа свертки относительно вектора $\mathbf{E}(t;\mathcal{U}) := (E_{\mathbf{w}_1}(t;\mathcal{U}),\ldots,E_{\mathbf{w}_N}(t;\mathcal{U}))$ с координатами $E_{\mathbf{w}_i}(t;\mathcal{U}) := \mathsf{P}_{\mathbf{w}_i}(\exists v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in \mathcal{U})$, $i = 1,\ldots,N$, $t \geq 0$, для множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$. А именно, вектор $\mathbf{E}(t;\mathcal{U})$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{w}_i}(t;\mathcal{U}) &= \alpha_i \int_0^t \left(1 - f_i\left(1 - E_{\mathbf{w}_i}(t-s;\mathcal{U})\right)\right) dG_i(s) \\ &+ (1-\alpha_i)\sum_{j=1}^N \int_0^t E_{\mathbf{w}_j}(t-s;\mathcal{U})\, dG_{i,j}(s) + I_{\mathbf{w}_i}(t;\mathcal{U}), \end{aligned}$$

где функция $I_{\mathbf{w}_i}(t;\mathcal{U})$ определяется как

$$\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^d,\\ \mathbf{y}\notin W}} (1-\alpha_i)\frac{q(\mathbf{w}_i,\mathbf{y})}{q}\int\limits_0^t \mathsf{P}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{S}(t-s)\in\mathcal{U}, {}_{W_k}\tau_{\mathbf{y},\mathbf{w}_k} > t-s, k=1,\ldots,N\right) dG_i(s),$$

$t \geq 0$, $i = 1,\ldots,N$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$, $W \cap \mathcal{U} = \varnothing$, а вместо множества $\mathcal{U}$ подставляем

$$\Delta(\mathbf{x};t) := \Big[x_1 R_1^{-1,+}(t), +\infty\Big) \times \ldots \times \Big[x_d R_d^{-1,+}(t), +\infty\Big) \subset \mathbb{R}^d.$$

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда хвосты распределения скачка тяжелые, т.е. представляют собой правильно меняющиеся функции. Другими словами, пусть распределение i-й компоненты скачка случайного блуждания таково, что

$$\mathsf{P}\left(Y_i^1 \geq y\right) = y^{-\gamma_i^+} L_i^{(1,+)}(y) =: R_i^+(y), \tag{13}$$

$$\mathsf{P}\left(Y_i^1 \leq -y\right) = y^{-\gamma_i^-} L_i^{(1,-)}(y) =: R_i^-(y), \tag{14}$$

для каждого $y \in \mathbb{N}$, где функция $L_i^{(1,\kappa)}$ медленно меняющаяся, а функция R_i^κ правильно меняющаяся с индексом $-\gamma_i^\kappa$, $\gamma_i^\kappa \in (0,+\infty)$, $\kappa \in \{+,-\}$, $i = 1,\ldots,d$. Вновь обращаясь к свойству 5 в монографии[44], гл. 1, раздел 5, делаем вывод, что существует асимптотически однозначно определенная обратная функция $R_i^{-1,\kappa}(s)$, $s \geq 0$, в таком смысле, что $1/R_i^\kappa\left(R_i^{-1,\kappa}(y)\right) \sim y$, $R_i^{-1,\kappa}\left(1/R_i^\kappa(y)\right) \sim y$ при $y \to \infty$, $y \in \mathbb{Z}_+$, и $R_i^{-1,\kappa}(s) = s^{1/\gamma_i^\kappa} L_i^{(2,\kappa)}(s)$, $s \geq 0$, где $L_i^{(2,\kappa)}$ медленно меняется на бесконечности.

Чтобы изучить скорость распространения популяции частиц, поделим координаты частиц, расположенных в каждом ортанте, на указанные далее нормирующие функции. Правильный выбор таких функций приводит к существованию нетривиального предела масштабированных положений частиц фронта, когда время стремится к бесконечности. Соответствующее предельное множество в $\mathbb{R}^d$ называется *предельной формой* *фронта.* В случае тяжелых хвостов распределения скачка блуждания предельная форма фронта оказывается случайной, в отличие от множества $\mathcal{P}$, рассмотренного выше. Нормирующий множитель для i-й компоненты $X_i^v(t)$, $i = 1,\ldots,d$, положения $\mathbf{X}^v(t)$ частицы $v \in Z(t)$ в случае, когда знаком $X_i^v(t)$ является κ, $\kappa \in \{+,-\}$, имеет вид:

$$N_i^\kappa(t) := R_i^{-1,\kappa}\left(e^{\nu t}\right) = e^{\nu t/\gamma_i^\kappa} L_i^{(2,\kappa)}\left(e^{\nu t}\right), \quad t \geq 0.$$

Следующее предположение фактически содержит два условия. Во-первых, предполагается, что компоненты скачка случайного блуждания независимы (или близки к независимым). Во-вторых, нормирующие множители относятся к зоне аппроксимации максимальным скачком (см., например, монографию[43], гл. 5, раздел 4) соответствующих координат случайного блуждания $\mathbf{S}$. Эти условия объединены в одно: для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, имеем

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}_{\mathbf{0}}\left(\operatorname{sgn}(\mathbf{x})\mathbf{S}(u)/\mathbf{N}^{\kappa(\mathbf{x})}(t) \in [|\mathbf{x}|,+\infty)\right) \\ = \quad & h(u)(1+\delta(u,t))\prod_{i=1}^{d}\mathsf{P}\left(\operatorname{sgn}(x_i)Y_i^1 \geq |x_i| N_i^{\kappa(x_i)}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

