

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б.Н. ЕЛЬЦИНА

На правах рукописи

Перминов Александр Сергеевич

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ДИНАМИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ
ЧЕТЫРЁХПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ НА
КОСМОГОНИЧЕСКИХ ИНТЕРВАЛАХ ВРЕМЕНИ**

Специальность 1.3.1. Физика космоса, астрономия

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Кузнецов Эдуард Дмитриевич,
доктор физико-математических наук,
доцент

Екатеринбург — 2022

Оглавление

Введение	5
1 Современное состояние в области исследования динамической эволюции планетных систем	18
1.1 Теории движения больших планет Солнечной системы в их историческом развитии	18
1.2 Современные теории движения больших планет Солнечной системы	21
1.2.1 Высокоточные теории движения — эфемериды больших планет Солнечной системы	21
1.2.2 Теории движения, описывающие эволюцию больших планет Солнечной системы на космогонических интервалах времени	23
1.3 Обзор текущего состояния в области исследования внесолнечных планетных систем	27
1.3.1 Краткий анализ характеристик внесолнечных планет	27
1.3.2 Методы обнаружения внесолнечных планет	31
1.3.3 Обзор планетных систем, рассматриваемых в настоящей диссертации	33
2 Разложение гамильтониана четырёхпланетной задачи в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре	36
2.1 Система координат Якоби	36
2.2 Вторая система элементов Пуанкаре	38
2.3 Гамильтониан планетной системы	39
2.4 Алгоритм разложения гамильтониана	40
2.5 Базовые разложения	43
2.6 Система компьютерной алгебры Piranha	45
2.7 Разложение гамильтониана четырёхпланетной задачи. Применение пуассоновского процессора	47
2.8 Анализ полученных рядов	50

2.9	Оценка точности построения разложения для возмущающей функции четырёхпланетной задачи	52
2.10	Выводы	58
3	Построение осреднённых уравнений движения четырёхпланетной задачи методом Хори–Депри	59
3.1	Метод Хори–Депри	59
3.2	Выполнение преобразований Ли	63
3.3	Некоторые свойства полученных рядов	65
3.4	Выводы	69
4	Динамическая эволюция четырёхпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун на космогонических интервалах времени	71
4.1	Численное интегрирование уравнений движения в средних элементах	71
4.2	Оценка точности численного интегрирования	79
4.3	Оценка короткопериодических возмущений	81
4.4	Сравнение с результатами других теорий движения	83
4.5	Интегрирование с близкими начальными условиями	87
4.6	Сравнение результатов интегрирования уравнений движения в средних элементах для различных начальных условий	89
4.7	Выводы	92
5	Исследование динамической эволюции внесолнечных планетных систем	93
5.1	Общие соображения	93
5.2	Динамическая эволюция трёхпланетной системы GJ 3138	99
5.2.1	Результаты моделирования	99
5.2.2	Точность интегрирования уравнений движения в средних элементах	105
5.2.3	Сравнение с результатами прямого численного интегрирования	108
5.2.4	Свойства динамической эволюции системы GJ 3138	112
5.3	Динамическая эволюция трёхпланетной системы HD 39194	118
5.4	Динамическая эволюция четырёхпланетной системы HD 141399	124
5.5	Динамическая эволюция четырёхпланетной системы HD 160691	127
5.6	Границы применимости теории движения	130
5.7	Выводы	136

Заключение	137
Список литературы	145
Приложение А Программная реализация скриптов, используемых для построения разложения гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона	155
Приложение Б Отрезки рядов, представляющие осреднённый гамильтониан четырёхпланетной задачи	162
Приложение В Численная оценка значений некоторых знаменателей, входящих в слагаемые осреднённого гамильтониана	166

Введение

Начиная со времен античных философов, а именно Евдокса Книдского, основной задачей теоретической астрономии было объяснение видимого движения планет Солнечной системы с математической точки зрения. Моментом же зарождения классической небесной механики можно считать открытие Иоганном Кеплером его знаменитых трёх законов движения планет, обобщённых в дальнейшем законом всемирного тяготения Исаака Ньютона. С развитием науки и техники, к настоящему времени, круг задач, рассматриваемых в рамках небесной механики, значительно расширился, появились новые методы исследований. Развитие космонавтики, рост производительности вычислительной техники, появление новых высокоточных наблюдательных инструментов привели к качественному росту наших знаний о динамике Солнечной системы. Новые наблюдательные методы и появление околоземной астрономии, позволили в последние годы открыть тысячи внесолнечных планетных систем. В том числе — сотни многопланетных систем.

Современные теории движения больших планет Солнечной системы можно разделить на две группы. В первую группу входят теории, описывающие движение планет с максимально возможной точностью на коротких интервалах времени — вплоть до нескольких тысяч лет. Это различные численные и аналитические эфемериды, используемые, в том числе, для обеспечения полётов космических аппаратов. Во вторую группу входят теории, дающие качественное описание параметров движения планет на космогонических интервалах времени — вплоть до десятков миллиардов лет.

Для изучения динамической эволюции внесолнечных планетных систем могут быть применены только теории второй группы, так как элементы орбит планет в данном случае известны из наблюдений с низкой точностью, а некоторые неизвестны вовсе.

Важнейшим свойством любой планетной системы, в том числе нашей Солнечной системы, является её устойчивость. По современным представлениям именно устойчивые планетные системы обеспечивают благоприятные условия для возникновения и развития жизни. Движение больших планет Солнечной системы как планет земной группы, так и планет-гигантов, хаотично с относительно короткими — 5–7 млн лет временами Ляпунова. Можно найти

начальные условия, при которых любая планета земной группы, может быть выброшена из Солнечной системы. Но учитывая иерархию масс — планеты земной группы на три порядка менее массивны, чем планеты-гиганты — Солнечная система является динамически устойчивой в целом. Тем не менее, остается открытым вопрос о динамической эволюции планетных систем с произвольными значениями масс планет и больших полуосей их орбит, умеренными значениями эксцентриситетов и наклонов орбит.

Кроме того, на устойчивость планетных систем значительное влияние может оказывать близость больших полуосей орбит к резонансным значениям. Например, пара Нептун – Плутон сохраняет свою устойчивую конфигурацию и избегает тесных сближений под влиянием резонанса средних движений $2 : 3$. Юпитер и Сатурн движутся на орбитах вблизи резонанса средних движений $2 : 5$ — так называемое «большое неравенство». Среди внесолнечных планетных систем также реализуются резонансные конфигурации. Отметим, что перекрытие резонансных зон и формирование областей хаотического движения может приводить к вековому дрейфу больших полуосей орбит, а значит к изменению орбитальной конфигурации системы.

В настоящей диссертации выполняется построение численно-аналитической теории движения третьего порядка по массам планет для четырёхпланетной задачи. **Предметом исследования** является эволюция трёх- и четырёхпланетных систем с умеренными значениями эксцентриситетов и наклонов орбит на космогонических интервалах времени. **Объектом исследования** являются: система Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун, внесолнечные трёхпланетные системы GJ 3138, HD 39194 и внесолнечные четырёхпланетные системы HD 141399, HD 160691. Построенная теория движения применяется для изучения динамической эволюции перечисленных планетных систем на космогонических интервалах времени.

Актуальность темы

В Солнечной системе планеты земной группы, в силу своей малой массы, не оказывают существенного влияния на движение планет-гигантов. Таким образом, использование четырёхпланетной модели (Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун) вполне приемлемо для определения качественных свойств и количественных характеристик динамической эволюции Солнечной системы.

Кроме того, к настоящему времени, среди обнаруженных внесолнечных планетных систем, известно уже свыше 800 многопланетных. Больше сотни из этих систем — с тремя планетами, около семи десятков — четырёхпланетные. И лишь около трёх десятков звезд имеют системы с числом планет большим четырёх. Следовательно, орбитальная эволюция большинства

внесолнечных планетных систем может быть исследована в рамках четырёхпланетной модели (при условии умеренности значений эксцентриситетов и наклонов их орбит).

Цели работы

1. Разработка численно-аналитического метода исследования орбитальной эволюции двух-, трёх- и четырёхпланетных систем с умеренными значениями эксцентриситетов и наклонов орбит на космогонических интервалах времени.
2. Качественное и количественное описание орбитальной эволюции Солнечной системы в рамках четырёхпланетного приближения (система Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун), построенного с точностью до третьего порядка по малому параметру.
3. Исследование орбитальной эволюции внесолнечных трёхпланетных систем GJ 3138, HD 39194 и четырёхпланетных HD 141399, HD 160691 для набора различных начальных условий — эксцентриситеты и наклоны орбит, долготы их восходящих узлов и аргументы перицентров варьируются в пределах ошибок с которыми они известны из наблюдений.
4. Определение начальных условий, соответствующих устойчивым и неустойчивым сценариям эволюции исследуемых внесолнечных планетных систем.

Научная новизна работы

Работа посвящена разработке нового численно-аналитического метода решения планетной задачи пяти тел и исследованию с его помощью орбитальной эволюции различных трёхпланетных и четырёхпланетных систем.

Новыми являются.

1. Алгоритм разложения гамильтониана планетной задачи, записанного в системе координат Якоби, в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре и степеням малого параметра вплоть до куба. При этом, все переменные в рядах сохраняются в символьном виде, а числовые коэффициенты представляют собой рациональные числа произвольной точности.
2. Реализация алгоритма метода Хори–Депри для получения рядов, представляющих производящую функцию преобразования между оскулирующими и средними элементами (с точностью до квадрата малого пара-

метра задачи) и гамильтониан задачи в средних элементах (с точностью до куба малого параметра задачи).

3. Использование для выполнения аналитических выкладок современной, высокопроизводительной системы компьютерной алгебры Piranha, представляющей собой эшелонированный пуассоновский процессор.
4. Исследование динамики четырёхпланетной модели Солнечной системы (Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун) на космогонических интервалах времени с помощью численно-аналитической теории движения, построенной до куба малого параметра задачи.
5. Моделирование на космогонических интервалах времени, в рамках построенной четырёхпланетной теории движения второго порядка по малому параметру, динамической эволюции внесолнечных планетных систем GJ 3138, HD 39194, HD 141399 и HD 160691 для набора начальных условий, в котором неизвестные и известные из наблюдений с ошибками элементы орбит варьируются в допустимых пределах.
6. Методика, позволяющая, на основе автоматизации моделирования орбитальной эволюции и обработки его результатов, сузить диапазон возможных значений элементов орбит внесолнечных планетных систем и определить их наиболее вероятные, с точки зрения устойчивости планетной системы, значения.

Научная и практическая ценность работы

Предложенный в настоящей работе метод разложения гамильтониана четырёхпланетной задачи в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре не подразумевает использование специальных функций небесной механики. По этой причине он предельно прост. Однако, вследствие этого, алгоритм требует больших затрат машинной памяти.

При этом, в рядах, представляющих гамильтониан задачи в оскулирующих элементах, слагаемые первого порядка по малому параметру построены с точностью до 6 степени по эксцентрическим и облическим элементам Пуанкаре, слагаемые второго порядка — до 4 степени, а слагаемые третьего порядка — до 2 степени по данным элементам орбит.

Осреднение построенного гамильтониана задачи проводится методом Хори–Депри с точностью до куба малого параметра. Полученные далее уравнения движения в средних элементах позволяют исследовать орбитальную эволюцию системы Солнце — Юпитер — Сатурн — Уран — Нептун на космогонических интервалах времени.

Функции замены переменных, определяющие связь между оскулирующими и средними элементами, построены с точностью до квадрата малого параметра. Мажоранты функций замены переменных позволяют определить амплитуды короткопериодических возмущений как отклонения оскулирующих элементов от средних.

Даны оценки знаменателей, возникающих в слагаемых осреднённого гамильтониана.

Для исследования динамической эволюции внесолнечных планетных систем используется менее точное разложение гамильтониана, построенное до квадрата малого параметра. Варьирование элементов орбит (при определении начальных условий моделирования) и предположение о стабильности наблюдаемых внесолнечных планетных систем позволяет исключить начальные условия, ведущие к экстремальному росту эксцентриситетов и наклонов орбит, и выявить такие, при которых указанные элементы сохраняют значения близкие к начальным на всем интервале моделирования.

Положения, выносимые на защиту

1. Реализованный метод разложения гамильтониана четырёхпланетной задачи, записанного в системе координат Якоби, в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре позволяет построить это разложение до произвольной степени по эксцентрическим и облическим элементам орбит и до третьей степени по малому параметру.
2. Реализованный алгоритм метода Хори–Депри позволяет построить ряды, представляющие производящую функцию осредняющего преобразования и гамильтониан четырёхпланетной задачи в средних элементах второй системы Пуанкаре, а также получить на их основе правые части уравнений движения (до третьей степени по малому параметру) и функции замены переменных (до второй степени по малому параметру).
3. Использование современной высокопроизводительной системы компьютерной алгебры *Piranha*, представляющей собой эшелонированный пуассоновский процессор, позволяет строить разложения, в которых все элементы орбит, частоты движения и массовые параметры сохраняются в символьном виде. При этом коэффициенты в рядах сохраняются в виде дробно-рациональных чисел произвольной точности, что позволяет исключить ошибки округления.
4. Интегрирование построенных аналитически уравнений движения в средних элементах позволяет получить характеристики и параметры орбитальной эволюции четырёхпланетной системы Солнце – Юпитер – Са-

турн – Уран – Нептун на космогонических интервалах времени для различных начальных условий.

5. Интегрирование построенных аналитически уравнений движения в средних элементах позволяет получить характеристики и параметры орбитальной эволюции планетных систем GJ 3138, HD 39194, HD 141399 и HD 160691 для набора различных начальных условий, а также определить условия устойчивости рассмотренных планетных систем на космогонических интервалах времени.

Апробация работы

Результаты по теме диссертации докладывались на объединённом семинаре кафедры астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды и Коуровской астрономической обсерватории УрФУ, а также на следующих всероссийских и международных конференциях.

1. 43-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 3–7 февраля 2014 г.
2. Международная конференция «Journées 2014. Пространственно-временные системы отсчета» («Journées 2014. Systèmes de référence spatio-temporels»). Санкт-Петербург, 22–24 сентября 2014 г.
3. 44-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 2–6 февраля 2015 г.
4. 21-я Международная конференция «Приложения компьютерной алгебры» («21-st Conference on Applications of Computer Algebra»). Каламата, Греция, 20–23 июля 2015 г.
5. Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково–2015». Санкт-Петербург, 21–25 сентября 2015 г.
6. 45-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 1–5 февраля 2016 г.
7. 46-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 30 января – 3 февраля 2017 г.
8. Всероссийская конференция «Современная звёздная астрономия – 2017». Екатеринбург, 14–16 июня 2017 г.

9. 23-я Международная конференция «Приложения компьютерной алгебры». («23-rd Conference on Applications of Computer Algebra»). Иерусалим, Израиль, 17–21 июля 2017 г.
10. Международная конференция по небесной механике «CELMES VII» («Seventh International Meeting on Celestial Mechanics – CELMES VII»). Сан-Мартино-аль-Чимино, Витербо, Италия, 2–10 сентября 2017 г.
11. Всероссийская астрономическая конференция – 2017 «Астрономия: познание без границ». Ялта, 17–22 сентября 2017 г.
12. Всероссийская конференция «Звёздообразование и планетообразование. Наблюдения, теория, численный эксперимент». Москва, 13–15 ноября 2017 г.
13. 47-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 29 января – 2 февраля 2018 г.
14. 7-я Пулковская молодежная астрономическая конференция. Санкт-Петербург, 28–31 мая 2018 г.
15. 24-я Международная конференция «Приложения компьютерной алгебры». («24-th Conference on Applications of Computer Algebra»). Сантьяго де Компостела, Испания, 18–22 июня 2018 г.
16. Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково–2018». Санкт-Петербург, 1–5 октября 2018 г.
17. 48-я Всероссийская с международным участием студенческая научная конференция «Физика Космоса». Екатеринбург, 28 января – 1 февраля 2019 г.
18. 4-я Международная конференция «Экстремальные солнечные системы» («Extreme Solar Systems IV»). Рейкьявик, Исландия, 18–23 августа 2019 г.
19. Всероссийская конференция «Современная звёздная астрономия – 2019». САО РАН, 7–11 октября 2019 г.
20. Всероссийская конференция «Звёздообразование и планетообразование. Наблюдения, теория, численный эксперимент». Москва, 12–13 ноября 2019 г.
21. 11-й Международный симпозиум по Солнечной системе («The Eleventh Moscow international Solar System Symposium»). Москва, 5–11 октября 2020 г.

22. Всероссийская астрономическая конференция 2021: «Астрономия в эпоху многоканальных исследований». Москва, 23–28 августа 2021 г.
23. 12-й Международный симпозиум по Солнечной системе («The Twelfth Moscow international Solar System Symposium»). Москва, 11–15 октября 2021 г.
24. 364-й Международный симпозиум («IAUS 364: Multi-scale (time and mass) Dynamics of Space Objects»). Яссы, Румыния, 18–22 октября 2021 г.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных изданиях, 7 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science/Scopus/RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности:

- 1.1. Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы – 2015. – Т. 49, № 6. – С. 469–480 (РИНЦ IF: 1.333 за 2021 год) // Переводная версия: Perminov A.S., Kuznetsov E.D. Expansion of the Hamiltonian of the planetary problem into the Poisson series in elements of the second Poincare system // Solar System Research – 2015. – V. 49. – № 6. – P. 430–441 (WoS IF: 0.706)
- 1.2. Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. Построение осредненных уравнений движения планетной задачи методом Хори–Депри в элементах второй системы Пуанкаре // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы – 2016. – Т. 50, № 6. – С. 450–461 (РИНЦ IF: 1.333 за 2021 год) // Переводная версия: Perminov A.S., Kuznetsov E.D. The Hori–Deprit method for averaged motion equations of the planetary problem in elements of the second Poincare system // Solar System Research – 2016. – V. 50. – № 6. – P. 426–436 (WoS IF: 0.706).
- 1.3. Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. Орбитальная эволюция четырехпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун на космогонических интервалах времени // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы – 2018. – Т. 52, № 3. – С. 239–259 (РИНЦ IF: 1.333 за 2021 год) // Переводная версия: Perminov A.S., Kuznetsov E.D. Orbital evolution of the Sun – Jupiter – Saturn – Uranus – Neptune four-planet system on long-time scales // Solar System Research – 2018. – V. 52. – № 3. – P. 241–259 (WoS IF: 0.706).

- 1.4. Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. Орбитальная эволюция внесолнечных планетных систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691 // *Астрономический журнал* – 2019. – Т. 96, № 10. – С. 795–814 (РИНЦ IF: 1.466 за 2021 год) // Переводная версия: Perminov A.S., Kuznetsov E.D. Orbital Evolution of the Extrasolar Planetary Systems HD 39194, HD 141399 and HD 160691 // *Astronomy Reports* – 2019. – V. 63. – № 10. – P. 795–813 (WoS IF: 0.98).
- 1.5. Perminov, A.S., Kuznetsov, E.D.: The implementation of Hori–Deprit method to the construction averaged planetary motion theory by means of computer algebra system Piranha // *Mathematics in Computer Science* – 2020. – V. 14. – № 2. – P. 305–316 (Scopus IF: 0.32).
- 1.6. Perminov A., Kuznetsov E. The orbital evolution of the Sun – Jupiter – Saturn – Uranus – Neptune system on long time scales // *Astrophysics and Space Science* – 2020. – V. 365. – № 8. – id. 144 (WoS IF: 1.83).
- 1.7. Perminov A., Kuznetsov E. The investigation of the dynamical evolution of extrasolar three-planetary system GJ 3138 // *Research in Astronomy and Astrophysics* – 2022. – V. 22. – № 1. – id. 015007 (WoS IF: 1.469).

А также 5 публикаций в трудах конференций:

- 2.1. Perminov A.S., Kuznetsov E.D. Expansion of the Hamiltonian of a planetary system into the Poisson series in all orbital elements // *Journées 2014. Systèmes de référence spatio-temporels: Recent developments and prospects in ground-based and space astrometry* / Eds. Malkin Z., Capitain N. – Spb.: IAA RAS, 2014. – P. 104–107.
- 2.2. Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. Построение осредненных уравнений движения планетной задачи методом Хори–Депри // *Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове № 223. Труды Всероссийской астрометрической конференции «Пулково – 2015».* – СПб.: Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 2016. – С. 241–246.
- 2.3. Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. Исследование орбитальной эволюции компактных внесолнечных планетных систем GJ 3138, HD 39194 // *Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове № 225. Труды Всероссийской астрометрической конференции «Пулково – 2018».* – СПб.: Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 2018. – С. 195–200.

- 2.4. Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. Динамическая эволюция системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун на интервале времени 10 млрд лет // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове № 226. Труды VII молодежной астрономической конференции. – СПб.: Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 2018. – С. 71–76.
- 2.5. Perminov A., Kuznetsov E. The semi-analytical motion theory of the third order in planetary masses for the Sun – Jupiter – Saturn – Uranus – Neptune’s system // International Astronomical Union Proceedings Series. Proceedings IAU Symposium № 364 / Eds. Sterken C., Hearnshaw J., Valls-Gabaud D. – 2022. – V. 15. – Iss. S364. – P. 211–213 (Scopus IF: 0.112).

Опубликован 1 препринт:

- 3.1. Perminov A., Kuznetsov E. The construction of averaged planetary motion theory by means of computer algebra system Piranha // arxiv.org, 2018. – URL: <https://arxiv.org/abs/1810.04270v1>.

Опубликованы тезисы 12 докладов.

Во всех работах вклад соавторов равнозначен. Во всех статьях автор принимал участие в постановке задачи.

Личный вклад автора

Автору принадлежит разработка, с помощью системы компьютерной алгебры Piranha, алгоритма для построения разложения гамильтониана четырёхпланетной задачи, записанного в координатах Якоби, в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре (работы 1.1, 2.1, 2.2). Отметим, что в работах 1.1 и 2.1 при разложении гамильтониана задачи в ряд Пуассона, возникающие в процессе полиномы Лежандра сохраняются в рядах в виде символьных переменных, а в работе 2.2 полиномы Лежандра выражаются через косинусы углов между радиус-векторами. В дальнейших работах (кроме 1.2) косинусы углов записываются через элементы второй системы Пуанкаре.

Автором разработан и реализован с помощью системы компьютерной алгебры Piranha алгоритм построения уравнений движения в средних элементах и функций замены переменных методом Хори–Депри до второго (работы 1.2, 2.2, 3.1) и третьего (работы 1.5, 1.6) порядков по малому параметру.

Автором исследована орбитальная эволюция четырёхпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун на интервале времени 10 млрд лет путём численного интегрирования осреднённых уравнений движения второго (работы 1.3, 3.1) и третьего (работы 1.5, 1.6, 2.4) порядков по малому параметру. В работе 2.5 теория движения третьего порядка применена к исследованию орбитальной эволюции планет-гигантов Солнечной системы на

интервале времени 100 млн лет для набора различных начальных условий. Автором проведено сравнение полученных данных с результатами прямого численного интегрирования ньютоновских уравнений движения, выполненного различными методами.

Автором проведено исследование на интервале времени 1 млн лет динамической эволюции и устойчивости различных внесолнечных планетных систем — GJ 3138 (работы 1.7, 2.3), HD 39194 (работы 1.4, 2.3), HD 141399 и HD 160691 (работа 1.4), и определены начальные условия, соответствующие устойчивым и неустойчивым вариантам эволюции систем.

Структура и объём диссертации

Диссертация объёмом 171 страница состоит из пяти глав, введения, заключения, списка литературы, содержащего 113 названий, и трёх приложений. Число рисунков — 43, таблиц — 44.

Общая структура диссертации

Введение содержит постановку задачи и её обоснование (актуальность, цели работы, новизна, научная и практическая ценность), выносимые на защиту результаты, краткое изложение содержания работы, а также перечень основных публикаций, конференций и семинаров, где докладывались результаты диссертации.

Первая глава «Современное состояние в области исследования динамической эволюции планетных систем» содержит исторический обзор и обзор литературы по теме диссертации.

Вторая глава «Разложение гамильтониана четырёхпланетной задачи в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре» посвящена обоснованию, разработке и реализации метода разложения гамильтониана четырёхпланетной задачи в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре. Для построения разложения гамильтониана выбрана система координат Якоби, наиболее удобная для рассмотрения планетной задачи. Во второй системе Пуанкаре имеется только один угловой элемент — средняя долгота, что позволяет существенно упростить угловую часть разложения. С помощью системы компьютерной алгебры Piranha, представляющей собой эшелонированный пуассоновский процессор, получено разложение гамильтониана четырёхпланетной задачи в ряд Пуассона по элементам орбит до куба малого параметра. В разложении все элементы орбит и массовые параметры сохраняются в символьном виде. Для исключения ошибок округления числовые коэффициенты в рядах сохранены в виде рациональных дробей произвольной точности. Приведены свойства и получены оценки точности построенных рядов.

Третья глава «Построение осреднённых уравнений движения четырёхпланетной задачи методом Хори–Депри» содержит описание алгоритма метода Хори–Депри, с помощью которого проводится осреднение гамильтониана задачи по быстрым переменным, роль которых играют средние долготы. Получены ряды, представляющие гамильтониан задачи в средних элементах, производящую функцию преобразования от оскулирующих элементов к средним, функции замены переменных и правые части уравнений движения в средних элементах. Приведены свойства построенных рядов. Уравнения движения в средних элементах построены с точностью до куба по малому параметру, а функции замены переменных — до квадрата. Все аналитические преобразования выполнены в системе компьютерной алгебры Piranha.

Четвёртая глава «Динамическая эволюция четырёхпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун на космогонических интервалах времени» посвящена изучению орбитальной эволюции планет-гигантов Солнечной системы на интервале времени 10 млрд. лет на основе результатов численного интегрирования построенных уравнений движения в средних элементах. Показано, что движение планет имеет почти-периодический характер. Значения эксцентриситетов и наклонов орбит планет-гигантов остаются малыми на всём интервале моделирования. Короткопериодические возмущения сохраняются малыми на всём рассматриваемом интервале времени. Показано, что при численном интегрировании уравнений движения в средних элементах интеграл энергии и z -компонента интеграла площадей сохраняются с высокой точностью. Проведено сравнение полученных результатов с теориями движения других авторов и результатами численного интегрирования ньютоновских уравнений движения. Проведено моделирование эволюции системы для различных начальных условий, соответствующих численным эфемеридам, и для набора близких начальных условий.

Пятая глава «Исследование динамической эволюции внесолнечных планетных систем» посвящена изучению характера орбитальной эволюции трёхпланетных систем GJ 3138, HD 39194 и четырёхпланетных систем HD 141399, HD 160691 для различных начальных условий. Показан способ, позволяющий варьированием неизвестных и известных из наблюдений с ошибками элементов орбит определить области начальных данных, соответствующих устойчивому характеру орбитальной эволюции на всём интервале моделирования, что и выполнено для вышеуказанных внесолнечных планетных систем. Для системы GJ 3138 проведено детальное сравнение результатов численно-аналитической теории с данными численного моделирования. Также, для систем HD 141399 и HD 160691 определены комбинации масс планет и значений больших полуосей их орбит, соответствующие областям резонансов средних дви-

жений. Для системы HD 160691 проведено сравнение результатов моделирования для различных значений масс планет.

Заключение содержит обсуждение результатов, выносимых на защиту. Также сформулированы нерешённые задачи и направления исследований, интересные по мнению автора.

Глава 1

Современное состояние в области исследования динамической эволюции планетных систем

1.1 Теории движения больших планет Солнечной системы в их историческом развитии

Исследование орбитальной эволюции планетных систем является одной из фундаментальных задач небесной механики.

Рассматриваемые небесной механикой методы изучения динамики планетных систем можно разделить на три большие группы — численные, аналитические и численно-аналитические методы. Численные теории движения планет строятся на основе применения различных методов численного интегрирования уравнений движения. При этом численные методы обладают существенным недостатком, связанным с тем, что для одного набора начальных условий после интегрирования может быть получена информация только об одной из траекторий системы в фазовом пространстве. Это затрудняет качественное понимание свойств исследуемой системы. Кроме того, численные методы отягощены ошибками округления, возникающими на каждом шаге интегрирования уравнений движения. Аналитические же методы позволяют получать информацию о наборе траекторий, лежащих в пределах некоторого конечного фазового объёма. Решение в этом случае представляется в виде рядов, дающих зависимость от времени или начальных условий задачи. Численно-аналитические методы исследования орбитальной эволюции планетных систем совмещают в себе оба подхода. Уравнения движения строятся аналитическим способом с последующим их численным интегрированием.

Численные теории движения в небесной механике ведут свою историю с XVIII века. Первые методы численного интегрирования были разработаны Л. Эйлером для нужд наблюдательной астрономии. Впервые они были

применены А. К. Клеро при создании теории движения комет и Луны. В дальнейшем усовершенствование численных методов проводилось в работах К. Ф. Гаусса, Ж. Л. Д'Аламбера и Ф. Г. Коуэлла. В XVIII и XIX веках численные методы применялись в основном при рассмотрении теории движения комет и вычислении возмущений малых планет. Только в XX веке численные методы нашли своё применение в задачах о движении планет Солнечной системы. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых — с появлением быстродействующих ЭВМ, а во-вторых — с необходимостью высокоточного эфемеридного обеспечения для космических программ СССР и США.

Первое подробное аналитическое рассмотрение планетного движения было дано Л. Эйлером в 1743 году в его «Теории движения планет и комет» (Euler, 1743) применительно к задаче двух тел. Во всех нужных для практики аналитических теориях с XVIII века до середины XX века уравнения движения интегрировались методом малого параметра. Различные реализации этого метода (Субботин, 1968) отличались друг от друга главным образом тем, какие переменные были выбраны в качестве фазовых. Разные группы авторов таких теорий в качестве переменных метода рассматривали либо различные системы оскулирующих элементов (Ш.-Э. Делоне, Ж. Л. Лагранж, С. Д. Пуассон, Л. Эйлер), либо координаты и скорости (А. Андуйе, П. А. Ганзен, А. К. Клеро, С. Ньюком). П. С. Лаплас внёс вклад в оба подхода.

Для Солнечной системы в качестве малого параметра, обозначим его μ , можно выбрать величину отношения масс Юпитера и Солнца. Решение будет строиться в виде ряда по степеням этого отношения. А. М. Ляпунов и А. Пуанкаре, а в дальнейшем К. В. Холшевников исследовали свойства сходимости решений в методе малого параметра. Оказалось, что принципиальным недостатком этого метода является невозможность представить движение планет на временах превышающих десятки тысяч лет (Холшевников, 1985).

Первые аналитические работы, описывающие движение планет на космогонических интервалах времени, появляются в XIX веке. На основе идей Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа и К. Ф. Гаусса в дальнейшем развивается метод осреднения. Суть этого метода заключается в исключении из уравнений движения всех короткопериодических слагаемых, даваемых быстрыми переменными. Периоды изменения быстрых переменных сравнимы или меньше периодов обращения планет — их роль могут играть, например, средние долготы планет. Периоды же изменения медленных переменных значительно больше. Связь между оскулирующими переменными и их средними значениями обеспечивается функциями замены переменных. Периодичность функций замены по быстрым переменным гарантирует близость старого и нового наборов переменных. Метод получил дальнейшее развитие в XX веке в работах

Х. Цайпеля, Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (Bogoliubov, 1961). Последние два автора показали, что ряды для уравнений движения в средних элементах и функций замены переменных представляют собой асимптотические разложения и не являются сходящимися ни в какой сколь угодно малой области определения переменных задачи.

В 1960-е годы Г. Хори (Hori, 1966) и А. Депри (Deprit, 1969) независимо друг от друга предложили метод, использующий преобразования Софуса Ли, иначе называемый методом Хори–Депри. Этот мощный метод для нахождения функций замены переменных и правых частей уравнений движения в средних элементах обладает рядом практических и теоретических преимуществ. По сравнению с другим широко известным методом Х. Цайпеля, в методе преобразований Ли применяются более простые и явные (нерекуррентные) формулы. Все искомые величины метода выражаются через скобки Пуассона, что означает их инвариантность относительно канонических преобразований. Также метод более прост для алгоритмизации на ЭВМ.

Задача об исследовании орбитальной эволюции планет связана с проблемой устойчивости Солнечной системы. Первые исследования в этой области начаты П. С. Лапласом (Laplace, 1829) и Ж. Л. Лагранжем (Lagrange, 1781, 1782). В дальнейшем была установлена известная теорема Лагранжа–Лапласа, согласно которой в первом приближении по массам планет большие полуоси орбит планет Солнечной системы не имеют вековых возмущений в нерезонансном случае, а подвержены только короткопериодическим колебаниям с амплитудой порядка μ . При этом эксцентриситеты и наклоны орбит имеют еще и долгопериодические колебания с амплитудами порядка $\sqrt{\mu}$ — $\sqrt[3]{\mu}$. С. Д. Пуассон (Poisson, 1809) доказал отсутствие вековых возмущений больших полуосей орбит в приближении, построенном до второго порядка по массам планет. Впоследствии С. Харет (Haret, 1885) показал, что для третьего порядка по массам планет вековые возмущения возникнуть всё же могут.

Также в 60-е годы XX века совместными силами А. Н. Колмогорова (Колмогоров, 1954), В. И. Арнольда (Арнольд, 1963) и Ю. Мозера (Moser, 1962) возникает и развивается КАМ-теория, изучающая влияние малых возмущений на динамику слабозвозмущённых гамильтоновых систем. Вопрос об устойчивости Солнечной системы становится важной областью применимости этой теории. С точки зрения сходимости рядов метода осреднения, даже при очень малых возмущениях (малых значениях μ) точки сходимости не заполняют фазовое пространство всюду плотно. Следовательно, мера точек расходимости становится не равной нулю. Для таких траекторий в фазовом пространстве становится невозможным предсказать поведение системы на экспоненциально больших временах.

КАМ-теория утверждает, что устойчивые траектории в трёхмерном случае всегда находятся на поверхности вложенных инвариантных торов, которые делят фазовое пространство на изолированные области. Если движение неустойчиво, траектория между торами никогда не попадёт ни в один из них. С увеличением размерности или в случае взаимодействия между резонансами траектория может медленно дрейфовать между торами. Этот процесс известен как диффузия Арнольда, оценка скорости которой проведена Н. Н. Нехорошевым (Нехорошев, 1977). В работе А. Морбиделли и А. Джорджилли (Morbidelli, Giorgilli, 1995) улучшена оценка верхней границы скорости диффузии. Оказывается, что она является сверхэкспоненциально малой величиной при удалении от инвариантного тора.

1.2 Современные теории движения больших планет Солнечной системы

Рассмотрим далее современные теории движения и основные представления о динамической эволюции больших планет Солнечной системы.

1.2.1 Высокоточные теории движения — эфемериды больших планет Солнечной системы

Начиная с 1960-х гг. в СССР и США велись работы по созданию высокоточного эфемеридного обеспечения космических программ, которые увенчались созданием серий численных эфемерид — Development Ephemeris (DE) в США и Ephemeris of Planets and the Moon (EPM) в СССР. Численные эфемериды построены на основе данных большого количества телескопических, радарных и интерферометрических наблюдений, а также полётов космических аппаратов к другим объектам Солнечной системы.

Эфемериды DE разрабатываются Лабораторией реактивного движения НАСА (NASA JPL) путём численного интегрирования уравнений движения тел Солнечной системы. Одной из самых популярных версий данных эфемерид являлась DE 405 (Standish, 1998), выпущенная в 1997 г., и покрывающая промежутки времени с 9 декабря 1599 г. по 20 февраля 2201 г. Вплоть до 2014 г. эти эфемериды использовались при составлении Астрономического альманаха, выпускаемого Морской обсерваторией США.

В настоящей диссертации в качестве начальных данных при моделировании орбитальной эволюции планет-гигантов Солнечной системы используются данные эфемерид DE 430 (21 декабря 1549 г. — 25 января 2650 г.), выпущенных в апреле 2013 г. (Folkner et al., 2014). Эфемериды DE 431 (13200 г.

до н.э. – 17191 г. н.э.) отличаются от DE 430 менее точным учётом внутреннего строения Луны. Эфемериды DE 432 являются небольшим уточнением эфемерид DE 430 и, главным образом, были предназначены для обеспечения миссии Новые Горизонты к Плутону. В качестве системы отсчёта в этих эфемеридах используется вторая версия Международной небесной системы отсчёта (ICRF2).

Последними на текущий момент версиями эфемерид DE являются DE 440 (31 декабря 1549 г. – 25 января 2650 г.) и DE 441 (13200 г. до н.э. – 17191 г. н.э.), выпущенные в июне 2020 г. (Park et al., 2021). В качестве системы отсчёта в этих эфемеридах используется уже третья версия ICRF (ICRF3).

Эфемериды DE хранятся в виде полиномов Чебышева, соответствующих декартовым положениям и скоростям планет, Солнца и Луны с интервалом 32 дня. Расстояния даются в астрономических единицах (а.е.). Единицы времени — сутки в системе барицентрического динамического времени (TDB). В DE 430 и DE 440, в соответствии с решением, принятым Международным астрономическим союзом (МАС) в 2012 году, 1 а.е. = 149597870700 м. Эфемериды DE также содержат данные об углах либрации и нутации Луны.

К 1980 г. усилиями Ленинградского института прикладной астрономии АН СССР и Института прикладной математики АН СССР, а также Центра управления полётами, была создана единая релятивистская численная теория движения планет, используемая для обеспечения космических миссий СССР. Развитие этой теории привело к появлению серий эфемерид ЕРМ, разрабатываемых в настоящее время Институт прикладной астрономии (ИПА РАН). При вычислении эфемерид ЕРМ учитываются взаимные возмущения больших планет Солнечной системы, Солнца, Луны, более 300 астероидов главного пояса и около 30 транснептуновых объектов (ТНО). Возмущения от остальных астероидов и ТНО учитываются как возмущения от колец известной массы. Также учитываются релятивистские возмущения и сжатие Солнца.

Эфемериды ЕРМ (Питьева и др., 2019) включают в себя данные о положениях и скоростях больших планет Солнечной системы, Солнца, Луны, астероидов главного пояса — Цереры, Паллады, Весты, Ириды, Бамберги и следующих ТНО — Плутона, Эриды, Макемаке, Хаумеи, Седны. Эфемериды также включают данные о физической либрации Луны, разность динамического и земного времени TT – TDB и охватывают интервал времени с 1787 г. по 2214 г. В качестве системы отсчёта в последних версиях ЕРМ используется ICRF2.