где $h(u) = h(u,\mathbf{x})$, $u \geq 0$, – это положительная неубывающая функция такая, что $h(u) \sim cu^{d-n_0(\mathbf{x})}$, $u \to \infty$, для $c(\mathbf{x}) > 0$ и числа $n_0(\mathbf{x})$, равного количеству нулевых координат вектора $\mathbf{x}$. Функция $\delta(u,t) = \delta(u,t,\mathbf{x})$ стремится к 0 при $t \to \infty$ равномерно по $u/t \in [0,1]$. Выражение $\operatorname{sgn}(\mathbf{x})\mathbf{S}(u)/\mathbf{N}^{\kappa(\mathbf{x})}(t)$ обозначает вектор в $\mathbb{R}^d$ с i-й координатой $\operatorname{sgn}(x_i)S_i(u)/N_i^{\kappa(x_i)}(t)$, $i = 1,\ldots,d$. Положим $\operatorname{sgn}(x_i)S_i(u)/N_i^{\kappa(x_i)}(t) := 0$, если $N_i^{\kappa(x_i)}(t) = 0$. Если компоненты скачка случайного блуждания независимы, то широкие достаточные условия для справедливости соотношения (15) представлены, например, в теореме 15.2.1 из книги[43].

Для $\lambda^\kappa = (\lambda_1^\kappa,\ldots,\lambda_d^\kappa)$, $\lambda_i^\kappa \geq 0$, $\kappa \in \{+,-\}$, определим параллелепипед вида

$$V(\lambda^+,\lambda^-) := \left[-(\lambda_1^-)^{-1/\gamma_1^-},(\lambda_1^+)^{-1/\gamma_1^+}\right] \times \ldots \times \left[-(\lambda_d^-)^{-1/\gamma_d^-},(\lambda_d^+)^{-1/\gamma_d^+}\right] \subset \mathbb{R}^d.$$

Обозначим

$$\Lambda(\lambda^+,\lambda^-) := \bigcup_{i=1}^{d}\left\{x_j = 0,\, j \neq i,\, j = 1,\ldots,d,\, x_i \in \left[-\left(\lambda_i^-\right)^{-1/\gamma_i^-}, \left(\lambda_i^+\right)^{-1/\gamma_i^+}\right]\right\}.$$

Здесь параметры λ^+ и λ^- характеризуют размер множества $\Lambda(\lambda^+,\lambda^-)$, которое имеет форму креста при $d = 2$ и форму естественного обобщения креста при $d > 2$.

Далее $\mathbf{X}^v(u)/\mathbf{N}^\kappa(t)$ обозначает вектор в $\mathbb{R}^d$ с i-й координатой, равной $X_i^v(u)/N_i^{\kappa(X_i^v(u))}(t)$, $u,t \geq 0$, $i = 1,\ldots,d$. Теперь сформулируем основные результаты главы 2, относящиеся к исследованию КВСБ с правильно меняющимися хвостами. Эти результаты естественно привести здесь после теоремы 17, хотя в диссертации они устанавливаются в ином порядке в соответствии с очередностью их публикации.

Теорема 14. *Пусть для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с мальтусовским параметром $\nu > 0$ выполнены условия (4), (13)–(15). Тогда при любой стартовой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ справедливо соотношение*

$$\mathsf{P}_{\mathbf{x}}(\omega : \forall\varepsilon>0\ \exists t_1 = t_1(\omega,\varepsilon) \text{ т.ч. } \forall t \geq t_1, \forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{N}^\kappa(t) \notin \mathcal{O}_\varepsilon) = 1,$$

где множество $\mathcal{O}_\varepsilon$ определено при $\varepsilon > 0$ формулой

$$\mathcal{O}_\varepsilon := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \prod_{i=1}^{d} |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} > \varepsilon\right\}.$$

Утверждение теоремы 14 означает, что в пределе по времени п.н. нет частиц вне осей координат. Следующий результат показывает, что для каждых векторов λ^+ и λ^- вероятность того, что нормированное случайное облако частиц содержится в параллелепипеде $V(\lambda^+,\lambda^-)$, стремится к пределу, заданному с помощью распределения, найденного в главе 1.

Теорема 15. *Пусть для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с мальтусовским параметром $\nu > 0$ имеют место соотношения $\mathsf{E}\xi_k \ln \xi_k < \infty$ для всех $k = 1,\ldots,N$, а также выполнены условия (4), (13)–(15). Тогда для любых $\lambda_i^\kappa \geq 0$, $\kappa \in \{+,-\}$, $i = 1,\ldots,d$, и $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ при $t \to \infty$ имеем*

$$\mathsf{P}_{\mathbf{x}}\left(\forall v \in Z(t) \text{ верно } \mathbf{X}^v(t)/\mathbf{N}^\kappa(t) \in V\left(\lambda^+,\lambda^-\right)\right) \to \varphi\left(\sum_{i,\kappa} \lambda_i^\kappa; \mathbf{x}\right),$$

где функция $\varphi(\lambda;\mathbf{x})$, $\lambda \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений (2) и (3), причем решение системы единственно в определенном функциональном классе. Здесь $\varphi(\lambda;\mathbf{x}) \in (0,1)$, $\varphi(0;\mathbf{x}) = 1$ и $\varphi(\lambda;\mathbf{x})$ стремится к вероятности локального вырождения популяции в КВСБ при $\lambda \to \infty$ для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$.

Из теорем 14 и 15 следует, что предельная форма фронта популяции частиц в КВСБ с тяжелыми хвостами случайна и содержится во множестве $\Lambda(\lambda^+,\lambda^-)$ с вероятностью $\varphi\left(\sum_{i,\kappa} \lambda_i^\kappa; \mathbf{x}\right)$. Доказательства этих результатов, опирающиеся на 14 лемм, сначала проводятся в предположении, что $d = 1$, и формулируются в виде теоремы 13, а затем обобщаются для $d > 1$.

Следует отметить, что если координаты скачка блуждания имеют распределение с тяжелыми хвостами, но не являются независимыми или близкими к независимым (см. условие (15)), а, наоборот, сильно зависимы, то такой случай также разобран в главе 2 и естественным образом носит название изотропного. При этом нормирующие функции тоже растут экспоненциально. В пределе возникает случайная предельная форма фронта, для которой в теореме 16 явно найдено распределение.