Фундаментальные эфемериды Солнца, Луны и больших планет Солнечной системы, приводимые в Астрономическом ежегоднике (ИПА РАН), вычисля-

ются в настоящее время по численной теории, реализованной в ЕРМ 2011/m (Pitjeva, 2013). Начиная с этой версии значение астрономической единицы соответствует значению зафиксированному МАС в 2012 году. На настоящий момент последней версией эфемерид ЕРМ является ЕРМ 2021 (Pitjeva et al., 2022) и аналогичный ей вариант ЕРМ 2021Н, но покрывающий интервал времени от 13199 г. до н.э. до 17191 г. н.э. В версии ЕРМ 2021Н не учитывается трение между корой Луны и её ядром.

Начиная с 2000-х гг. во Франции обсерваториями Парижа и Безансона разрабатываются высокоточные численные эфемериды INPOP (Intégrateur Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris). Эфемериды строятся на основе численного интегрирования уравнений движения больших планет Солнечной системы, Луны, Плутона, около 14000 астероидов, а также с учётом вращения Земли и либрации Луны. Последняя на настоящий момент версия эфемерид INPOP 19a (Fienga et al., 2019) основана на 155 тысячах наблюдений планет, включая данные об орбитах Юпитера и Сатурна, полученные миссиями Юнона и Кассини соответственно. Орбиты астероидов были улучшены на основе почти 2 миллионов наблюдений, полученных астрометрической миссией GAIA.

Одной из первых аналитических теорий движения для расчёта эфемерид стала АТ-1, разработанная в Институте теоретической астрономии АН СССР (Красинский и др., 1978), и дающая решение в виде тригонометрических рядов для возмущений прямоугольных координат.

Из современных высокоточных аналитических теорий движения можно отметить VSOP2013 и TOP2013 (Simon et al., 2013), разработанные в Парижской обсерватории. Обе теории построены на основе решения уравнений Лагранжа в эллиптических элементах на интервале времени от 4000 г. до н.э. до 8000 г. н.э. и улучшены с помощью эфемерид INPOP10a. Теория VSOP2013 (Variations Séculaires des Orbites Planétaires) даёт решение для восьми больших планет Солнечной системы, а теория TOP2013 (Theory of the Outer Planets) — для четырёх внешних планет. Точность решений составляет доли угловых секунд дуги.

1.2.2 Теории движения, описывающие эволюцию больших планет Солнечной системы на космогонических интервалах времени

Рассмотрим далее современные работы, изучающие динамическую эволюцию больших планет Солнечной системы на космогонических интервалах времени.

Численное интегрирование ньютоновских уравнений движения для планет-гигантов Солнечной системы, включая Плутон, выполнено, например, в работе Эпплгейта (Applegate et al., 1986) на интервале времени 214 млн лет (-107 млн / $+107$ млн лет) с шагом интегрирования 40 дней. В работе Т. Ито и К. Таникавы (Ito, Tanikawa, 2002) данное интегрирование выполнено уже на интервале времени 100 млрд лет (-50 млрд лет / $+50$ млрд лет). Дополнительно уравнения движения всех 9 планет были проинтегрированы на интервале времени в несколько миллиардов лет с шагом 8 дней. Показано, что внешняя часть Солнечной системы устойчива на всех рассматриваемых интервалах времени. Устойчивость Солнечной системы на таких длительных промежутках времени обеспечивается отсутствием резонансов средних движений и вековых резонансов низкого порядка. Относительно известного «большого неравенства» Юпитера и Сатурна — обе планеты находятся вблизи резонанса $2 : 5$, но не в нём. Резонансы высокого порядка могут приводить к возникновению хаоса в движении планет, но этого не достаточно для разрушения Солнечной системы.

Одной из первых работ, в которой изучалась вековая эволюция больших планет Солнечной системы на интервалах времени в миллионы лет, является работа Ж. Ласкара (Laskar, 1988). В его работе уравнения движения 8 больших планет были построены до 2 порядка по массам планет и до 5 степени по эксцентриситетам и наклонам орбит, включая лунные и релятивистские возмущения. Построенные таким образом уравнения были проинтегрированы на интервале времени 30 млн лет (-10 млн лет / $+20$ млн лет) с шагом 500 лет. В результате, с помощью Фурье-преобразования, был получен набор фундаментальных частот для Солнечной системы, который был использован для представления решения задачи в квазипериодической форме. Было показано, что внешняя часть Солнечной системы более стабильна, чем её внутренняя часть по причине наличия большого количества квазирезонансов фундаментальных частот планет земной группы. Далее Ж. Ласкаром в работе (Laskar, 1989) была изучена вековая эволюция Солнечной системы на интервале времени 200 млн лет. Было найдено, что эволюция Солнечной системы имеет хаотический характер на интервале времени в несколько десятков миллионов лет, что означает невозможность предсказать истинные положения орбит планет земной группы на указанных интервалах времени.

Им же была впервые объяснена (Laskar, 1990, 1994, 1996) хаотическая природа Солнечной системы. Было показано, что причиной возникновения хаоса в Солнечной системе являются переходы между круговыми и либрационными модами критических аргументов некоторых вековых резонансов, связанных с фундаментальными частотами планет земной группы и Юпитера.

Дж. Дж. Зюсман и Дж. Виздом (Sussman, Wisdom, 1992) показали, что движение планет Солнечной системы имеет полностью хаотический характер с временем экспоненциального расхождения близких траекторий (время Ляпунова) в несколько миллионов лет. По результатам моделирования на интервале времени 845 млн лет получено, что Солнечная система устойчива, хотя движение планет имеет хаотический характер. Дополнительно показано, что незначительное изменение начального положения Нептуна приводит к экспоненциальному расхождению изначально близких траекторий на интервалах времени в несколько десятков миллионов лет. Продемонстрировано, что хаотическая природа Солнечной системы связана с перекрытием вековых резонансов.

Н. Мюррей и М. Хольман (Murray, Holman, 1999) с помощью численно-аналитической теории движения доказали, что причиной возникновения хаоса во внешней части Солнечной системы является перекрытие компонентов нескольких резонансов средних движений. Это трёхчастотный резонанс $3 : 5 : 7$ между средними движениями Юпитера, Сатурна, Урана и такой же резонанс ($3 : 5 : 7$) между средними движениями Сатурна, Урана и Нептуна. Более того, такие резонансы средних движений как $1 : 7$ между Юпитером и Ураном, $1 : 2$ между Ураном и Нептуном, а также близость Юпитера и Сатурна к резонансу средних движений $2 : 5$ играют существенную роль в возникновении хаоса во внешней части Солнечной системы. Влияние резонансов в движении планет на динамику Солнечной системы также рассматривается в работе (Murray, Holman, 2001).

Кроме того, прохождение планет через резонансные области в ранней Солнечной системе могло сыграть существенную роль при формировании её современного облика, что рассматривается, например, К. Циганисом с соавторами в работе (Tsiganis et al., 2005). Основную роль в миграции планет внутри Солнечной системы могли играть резонансы средних движений низкого порядка, такие как $1:2$.

Численный поиск трёхчастотных резонансов во внешней части Солнечной системы, которые приводят как к хаотическим, так и к нехаотическим решениям планетной задачи, выполнен М. Гуззо в работах (Guzzo, 2005, 2006). В работе У. Б. Хайеса (Hayes, 2007) найдены начальные условия для которых время Ляпунова составляет от 2 млн до 230 млн лет, но в тоже время показано существование таких начальных условий, которые не приводят к хаотической динамике планет Солнечной системы на интервалах времени 1 млрд лет.

К. Батыгин и Г. Лафлин (Batygin, Laughlin, 2008) выполнили прямое численное интегрирование уравнений движения 8 планет Солнечной системы на интервале времени 20 млрд лет. Они показали, что в движении планет

отсутствует катастрофическая неустойчивость. Но при этом было показано, что при изменении начального положения Меркурия на 15 м он упадёт на Солнце примерно через 1 млрд лет. Более детально этот вопрос рассмотрен Р. Е. Зиббе в работе (Zeebe, 2015). При этом для внешней части Солнечной системы подобная неустойчивость отсутствует, а динамическое время жизни Урана составляет 10^{18} лет. Ж. Ласкаром (Laskar, 2008) изучена хаотическая диффузия эксцентриситетов и наклонов орбит для вековой теории движения Солнечной системы. Показано, что планеты-гиганты Солнечной системы не имеют значительной диффузии элементов орбит, а их движение носит квазипериодический характер. Существование начальных условий, соответствующих столкновительным траекториям Меркурия, Венеры и Марса с Землей также показано Ж. Ласкаром и М. Гастино в работе (Laskar, Gastineau, 2009).

В работе (Mogavero, Laskar, 2022) проведено исследование хаотической динамики Солнечной системы с использованием средств компьютерной алгебры TRIP. С её помощью реализована каноническая теория возмущённого движения планетной задачи. Определены резонансные гармоники в разложении гамильтониана. На основе их анализа найдены динамические источники хаотичности в движении планет Солнечной системы. Предсказанные теорией резонансы подтверждаются численным моделированием динамики системы и вычисленными характерными временами Ляпунова.

А. Джиорджилли, М. Сансоттера и У. Локателли применили КАМ-теорию для изучения орбитальной эволюции планет-гигантов Солнечной системы. Динамическая устойчивость вековой системы Солнце – Юпитер – Сатурн изучена в работах (Locatelli et al., 2000) и (Giorgilli et al., 2009) для интервалов времени сравнимых с возрастом Вселенной. В работах (Sansottera et al., 2011, 2013) и (Giorgilli et al., 2017) исследована устойчивость плоского приближения системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран в рамках вековой теории, построенной до второго порядка по массам планет. Было найдено, что время динамической устойчивости такой плоской вековой системы превышает время жизни реальной Солнечной системы.

Э. Д. Кузнецов и К. В. Холшевников (Кузнецов, Холшевников, 2006, 2009) с помощью построенной численно-аналитической теории движения изучили динамическую эволюцию и устойчивость двухпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн на интервале времени 10 млрд лет.

К настоящему времени сформированы следующие представления о динамических свойствах Солнечной системы. Они описаны, например, в работе (Холшевников, Кузнецов, 2007). Движение планет в Солнечной системе является почти-периодическим и полностью предсказуемо на интервалах времени в несколько миллионов лет. На интервалах времени в несколько милли-

ардов лет движение планет-гигантов всё ещё предсказуемо. Амплитуды колебаний больших полуосей орбит планет-гигантов имеют порядок величины малого параметра задачи (отношение суммы масс планет к массе Солнца). Амплитуды колебаний эксцентриситетов и наклонов орбит имеют порядок величины квадратного корня из малого параметра. В тоже время орбиты планет земной группы вступают в область хаотичности. Например, в зависимости от начальных условий, Меркурий может быть выброшен из Солнечной системы за время меньшее, чем миллиард лет. На временах в десятки миллиардов лет движение планет-гигантов всё ещё почти-периодично, но информация о фазах планет на орбитах становится неизвестной. Движение же внутренних планет полностью хаотично. Хаос в Солнечной системе связан с перекрытием областей резонансов. Существуют начальные условия, приводящие как к регулярным, так и к хаотическим решениям для планет Солнечной системы. Причём оба типа начальных условий не расположены всюду плотно в фазовом пространстве. Таким образом, вопрос, о том к какой области начальных данных принадлежат условия, описывающие Солнечную систему, остаётся открытым.

1.3 Обзор текущего состояния в области исследования внесолнечных планетных систем

В 1995 году швейцарскими астрономами М. Майором и Д. Кело методом доплеровской спектроскопии впервые была обнаружена внесолнечная планета у солнцеподобной звезды 51 Пегаса (Mayor, Queloz, 1995). Планета принадлежит к классу горячих юпитеров — то есть имеет массу сравнимую с массой Юпитера или больше и расположена очень близко к родительской звезде (порядка 0.05 а.е.). До этого события в 1992 году были обнаружены две экзопланеты класса суперземля (то есть каменные планеты тяжелее Земли) около пульсара PSR B1257+12 (Wolszczan, Frail, 1992). В дальнейшем совершенствование наблюдательных возможностей, в том числе появление космических обсерваторий и новых методов поиска, позволило открыть к настоящему времени тысячи внесолнечных планетных систем.

1.3.1 Краткий анализ характеристик внесолнечных планет

По состоянию на 13 мая 2022 года по данным каталога внесолнечных планет exoplanet.eu (Schneider, 2010) подтверждено открытие 5036 экзопланет в 3712 планетных системах. При этом 823 системы являются многопланетными — 558 двухпланетных, 165 трёхпланетных, 67 четырёхпланетных, 21 пя-

типпланетная и 9 шестипланетных. Кроме того в 2446 системах имеется 2640 кандидатов в экзопланеты. Если ограничить верхнее значение массы экзопланеты значением в 13 масс Юпитера — это минимальная масса коричневого карлика при которой в его ядре могут протекать термоядерные реакции с участием дейтерия — то число таких экзопланет составит 2289 в 1716 планетных системах. Массы 2442 экзопланет на настоящий момент не определены.

Диапазон возможных значений больших полуосей орбит внесолнечных планет очень широк. Существуют как компактные планетные системы — экзопланеты в них могут быть расположены в пределах нескольких сотых астрономической единицы от родительской звезды, так и очень широкие. Например, в трёхпланетной системе YZ Ceti (Astudillo-Defru et al., 2017) все планеты расположены в пределах 0.03 а.е. от звезды. А в системе HR 8799 (Marois et al, 2008) три планеты с массами около 7–8 масс Юпитера расположены на расстояниях 27, 43 и 68 а.е. от звезды соответственно. По данным каталога exoplanet.eu можно составить следующее распределение планет по большим полуосям их орбит (принимаются во внимание номинальные значения больших полуосей орбит, без учёта погрешностей их определения):

- менее 0.01 а.е. — 28 планет;
- от 0.01 а.е. до 0.05 а.е. — 693 планеты;
- от 0.05 а.е. до 0.10 а.е. — 790 планет;
- от 0.10 а.е. до 0.50 а.е. — 855 планет;
- от 0.50 а.е. до 1 а.е. — 184 планеты;
- от 1 а.е. до 5 а.е. — 602 планеты;
- больше 5 а.е. — 206 планет;
- большие полуоси орбит неизвестны — 1678 планет.

Из всего числа планет в каталоге exoplanet.eu с известными массами и расстояниями от звезды около 500 имеют массу больше половины массы Юпитера и расположены в пределах 0.1 а.е. от звезды — их можно отнести к классу горячих юпитеров. Планеты с массой близкой к массе Нептуна и располагающиеся близко к звезде относят к классу горячих нептонов (в каталоге exoplanet.eu около 200 таких планет на расстояниях меньше 1 а.е. от звезды). Около 400 планет из каталога можно отнести к классам суперземель или мининептонов (газовые планеты меньшей массы, чем Нептун) — они тяжелее Земли, но легче Нептуна. Границу между этими классами можно провести зная радиус планеты и её массу — для суперземель предельный радиус составляет около 1.5 радиусов Земли, а для мининептонов — больше 2 таких радиусов (Fulton et al., 2017).

Эксцентриситеты орбит планет также находятся в широком диапазоне значений. По данным каталога exoplanet.eu можно составить следующее распре-

деление планет по эксцентриситетам их орбит (принимаются во внимание номинальные значения эксцентриситетов, без учёта погрешности):

- менее 0.05 — 733 планеты;
- от 0.05 до 0.10 — 292 планеты;
- от 0.10 до 0.25 — 516 планет;
- от 0.25 до 0.50 — 346 планет;
- больше 0.50 — 148 планет;
- эксцентриситеты орбит неизвестны — 3001 планета.

Согласно каталогу exoplanet.eu распределение номинальных значений наклонов орбит планет (относительно плоскости перпендикулярной к картинной) следующее:

- от 0° до 1° — 399 планет;
- от 1° до 5° — 661 планета;
- от 5° до 10° — 148 планет;
- больше 10° — 103 планеты;
- наклоны орбит неизвестны — 3690 планет.

На данный момент открыто 926 экзопланет в 757 системах для которых известны массы M_p , большие полуоси a и эксцентриситеты e их орбит, для 862 экзопланет в 714 системах дополнительно известны наклоны орбит i , а для 408 экзопланет в 324 системах известны также аргументы перигелиев орбит ω . Из всех двухпланетных систем только для 50 из них параметры M_p , a и e известны для всех планет в системе, из всех трёхпланетных систем эти параметры известны только для 16, а из всех четырёхпланетных — для 11.

Среди экзопланет существуют такие, которые обращаются вокруг звёзд в двойных и кратных системах. По данным каталога exoplanet.eu открыто 66 таких звёздных систем. Например, одна из компонент двойной звезды GJ 676 имеет четырёхпланетную систему состоящую из двух мининептунов (или суперземель) и двух планет с массами в несколько масс Юпитера (Anglada-Escude, Tuomi, 2012). В двойной системе HD 133131 одна компонента звезды (HD 133131 A) имеет планетную систему состоящую из двух планет, а вторая компонента HD 133131 B имеет одну известную планету (Teske et al., 2016). Также в каталоге можно найти данные о 28 планетных системах вокруг тесных двойных звёзд, когда планета обращается вокруг обеих звёзд пары. В работе (Winn, Fabrycky, 2015) показано, что планеты-гиганты обращающиеся вокруг таких звёзд (за пределами зоны неустойчивого движения) встречаются с такой же частотой, что и планеты-гиганты на тех же расстояниях вокруг одиночных звёзд.

Обзор физических свойств и орбитальных характеристик внесолнечных планетных систем приведен, например, в работах (Tremaine, Zakamska, 2004),

(Howard, 2013), (Winn, Fabrycky, 2015). Звёзды типа Солнца в 10% случаев имеют на орбитах планеты-гиганты с периодами обращения короче нескольких лет, а в 50% случаев — это компактные системы с землеподобными планетами на почти компланарных орбитах, имеющими периоды обращения менее года. Планеты-гиганты имеют широкий разброс эксцентриситетов орбит в диапазоне от 0 до 0.9 (в среднем около 0.2). Землеподобные планеты имеют небольшие эксцентриситеты до 0.1, особенно в многопланетных системах. Возможное объяснение наблюдаемого распределения эксцентриситетов орбит планет даётся в работе (Juric, Tremaine, 2008) и связано с взаимодействием планет на начальной стадии динамической эволюции после их формирования из газопылевого диска. Также отмечается, что планеты-гиганты чаще находятся в резонансе средних движений, нежели землеподобные планеты. Последнее не касается компактных систем, в которых землеподобные планеты часто находятся в резонансе средних движений.

Обзор динамики внесолнечных планетных систем, включая методы исследования вековой эволюции и резонансных свойств, приведён в работе (Ferraz-Mello et al., 2006). Изучение долгопериодической эволюции планетных систем проводится, например, в работах (Davies et al., 2013), (Mustill et al., 2013). В работе (Volpi et al., 2019) для различных внесолнечных планетных систем с помощью вековой аналитической теории, построенной на основе разложения гамильтониана первого порядка, определяются диапазоны изменения значений наклонов орбит, определяющих долгопериодическую устойчивость систем. Установлено, что системы с малыми значениями взаимных наклонов орбит планет (менее 35°) и системы с большими значениями взаимных наклонов, но находящиеся в резонансе Лидова–Козаи, обладают устойчивой орбитальной эволюцией пространственных конфигураций орбит.

Все планетные системы также можно условно разделить на три типа, в зависимости от значений средних движений, входящих в их состав планет:

- резонансные;
- слабрезонансные;
- нерезонансные.

В резонансных планетных системах планеты находятся в резонансе средних движений, то есть периоды (или частоты) их обращения вокруг звезды соизмеримы между собой — они являются рациональным отношением двух целых чисел $n : m$. В слабрезонансных системах планеты могут находиться близко к резонансу средних движений — то есть отношение их средних движений близко к значению $n : m$ (в качестве примера можно привести систему Юпитер – Сатурн, близкую к резонансу средних движений $2 : 5$). В нерезонансных системах резонансы средних движений, соответственно, отсутствуют.

Резонансная динамика планетной задачи, применительно к внесолнечным планетным системам, описана в работах (Batygin, Morbidelli, 2012; Batygin, 2015). Описание динамических свойств периодических орбит внесолнечных планетных систем, находящихся в резонансах средних движений $1 : 2$, $3 : 4$, $2 : 3$, $2 : 5$, $1 : 3$ и $1 : 4$ дано в работе (Antoniadou, Voyatzis, 2014). В статье (Gallardo et al., 2021) построена численно-аналитическая модель резонанса средних движений для двухпланетной системы с одной или двумя родительскими звёздами. Устойчивость компактных трёхпланетных систем с планетами равной массы на компланарных круговых орбитах, удалённых от звезды в порядке определённом геометрической прогрессией, исследуется в работе (Lissauer, Gavino, 2021).

Стоит отметить, что наблюдаемые свойства и разброс физических и динамических характеристик внесолнечных планетных систем напрямую связаны с так называемым эффектом селекции. Суть данного эффекта состоит в том, что несовершенство и физические ограничения используемых методов поиска внесолнечных планетных систем не позволяют получить полную информацию об открываемых экзопланетах. Массы и некоторые элементы орбит могут быть определены с большими погрешностями или неизвестны вовсе. Различные методы поиска обладают своими ограничениями, например, метод лучевых скоростей позволяет определить только нижнюю границу значения массы экзопланеты, а транзитный метод поиска позволяет открывать только такие экзопланеты, прохождение которых по диску звезды можно пронаблюдать с Земли. Рассмотрим подробнее основные методы поиска экзопланет.

1.3.2 Методы обнаружения внесолнечных планет

Одним из первых методов поиска экзопланет, который был применён на практике, является **метод лучевых скоростей** (или метод Доплера). На настоящий момент этим методом открыто около 1000 экзопланет. Суть метода заключается в измерении колебаний лучевой скорости звезды, вызванных её движением вокруг общего с планетой центра масс. Лучевая скорость звезды определяется по смещению её спектральных линий. Современными спектрометрами могут определяться изменения лучевой скорости звезды от 0.1–0.5 м/с и выше.

С помощью данного метода можно получить информацию о периоде обращения планеты P , большой полуоси a , эксцентриситете e и аргументе перицентра ω её орбиты, а также о величине $M_p \sin I_p$, где M_p — масса планеты, а I_p — угол наклона плоскости орбиты планеты к картинной плоскости. То есть методом лучевых скоростей может быть определена только нижняя граница массы планеты.

Из современных наиболее мощных спектрографов, используемых для поиска экзопланет методом лучевых скоростей, можно выделить следующие — HARPS (High Accuracy Radial velocity Planet Searcher), установленный в 2002 году на 3,6-метровом телескопе в обсерватории Ла-Силья в Чили, аналогичный проект для северного полушария неба HARPS-N (реализуемый с 2012 года в обсерватории Роке-де-лос-Мучачос на Канарских островах) и HIRES (High Resolution Echelle Spectrometer), установленный на 10-метровом телескопе в обсерватории Кека на Гавайях.

Ещё одним методом поиска экзопланет является **транзитный метод**. На данный момент с его помощью открыто более 3500 экзопланет. При прохождении планеты на фоне диска звезды яркость последней уменьшается, что позволяет получить информацию о величинах P , a , наклоне орбиты I (к картинной плоскости) и радиусе планеты R_p .

Самой продуктивной космических обсерваторий для поиска экзопланет транзитным методом является запущенный НАСА в 2009 году телескоп Kepler, проработавший до 2018 года. Согласно базе данных exoplanet.eu с его помощью было найдено минимум 2777 экзопланет. Французский космический телескоп COROT (COncvection ROTation and planetary Transits) проработал с 2006 по 2013 годы и открыл транзитным методом 36 экзопланет. Ещё один космический телескоп для поиска экзопланет TESS (Transiting Exoplanet Survey Satellite) запущен НАСА в 2018 году. На настоящий момент с его помощью найдено около 170 экзопланет. Из наземных проектов ведущих поиск экзопланет методом транзитов можно отметить SuperWASP (Wide Angle Search for Planets), состоящий из двух роботизированных телескопов: SuperWASP-North в обсерватории Роке-де-лос-Мучачос на Канарских островах и SuperWASP-South в Южноафриканской астрономической обсерватории. С помощью этих инструментов на настоящий момент найдено 189 экзопланет.

Отклонения в периодичности наблюдаемых транзитов позволяют обнаружить в системе дополнительные планеты — **метод вариации времени транзитов** (24 планеты в базе exoplanet.eu).

Гравитационное микролинзирование может использоваться для поиска экзопланет, если свет от более далёкой звезды искажается более близкой звездой, имеющей планетную систему. Наличие планетной системы в этом случае вносит дополнительные искажения в работу гравитационной линзы. В базе exoplanet.eu имеется информация о 192 планетах, открытых таким методом. Из них 119 планет было попутно открыто с 1992 года в рамках проекта по изучению тёмной материи OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment), реализуемого университетом Варшавы совместно с университе-

тами Принстона и Карнеги. Основные наблюдения проводятся в обсерватории Лас-Кампанас в Чили. Ещё 54 планеты открыты таким способом сетью корейских телескопов KMTNet (Korea Microlensing Telescope Network).

Метод периодических пульсаций позволяет находить экзопланеты около пульсаров. Если у пульсара имеется планетная система, то она будет влиять на движение самого пульсара относительно центра масс системы, а значит на периодичность его импульсов. В базе данных exoplanet.eu приведены данные о 47 таких планетах.

Отметим также **астрометрический метод** поиска экзопланет, опирающийся на измерение видимых положений и скоростей звезды с течением времени. Наличие планетной системы у звезды оказывает влияние на её видимое движение за счет периодического смещения звезды относительно центра масс системы.

Также очень массивные экзопланеты могут быть обнаружены с помощью **прямых телескопических наблюдений**. Предпочтительнее выполнять наблюдения в инфракрасном диапазоне, применяя методы ослабления блеска центральной звезды. Этот метод подходит для поиска массивных планет на далеких орбитах.

1.3.3 Обзор планетных систем, рассматриваемых в настоящей диссертации

Звезда GJ 3138 — красный карлик спектрального класса M0V с массой $M_* = 0.681M_\odot$ (здесь M_\odot — масса Солнца) и видимой звёздной величиной $m_V = 10.877^m$. Она расположена в созвездии Кита на расстоянии около 29.9 пк от Солнца. Вокруг звезды обращаются две планеты класса суперземля (нижние границы масс — около 2 и 4 масс Земли (M_\oplus) соответственно) и одна планета класса мининептун (нижняя граница массы — около $10M_\oplus$), которые были открыты в 2017 году методом лучевых скоростей с помощью спектрографа HARPS в обсерватории Ла-Силья в Чили (Astudillo-Defru et al., 2017). Планетная система является компактной — все планеты расположены в пределах 1.07 а.е. от звезды (учитывая максимально возможное значение эксцентриситета орбиты внешней планеты), а период обращения внешней планеты составляет 258 суток. Более подробно значения масс и элементов орбит этой и других рассматриваемых экзопланет приведены в главе 5, посвященной изучению орбитальной динамики внесолнечных планетных систем.

Планетная система звезды HD 39194, открытая 2011 году по измерениям лучевой скорости на спектрографе HARPS (Bonfils et al., 2013), имеет в составе три суперземли (нижние границы масс не превышают $3M_\oplus$) и находится на расстоянии около 26.4 пк в созвездии Столовой Горы. Спектральный

класс звезды K0V, а видимая звёздная величина $m_V = 8.08^m$. Данные о массе звезды отсутствуют. Периоды обращения планет не превышают 34 суток, а их расстояния от звезды не более 0.25 а.е. В работе (Unger et al., 2021) с помощью численного интегрирования на интервале времени 30000 лет показано, что внутренняя пара планет в системе находится вне резонанса средних движений 2 : 5. Кроме того, отмечается, что конфигурации со значением эксцентриситета внешней планеты превышающим 0.15 очень маловероятны, так как приводят к высокому уровню хаоса в системе.

Звезда главной последовательности HD 141399 находится в созвездии Волопаса на расстоянии около 36.2 пк, имеет спектральный класс K0V и видимую звёздную величину $m_V = 7.2^m$. Масса звезды $M_\star = 1.07 \pm 0.08 M_\odot$. В 2014 году по результатам обработки данных 10-летних наблюдений лучевой скорости (обсерватория Кека на Гавайях и Ликская обсерватория в Калифорнии) вокруг звезды была обнаружена система из четырёх планет с минимальными значениями масс порядка массы Юпитера (Vogt et al., 2014). Эксцентриситеты орбит трёх внутренних планет в системе не превышают 0.1. Отсутствие полного охвата орбиты внешней планеты наблюдательными данными (период её обращения превышает 13 лет) не позволяет точно определить её эксцентриситет.

Конфигурация четырёх планет-гигантов, находящихся относительно близко друг к другу, вызывает вопросы относительно динамической устойчивости системы HD 141399. В работе (Vogt et al., 2014) проведено численное моделирование орбитальной эволюции системы на интервале времени 10 млн лет. Выявлено, что эксцентриситеты двух внутренних планет системы b и c меняются в противофазе с периодом 250 лет. Такой обмен угловым моментом между планетами связан с их близостью к резонансу средних движений 1 : 2, подобно системе Юпитер – Сатурн (близость к резонансу 2 : 5). Также для набора из 100 различных случайно сгенерированных начальных условий проведено численное интегрирование орбитальной эволюции системы на 1 млн лет. Во всех случаях изменения больших полуосей и эксцентриситетов орбит были либо небольшими, либо периодическими. Во всех моделях наблюдалось аналогичное поведение эксцентриситетов планет b и c. Либрации, соответствующие резонансу средних движений 1 : 5 для планет c и d не наблюдались ни в одном из случаев. В компланарном случае при увеличении масс планет в 5.1 раз было найдено, что неустойчивость в системе проявляется на интервалах времени менее 10 млн лет.

Звезда HD 160691 (μ Ara) находится на расстоянии около 15.3 пк в созвездии Жертвенника (μ Ara). Спектральный класс звезды G3 IV-V, видимая звездная величина $m_V = 5.15^m$, масса звезды $M_\star = 1.08 \pm 0.05 M_\odot$. На дан-

ный момент в системе HD 160691 известно четыре планеты, обнаруженные методом лучевых скоростей. Первая из них (μ Ara b) открыта в 2000 году на Англо-австралийском телескопе в Австралии (Butler et al., 2001). Наличие второй планеты (сейчас она известна как μ Ara e) было подтверждено в 2004 году (McCarthy et al., 2004). В том же году была обнаружена третья планета (μ Ara c) по наблюдениям в обсерватории Ла-Силья (Santos et al., 2004). Далее в 2006 году двумя независимыми группами (Goździewski et al., 2007) и (Pepe et al., 2007) была предложена модель изменения лучевой скорости звезды, включающая ещё одну планету (μ Ara d). Введение новой планеты позволило уменьшить значительные на тот момент эксцентриситеты орбит ранее известных планет. Все планеты расположены на расстоянии менее 6 а.е. от звезды. Внутренняя планета по массе сравнима с Нептуном, а массы трёх внешних планет лежат в интервале от половины до двух масс Юпитера.

В работе (Goździewski et al., 2007) проведён анализ устойчивости планетной системы HD 160691. Моделирование орбитальной эволюции планетной системы на интервале времени 100000 лет показало, что она полностью устойчива (значение показателя MEGNO, характеризующего наличие хаоса в системе, быстро сходится к 2). Влияние ближайшей к звезде маломассивной планеты на орбитальную динамику трёх внешних планет пренебрежимо мало. Согласно работе (Pepe et al., 2007) близость планет d и b к резонансу средних движений 1 : 2 приводит к разрушению системы в течении 76 млн лет. Но поскольку возраст звезды оценивается в 6.4 млрд лет (Saffe et al., 2005), это означает наличие областей устойчивого движения в окрестности резонанса средних движений 1 : 2 планет d и b. Также найдено менее вероятное решение, приводящее к устойчивой эволюции планетной системы находящейся в точном резонансе 1 : 2.

Глава 2

Разложение гамильтониана четырёхпланетной задачи в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре

При написании данной Главы диссертации использованы публикации (Перминов, Кузнецов, 2015; Perminov, Kuznetsov, 2020b), выполненные соискателем Перминовым А.С. в соавторстве с Кузнецовым Э.Д., в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

2.1 Система координат Якоби

При изучении орбитальной эволюции планетных систем наиболее удобной является система координат Якоби. Это иерархическая система координат, в которой положение каждого последующего тела определяется относительно центра масс предыдущей подсистемы тел (Шарлье, 1966; Субботин, 1968).

Рассмотрим планетную систему, состоящую из звезды P_0 с массой m_0 , вокруг которой обращаются планеты P_i с массами $\mu m_0 t_i$ ($i = 1, \dots, N$). Здесь введены следующие обозначения: μ — малый параметр, t_i — безразмерная величина меньше или порядка единицы, такая, что произведение μt_i выражает массу планеты в массах звезды. Для Солнечной системы значение малого параметра μ может быть выбрано равным 10^{-3} , что близко к отношению суммы масс планет к массе Солнца (Холшевников и др., 2001).

Введём в рассмотрение инерциальную декартову систему координат. Определим положение тел P_0 и P_i с помощью радиус-векторов ρ_0 и ρ_i соответственно. В качестве такой инерциальной системы можно выбрать барицентрическую систему координат. Зная декартовы координаты тел, можно определить

их радиус-вектора в системе координат Якоби (Мюррей, Дермотт, 2010):

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \frac{1}{\bar{m}_N} \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\mu}{\bar{m}_N} \sum_{k=1}^N m_k \boldsymbol{\rho}_k, \\ \mathbf{r}_i &= \boldsymbol{\rho}_i - \frac{1}{\bar{m}_{i-1}} \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{\mu}{\bar{m}_{i-1}} \sum_{k=1}^{i-1} m_k \boldsymbol{\rho}_k, \quad i \geq 1,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $\bar{m}_i = 1 + \mu \sum_{k=1}^i m_k$ — сумма масс тел системы, выраженная в массах звезды. В выражении (2.1) радиус-вектор \mathbf{r}_0 задает положение центра масс системы. Обратное преобразование выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_0 &= \mathbf{r}_0 - \mu \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \\ \boldsymbol{\rho}_i &= \mathbf{r}_0 + \frac{\bar{m}_{i-1}}{\bar{m}_i} \mathbf{r}_i - \mu \sum_{k=i+1}^N \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \quad i \geq 1,\end{aligned}\tag{2.2}$$

В дальнейшем нам потребуется знать разности радиус-векторов в инерциальной системе координат, выраженные в координатах Якоби:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_0 &= \mathbf{r}_i + \mu \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \quad i \geq 1, \\ \boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j + \mu \sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \quad i > j \geq 1.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Геометрия построения системы координат Якоби для двухпланетной системы представлена на рисунке 2.1. Красным цветом на нём обозначены оси

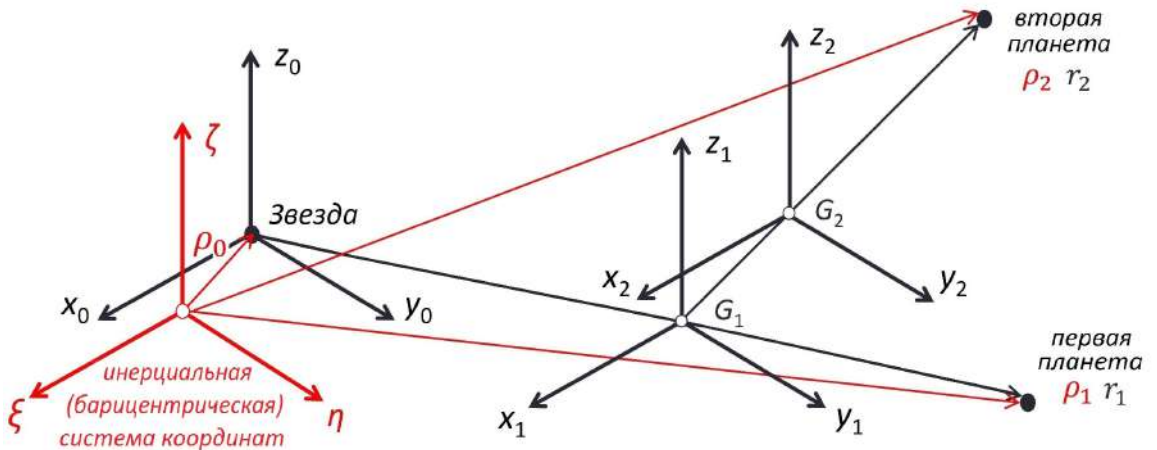


Рис. 2.1. Система координат Якоби.

инерциальной (барицентрической) системы координат, радиус-вектора звезды и планет в ней. Чёрным цветом обозначены координатные оси, связанные с центром звезды, барицентром G_1 системы «звезда – первая планета» и барицентром G_2 системы «звезда – первая планета – вторая планета».

2.2 Вторая система элементов Пуанкаре

Для орбиты каждой планеты можно определить следующие оскулирующие элементы: большую полуось a , эксцентриситет e , наклон орбиты I , аргумент перицентра ω , долготу восходящего узла Ω и среднюю аномалию l , называемые кеплеровыми. Гамильтониан планетной системы можно достаточно просто выразить в этих элементах, но использование канонических элементов позволяет выразить уравнения движения в симметричной, компактной гамильтоновой форме.

Будем использовать в качестве канонической системы элементов вторую систему Пуанкаре. Её преимущество состоит в том, что она позволяет в дальнейшем сократить угловую часть разложения в ряд гамильтониана планетной задачи, поскольку имеет только один угловой элемент — среднюю долготу. Кроме того, элементы Пуанкаре наиболее удобны для использования в тех задачах, в которых оскулирующие эксцентриситет и наклон сохраняют длительное время малые значения. Выражение элементов второй системы Пуанкаре через кеплеровы элементы выглядит следующим образом (Шарлье, 1966; Субботин, 1968):

$$\begin{aligned}
 L &= M\sqrt{\kappa^2 a}, \\
 \xi_1 &= \sqrt{2\sqrt{\kappa^2 a}(1 - \sqrt{1 - e^2})} \cos(\omega + \Omega), \\
 \eta_1 &= -\sqrt{2\sqrt{\kappa^2 a}(1 - \sqrt{1 - e^2})} \sin(\omega + \Omega), \\
 \xi_2 &= \sqrt{2\sqrt{\kappa^2 a}\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos I)} \cos \Omega, \\
 \eta_2 &= -\sqrt{2\sqrt{\kappa^2 a}\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos I)} \sin \Omega, \\
 \lambda &= \omega + \Omega + l,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где κ^2 — гравитационный параметр, M — приведённая масса, λ — средняя долгота; элементы ξ_1, η_1 пропорциональны эксцентриситету орбиты и называются эксцентрическими элементами Пуанкаре, ξ_2, η_2 — облические элементы (пропорциональны наклону орбиты). Элементы орбиты определяются для каждой планеты. Поэтому все переменные в (2.4) должны быть снабжены индексом, например, i ($i = 1, \dots, N$), который для удобства опущен.