Таким образом, в диссертации получено полное описание как нормирующих функций для положений частиц случайного облака, обеспечивающих существование нетривиальной предельной формы фронта, так и описание этих предельных форм. Как видно из сформулированных теорем, поведение нормирующих функций меняется от линейного (легкие хвосты) через степенное с показателем, превышающим 1, (умеренно тяжелые хвосты) к экспоненциальному (тяжелые хвосты). При этом в случае легких хвостов предельная форма фронта образует всегда выпуклую поверхность вне зависимости от того, являются ли координаты скачка блуждания независимыми или нет, что контрастирует с остальными случаями. При умеренно тяжелых хвостах предположение независимости координат влечет звездообразную предельную форму, не образующую выпуклую поверхность, а при тяжелых хвостах независимость координат приводит к случайной вырожденной предельной форме, составленной из отрезков случайной длины, расположенных на осях координат и содержащих точку $\mathbf{0}$. Эти результаты можно объяснить с помощью теории больших уклонений, в том числе принципа большого скачка, действующего для распределений, для которых не выполнено условие Крамера.

Третья глава посвящена решению разнообразных задач, относящихся к исследованию КВСБ по $\mathbb{Z}^d$, когда множество катализаторов конечно или бесконечно и периодично. Последняя модель также называется ВСБ с периодически расположенными источниками ветвления (в случае, когда характеристики всех источников ветвления одинаковы) или ВСБ на периодических графах (в случае, когда характеристики ветвления могут быть различными и тоже варьируются периодически). Результаты этой главы установлены в статьях автора [1], [10] и [13]–[15]. Одна из задач была поставлена академиком РАН А. Н. Ширяевым во время доклада автора на семинаре отдела теории вероятностей и математической статистики (руководимого академиком РАН А. С. Холево) в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН. А именно, было предложено ответить на вопрос, когда впервые популяция выйдет за пределы определенного множества. Автору удалось решить поставленную задачу, см. раздел 3.1 главы 3. Данная задача решается сложнее, чем просто исследование максимума популяции, поскольку при изучении первого достижения некоторого уровня необходимо учитывать значения максимумов популяции на всем временном интервале $[0,t]$, когда $t \to \infty$. Точнее говоря, в диссертации доказывается предельная теорема 19 в смысле сходимости почти наверное для времени первого достижения частицами высокого уровня, растущего линейно по времени. Рассматривается модель надкритического КВСБ по целочисленной прямой $\mathbb{Z}$ в случае легких хвостов скачка блуждания, т.е. налагается условие Крамера.

Пусть $M_t := \max\{X^v(t) : v \in Z(t)\}$ – максимум КВСБ в момент времени $t \geq 0$, т.е. координата самой правой частицы на целочисленной прямой в этот момент. Обозначим $T_R := \inf\{t \geq 0 : M_t \geq R\}$ – момент первого выхода популяции частиц в КВСБ на уровень $R > 0$. Ясно, что $T_R > t$ тогда и только тогда, когда $M_s < R$ при всех $s \in [0,t]$. Напомним, что согласно формуле (8) число r таково, что $\Psi(r) = \nu$, функция Ψ введена в (7).

Теорема 19. *Пусть выполнены условия (7) и (9) для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}$ с мальтусовским параметром ν. Тогда для любой стартовой точки $x \in \mathbb{Z}$ имеет место следующее соотношение:*

$$\frac{T_u}{u} \to \frac{r}{\nu}, \quad u \to \infty, \quad \text{на множестве} \quad \mathcal{I},$$

причем для почти всех $\omega \in \Omega$ справедливо неравенство $\liminf\limits_{u\to\infty} \frac{T_u}{u} \geq \frac{r}{\nu}$.

До сих пор в главах 2 и 3 обсуждалось распространение популяции с ростом времени в случае ее невырождения, что возможно только в надкритическом случае. В критическом и докритическом КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ популяция частиц вырождается локально (см. результаты главы 1), хотя глобально на решетке с некоторого момента может оставаться некое количество частиц, которые продолжают блуждать, но уже никогда не попадут в катализаторы и никогда не произведут потомков, а, следовательно, их общая численность останется неизменной. В таком случае естественнее ставить вопрос не о том, как быстро распространяется популяция, а о том, насколько далеко частицы смогут отойти от начальной точки прежде, чем наступит вырождение.

Следует добавить, что в разделе 3.2 исключается детерминированный случай, когда $f_k(s) = s$, $s \in [0,1]$, для всех $k = 1,\ldots,N$. Будет исследоваться случайная величина $M := \max\{M_t,\ t \geq 0\}$ – максимальное отклонение (вправо от начала координат) КВСБ за всю историю существования популяции частиц. Ясно, что $M \geq z$, где z – стартовая точка КВСБ.

В формулировках теорем 20 и 21 рассматривается простое случайное блуждание S по решетке $\mathbb{Z}$. Это означает, что

$$\frac{q(x,x+1)}{-q(x,x)} = p, \quad \frac{q(x,x-1)}{-q(x,x)} = 1-p, \quad q(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad |x-y| \geq 2,$$

где $p \in (0,1)$. Такое случайное блуждание называется симметричным, если $p = 1/2$, и несимметричным иначе. Другими словами, за один скачок частица, совершающая простое случайное блуждание по $\mathbb{Z}$, переходит в соседнюю точку справа с вероятностью p и в соседнюю точку слева с вероятностью $1-p$. Простое случайное блуждание по $\mathbb{Z}$ возвратно тогда и только тогда, когда оно симметрично (см., например, монографию[45], теорема 13.3.1).