Отметим, что в этой системе элементов L и λ , ξ_1 и η_1 , ξ_2 и η_2 являются попарно канонически сопряжёнными переменными. Причем, L , ξ_1 , ξ_2 играют здесь роль импульсов, а λ , η_1 , η_2 — координат.

2.3 Гамильтониан планетной системы

Кинетическая и потенциальная энергии планетной системы определяются формулами:

$$T = \frac{1}{2}\bar{m}_N m_0 \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \mu m_0 \sum_{i=1}^N \frac{M_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}, \quad (2.5)$$

$$U = -Gm_0^2 \left\{ \mu \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_0|} + \mu^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_i m_j}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|} \right\}, \quad (2.6)$$

где $M_i = m_i \bar{m}_{i-1} / \bar{m}_i$, G — гравитационная постоянная, а знаменатели в выражении для потенциальной энергии (2.6) определяются формулами (2.3).

Преобразуем выражения (2.5) и (2.6) как показано в работе (Холшевников и др., 2001). Запишем уравнение Лагранжа второго рода в координатах Якоби

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{ik}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r_{ik}} = - \frac{\partial U}{\partial r_{ik}}, \quad (2.7)$$

где r_{ik} — k -тая компонента вектора \mathbf{r}_i . Если положить $i = 0$, то уравнение (2.7) даст $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$, что означает равномерное и прямолинейное движение центра масс планетной системы. Таким образом, первое слагаемое в выражении для кинетической энергии (2.5) на движение планет не влияет и может быть опущено. Также уравнение Лагранжа остается инвариантным при умножении обоих его частей на произвольную постоянную.

Учитывая эти соображения, сократим уравнения (2.5) и (2.6) на величину μm_0 . Далее вычтем из (2.5) и прибавим к (2.6) потенциал задачи двух тел «звезда – планета», что в результате позволит нам записать гамильтониан планетной системы следующим образом

$$h = h_0 + \mu h_1, \quad (2.8)$$

$$h_0 = \sum_{i=1}^N M_i \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} - \frac{\kappa_i^2}{r_i} \right), \quad (2.9)$$

$$h_1 = Gm_0 \left\{ \sum_{i=2}^N \frac{m_i}{\mu} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_0|} \right) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_i m_j}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|} \right\}, \quad (2.10)$$

где $\kappa_i^2 = Gm_0m_i/M_i = Gm_0\bar{m}_i/\bar{m}_{i-1}$, h_0 — невозмущенный гамильтониан системы (не учитывает взаимодействие между планетами), h_1 — возмущающая функция. Слагаемое с двойной суммой в (2.10) представляет собой главную часть возмущающей функции. Слагаемое с однократной суммой, которое содержит малую разность обратных расстояний, необходимо преобразовать, чтобы избавиться от неопределенности. Для этого введём следующие вспомогательные величины (Холшевников и др., 2001):

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \quad \tilde{R}_i = \sqrt{r_i^2 + 2\mu \mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu^2 R_i^2}. \quad (2.11)$$

Тогда $|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_0| = \mathbf{r}_i + \mu \mathbf{R}_i$, $|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j| = \tilde{R}_i$. После преобразования получим, что выражение под знаком однократной суммы в (2.10) будет равно

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_0|} \right) = \frac{2\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu R_i^2}{r_i \tilde{R}_i (r_i + \tilde{R}_i)}. \quad (2.12)$$

Для удобства можно ввести безразмерную возмущающую функцию h_2 , определяемую следующим образом

$$h_1 = \frac{Gm_0}{a_0} h_2, \quad (2.13)$$

где a_0 — любая характерная для планетной системы постоянная, имеющая размерность длины (например, 1 астрономическая единица). С учетом всего вышеизложенного возмущающая функция h_2 выражается следующим образом

$$h_2 = \sum_{i=2}^N \frac{m_i a_0 (2\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu R_i^2)}{r_i \tilde{R}_i (r_i + \tilde{R}_i)} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_i m_j a_0}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|}. \quad (2.14)$$

2.4 Алгоритм разложения гамильтониана

Приступим к разложению функции Гамильтона планетной системы в ряд Пуассона по элементам орбит. Используем вторую систему элементов Пуанкаре, определяемую формулами (2.4). Невозмущенная часть гамильтониана может быть сразу выражена следующим образом

$$h_0 = \sum_{i=1}^N M_i \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} - \frac{\kappa_i^2}{r_i} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \kappa_k^2}{2a_k} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k^3 \kappa_k^4}{2L_k}. \quad (2.15)$$

Возмущающая функция h_2 , как показано в (Субботин, 1968), может быть разложена в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре. Запишем это разложение в следующем виде

$$h_2 = \sum_{n,p} A_{np} x^p \cos n\lambda, \quad (2.16)$$

где A_{np} — числовые коэффициенты, x^p — произведение элементов Пуанкаре в соответствующих степенях, $n\lambda$ — аргумент угловой части разложения. Эти величины можно записать явным образом

$$x^p = L_1^{p_1} \xi_{1,1}^{p_2} \eta_{1,1}^{p_3} \xi_{2,1}^{p_4} \eta_{2,1}^{p_5} \cdots L_N^{p_{5N-4}} \xi_{1,N}^{p_{5N-3}} \eta_{1,N}^{p_{5N-2}} \xi_{2,N}^{p_{5N-1}} \eta_{2,N}^{p_{5N}}. \quad (2.17)$$

Здесь n — целое число, $p = \{p_1, p_2, \dots, p_{5N}\}$ — мульти-индекс. Суммирование в (2.16) ведётся по всем целым n по всем натуральным значениям компонент мульти-индекса p , за исключением индексов элемента L , которые могут принимать не только целые, но и полуцелые и отрицательные полуцелые значения.

Разложение возмущающей функции в ряд строится в два этапа:

- разложение в ряд по степеням малого параметра μ ;
- разложение по степеням элементов орбиты.

Выполним преобразование обратного модуля разности радиус-векторов, входящего в главную часть возмущающей функции

$$\frac{1}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|} = \left(\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j + \mu \sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{m_k} \mathbf{r}_k \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} (1 + \mu X_{ij})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.18)$$

где

$$X_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \left(2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{m_k} \mathbf{r}_k + \mu \left(\sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{m_k} \mathbf{r}_k \right)^2 \right). \quad (2.19)$$

Здесь и далее индексы i, j удовлетворяют условию $1 \leq j < i \leq N$. Рассмотрим величину X_{ij} подробнее. В неё входят различные комбинации скалярных произведений. Ограничим их сверху следующим образом: $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \leq r_i r_j$, $\mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \leq r_j r_k$. Тогда, при условии, что $r_i > r_j$ ($i > j$) для любого положения тел на орбитах, можно утверждать, что $X_{ij} \sim 1$. Соответственно $\mu X_{ij} \sim \mu$. Значит при малых значениях параметра μ выражение (2.18) можно разложить

в ряд Тейлора. Сохраняя слагаемые до μ^3 , можем записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|} &= \frac{1}{\Delta_{ij}} - \mu \frac{A_{ij}}{\Delta_{ij}^3} + \mu^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{B_{ij}}{\Delta_{ij}^3} + \frac{3}{2} \frac{A_{ij}^2}{\Delta_{ij}^5} \right) + \\ &+ \mu^3 \left(\frac{3}{2} \frac{A_{ij} B_{ij}}{\Delta_{ij}^5} - \frac{5}{2} \frac{A_{ij}^3}{\Delta_{ij}^7} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где для удобства введены следующие величины:

$$\Delta_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \quad A_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \quad B_{ij} = \left(\sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k \right)^2. \quad (2.21)$$

Построим разложение величины $1/\Delta_{ij}$ в ряд по полиномам Лежандра. Запишем

$$\frac{1}{\Delta_{ij}} = \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = (r_i^2 + r_j^2 - 2\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \cos H_{ij})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.22)$$

Выделив в этом выражении производящую функцию полиномов Лежандра получим, что

$$\frac{1}{\Delta_{ij}} = \frac{1}{r_j} (1 + \rho_{ij}^2 - 2\rho_{ij} \cos H_{ij})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_j} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{ij}^n P_n(\cos H_{ij}), \quad (2.23)$$

где $\rho_{ij} = r_i/r_j$, H_{ij} — угол между векторами r_i и r_j , P_n — полином Лежандра степени n . Поскольку $-1 \leq \cos H_{ij} \leq +1$, то разложение $1/\Delta_{ij}$ в ряд по полиномам Лежандра абсолютно сходится при $|\rho_{ij}| < 1$. Следует обратить внимание на отличие величины ρ_{ij} от радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}_i$.

Далее по известным формулам можно выразить полиномы Лежандра P_n через косинусы углов $\cos H_{ij}$.

Теперь построим аналогичное разложение для слагаемых второй части возмущающей функции. Подставив в (2.12) из (2.11) выражение для \tilde{R}_i , получим

$$\begin{aligned} \frac{2\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu R_i^2}{r_i \tilde{R}_i (r_i + \tilde{R}_i)} &= \frac{2\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu R_i^2}{r_i \sqrt{r_i^2 + 2\mu \mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu^2 R_i^2} (r_i + \sqrt{r_i^2 + 2\mu \mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu^2 R_i^2})} = \\ &= \frac{1}{r_i} \frac{Y_{ij}}{\sqrt{1 + \mu Y_{ij}} (1 + \sqrt{1 + \mu Y_{ij}})}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где

$$Y_{ij} = \frac{2\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu R_i^2}{r_i^2} \quad (2.25)$$

Можно показать, что величина $Y_{ij} \sim 1$. Соответственно выражение (2.24) может быть разложено в ряд Тейлора по степеням величины μ . Сохраняя слагаемые до μ^3 , запишем

$$\begin{aligned} \frac{2\mathbf{r}_i\mathbf{R}_i + \mu R_i^2}{r_i\tilde{R}_i(r_i + \tilde{R}_i)} &= \frac{C_i}{r_i^3} + \mu \left(\frac{1}{2} \frac{D_i}{r_i^3} - \frac{3}{2} \frac{C_i^2}{r_i^5} \right) + \mu^2 \left(-\frac{3}{2} \frac{C_i D_i}{r_i^5} + \frac{5}{2} \frac{C_i^3}{r_i^7} \right) + \\ &+ \mu^3 \left(-\frac{3}{8} \frac{D_i^2}{r_i^5} + \frac{15}{4} \frac{C_i^2 D_i}{r_i^7} - \frac{35}{8} \frac{C_i^4}{r_i^9} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где определены вспомогательные величины:

$$C_i = \mathbf{r}_i \sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{m_k} \mathbf{r}_k, \quad D_i = B_{i1} = \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k}{m_k} \mathbf{r}_k \right)^2. \quad (2.27)$$

Нами решена задача о разложении возмущающей функции в ряд по степеням малого параметра. Величины $1/r_i$, r_i/r_j , $r_i r_j$, $\cos H_{ij}$ и их различные степени, входящие в формулы (2.20), (2.23), (2.24), могут быть далее разложены в ряды по элементам Пуанкаре.

2.5 Базовые разложения

Рассмотрим классические разложения небесной механики. Прямоугольные координаты могут быть выражены через кеплеровы элементы орбит по следующим формулам (Субботин, 1968):

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= X \left(\cos^2 \frac{I}{2} \cos \lambda + \sin^2 \frac{I}{2} \cos 2\Omega \cos \lambda + \sin^2 \frac{I}{2} \sin 2\Omega \sin \lambda \right) - \\ &- Y \left(\cos^2 \frac{I}{2} \sin \lambda - \sin^2 \frac{I}{2} \cos 2\Omega \sin \lambda - \sin^2 \frac{I}{2} \sin 2\Omega \cos \lambda \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{a} &= X \left(\cos^2 \frac{I}{2} \sin \lambda - \sin^2 \frac{I}{2} \cos 2\Omega \sin \lambda + \sin^2 \frac{I}{2} \sin 2\Omega \cos \lambda \right) + \\ &+ Y \left(\cos^2 \frac{I}{2} \cos \lambda - \sin^2 \frac{I}{2} \cos 2\Omega \cos \lambda - \sin^2 \frac{I}{2} \sin 2\Omega \sin \lambda \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{a} &= X (\sin I \cos \Omega \sin \lambda - \sin I \sin \Omega \cos \lambda) + \\ &+ Y (\sin I \sin \Omega \sin \lambda + \sin I \cos \Omega \cos \lambda), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} X &= -e \cos l + \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \cos(E - l) + \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2} \cos(E + l), \\ Y &= -e \sin l + \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \sin(E - l) + \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2} \sin(E + l). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь E — эксцентрическая аномалия. Выражение для эксцентриситета через элементы Пуанкаре можно записать как

$$e = \sqrt{\frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{L}} \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}}. \quad (2.32)$$

Кроме того, поскольку средняя аномалия $l = \lambda - \pi$, где π — долгота перицентра, то

$$\begin{aligned} e \cos l &= e \cos \pi \cos \lambda + e \sin \pi \sin \lambda, \\ e \sin l &= e \cos \pi \sin \lambda - e \sin \pi \cos \lambda, \\ e \cos \pi &= \frac{\xi_1}{\sqrt{L}} \left(1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ e \sin \pi &= -\frac{\eta_1}{\sqrt{L}} \left(1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Функции $\cos(E \pm l)$ и $\sin(E \pm l)$ можно разложить в ряд по степеням эксцентриситета и по кратным средней аномалии, используя классические разложения небесной механики для величин $\cos E$ и $\sin E$. Затем эти ряды можно преобразовать, используя формулы (2.32) и (2.33).

Комбинации кеплеровых элементов в разложениях для координат могут быть выражены через элементы Пуанкаре следующим образом:

$$\cos^2 \frac{I}{2} = \frac{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - (\xi_2^2 + \eta_2^2)}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}; \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{I}{2} \cos 2\Omega &= \frac{\xi_2^2 - \eta_2^2}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}, \\ \sin^2 \frac{I}{2} \sin 2\Omega &= \frac{2\xi_2\eta_2}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}; \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \sin I \cos \Omega &= \xi_2 \frac{\sqrt{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - (\xi_2^2 + \eta_2^2)}}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}, \\ \sin I \sin \Omega &= -\eta_2 \frac{\sqrt{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - (\xi_2^2 + \eta_2^2)}}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Разложения r/a и a/r в ряды по степеням элементов Пуанкаре можно получить, используя классические разложения по степеням эксцентриситета и средней аномалии. Затем необходимо использовать формулы (2.32) и (2.33) для перехода к элементам Пуанкаре.

Ряды для величин x/a , y/a , z/a , r/a , a/r являются базовыми. Получив эти разложения для орбитальных элементов всех планет системы, можно построить ряды для величин r_i/r_j , $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j$, $\cos H_{ij}$ ($1 \leq i < j \leq N$), а также для различных степеней этих величин.

2.6 Система компьютерной алгебры Piranha

Для построения рядов используется система компьютерной алгебры Piranha, написанная Франческо Бискани (Институт астрономии имени Макса Планка, Гейдельберг, Германия). Это высокопроизводительная специализированная компьютерная система, предназначенная для аналитических вычислений в области небесной механики и представляющая собой эшелонированный пуассоновский процессор (Biscani, 2019). Piranha написана на языке программирования C++ и является объектно-ориентированным программным обеспечением. Она представляет собой набор функций для различных аналитических вычислений. Пользовательский интерфейс программы реализован на языке Python. Доступ к интерфейсу может быть получен из стандартной Python-консоли после компиляции исходного кода, который находится в свободном доступе на сайте <https://github.com/bluescarni/piranha>.

Система компьютерной алгебры Piranha может работать с рядами различных типов, такими как полиномиальные разложения, ряды Фурье и Пуассона. Возможно использование как вещественных (двойной точности), так и рациональных (произвольной точности) коэффициентов и степеней. При построении разложения функции Гамильтона используются ряды Пуассона с коэффициентами и степенями имеющими рациональный тип представления (в этом случае при аналитических манипуляциях отсутствуют ошибки округления, что обеспечивает абсолютную точность при вычислениях).

В системе Piranha также реализована поддержка эшелонированных рядов Пуассона — это ряды Пуассона со знаменателями, использование которых необходимо при реализации алгоритмов метода Хори–Депри.

Система позволяет проводить следующие аналитические манипуляции.

- Сложение и перемножение рядов. Реализуется с помощью стандартных математических операторов $+$, $-$, $*$.
- Вычисление биномиальных разложений выполняется автоматически при записи выражений вида $(1 + \mathbf{s})^{**q}$, где \mathbf{s} — ряд одной или нескольких

- переменных, а q — произвольная рациональная степень. При этом необходимо указать максимальную степень переменных, до которых будут сохраняться слагаемые разложения.
- Усечение рядов до слагаемых заданного порядка происходит автоматически, вызовом перед операцией (например, биномиальным разложением) глобальной функции `set_auto_truncate_degree(max_degree, names)`, где `max_degree` — максимальная степень переменных, поименованных в списке `names`, вплоть до которой сохраняются слагаемые разложения. Если сумма степеней переменных `max_degree` в конкретном слагаемом ряда больше этого значения, то слагаемое исключается из разложения. Отмена заданного правила усечения рядов производится с помощью соответствующей глобальной функции `unset_auto_truncate_degree()`.
 - Для усечения ряда `s` до степени `max_degree` по переменным из списка `names` используется функция `truncate_degree(s, max_degree, names)`, возвращающая усечённый ряд.
 - Подстановка в ряд другого ряда или некоторого числового значения выполняется с помощью функции `s1.subs(name, s2)`. Здесь в переменную с именем `name` ряда `s1` подставляется другой ряд или числовое значение `s2`.
 - Оценка ряда `s` набором значений, каждое из которых соответствует своей переменной, выполняется функцией `evaluate(s, eval)`, где `eval` — словарь, состоящий из пар “имя переменной” — “число”. На выходе будет получено некоторое числовое значение.
 - Интегрирование ряда `s` по переменной `name` выполняется с помощью функции `integrate(s, name)`, дифференцирование — с помощью функции `partial(s, name)`.
 - Интегрирование угловой части ряда Пуассона `s` по времени осуществляется с помощью функции `s.t_integrate()`.
 - Дифференцирование некоторого ряда по входящему в него неявному аргументу `name` можно выполнить, если предварительно вызвать глобальную функцию `register_custom_derivative(name, lambda_expr)`, которая задает производную сложной функции и использует её при последующем дифференцировании по переменной `name`. Здесь `lambda_expr` — лямбда-выражение, описывающее производную сложной функции. Для отмены всех правил дифференцирования сложных функций используется глобальная функция `unregister_all_custom_derivatives()`.
 - Сохранение ряда `s` в файл по пути `f` выполняется с помощью функции `save_file(s, f, data_format.boost_portable, compression.bzip2)`.

- Загрузка ряда из файла по пути f в переменную s , имеющую соответствующий загружаемому ряду тип, выполняется с помощью функции `load_file(s, f, data_format.boost_portable, compression.bzip2)`.

Примеры использования вышеперечисленных функций в контексте реализации алгоритмов разложения гамильтониана в ряд приведены в Приложении А.

Более подробная информация об использовании системы Piranha приведена на сайте <http://bluescarni.github.io/piranha/sphinx/>.

2.7 Разложение гамильтониана четырёхпланетной задачи. Применение пуассоновского процессора

Пуассоновский процессор — это собирательное название для библиотеки функций, реализующих аналитические вычисления с рядами Пуассона. Его задача состоит в получении результатов таких вычислений. В качестве пуассоновского процессора при разложении в ряд функции Гамильтона используется система компьютерной алгебры Piranha.

Приступим к рассмотрению четырёхпланетной задачи. Запишем функцию Гамильтона для данного случая в явном виде.

Невозмущенный гамильтониан планетной системы в случае $N = 4$ имеет вид:

$$h_0 = \frac{M_1^3 \kappa_1^4}{2L_1} + \frac{M_2^3 \kappa_2^4}{2L_2} + \frac{M_3^3 \kappa_3^4}{2L_3} + \frac{M_4^3 \kappa_4^4}{2L_4}. \quad (2.37)$$

Возмущающая функция записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_2 = & \frac{m_2 a_0 (2\mathbf{r}_2 \mathbf{R}_2 + \mu R_2^2)}{r_2 \tilde{R}_2 (r_2 + \tilde{R}_2)} + \\ & \frac{m_3 a_0 (2\mathbf{r}_3 \mathbf{R}_3 + \mu R_3^2)}{r_3 \tilde{R}_3 (r_3 + \tilde{R}_3)} + \frac{m_4 a_0 (2\mathbf{r}_4 \mathbf{R}_4 + \mu R_4^2)}{r_4 \tilde{R}_4 (r_4 + \tilde{R}_4)} - \\ & - \left\{ \frac{m_2 m_1 a_0}{|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1|} + \frac{m_3 m_2 a_0}{|\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2|} + \frac{m_4 m_3 a_0}{|\boldsymbol{\rho}_4 - \boldsymbol{\rho}_3|} + \right. \\ & \left. \frac{m_3 m_1 a_0}{|\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1|} + \frac{m_4 m_2 a_0}{|\boldsymbol{\rho}_4 - \boldsymbol{\rho}_2|} + \frac{m_4 m_1 a_0}{|\boldsymbol{\rho}_4 - \boldsymbol{\rho}_1|} \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где разности координат определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\rho_2 - \rho_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 + \mu \frac{m_1}{m_1} \mathbf{r}_1, \\
\rho_3 - \rho_2 &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 + \mu \frac{m_2}{m_2} \mathbf{r}_2, \\
\rho_4 - \rho_3 &= \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3 + \mu \frac{m_3}{m_3} \mathbf{r}_3, \\
\rho_3 - \rho_1 &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 + \mu \left(\frac{m_1}{m_1} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_2} \mathbf{r}_2 \right), \\
\rho_4 - \rho_2 &= \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2 + \mu \left(\frac{m_2}{m_2} \mathbf{r}_2 + \frac{m_3}{m_3} \mathbf{r}_3 \right), \\
\rho_4 - \rho_1 &= \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1 + \mu \left(\frac{m_1}{m_1} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_2} \mathbf{r}_2 + \frac{m_3}{m_3} \mathbf{r}_3 \right),
\end{aligned} \tag{2.39}$$

а величины \mathbf{R}_i и \bar{R}_i , представляют собой комбинации различных скалярных произведений и определяются, в соответствии с формулами (2.11). Слагаемые в фигурных скобках представляют собой главную часть возмущающей функции.

Для реализации вышеописанного алгоритма разложения функции Гамильтона был написан ряд скриптов на языке Python, использующих библиотеки пуассоновского процессора Piranha. Рассмотрим основные из них.

Скрипты `r_a(e, M, order)` и `a_r(e, M, order)` реализуют соответственно разложения в ряды для отношений радиус-вектора планеты к большой полуоси её орбиты и обратной величины этого отношения. Разложения строятся по эксцентриситету орбиты e до степени `order` и по кратным средней аномалии M (здесь и далее в скриптах, в отличие от формул в тексте, средняя аномалия обозначается буквой M).

Скрипты `cos_E(e, M, order)` и `sin_E(e, M, order)` реализуют разложения в ряды для косинуса и синуса эксцентрической аномалии соответственно. Разложения строятся до степени `order` по эксцентриситету орбиты e и по кратным средней аномалии M .

Скрипт `xyz(i, n)` реализует построение рядов для отношений x/a , y/a и z/a по степеням элементов Пуанкаре в зависимости от значения аргумента n . Здесь и далее n — это максимальная, учитываемая в каждом слагаемом ряда, сумма степеней эксцентрических и облических элементов Пуанкаре (2.4). Для вычислений внутри программного алгоритма используются формулы (2.28–2.36). Аргумент i здесь и далее определяет порядковый номер планеты для которой вычисляются ряды (по сути i — это индекс переменных в разложении).

Скрипты `rrr(i, n, deg)` и `one_r(i, n, deg)` позволяют получить соответственно разложения для величин r/a и a/r в степени `deg`. На первом этапе с помощью скриптов `r_a(e, M, order)` и `a_r(e, M, order)` получаем разложения этих величин в ряды по степеням эксцентриситета и по кратным средней аномалии. Затем по формулам (2.32–2.33) заменяем эксцентриситеты и средние аномалии на элементы второй системы Пуанкаре. При необходимости возводим полученный результат в степень `deg`.

Используя скрипт `cosine(i, j, n, deg)` из рядов для $x/a, y/a, z/a$ и a/r можно получить выражение в ряд для величины $\cos H_{ij}$ в степени `deg`. Здесь i и j — порядковые номера планет.

При построении разложения величины $1/\Delta_{ij}$ в соответствии с формулой (2.23) используется скрипт `one_delta(i, j, n, c_max, deg)`. Аргумент `deg` задает степень величины $1/\Delta_{ij}$, `c_max` — максимальное число полиномов Лежандра, учитываемых в разложении. При построении рядов для различных пар планет можно учитывать следующие соображения. Скорость сходимости зависит от величины отношения r_i/r_j . Чем больше это значение, тем большее число полиномов Лежандра нужно учитывать в (2.23) для получения необходимой точности разложения. При построении разложений вида (2.23) полиномы Лежандра выражаются через свои аргументы — величины $\cos H_{ij}$. Ряды же для степеней косинусов углов вычисляются с помощью скрипта `cosine(i, j, n, deg)`.

Далее, используя формулы (2.20), (2.21) и (2.26), (2.27), можно получить выражения для слагаемых, представляющих главную и вторую части возмущающей функции. При этом учитывается, что слагаемые с различными степенями малого параметра μ вносят в возмущающую функцию h_2 различный по величине вклад. Чем больше степень μ , тем с меньшей точностью можно конструировать ряды для данных слагаемых. Пусть $\mu = 10^{-3}$, а слагаемые с μ^0 в (2.20) и (2.26) получены с относительной точностью 10^{-q} . Тогда допустимая точность для слагаемых с множителем μ^1 составит 10^{-q+3} , а для слагаемых с μ^2 — 10^{-q+6} и так далее. Такое упрощение существенно сокращает число слагаемых и объём необходимой оперативной памяти.

Отметим также, что при вычислениях в символьном виде сохраняются величины $m_1/\bar{m}_1, m_2/\bar{m}_2, m_3/\bar{m}_3$ и малый параметр μ .

Вычисления проводились на персональном компьютере с шестиядерным процессором Core i7 с частотой 3300 МГц, объём доступной оперативной памяти — 128 Гб. Система компьютерной алгебры Piranha использовалась в среде операционной системы Ubuntu 16.

Программная реализация вышеперечисленных скриптов приведена в Приложении А.

2.8 Анализ полученных рядов

Рассмотрим некоторые свойства построенных рядов. В таблице 2.1 представлены следующие характеристики базовых разложений: число слагаемых N_{terms} (длина ряда), точность оценки разложения Δs при задании конкретных значений элементов орбиты и время t_{calc} необходимое для построения ряда в системе PIRANHA. Точность представления некоторой величины её разложением в ряд можно охарактеризовать относительной погрешностью

$$\Delta s = \left| \frac{(s_0 - s)}{s_0} \right|, \quad (2.40)$$

где s_0 — значение величины, полученное по точной аналитической формуле, а s вычислено с помощью разложения в ряд. Данные приведены для значений максимальных степеней эксцентрических и облических элементов Пуанкаре $n = 5, 6, 8, 9$.

Таблица 2.1. Число слагаемых, точность и время их построения для базовых разложений

n	ряд	$x/a, y/a$	z/a	r/a	a/r	r_i/r_j	$\cos \theta_{ij}$	$1/\Delta_{ij}$
5	N_{terms}	96	116	46	41	400	2438	79688
	Δs	10^{-7}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-8}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-7}
	t_{calc}	0.1 ^s	0.1 ^s	0.1 ^s	0.1 ^s	0.1 ^s	0.8 ^s	6 ^s
6	N_{terms}	154	516	66	61	847	6342	168984
	Δs	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}	10^{-7}
	t_{calc}	0.1 ^s	0.1 ^s	0.1 ^s	0.1 ^s	0.1 ^s	1.4 ^s	13 ^s
8	N_{terms}	333	616	132	127	3004	32035	1448596
	Δs	10^{-10}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-10}
	t_{calc}	0.2 ^s	0.2 ^s	0.2 ^s	0.2 ^s	0.2 ^s	4 ^s	121 ^s
9	N_{terms}	460	966	178	173	5158	64691	2484772
	Δs	10^{-10}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-10}
	t_{calc}	0.3 ^s	0.3 ^s	0.2 ^s	0.2 ^s	0.2 ^s	7 ^s	121 ^s

Для проведения численной оценки рядов, представляющих базовые разложения, использовались значения элементов Пуанкаре, соответствующие кеплеровым элементам орбит планет-гигантов Солнечной системы относительно средней эклиптики и равноденствия J2000.0 (в соответствии с данными веб-страницы https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/approx_pos.html, таблица 1). Максимальные степени полиномов Лежандра, учитываемые при вычислении рядов $1/\Delta_{ij}$ равны 25 (для значений $n = 5, 6$) и 40 (для $n = 8, 9$). Оценки точности Δs построенных разложений получены для всех значений индексов i, j и максимальные из оценок приведены в таблице 2.1.

На рисунке 2.2 для случая $n = 9$ приведены графики точности представления рядом Пуассона величины $1/\Delta_{ij}$ в зависимости от значения максимальной степени учитываемых в этом разложении полиномов Лежандра. Графики приведены для всех пар планет-гигантов Солнечной системы. Численные значения величин $1/\Delta_{ij}$ были получены для различных положений планет в каждой из рассматриваемых пар. Наихудшая точность при оценке рядов возникает в конфигурации, когда внутренняя из двух рассматриваемых планет находится вблизи апоцентра своей орбиты, а внешняя вблизи перигея. При этом отношение r_i/r_j , от которого зависит скорость сходимости разложения по полиномам Лежандра, принимает своё максимальное значение.

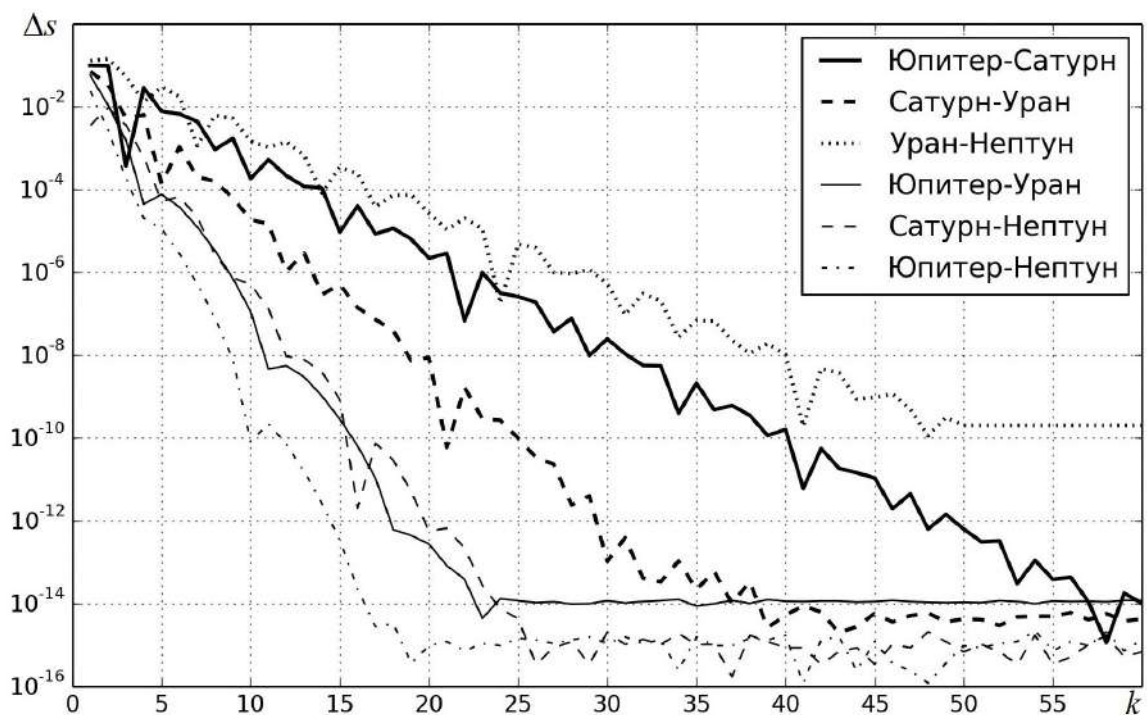


Рис. 2.2. Зависимость точности Δs построения разложения величины $1/\Delta_{ij}$ от максимальной степени k учитываемых полиномов Лежандра для значения $n = 9$.

Из графиков на рисунке 2.2 видно, что начиная с некоторого значения степени k , дальнейший учёт полиномов Лежандра не вносит вклад в увеличение точности построения разложения. Приведённые на рис. 2.2 данные можно использовать для определения минимального количества полиномов Лежандра, которые необходимо учитывать для получения разложения с заданной точностью. Например, при разложении в ряд слагаемого $1/\Delta_{43}$ ($n = 9$), описывающего взаимодействие пары планет Уран – Нептун, можно не учитывать полиномы Лежандра со степенями выше 50.

2.9 Оценка точности построения разложения для возмущающей функции четырёхпланетной задачи

Получено разложение возмущающей функции h_2 в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре с точностью до квадрата малого параметра задачи μ^2 . Следовательно, разложение гамильтониана четырёхпланетной системы, в соответствии с (2.8), построено до третьей степени малого параметра μ^3 .

В таблице 2.2 приведены массы, координаты и скорости планет-гигантов Солнечной системы, оскулирующие кеплеровы элементы их орбит в барицентрической системе координат на дату 31.01.2016 (на момент 00^h00^m00^s в единицах TDB, где TDB — динамическое барицентрическое время) в соответствии с численной эфемеридой DE 430 (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>). Координаты, скорости и элементы орбит приведены на эпоху J2000.0 относительно средней эклиптики. Массы планет m соответствуют системе постоянных эфемериды DE 430 (Folkner et al., 2014). Для удобства в таблице 2.2 приведены значения величин $\mu^{-1}m$, выраженные в массах Солнца M_\odot . Значение μ принято равным 0.001.

Таблица 2.2. Массы, координаты и скорости планет-гигантов Солнечной системы, оскулирующие кеплеровы элементы их орбит на эпоху J2000.0 относительно средней эклиптики (на дату 31.01.2016)

	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
$\mu^{-1}m$	0.95459409	0.28581501	0.04365805	0.05150314
a , а.е.	5.20204092	9.55279611	19.21432611	30.12374930
e	0.04891844	0.05335991	0.04620344	0.00953110
I , °	1.30375643	2.48715188	0.77196095	1.76601483
ω , °	273.751732	339.459754	96.190957	263.910565
Ω , °	100.515937	113.602760	74.022286	131.712057
l , °	148.144670	153.485095	211.927385	304.395649
x , а.е.	-5.23714776	-3.56388917	18.83217261	27.98769604
y , а.е.	1.38458753	-9.35091886	6.66068187	-10.68753925
z , а.е.	0.11136683	0.30442514	-0.21923850	-0.42491584
v_x , а.е./сут.	$2.016583 \cdot 10^{-3}$	$4.906782 \cdot 10^{-3}$	$-1.340296 \cdot 10^{-3}$	$1.099163 \cdot 10^{-3}$
v_y , а.е./сут.	$-6.939715 \cdot 10^{-3}$	$-2.003578 \cdot 10^{-3}$	$3.524688 \cdot 10^{-3}$	$2.951660 \cdot 10^{-3}$
v_z , а.е./сут.	$7.396816 \cdot 10^{-5}$	$-1.604592 \cdot 10^{-4}$	$3.043864 \cdot 10^{-5}$	$-8.585382 \cdot 10^{-5}$

Для оценки рядов, представляющих разложение возмущающей функции четырёхпланетной задачи, необходимо преобразовать барицентрические кеплеровы элементы орбит (таблица 2.2) в элементы Пуанкаре в системе координат Якоби. Используя кеплеровы элементы орбит можно вычислить барицентрические положения и скорости планет, которые затем преобразуются в

положения и скорости в системе координат Якоби. Также можно сразу преобразовать известные положения и скорости из барицентрических координат в якобиевы. Обратное преобразование позволяет получить кеплеровы элементы в системе координат Якоби. Далее вычисляются элементы Пуанкаре. После этого проводится оценка полученных разложений.

В таблице 2.3 приведены характеристики рядов, представляющих возмущающую функцию гамильтониана четырёхпланетной задачи. Для слагаемых главной части возмущающей функции с общим множителем μ^n ($n = 0, 1, 2$) для пар планет (индексы i и j) приведены данные о количестве слагаемых N_{terms} , максимальной степени эксцентрических и облических элементов Пуанкаре p_m , максимальной степени учитываемых полиномов Лежандра d_m . Дана оценка s разложения в ряд и относительная точность разложения Δs , в соответствии с (2.40). Также приведено время t_{calc} , необходимое для построения ряда в системе Piranha. Объём требуемой оперативной памяти (в гигабайтах) приведён в столбце RAM, место требуемое для хранения данных на диске (в мегабайтах) указано в столбце HDD.

Для второй части возмущающей функции в таблице 2.3 приведён тот же набор данных, что и для её главной части, но за исключением индексов i, j и степени полиномов Лежандра d_m . Значения величин s в таблице 2.3 приведены с учётом общего множителя $\mu G m_0$, согласно (2.8) и (2.13).

В таблице 2.4 приведены данные уже об общем количестве слагаемых гамильтониана N_{terms} , имеющих общий множитель μ^n ($n = 0, 1, 2, 3$). Также дана оценка слагаемых гамильтониана s_0 , оценка разложения гамильтониана в ряд s и точность разложения в ряд Δs . Оценка величин в таблице 2.4 проведена аналогично величинам в таблице 2.3. Относительная точность построения гамильтониана возмущающей функции для системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун составляет величину порядка 10^{-12} .

Рассмотрим далее ещё два варианта разложения возмущающей функции четырёхпланетной задачи, но построенных только до первой степени по малому параметру. В таблице 2.5 приведены характеристики обоих разложений, включая максимальную степень эксцентрических и облических элементов Пуанкаре p_n , полиномов Лежандра d_n и число слагаемых N_n , где индекс n соответствует слагаемым с общим множителем μ^n ($n = 0, 1$).

Разложение гамильтониана в первом случае содержит 1363330 слагаемых (с учётом 4 слагаемых невозмущенного гамильтониана), во втором случае — 16296620 слагаемых.