При доказательствах теорем 20 и 21, сформулированных ниже, выводятся уравнения для исследуемых вероятностей. Эти уравнения справедливы для произвольного числа катализаторов и любого случайного блуждания, удовлетворяющего условию (4) (не только для простого случайного блуждания). Однако для дальнейшего изучения решений упомянутых уравнений надо знать такие свойства случайных блужданий, которые легко устанавливаются в случае простого блуждания и требуют отдельного исследования в ином случае. Поэтому в разделе 3.2 основные результаты опираются на предположение о простоте случайного блуждания.

В теоремах 20 и 21 также предполагается, что множество W состоит из одного катализатора, расположенного в начале координат 0, а стартовая точка тоже находится в 0. Асимптотические результаты в теоремах 20 и 21 справедливы и при более широких предположениях о любом конечном числе катализаторов и произвольной стартовой точке. Отличие состоит лишь в константах, фигурирующих в асимптотических формулах. Однако вид этих констант существенно зависит от взаимного расположения стартовой точки и катализаторов, а также расстояний между ними, почему соответствующие громоздкие выражения не приводятся.

В следующей теореме устанавливается асимптотическое поведение хвоста распределения случайной величины M для критического КВСБ по $\mathbb{Z}$, в котором случайное блуждание является простым и симметричным. Здесь и далее, если речь идет об одном катализаторе, то предполагается, что, без ограничения общности, он расположен в 0, и индекс 1 у символов α_1, ξ_1, f_1 и m_1 опускается. Поскольку, как отмечалось ранее, простое симметричное случайное блуждание является возвратным, то вероятность возвращения из 0 в 0, обозначаемая $F_{0,0}(\infty)$, есть 1. Поэтому определение критического КВСБ (см. определение 1) приводит к равенству $\alpha m + (1-\alpha)F_{0,0}(\infty) = 1$, что равносильно $m = 1$. Другими словами, при возвратном случайном блуждании КВСБ с одним катализатором будет критическим тогда и только тогда, когда ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с числом ξ потомков одной частицы является критическим.

Теорема 20. *Пусть $f'(1) = 1$ и $f''(1) = \sigma^2 \in (0,\infty)$ для КВСБ по $\mathbb{Z}$, в котором случайное блуждание S является простым и симметричным. Тогда*

$$\mathsf{P}_0\left(M > x\right) \sim \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha\sigma^2}\sqrt{x}}, \quad x \to \infty.$$

[45]Боровков А.А. *Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2013, 448 с.

Результат теоремы 20 является аналогом основного результата статьи[46], полученного для модели критического ВСБ по $\mathbb{Z}$. Однако в последней модели скорость убывания вероятности $\mathsf{P}_0\left(M > x\right)$ имеет порядок $1/x^2$ при $x \to \infty$. Таким образом, частицы в критическом КВСБ успевают значительно дальше уйти от катализатора, прежде чем вернуться в него и возможно погибнуть, чем в модели ВСБ, в которой частицы могут погибнуть в любой точке.

Теорема 21 дает решение такой же задачи, как в теореме 20, с той лишь разницей, что теперь рассматривается докритическое КВСБ по $\mathbb{Z}$.

Теорема 21. *Пусть $m = f'(1) < 1$ для КВСБ по $\mathbb{Z}$, в котором случайное блуждание S является простым и симметричным. Тогда*

$$\mathsf{P}_0\left(M > x\right) \sim \frac{1-\alpha}{2\alpha(1-m)x}, \quad x \to \infty.$$

Результат теоремы 21 является аналогом основного результата статьи[47], посвященной докритическому ВСБ по $\mathbb{Z}$. Однако в последнем случае вероятность $\mathsf{P}_0\left(M > x\right)$ убывает экспоненциально быстро. Поэтому приведенный результат диссертации принципиально отличается от указанного. Это отличие опять же связано с возможной гибелью частиц в каждой точке решетки в модели ВСБ.

В теоремах 22 и 23 содержится исследование максимума M в случае простого несимметричного случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ соответственно при критическом и докритическом режимах.

Цель раздела 3.3 состоит в том, чтобы завершить исследование локальных численностей частиц в КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с одним катализатором, поскольку результаты для надкритического КВСБ с одним источником ветвления уже были известны благодаря статье[34], а для критического установлены ранее в[48]. Следует отметить, что теоремы для локальных численностей частиц в критическом КВСБ верны при условии конечной дисперсии числа потомков каждой частицы, в то время как в рамках докритического КВСБ автору диссертации удалось обойтись существованием момента порядка $1 + \delta$, где $\delta \in (0,1]$. Для этого потребовалось учитывать тонкую взаимосвязь между дробными моментами случайных величин и дробными производными их преобразований Лапласа. Вместо традиционной производной по Риману–Лиувиллю в диссертации используется современная лемма из работы[49]. Теорема 24 показывает, как именно

[46] Lalley S.P., Shao Y. On the maximal displacement of critical branching random walk. *Probab. Theory Relat. Fields*, 162(1), 2015, 71-96.

[47] Neuman E., Zheng X. On the maximal displacement of subcritical branching random walks. *Probab. Theory Relat. Fields*, 167(4), 2017, 1137-1164.

[48] Bulinskaya E.Vl. Local Particles Numbers in Critical Branching Random Walk. *J. Theoret. Probab.*, 27(3), 2014, 878-898.

[49] Klar B. On a test for exponentiality against Laplace order dominance. *Statistics*, 37(6), 2003, 505-515.

асимптотическое поведение средних локальных численностей частиц существенным образом зависит от размерности d целочисленной решетки в докритическом КВСБ с одним катализатором. Теорема 25 дает полную картину того, как быстро стремятся к нулю вероятности невырождения локальных численностей частиц при $t \to \infty$. Теорема 26 представляет собой аналог условных предельных теорем ягломовского типа для локальных численностей частиц при любой размерности d. Доказательства этих теорем опираются также на представление комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр (см.[13]) и на тауберовы теоремы для производных преобразований Лапласа (см. раздел 7.3 в[50]).