В таблице 2.6 дана оценка точности построения обоих разложений возмущающей функции, свойства которых приведены в таблице 2.5. Оценка дана для элементов орбит трёхпланетной системы GJ 3138. Используемые элемен-

Таблица 2.3. Некоторые характеристики рядов, представляющих возмущающую функцию четырёхпланетной задачи с точностью до квадрата по малому параметру

Главная часть возмущающей функции									
n	i, j	p_m	d_m	N_{terms}	s	Δs	t_{calc}	RAM	HDD
0	1, 2	6	60	8 848 110	$-7.428150321276 \cdot 10^{-9}$	$4.7 \cdot 10^{-10}$	$1^h 32^m$	43.5	140.4
	2, 3	6	60	8 848 110	$-1.340832185711 \cdot 10^{-10}$	$4.9 \cdot 10^{-10}$	$1^h 32^m$	43.5	140.4
	3, 4	6	60	8 848 110	$-3.391806593879 \cdot 10^{-11}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$1^h 32^m$	43.5	140.4
	1, 3	6	40	3 996 247	$-5.003146952199 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$	35^m	19.6	46.0
	2, 4	6	40	3 996 247	$-1.378967245223 \cdot 10^{-10}$	$4.5 \cdot 10^{-12}$	35^m	19.6	46.0
	1, 4	6	30	2 283 149	$-4.114524820786 \cdot 10^{-10}$	$3.3 \cdot 10^{-11}$	18^m	10.7	21.5
1	1, 2	4	20	1 118 448	$-1.416590135433 \cdot 10^{-12}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	33^m	6.4	13.2
	2, 3	4	20	1 118 448	$-1.159567379104 \cdot 10^{-14}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	33^m	6.4	13.2
	3, 4	4	20	1 118 448	$2.187686756208 \cdot 10^{-16}$	$9.1 \cdot 10^{-5}$	33^m	6.4	13.2
	1, 3	4	5	679 044	$-1.252360433136 \cdot 10^{-13}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	2^m	2.7	4.0
	2, 4	4	5	679 044	$-4.231847684407 \cdot 10^{-16}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	2^m	2.7	4.0
	1, 4	4	5	1 267 948	$-5.261428360247 \cdot 10^{-14}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	4^m	5.2	7.8
2	1, 2	3	15	487 648	$4.352242431405 \cdot 10^{-16}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	12^m	3.1	6.2
	2, 3	3	15	487 648	$-7.818338074689 \cdot 10^{-19}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	12^m	3.1	6.2
	3, 4	3	15	487 648	$3.131138531228 \cdot 10^{-20}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	12^m	3.1	6.2
	1, 3	3	5	898 701	$-3.134790296467 \cdot 10^{-17}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	3^m	3.6	6.8
	2, 4	3	5	898 701	$3.929259371714 \cdot 10^{-19}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	3^m	3.6	6.8
	1, 4	3	5	3 026 620	$-5.463027834759 \cdot 10^{-18}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	12^m	14.6	23.5
Вторая часть возмущающей функции									
n	p_m	N_{terms}	s	Δs	t_{calc}	RAM	HDD		
0	6	33 972	$1.892301235003 \cdot 10^{-10}$	$2.2 \cdot 10^{-8}$	13^s	0.2	0.1		
1	4	36 036	$1.018249587943 \cdot 10^{-12}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	11^s	0.2	0.2		
2	3	27 513	$-2.006708288336 \cdot 10^{-16}$	$7.0 \cdot 10^{-5}$	11^s	0.2	0.1		

ты орбит соответствуют приведённым для данной системы в каталоге вне-солнечных планетных систем <http://exoplanet.eu/catalog/>. Барицентрические кеплеровы элементы орбит, приведённые в каталоге, преобразуются к элементам орбит Пуанкаре в системе координат Якоби. Затем по формуле (2.40) вычисляется относительная точность Δs построения рядов, представляющих возмущающую функцию задачи.

Поскольку наклоны орбит, их аргументы перицентров и долготы восходящих узлов неизвестны, то их значения было решено принять равными нулю. Значения средних аномалий также приняты равными нулю. В этом случае планеты на своих орбитах будут находиться в перицентре и на одной прямой, что обеспечивает максимальное значение для величины отношения их радиус-векторов, а значит сходимость рядов по полиномам Лежандра в данном случае будет наихудшей.

В первом случае относительная точность построения разложения возмущающей функции для планетной системы GJ 3138 составляет $9.9 \cdot 10^{-4}$ (Δs_1),

Таблица 2.4. Количество слагаемых гамильтониана N_{terms} с общим множителем μ^n , оценка значения гамильтониана s_0 и его разложения в ряд s , точность разложения в ряд Δs

n	N_{terms}	s_0	s	Δs
0	4	$-3.216642634587 \cdot 10^{-5}$	$-3.216642634587 \cdot 10^{-5}$	0
1	36 853 938	$-8.456585384048 \cdot 10^{-9}$	$-8.456585384106 \cdot 10^{-9}$	$7.0 \cdot 10^{-12}$
2	6 017 416	$-5.879351765555 \cdot 10^{-13}$	$-5.879909642903 \cdot 10^{-13}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$
3	6 314 479	$1.974138222569 \cdot 10^{-16}$	$1.973848870225 \cdot 10^{-16}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$
сумма	49 185 837	$-3.217488351899 \cdot 10^{-5}$	$-3.217488351905 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-12}$

Таблица 2.5. Некоторые характеристики рядов, представляющих возмущающую функцию четырёхпланетной задачи с точностью до первой степени по малому параметру

		Первое разложение					Второе разложение					
		Главная часть возмущающей функции										
i, j	p_0	d_0	N_0	p_1	d_1	N_1	p_0	d_0	N_0	p_1	d_1	N_1
1, 2	4	30	271179	2	10	17844	6	30	2283149	4	10	306158
2, 3	4	30	271179	2	10	17844	6	30	2283149	4	10	306158
3, 4	4	30	271179	2	10	17844	6	30	2283149	4	10	306158
1, 3	4	20	124344	2	10	82874	6	20	1045604	4	10	2407518
2, 4	4	20	124344	2	10	82874	6	20	1045604	4	10	2407518
1, 4	4	10	33979	2	5	41988	6	10	284495	4	5	1267948
		Вторая часть возмущающей функции										
	4		4404	2		1450	6		33972	4		36036

во втором — $7.2 \cdot 10^{-5}$ (Δs_2). Табличные данные приведены с учётом общего множителя μGm_0 , где $\mu = 0.0001$. Значение невозмущённого гамильтониана оценивается величиной $h_0 = -7.953408 \cdot 10^{-4}$. Таким образом относительная точность построения разложения функции Гамильтона в первом случае составляет $1.5 \cdot 10^{-8}$ ($\Delta \bar{s}_1$), а во втором случае — $1.1 \cdot 10^{-9}$ ($\Delta \bar{s}_2$).

В таблицах 2.7, 2.8 и 2.9 представлены оценки точности разложения возмущающей функции, полученной с учётом слагаемых с μ^1 , для планетных систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691 (μ Ara), соответственно. Все данные приведены аналогично таблице 2.6. Используемые для оценки возмущающей функции элементы орбит соответствуют приведённым в каталоге <http://exoplanet.eu/catalog/>. Масса звезды в планетной системе HD 39194 принята равной 0.72 массы Солнца (в силу её неопределённости). Неизвестные значения наклонов орбит, аргументов перицентров (кроме систем HD 141399 и HD 160691), долгот восходящих узлов и средних аномалий планет на орбитах приняты равными нулю. Значения масс планет всех рассматриваемых внесолнечных систем и элементов их орбит приведены в главе 5, посвящённой изучению их орбитальной эволюции. Во всех трёх таблицах значения

Таблица 2.6. Оценка точности построения двух разложений возмущающей функции, полученных с учётом слагаемых с μ^1 , для планетной системы GJ 3138

		Первое разложение		Второе разложение	
Главная часть возмущающей функции					
n	i, j	s	Δs	s	Δs
0	1, 2	$-8.417261 \cdot 10^{-9}$	$5.2 \cdot 10^{-6}$	$-8.417304 \cdot 10^{-9}$	$5.4 \cdot 10^{-8}$
	2, 3	$-1.591822 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$-1.595059 \cdot 10^{-9}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$
	1, 3	$-4.057124 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$-4.067869 \cdot 10^{-9}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$
1	1, 2	$3.032401 \cdot 10^{-14}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.032039 \cdot 10^{-14}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$
	2, 3	$3.423141 \cdot 10^{-15}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$	$3.668475 \cdot 10^{-15}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$
	1, 3	$8.210245 \cdot 10^{-15}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$	$8.905681 \cdot 10^{-15}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$
Вторая часть возмущающей функции					
0		$2.251527 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$2.254702 \cdot 10^{-9}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$
1		$-5.345654 \cdot 10^{-15}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$-5.448467 \cdot 10^{-15}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$

приведены с учётом общего множителя μGm_0 , где $\mu = 0.0001$ для системы HD 39194 и $\mu = 0.001$ для систем HD 141399 и HD 160691.

Таблица 2.7. Оценка точности построения двух разложений возмущающей функции, полученных с учётом слагаемых с μ^1 , для планетной системы HD 39194

		Первое разложение		Второе разложение	
Главная часть возмущающей функции					
n	i, j	s	Δs	s	Δs
0	1, 2	$-2.255985 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$-2.256022 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-7}$
	2, 3	$-2.535540 \cdot 10^{-8}$	$4.6 \cdot 10^{-2}$	$-2.624061 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$
	1, 3	$-7.965255 \cdot 10^{-9}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$	$-8.007712 \cdot 10^{-9}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$
1	1, 2	$4.035698 \cdot 10^{-13}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$4.033760 \cdot 10^{-13}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$
	2, 3	$1.058512 \cdot 10^{-12}$	$3.7 \cdot 10^{-1}$	$1.395470 \cdot 10^{-12}$	$1.7 \cdot 10^{-1}$
	1, 3	$2.725251 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$	$3.033688 \cdot 10^{-13}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$
Вторая часть возмущающей функции					
0		$1.293893 \cdot 10^{-8}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$1.299421 \cdot 10^{-8}$	$4.7 \cdot 10^{-4}$
1		$-2.095117 \cdot 10^{-13}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$-2.282769 \cdot 10^{-13}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$

Относительная точность построения разложения возмущающей функции для планетной системы HD 39194 составляет $\Delta s_1 = 2.8 \cdot 10^{-2}$ для первого варианта разложения и $\Delta s_2 = 7.8 \cdot 10^{-3}$ — для второго варианта. Значение невозмущённого гамильтониана $h_0 = -6.986285 \cdot 10^{-4}$. Относительная точность построения разложения гамильтониана в первом случае — $\Delta \bar{s}_1 = 1.7 \cdot 10^{-6}$, во втором — $\Delta \bar{s}_2 = 5.0 \cdot 10^{-7}$.

Для планетной системы HD 141399 значение невозмущённого гамильтониана задачи $h_0 = -5.245120 \cdot 10^{-4}$. Относительная точность двух вариантов разложения возмущающей функции оценивается следующим образом: $\Delta s_1 = 1.9 \cdot 10^{-4}$ и $\Delta s_2 = 1.0 \cdot 10^{-5}$. Для гамильтониана задачи относитель-

ная точность его разложения в ряд оценивается следующими величинами: $\Delta \bar{s}_1 = 2.4 \cdot 10^{-7}$ и $\Delta \bar{s}_2 = 1.2 \cdot 10^{-8}$.

Таблица 2.8. Оценка точности построения двух разложений возмущающей функции, полученных с учётом слагаемых с μ^1 , для планетной системы HD 141399

		Первое разложение		Второе разложение	
Главная часть возмущающей функции					
n	i, j	s	Δs	s	Δs
0	1, 2	$-3.005185 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$-3.005186 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$
	2, 3	$-3.091280 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$-3.091290 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$
	3, 4	$-3.801939 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$-3.802465 \cdot 10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$
	1, 3	$-7.857811 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$-7.857825 \cdot 10^{-8}$	$6.6 \cdot 10^{-9}$
	2, 4	$-5.325482 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$-5.327643 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$
	1, 4	$-2.052579 \cdot 10^{-8}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$	$-2.053990 \cdot 10^{-8}$	$3.0 \cdot 10^{-5}$
1	1, 2	$4.436785 \cdot 10^{-12}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$4.433009 \cdot 10^{-12}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$
	2, 3	$1.874917 \cdot 10^{-10}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.877452 \cdot 10^{-10}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$
	3, 4	$-1.220164 \cdot 10^{-11}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$-1.249276 \cdot 10^{-11}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
	1, 3	$3.882115 \cdot 10^{-11}$	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$3.885346 \cdot 10^{-11}$	$4.7 \cdot 10^{-6}$
	2, 4	$-2.533606 \cdot 10^{-11}$	$3.8 \cdot 10^{-2}$	$-2.627434 \cdot 10^{-11}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
	1, 4	$-1.077210 \cdot 10^{-11}$	$5.0 \cdot 10^{-2}$	$-1.129103 \cdot 10^{-11}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
Вторая часть возмущающей функции					
0		$1.441252 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$	$1.440500 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$
1		$-4.098315 \cdot 10^{-11}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$-4.116058 \cdot 10^{-11}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2.9. Оценка точности построения двух разложений возмущающей функции, полученных с учётом слагаемых с μ^1 , для планетной системы HD 160691 (μ Ara)

		Первое разложение		Второе разложение	
Главная часть возмущающей функции					
n	i, j	s	Δs	s	Δs
0	1, 2	$-5.471194 \cdot 10^{-9}$	$9.0 \cdot 10^{-7}$	$-5.471199 \cdot 10^{-9}$	$4.6 \cdot 10^{-9}$
	2, 3	$-1.013169 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-6}$	$-1.013175 \cdot 10^{-7}$	$6.0 \cdot 10^{-7}$
	3, 4	$-2.032735 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-6}$	$-2.032743 \cdot 10^{-7}$	$2.3 \cdot 10^{-8}$
	1, 3	$-1.005502 \cdot 10^{-8}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$-1.005525 \cdot 10^{-8}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$
	2, 4	$-4.432300 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$	$-4.432320 \cdot 10^{-8}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$
	1, 4	$-3.141580 \cdot 10^{-9}$	$5.8 \cdot 10^{-6}$	$-3.141599 \cdot 10^{-9}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$
1	1, 2	$1.383309 \cdot 10^{-14}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$	$1.382896 \cdot 10^{-14}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$
	2, 3	$-1.843394 \cdot 10^{-11}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$-1.847180 \cdot 10^{-11}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$
	3, 4	$7.130229 \cdot 10^{-11}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$7.130086 \cdot 10^{-11}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$
	1, 3	$-2.812747 \cdot 10^{-12}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$-2.825933 \cdot 10^{-12}$	$8.3 \cdot 10^{-5}$
	2, 4	$1.161719 \cdot 10^{-11}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$1.161353 \cdot 10^{-11}$	$5.8 \cdot 10^{-6}$
	1, 4	$8.601776 \cdot 10^{-13}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$8.600154 \cdot 10^{-13}$	$5.5 \cdot 10^{-6}$
Вторая часть возмущающей функции					
0		$-7.728301 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$-7.729120 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$
1		$-3.768244 \cdot 10^{-11}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$	$-3.792770 \cdot 10^{-11}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$

Для планетной системы HD 160691 невозмущённый гамильтониан задачи оценивается значением $h_0 = -3.383639 \cdot 10^{-4}$. Относительная точность разложения в ряд возмущающей функции оценивается как: $\Delta s_1 = 2.3 \cdot 10^{-5}$ и $\Delta s_2 = 1.6 \cdot 10^{-7}$. Для гамильтониана задачи относительная точность разложений оценивается следующим образом: $\Delta \bar{s}_1 = 3.1 \cdot 10^{-8}$ и $\Delta \bar{s}_2 = 2.2 \cdot 10^{-10}$.

2.10 Выводы

Построены три варианта разложения возмущающей функции планетной задачи h_2 . В первом случае возмущающая функция построена с учётом слагаемых, включающих в себя вторую степень малого параметра задачи (μ^2). Во втором и третьем вариантах разложения возмущающей функции учитываются слагаемые до первой степени малого параметра (μ). Различие между ними состоит в учитываемой степени эксцентрических и облических элементов орбит.

Общее количество слагаемых в разложении гамильтониана h планетной задачи, построенного до куба малого параметра, составляет 49185837. Относительная точность построения гамильтониана рассчитана для планет-гигантов Солнечной системы и составляет $1.7 \cdot 10^{-12}$. Количество слагаемых в разложении гамильтониана, построенного до квадрата малого параметра и до 4 степени по эксцентрическим и облическим элементам орбит, составляет 1363330, а для разложения, построенного с точностью до 6 степени по элементам орбит, количество слагаемых составляет 16296620.

Оценка точности разложения в ряд функций Гамильтона, построенных с меньшей точностью (до квадрата по малому параметру), проведена для внесолнечных трёхпланетных систем GJ 3138 и HD 39194, четырёхпланетных систем HD 141399 и HD 160691. Различие в оценках точности этих двух разложений (до 6 и до 4 степеней по элементам орбит) составляет от одного до двух порядков. Для разложения гамильтониана, построенного до 4 степени по эксцентрическим и облическим элементам орбит, относительная точность составляет от 10^{-6} до 10^{-8} . А для разложения, построенного до 6 степени по элементам орбит, относительная точность составляет от 10^{-7} до 10^{-10} .

Данные разложения гамильтониана могут быть использованы для построения осреднённых уравнений движения для четырёхпланетной задачи.

Разложение гамильтониана, построенное до куба по малому параметру задачи, может быть использовано для исследования орбитальной динамики планет-гигантов Солнечной системы. Разложение гамильтониана, построенное до квадрата по малому параметру, может быть использовано для исследования орбитальной эволюции внесолнечных планетных систем.

Глава 3

Построение осреднённых уравнений движения четырёхпланетной задачи методом Хори–Депри

При написании данной Главы диссертации использованы публикации (Перминов, Кузнецов, 2016; Perminov, Kuznetsov, 2020a,b), выполненные соискателем Перминовым А.С. в соавторстве с Кузнецовым Э.Д., в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

3.1 Метод Хори–Депри

Для выполнения операции осреднения функции Гамильтона применим метод Хори–Депри, иначе известный как метод преобразований Ли (Холшевников, 1985).

В основе метода Хори–Депри лежит использование скобок Пуассона. Все искомые величины будут инвариантны относительно канонических преобразований. В рамках метода Хори–Депри даются явные и простые выражения для нового гамильтониана. Уравнения связи между старыми и новыми элементами орбит также выражаются через явные формулы, а не рекуррентные, как в других методах осреднения.

В рассматриваемой нами задаче все орбитальные элементы (переменные) по скорости их изменения можно разделить на две группы — быстрые и медленные. Быстрыми переменными в планетной задаче являются средние долготы $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, период изменения которых близок к периоду движения по орбите. Все остальные переменные — медленные. Обозначим их через вектор $x = \{x_1, \dots, x_N\}$, компоненты которого определим следующим

образом

$$\begin{aligned}
x_{5k-4} &= L_k, \\
x_{5k-3} &= \xi_{1,k}, \quad x_{5k-2} = \eta_{1,k}, \\
x_{5k-1} &= \xi_{2,k}, \quad x_{5k} = \eta_{2,k}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Для соответствующих средних элементов Пуанкаре используем обозначения $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_N\}$ и $X = \{X_1, \dots, X_N\}$, где компоненты вектора X обозначим как

$$\begin{aligned}
X_{5k-4} &= \mathcal{L}_k, \\
X_{5k-3} &= \Xi_{1,k}, \quad X_{5k-2} = \mathbb{H}_{1,k}, \\
X_{5k-1} &= \Xi_{2,k}, \quad X_{5k} = \mathbb{H}_{2,k}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь индекс k изменяется от 1 до N .

Осреднение гамильтониана задачи проводится по быстрым переменным, то есть по средним долготам. Осреднённый гамильтониан может быть представлен в виде ряда по степеням малого параметра

$$H(X) = H_0(X) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m H_m(X), \tag{3.3}$$

где H_0 — невозмущенный гамильтониан в средних элементах. Аналогично (2.15) он зависит только от \mathcal{L}_k .