Наконец, обратимся к КВСБ с бесконечным множеством катализаторов, имеющим периодическую структуру, причем интенсивности катализаторов могут быть различными. Такая модель с периодически расположенными источниками ветвления была предложена в статье[17] и названа ВСБ на периодических графах. В отличие от [17] и [51], в диссертации ставятся и решаются задачи не об асимптотическом по времени поведении локальных численностей частиц в ВСБ на периодических графах, а о пространственном распространении облака этих частиц с ростом времени. При этом не используются методы спектральной теории операторов, как в работах [17] и [51], и поэтому не предполагается симметричность случайного блуждания.

Стоит отметить, что для работ по ветвящимся процессам результаты, как правило, устанавливались в предположении, что все частицы одного и того же типа, а затем уже полученные результаты обобщались на случай нескольких типов частиц. Аналогично в разделе 3.4 вначале предполагается, что все источники ветвления имеют одинаковые характеристики, и выводятся результаты о распространении популяции (теорема 27). Затем дается упрощенный вид записи асимптотической формы ВСБ, благодаря чему приводится ряд иллюстрирующих примеров. Далее в разделе 3.5 эти результаты переносятся на случай, когда источники ветвления имеют различные характеристики, которые также меняются периодически. Однако полученная асимптотическая форма ВСБ, выраженная через перроновы корни заданных матричных функций, уже не допускает упрощений.

Перейдем к точному описанию исследуемой модели. Пусть $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_d$ – семейство линейно независимых, необязательно ортогональных векторов из $\mathbb{R}^d$ с целочисленными координатами. Определим решетку

[50] Ватутин В.А. *Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса.* Лекц. курсы НОЦ, **12**, Москва, МИАН, 2009, 112 с.

[51] Платонова М.В., Рядовкин К.С. Об асимптотическом поведении средних значений некоторых функционалов от ветвящегося случайного блуждания. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 505, 2021, 185-206.

$\Gamma := \left\{\mathbf{g} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{g} = \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{g}_j, n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, d\right\}$, где набор $\left\{\mathbf{g}_j\right\}_{j=1}^d$ называется ее базисом. Заметим, что разные базисы могут порождать одну и ту же решетку.

Считаем, что случайное блуждание $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ представляет собой марковскую цепь с непрерывным временем, которая задается инфинитезимальной матрицей $A = (a(\mathbf{y},\mathbf{z}))_{\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d}$, обладающей следующими свойствами:

(i) $a(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq 0$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$, $\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$;
(ii) $a(\mathbf{y},\mathbf{y}) < 0$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$;
(iii) $\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} a(\mathbf{y},\mathbf{z}) = 0$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$;
(iv) $a(\mathbf{y} + \mathbf{g},\mathbf{z} + \mathbf{g}) = a(\mathbf{y},\mathbf{z})\ \forall\, \mathbf{g} \in \Gamma$, $\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$;
(v) $\sum_{\mathbf{g} \in \Gamma} e^{\langle \theta, \mathbf{g} \rangle} a(\mathbf{y},\mathbf{z} + \mathbf{g}) < \infty$ для всех θ из некоторой окрестности точки $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ при всех $\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$;
(vi) для всех $\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ существует путь $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(0)},\mathbf{y}^{(1)},\ldots,\mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{z}$ такой, что при всех $i = 1,\ldots,m$ верно неравенство $a\left(\mathbf{y}^{(i-1)},\mathbf{y}^{(i)}\right) > 0$.

Свойство **(iv)** означает, что элементы матрицы A инвариантны относительно сдвига на любой вектор из Γ. Условие **(iv)** является более слабым предположением, чем требование пространственной однородности случайного блуждания, фигурирующее, например, в работах[12] и[17], а также в разделах 2.1–2.5 и 3.4. Согласно **(v)** скачок случайного блуждания $\mathbf{S}$ удовлетворяет условию Крамера в некоторой окрестности $\mathbf{0}$, т.е. хвосты распределения скачка случайного блуждания предполагаются легкими. Свойство **(vi)** влечет неразложимость матрицы A и неприводимость марковской цепи $\mathbf{S}$, т.е. каждая точка из $\mathbb{Z}^d$ достижима для случайного блуждания $\mathbf{S}$.

Введем на $\mathbb{Z}^d$ отношение эквивалентности. А именно, точки $\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ эквивалентны, если $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \Gamma$. Соответствующее фактор-пространство, которое обозначим $\Upsilon := \mathbb{Z}^d/\Gamma$, назовем фундаментальным множеством вершин. Этому множеству можно взаимно однозначно поставить в соответствие некоторый набор $\{\mathbf{z}^{(1)},\ldots,\mathbf{z}^{(p)}\}$ попарно неэквивалентных точек из $\mathbb{Z}^d$. Без ограничения общности считаем, что $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{0}$. Для фиксированного выбора $\Upsilon = \{\mathbf{z}^{(1)},\ldots,\mathbf{z}^{(p)}\}$ любой элемент $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ представим в виде: $\mathbf{y} = \mathbf{u}_\mathbf{y} + \gamma_\mathbf{y}$, где $\mathbf{u}_\mathbf{y} \in \Upsilon$ и $\gamma_\mathbf{y} \in \Gamma$.

Источник ветвления в точке $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ описывается набором коэффициентов $b_k(\mathbf{y})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условию $b_1(\mathbf{y}) \leq 0$, $b_k(\mathbf{y}) \geq 0$ при $k \neq 1$, $\sum_{k=0}^\infty b_k(\mathbf{y}) = 0$. Эта последовательность коэффициентов однозначно определяется производящей функцией $B(\mathbf{y},s) := \sum_{k=0}^\infty b_k(\mathbf{y}) s^k$, $s \in [0,1]$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$. Таким образом, вероятность того, что частица, попавшая в источник ветвления $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, превратится за время t в $k = 0,1,2,\ldots$ дочерних частиц ($k = 0$ означает гибель частицы без производства потомства), имеет вид $p_k(\mathbf{y},t) = b_k(\mathbf{y})t + o(t)$, $k \neq 1$, и $p_1(\mathbf{y},t) = 1 + b_1(\mathbf{y})t + o(t)$, $t \to 0+$.

Далее предполагаем, что для каждого $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ конечна величина $\beta(\mathbf{y}) := B'(\mathbf{y},1) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k(\mathbf{y}) < \infty$. Иначе говоря, среднее число потомков одной частицы конечно. Более того, считаем, что функции $b_k(\mathbf{y})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и, следовательно, производящая функция $B(\mathbf{y},s)$, $s \in [0,1]$, являются Γ-периодичными по переменной $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, т.е. $B(\mathbf{y}+\mathbf{g},\cdot) = B(\mathbf{y},\cdot)$ для любого $\mathbf{g} \in \Gamma$. Тем самым, имеется p различных видов источников ветвления на всей решетке $\mathbb{Z}^d$. При выборе $\Upsilon = \{\mathbf{z}^{(1)},\ldots,\mathbf{z}^{(p)}\}$ положим $b_{jk} := b_k\left(\mathbf{z}^{(j)}\right)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и $\beta_j := \beta\left(\mathbf{z}^{(j)}\right)$, $j = 1,\ldots,p$. Заметим, что если в точке $\mathbf{z}^{(j)}$ нет источника ветвления, то $b_{jk} = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $B\left(\mathbf{z}^{(j)},s\right) = 0$ при всех $s \in [0,1]$.

Итак, каждая частица, находящаяся в момент времени t в точке $\mathbf{y} = \mathbf{u}_{\mathbf{y}} + \gamma_{\mathbf{y}}$, где, например, $\mathbf{u}_{\mathbf{y}} = \mathbf{z}^{(j)}$ для некоторого $j = 1,\ldots,p$, независимо от остальных частиц в промежутке времени $[t,t+h)$ эволюционирует следующим образом. Она может перейти в точку $\mathbf{z} \neq \mathbf{y}$ с вероятностью $a(\mathbf{y},\mathbf{z})h + o(h)$, а может погибнуть или разделиться на $k > 1$ дочерних частиц, расположенных в точке $\mathbf{y}$, соответственно с вероятностью $b_{jk}h + o(h)$, $k \neq 1$. Также допускается, что она не претерпит никаких изменений с вероятностью $1 + a(\mathbf{y},\mathbf{y})h + b_{j1}h + o(h) = 1 - \sum_{\mathbf{z}\neq\mathbf{y}} a(\mathbf{y},\mathbf{z})h - \sum_{k\neq 1} b_{jk}h + o(h)$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ имеется одна частица на решетке, расположенная в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Новые частицы ведут себя согласно тем же вероятностным законам, что и родительская частица, независимо друг от друга и от предыстории процесса.

Аналогично классическим ветвящимся процессам вводится случайное событие $\mathcal{I}$, на котором популяция частиц выживает. Согласно статье[17] ВСБ на периодических графах называется *надкритическим*, если положителен перронов корень ρ матрицы $M = (m_{ij})_{i,j=1}^{p}$, где

$$m_{ij} := \delta_{i,j}\beta_i + \sum\nolimits_{\mathbf{g}\in\Gamma} a\left(\mathbf{z}^{(i)},\mathbf{z}^{(j)} + \mathbf{g}\right), \quad i,j = 1,\ldots,p.$$

Такое определение надкритичности рассматриваемого ВСБ согласуется с леммой 45 диссертации, в которой устанавливается, что вероятность выживания $\mathsf{P}(\mathcal{I})$ строго положительна тогда и только тогда, когда ВСБ надкритическое. Определение, данное в статье[17], базируется на подходе, связанном со спектральной теорией операторов, и предполагает симметричность матрицы A. Упомянутая выше лемма справедлива без таких дополнительных ограничений. Полезно, что в предложении 1 в статье[17] даны два достаточных условия положительности перронова корня ρ матрицы M.

Далее исследуется только надкритическое ВСБ на периодических графах, поскольку вопрос о пространственном распространении облака частиц при неограниченном росте времени имеет смысл лишь для популяции, которая не вырождается.

Пусть $N(t) \subset \mathbb{Z}^d$ – случайное множество частиц в рассматриваемом ВСБ, существующих в момент времени $t \geq 0$, а $\mathbf{X}^v(t) = (X_1^v(t), \ldots, X_d^v(t))$ – положение частицы v из множества $N(t)$ в момент t. Обозначим $\mathcal{P}_t := \{\mathbf{X}^v(t)/t : v \in N(t)\} \subset \mathbb{R}^d$ – случайное множество нормированных положений всех частиц, существующих в ВСБ в момент времени t.

Рассмотрим семейство неотрицательных матриц $R(\theta,\phi) = (R_{ij}(\theta,\phi))_{i,j=1}^p$ для всех значений θ, удовлетворяющих условию **(v)** случайного блуждания, и всех значений ϕ таких, что $\phi > -\min\left\{a^{(i)} + b^{(i)} : i = 1, \ldots, p\right\}$. А именно, положим

$$R_{ij}(\theta,\phi) := \delta_{i,j} \frac{\beta_i + b^{(i)}}{\phi + a^{(i)} + b^{(i)}} + \frac{e^{-\langle \theta, \mathbf{z}^{(j)} - \mathbf{z}^{(i)} \rangle}}{\phi + a^{(i)} + b^{(i)}} \sum_{\mathbf{g} \in \Gamma,\, \mathbf{g} \neq \mathbf{0}} e^{-\langle \theta, \mathbf{g} \rangle} a\left(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}^{(j)} + \mathbf{g}\right),$$

где $a^{(i)} := -a\left(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)}\right)$ и $b^{(i)} := -b_{i1}$, $i = 1, \ldots, p$.

Введем множество

$$\mathcal{P} := \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \Theta_1(\mathbf{z}) \supset \Theta_2(\mathbf{z})\right\}, \quad \text{где} \quad \Theta_1(\mathbf{z}) := \left\{\theta \in \mathbb{R}^d : r\left(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle\right) \geq 1\right\},$$

и пусть множества $\Theta_2(\mathbf{z})$ для $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ задаются следующим образом:

$$\left\{\theta \in \mathbb{R}^d : \sum_{\mathbf{g} \in \Gamma} e^{\langle \theta, \mathbf{g} \rangle} a(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{g}) < \infty \ \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d, \min_{i \in \{1, \ldots, p\}} \left\{a^{(i)} + b^{(i)}\right\} > \langle \mathbf{z}, \theta \rangle\right\},$$

а $r(\theta,\phi)$ – перронов корень матрицы $R(\theta,\phi)$. Обратим внимание, что множество $\Theta_2(\mathbf{z})$ – это область определения матрицы $R\left(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle\right)$, следовательно, и ее перронова корня $r\left(\theta, -\langle \mathbf{z}, \theta \rangle\right)$.

Напомним, что расстояние Хаусдорфа $\Delta(D,F)$ между множествами $D,F \subset \mathbb{R}^d$ задается формулой

$$\Delta(D,F) := \inf\left\{\varepsilon \geq 0 : D \subset F_\varepsilon, F \subset D_\varepsilon\right\},$$

где $D_\varepsilon := \cup_{\mathbf{x} \in D} \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \varepsilon\right\}$ и $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 28, формулируемая ниже, – основной результат раздела 3.5, показывающий, что после нормирования положений всех частиц в ВСБ на периодических графах в момент t множителем t^{-1} случайное облако частиц "стягивается" с ростом времени к предельному множеству $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^d$ на событии выживания популяции. Мерой близости допредельного случайного нормированного облака частиц $\mathcal{P}_t$ и так называемой асимптотической формы $\mathcal{P}$ изучаемого ВСБ служит расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое для всех элементарных исходов $\omega \in \mathcal{I}$, кроме, возможно, подмножества нулевой вероятности события $\mathcal{I}$.

Теорема 28. *Пусть выполнены условия* **(i)**–**(vi)** *для надкритического ВСБ на периодических графах. Тогда множество $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ компактно, выпукло и имеет место соотношение*

$$\Delta(\mathcal{P}_t, \mathcal{P}) \to 0 \quad \text{п.н. на событии} \quad \mathcal{I} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Таким образом, в разделе 3.5 изучено распространение популяции частиц в ВСБ с бесконечным числом источников ветвления, вообще говоря, различной интенсивности, расположенных периодически. Установлено, что при надкритическом режиме в случае легких хвостов распределения скачка случайного блуждания облако частиц распространяется асимптотически линейно по времени, когда время стремится к бесконечности. Другими словами, после нормировки всех положений частиц в момент t множителем t^{-1} нормированное облако частиц стремится с ростом времени к предельному множеству $\mathcal{P}$. В диссертации найдена явная формула для описания множества $\mathcal{P}$, а все результаты справедливы в смысле сходимости почти наверное. Выполненное исследование дополняет результаты раздела 2.3 и статьи[15], установленные для ВСБ с любым конечным числом произвольно расположенных источников ветвления. Доказательства теорем 27 и 28 используют рассмотрение ВСБ на периодических графах в рамках модели общего ВСБ с p типами частиц и применение результатов статей[52] и [53]. При этом существенную роль играют преобразование Лапласа, вспомогательные марковские ветвящиеся процессы с p типами частиц, теория неотрицательных и квазинеотрицательных матриц, в том числе теорема Перрона–Фробениуса.

В **заключении** отмечены основные результаты работы. К ним относится полная классификация каталитических ветвящихся процессов, естественность которой подтверждена моментным анализом локальных и общих численностей частиц, а также установленными предельными теоремами. Эти результаты позволили провести целостное исследование геометрических свойств предельной формы фронта распространения популяции в пространстве и времени для моделей каталитических ветвящихся случайных блужданий. Иначе говоря, при разнообразных условиях, налагаемых на характеристики блуждания и ветвления, найдены нормирующие функции для координат случайного облака частиц, обеспечивающие в пределе по времени разделение пространства на зоны занятую частицами и свободную от них. Обнаружены новые эффекты, связанные с тяжестью хвоста распределения скачка случайного блуждания. Также решен ряд других задач, возникающих при исследовании новых моделей ветвящихся случайных блужданий. Доказаны вспомогательные результаты (например, относящиеся к анализу марковских цепей с непрерывным временем), которые представляют самостоятельный интерес. Подчеркнуто, что на основе сочетания и дальнейшего развития современной вероятностной и аналитической техники достигнуты все поставленные цели диссертации, а многие

[52]Biggins J.D. The Asymptotic Shape of the Branching Random Walk. *Adv. Appl. Probab.*, 10(1), 1978, 62-84.

[53]Biggins J.D. How fast does a general branching random walk spread? *In: Classical and Modern Branching Processes* (eds. Athreya K.B., Jagers P.). *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, 84, Springer, New York, 1997, 19-39.

полученные результаты являются неулучшаемыми и носят приоритетный характер. Кроме того, автором намечены некоторые направления дальнейших исследований, связанных с данной диссертационной работой.

Благодарности

Автор пользуется возможностью выразить свою признательность заведующему кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова действительному члену академии криптографии РФ профессору А. М. Зубкову и всем коллегам за творческую атмосферу в коллективе.

Автор глубоко благодарен профессору Е. Б. Яровой за полезные обсуждения, внимание к работе и постоянную поддержку. Также хочется искренне поблагодарить профессора В. А. Ватутина и профессора С. Г. Фосса за возможность решать интересные задачи в рамках работы по грантам РФФИ и РНФ, которыми они руководили.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных изданиях Web of Science, SCOPUS и RSCI

[1] Булинская Е. Вл. Докритическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с конечной или бесконечной дисперсией числа потомков // Труды МИАН. — 2013. — Т. 282. — С. 69–79.
Bulinskaya E. Vl. Subcritical catalytic branching random walk with finite or infinite variance of offspring number // Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — Vol. 282. — Pp. 62–72.

WoS JIF – 0.5/ 0.67 п.л.

[2] Bulinskaya E. Vl. Finiteness of hitting times under taboo // Statist. Probab. Lett. — 2014. — Vol. 85, no. 1. — Pp. 15–19.

WoS JIF – 0.8/ 0.42 п.л.

[3] Булинская Е. Вл. Полная классификация каталитических ветвящихся процессов // Теория вероятн. и ее примен. — 2014. — Т. 59, № 4. — С. 639–666.
Bulinskaya E. Vl. Complete classification of catalytic branching processes // Theory Probab. Appl. — 2015. — Vol. 59, no. 4. — Pp. 545–566.

WoS JIF – 0.6/ 1.64 п.л.

[4] Булинская Е. Вл. Сильная и слабая сходимость размера популяции в надкритическом каталитическом ветвящемся процессе // Докл. РАН. — 2015. — Т. 465, № 4. — С. 398–402.
Bulinskaya E. Vl. Strong and weak convergence of the population size in a supercritical catalytic branching process // Dokl. Math. — 2015. — Vol. 92, no. 3. — Pp. 714–718.

WoS JIF – 0.6/ 0.497 п.л.

[5] Bulinskaya E. Vl. Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice // Stoch. Proc. Appl. — 2018. — Vol. 128, no. 7. — Pp. 2325–2340.

WoS JIF – 1.4/ 1.16 п.л.

[6] Булинская Е. Вл. Флуктуации фронта распространения каталитического ветвящегося блуждания // Теория вероятн. и ее примен. — 2019. — Т. 64, № 4. — С. 642–670.
Bulinskaya E. Vl. Fluctuations of the propagation front of a catalytic branching walk // Theory Probab. Appl. — 2020. — Vol. 64, no. 4. — Pp. 513–534.

WoS JIF – 0.6/ 1.39 п.л.

[7] Булинская Е. Вл. Максимум каталитического ветвящегося случайного блуждания // УМН. — 2019. — Т. 74, № 3. — С. 187–188.
Bulinskaya E. Vl. Maximum of a catalytic branching random walk // Russian Math. Surveys. — 2019. — Vol. 74, no. 3. — Pp. 546–548.

WoS JIF – 0.9/ 0.17 п.л.

[8] Bulinskaya E. Vl. Multidimensional catalytic branching random walk with regularly varying tails // Proc. of 2nd Int. Conf. Math. and Stat., Prague, Czech Republic, July 8-10, 2019. — ACM Int. Conf. Proc. Series. — New York: ACM, 2019. — Pp. 6–13.

SCOPUS SJR – 0.25/ 0.87 п.л.

[9] Bulinskaya E. Vl. Isotropic multidimensional catalytic branching random walk with regularly varying tails // Компьют. исслед. моделир. — 2019. — Т. 11, № 6. — С. 1033–1039.
Bulinskaya E. Vl. Isotropic multidimensional catalytic branching random walk with regularly varying tails // Comput. Res. Model. — 2019. — Vol. 11, no. 6. — Pp. 1033–1039.

SCOPUS SJR – 0.22/ 0.56 п.л.

[10] Bulinskaya E. Vl. On the maximal displacement of catalytic branching random walk // Сиб. электрон. матем. изв. — 2020. — Т. 17. — С. 1088–1099.
Bulinskaya E. Vl. On the maximal displacement of catalytic branching random walk // Sib. Electron. Math. Rep. — 2020. — Vol. 17. — Pp. 1088–1099.

SCOPUS SJR – 0.416/ 0.79 п.л.

[11] Bulinskaya E. Vl. Maximum of catalytic branching random walk with regularly varying tails // J. Theoret. Probab. — 2021. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 141–161.

WoS JIF – 0.8/ 1.14 п.л.

[12] Bulinskaya E. Vl. Catalytic branching random walk with semiexponential increments // Math. Popul. Stud. — 2021. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 123–153.

WoS JIF – 1.8/ 1.54 п.л.

[13] Булинская Е. Вл. Время первого достижения высокого уровня каталитическим ветвящимся блужданием // Труды МИАН. — 2022. — Т. 316. — С. 105–112.
Bulinskaya E. Vl. First Hitting Time of a High Level by a Catalytic Branching Walk // Proc. Steklov Inst. Math. — 2022. — Vol. 316. — Pp. 97–104.

WoS JIF – 0.5/ 0.53 п.л.

[14] Булинская Е. Вл. Распространение фронта ветвящегося случайного блуждания с периодическими источниками ветвления // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2024. — № 1. — С. 31–40.
Bulinskaya E. Vl. Front propagation of branching random walk with periodic branching sources // Mosc. Univ. Math. Bull. — 2024. — Vol. 79, no. 1. — Pp. 34–43.

WoS JIF – 0.4/ 0.78 п.л.

[15] Булинская Е. Вл. Распространение ветвящегося случайного блуждания на периодических графах // Труды МИАН. — 2024. — Т. 324. — С. 73–82.

WoS JIF – 0.5/ 0.77 п.л.

Булинская Екатерина Владимировна

Вероятностно-геометрические свойства

пространственного ветвящегося случайного блуждания

Автореф. дис. на соискание ученой степени д-р физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 120 экз.
Типография _______________________________________