Величины H_m находим с помощью основного уравнения метода Хори–Депри (Холшевников, 1985; Кузнецов, Холшевников, 2006), а именно

$$H_m = h_m + \sum \frac{1}{r!} \{T_{j_r}, \dots, T_{j_1}, h_{j_0}\}. \tag{3.4}$$

При суммировании на индексы в выражении налагаются следующие условия: $0 \leq j_0 \leq m - 1$; $j_1, j_2, \dots, j_r \geq 1$; $\sum_{s=0}^k j_s = m$; $1 \leq r \leq m$. Фигурные скобки обозначают здесь кратные скобки Пуассона, которые вычисляются справа налево следующим образом

$$\{f_4, f_3, f_2, f_1\} = \{f_4, \{f_3, \{f_2, f_1\}\}\}. \tag{3.5}$$

Порядок действий при вычислении таких скобок важен, поскольку они являются некоммутативными и неассоциативными.

Производящая функция преобразования T также определяется рядом по степеням малого параметра μ

$$T(X, \Lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m T_m(X, \Lambda). \tag{3.6}$$

Запишем, для примера, в явном виде первые слагаемые (3.3) вплоть до третьей степени по малому параметру

$$\begin{aligned}
H_0 &= h_0, \\
H_1 &= \{T_1, h_0\} + h_1, \\
H_2 &= \{T_2, h_0\} + \{T_1, h_1\} + \frac{1}{2}\{T_1, \{T_1, h_0\}\} + h_2, \\
H_3 &= \{T_3, h_0\} + \{T_2, h_1\} + \frac{1}{2}\{T_2, \{T_1, h_0\}\} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\{T_1, \{T_1, h_1\}\} + \frac{1}{6}\{T_1, \{T_1, \{T_1, h_0\}\}\} + h_3.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь $h = h_0 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \mu^3 h_3$, где h_0 — невозмущенный гамильтониан, а остальные слагаемые представляют собой возмущающую функцию. Начиная с этой главы переходим к новой системе обозначений для гамильтониана задачи, в которой индекс у h соответствует степени малого параметра μ .

Рассмотрим решение основного уравнения метода. На каждом этапе вычислений выражение (3.4) можно записать как

$$H_m = \{T_m, h_0\} + \Phi_m, \tag{3.8}$$

где величина Φ_m определена на предыдущем шаге алгоритма. Если в этом выражении скобку Пуассона записать в явном виде, получим

$$\Phi_m = H_m + \sum_{k=1}^N \omega_k \frac{\partial T_m}{\partial \Lambda_k}, \tag{3.9}$$

где $\omega_k = \partial h_0 / \partial X_{5k-4}$ — частота изменения быстрой переменной Λ_k (среднее движение). Функции Φ_m в общем случае являются эшелонированными рядами Пуассона, то есть

$$\Phi_m(X, \Lambda) = \sum_{k,n} B_{kn} X^k \cos(n\Lambda), \tag{3.10}$$

где коэффициенты эшелонированного ряда определяются как

$$B_{kn} = \sum_i \frac{A_{kn}^{(i)}}{\prod_j (n^{(i,j)} \omega)^{q^{(i,j)}}}. \tag{3.11}$$

Здесь A_{kn} — числовые коэффициенты. В знаменателе стоит произведение различных линейных комбинаций частот ω быстрых переменных, n — вектор коэффициентов при частотах, q — целочисленные степени знаменателя.

Пусть осредненный гамильтониан имеет вид

$$H_m(X) = \sum_{\substack{k \\ n \in I_0}} B_{kn} X^k, \tag{3.12}$$

где множество $I_0 = \{n : n_1 = \dots = n_N = 0\}$. Тогда уравнение (3.9) имеет следующее формальное решение

$$T_m(X, \Lambda) = \sum_{\substack{k,n \\ n \in I_1}} \frac{B_{kn}}{n\omega} X^k \sin(n\Lambda), \quad (3.13)$$

где $I_1 = \{n : n_1^2 + \dots + n_N^2 \neq 0\}$. Таким образом, получаем производящую функцию T и осреднённый гамильтониан системы H .

Уравнения замены переменных, обеспечивающие связь между средними и оскулирующими элементами, записываются следующим образом

$$\begin{aligned} x &= X + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m u_m(X, \Lambda), \\ \lambda &= \Lambda + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m v_m(X, \Lambda). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Переход от оскулирующих элементов к средним осуществляется с помощью следующих преобразований

$$\begin{aligned} X &= x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mu^m u_m(x, \lambda), \\ \Lambda &= \lambda + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mu^m v_m(x, \lambda). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Их можно получить из (3.14) с помощью замены T на $-T$ и (X, Λ) на (x, λ) .

Чтобы найти выражения для функций замены переменных u_m и v_m , необходимо использовать формулу (3.4), в которой следует положить $h_0 = X_i$ или Λ_i , $h_1 = h_2 = \dots = 0$, $H_m = u_{im}$ или v_{im} . Таким образом, для четырёхпланетной задачи получим

$$\begin{aligned} u_{im} &= \sum \frac{1}{r!} \{T_{j_r}, \dots, T_{j_1}, X_i\}, \quad i = 1, \dots, 20, \\ v_{im} &= \sum \frac{1}{r!} \{T_{j_r}, \dots, T_{j_1}, \Lambda_i\}, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь область суммирования задаётся следующим образом: $j_1, j_2, \dots, j_r \geq 1$; $\sum_{s=0}^k j_s = m$; $1 \leq r \leq m$.

Уравнения движения в средних элементах имеют вид

$$\frac{dX}{dt} = \{H, X\}, \quad \frac{d\Lambda}{dt} = \{H, \Lambda\}. \quad (3.17)$$

Уравнения движения для медленных переменных X не зависят от быстрых переменных Λ . Таким образом, мы получим две независимые системы уравнений, описывающих эволюцию планетной системы на космогонических интервалах времени.

3.2 Выполнение преобразований Ли

Рассмотрим реализацию алгоритма осреднения функции Гамильтона и вычисления производящей функции преобразования. Невозмущенный гамильтониан задачи от средних долгот не зависит и в осреднении не нуждается, то есть $H_0 = h_0$. Вычисляемые далее функции Φ_m являются функциями средних элементов Пуанкаре.

В первом приближении метода Хори–Депри полагаем, что $\Phi_1 = h_1$. Слагаемые осреднённого гамильтониана из H_1 соответствует слагаемым из Φ_1 без тригонометрической части. Чтобы получить величину T_1 , необходимо проинтегрировать тригонометрическую часть Φ_1 по времени t . Поскольку средняя долгота $\Lambda_k = \omega_k t$, то после интегрирования тригонометрической части в (3.9) получим выражение для величины T_1 .

Зная выражение для T_1 , можно найти величины H_2 и T_2 во втором приближении метода Хори–Депри. Для этого конструируем величину Φ_2 следующим образом

$$\Phi_2 = \{T_1, h_1\} + \frac{1}{2}\{T_1, \{T_1, h_0\}\} + h_2. \quad (3.18)$$

Скобка Пуассона $\{T_1, h_1\}$ записывается в виде следующей суммы

$$\begin{aligned} \{T_1, h_1\} = & \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial T_1}{\partial \mathcal{L}_k} \frac{\partial h_1}{\partial \Lambda_k} - \frac{\partial T_1}{\partial \Lambda_k} \frac{\partial h_1}{\partial \mathcal{L}_k} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial T_1}{\Xi_{1,k}} \frac{\partial h_1}{\partial H_{1,k}} - \frac{\partial T_1}{\partial H_{1,k}} \frac{\partial h_1}{\partial \Xi_{1,k}} + \frac{\partial T_1}{\Xi_{2,k}} \frac{\partial h_1}{\partial H_{2,k}} - \frac{\partial T_1}{\partial H_{2,k}} \frac{\partial h_1}{\partial \Xi_{2,k}} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Таким образом, необходимо вычислить частные производные первого порядка от T_1 и h_1 по всем элементам второй системы Пуанкаре.

Скобка Пуассона $\{T_1, h_0\}$ вычисляется элементарно

$$\{T_1, h_0\} = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial T_1}{\partial \Lambda_k} \frac{\partial h_0}{\partial \mathcal{L}_k} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k^3 \kappa_k^4}{\mathcal{L}_k^3} \frac{\partial T_1}{\partial \Lambda_k}, \quad (3.20)$$

что позволяет получить аналогичное (3.19) выражение для $\{T_1, \{T_1, h_0\}\}$, где вместо h_1 стоит выражение (3.20). При этом возникает необходимость в вычислении частных производных от T_1 , как первого, так и второго порядков по элементам орбит.

Далее, аналогично первому приближению метода, ставим в соответствие величине H_2 слагаемые из Φ_2 без тригонометрической части, а T_2 определяем как интеграл по времени от тригонометрической части Φ_2 .

На третьем этапе метода запишем величину Φ_3 следующим образом

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \{T_2, h_1\} + \{T_1, h_2\} + \\ &+ \frac{1}{2}\{T_2, \{T_1, h_0\}\} + \frac{1}{2}\{T_1, \{T_2, h_0\}\} + \\ &+ \frac{1}{2}\{T_1, \{T_1, h_1\}\} + \frac{1}{6}\{T_1\{T_1, \{T_1, h_0\}\}\} + h_3.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Скобки Пуассона $\{T_2, h_1\}$ и $\{T_2, \{T_1, h_0\}\}$ вычисляются по аналогии с выражением (3.19) с заменой T_1 на T_2 для обеих скобок и с заменой h_1 на $\{T_1, h_0\}$ для второй скобки. При вычислении скобки $\{T_1, h_2\}$ необходимо в (3.19) заменить h_1 на h_2 . Скобка Пуассона $\{T_2, h_0\}$ в этом случае вычисляется аналогично (3.20). При этом скобки $\{T_1, h_1\}$ и $\{T_1, \{T_1, h_0\}\}$, используемые в (3.21), уже вычислены во втором приближении метода Хори–Депри. Далее ставим в соответствие величине H_3 слагаемые из Φ_3 без тригонометрической части.

В результате выкладок мы получим осреднённый гамильтониан задачи в виде $H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \mu^3 H_3$ и производящую функцию преобразования как $T = \mu T_1 + \mu^2 T_2$.

Кроме классического представления величин Φ_2 и Φ_3 в выражениях (3.18) и (3.21) соответственно, можно вывести для них следующие, более простые для компьютерной реализации, формулы

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}\{T_1, h_1\} + \frac{1}{2}\{T_1, \langle h_1 \rangle\} + h_2, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \frac{1}{2}\{T_2, h_1\} + \frac{1}{2}\{T_2, \langle h_1 \rangle\} + \\ &+ \frac{1}{2}\{T_1, h_2\} + \frac{1}{2}\{T_1, \langle h_2 \rangle\} + \\ &+ \frac{1}{12}\{T_1, \{T_1, h_1\}\} - \frac{1}{12}\{T_1, \{T_1, \langle h_1 \rangle\}\} + h_3,\end{aligned}\quad (3.23)$$

где $\langle h_1 \rangle$ и $\langle h_2 \rangle$ это соответственно h_1 и h_2 без слагаемых, представляющих тригонометрическую часть (фактически $\langle h_1 \rangle$ это H_1 , записанный в оскулирующих элементах). Вычисление скобок Пуассона здесь аналогично вышеприведённому для классических формул (3.18) и (3.21).

Функции замены переменных u_1 и v_1 представляют собой скобку Пуассона функции T_1 с соответствующим элементом (переменной)

$$\begin{aligned}u_{k,1} &= \{T_1, X_k\}, \\ v_{j,1} &= \{T_1, \Lambda_j\},\end{aligned}\quad (3.24)$$

что сводится к вычислению частной производной от функции T_1 по канонически сопряженному элементу с соответствующим знаком. Все такие производные уже вычислены в (3.19). Индекс k пробегает значения $k = 1, \dots, 20$, а индекс $j = 1, \dots, 4$.

Функции замены переменных u_2 и v_2 являются суммой двух скобок

$$\begin{aligned} u_{k,2} &= \{T_2, X_k\} + \frac{1}{2}\{T_1, \{T_1, X_k\}\}, \\ v_{j,2} &= \{T_2, \Lambda_j\} + \frac{1}{2}\{T_1, \{T_1, \Lambda_j\}\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Причём скобки $\{T_1, X_k\}$ и $\{T_1, \Lambda_j\}$ уже вычислены в (3.19). Частные производные второго порядка от функции T_1 уже получены при расчёте скобки Пуассона $\{T_1, \{T_1, h_0\}\}$.

Уравнения движения k -той планеты в третьем приближении метода Хори–Депри после вычисления скобок в (3.17) примут следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_k}{dt} &= 0, \\ \frac{d\Lambda_k}{dt} &= \frac{M_k^3 \kappa_k^4}{\mathcal{L}_k^3} + \\ &\quad + \mu \frac{\partial H_1}{\partial \mathcal{L}_k} + \mu^2 \frac{\partial H_2}{\partial \mathcal{L}_k} + \mu^3 \frac{\partial H_3}{\partial \mathcal{L}_k}, \\ \frac{d\Xi_{1,k}}{dt} &= -\mu \frac{\partial H_1}{\partial \mathcal{H}_{1,k}} - \mu^2 \frac{\partial H_2}{\partial \mathcal{H}_{1,k}} - \mu^3 \frac{\partial H_3}{\partial \mathcal{H}_{1,k}}, \\ \frac{d\mathcal{H}_{1,k}}{dt} &= \mu \frac{\partial H_1}{\partial \Xi_{1,k}} + \mu^2 \frac{\partial H_2}{\partial \Xi_{1,k}} + \mu^3 \frac{\partial H_3}{\partial \Xi_{1,k}}, \\ \frac{d\Xi_{2,k}}{dt} &= -\mu \frac{\partial H_1}{\partial \mathcal{H}_{2,k}} - \mu^2 \frac{\partial H_2}{\partial \mathcal{H}_{2,k}} - \mu^3 \frac{\partial H_3}{\partial \mathcal{H}_{2,k}}, \\ \frac{d\mathcal{H}_{2,k}}{dt} &= \mu \frac{\partial H_1}{\partial \Xi_{2,k}} + \mu^2 \frac{\partial H_2}{\partial \Xi_{2,k}} + \mu^3 \frac{\partial H_3}{\partial \Xi_{2,k}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь индекс $k \in [1, 2, 3, 4]$.

3.3 Некоторые свойства полученных рядов

Было выполнено три приближения метода Хори–Депри. Получены ряды для осреднённого гамильтониана задачи (величины H_1 , H_2 и H_3) и производящей функции преобразования между оскулирующими и средними элементами (величины T_1 и T_2).

При построении величин Φ_2 и Φ_3 , максимальный порядок аргумента тригонометрических функций вида $\cos(m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 + m_4\lambda_4)$ ограничивается значением $m_{\max} = |m_1| + |m_2| + |m_3| + |m_4|$ для сокращения несущественных слагаемых и предотвращения нехватки компьютерных ресурсов (оперативной памяти, необходимой для расчётов). Значения m_{\max} , а также максимальные степени p_{\max} эксцентрических и облических элементов Пуанкаре, для скобок

Пуассона в выражениях (3.22) и (3.23) приведены в таблице 3.1. Характеристика используемого неосреднённого (оскулирующего) гамильтониана дана в таблице 2.3 — применяется наиболее точно построенное разложение гамильтониана задачи.

Таблица 3.1. Максимальные степени p_{\max} эксцентрических и облических элементов Пуанкаре, максимальный порядок m_{\max} тригонометрических аргументов для построенных скобок Пуассона

	$\{T_1, h_1\}$	$\{T_1, \langle h_1 \rangle\}$	$\{T_2, h_1\}$	$\{T_1, h_2\}$	$\{T_1, \{T_1, h_1\}\}$	$\{T_1, \{T_1, \langle h_1 \rangle\}\}$
p_{\max}	4	2	2	2	2	2
m_{\max}	60	15	10	20	10	15

Скобка Пуассона $\{T_1, h_1\}$ является основой для уравнений движения второго порядка по малому параметру, поэтому она должна быть вычислена настолько точно, насколько это возможно. Все слагаемые в скобке Пуассона $\{T_1, \langle h_1 \rangle\}$ имеют тригонометрические аргументы и эта скобка используется только для построения производящей функции преобразования. Оценка относительной разности между двумя скобками $\{T_1, \langle h_1 \rangle\}$ (с $m_{\max} = 15$ и 20) меньше чем 10^{-3} . Поэтому значение m_{\max} выбрано равным 15. Скобки $\{T_2, h_1\}$ и $\{T_1, \{T_1, h_1\}\}$ содержат 97% слагаемых, входящих в величину Φ_3 . Существенное увеличение количества слагаемых в данной скобке начинается если $m_{\max} > 10$. Скобки Пуассона $\{T_1, \langle h_2 \rangle\}$ и $\{T_2, \langle h_1 \rangle\}$ не вычисляются так как содержат только слагаемые с тригонометрическими аргументами. Эти слагаемые не входят в осреднённый гамильтониан, а производящая функция преобразования строится только до второй степени по малому параметру.

Скобку Пуассона $\{T_1, h_1\}$ можно вычислить двумя способами. Если перемножать пары слагаемых, имеющих одинаковые тригонометрические аргументы, то можно будет избежать огромного количества вычислительных операций, так как только результаты таких произведений будут вносить вклад в осреднённый гамильтониан второго порядка. В этом случае время вычислений займёт несколько часов. В другом случае, когда вычисляются скобки $\{T_1, \{T_1, h_1\}\}$ и $\{T_2, h_1\}$ (третье приближение), необходимо вычислять скобку $\{T_1, h_1\}$ принимая во внимание все тригонометрические аргументы. В этом случае время вычислений занимает несколько десятков часов, а затем около двух суток для вычисления скобок $\{T_1, \{T_1, h_1\}\}$ и $\{T_2, h_1\}$.

Число слагаемых N_{terms} , максимальные степени p_{\max} эксцентрических и облических элементов, учитываемых в осреднённом гамильтониане и производящей функции преобразования вместе с соответствующими размерами файлов (HDD) приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Некоторые свойства осреднённого гамильтониана и производящей функции преобразования

	H_0	H_1	H_2	H_3	T_1	T_2
p_{\max}	0	6	4	2	6	2
N_{terms}	4	77 683	13 215 122	3 041 206 698	36 776 255	2 926 631 639
HDD	0.1 kb	1.4 Mb	354.5 Mb	67.5 Gb	535.2 Mb	11.4 Gb

Число слагаемых N_{terms} , максимальные степени p_{\max} эксцентрических и облических элементов Пуанкаре, а также численные оценки s значений функций замены переменных (ФЗП) приведены в таблице 3.3. Оценка значений функций замены переменных проведена для элементов второй системы Пуанкаре, соответствующих оскулирующим кеплеровским элементам орбит планет-гигантов Солнечной системы, приведённым в таблице 2.2.

Таблица 3.3. Некоторые свойства функций замены переменных

ФЗП	слагаемые с μ^1			слагаемые с μ^2		
	p_{\max}	N_{terms}	s	p_{\max}	N_{terms}	s
L_1	6	14 840 889	$-1.40042908 \cdot 10^{-6}$	2	230 307 616	$-2.94057614 \cdot 10^{-9}$
L_2	6	21 335 973	$-3.80842022 \cdot 10^{-7}$	2	248 688 600	$3.48282866 \cdot 10^{-9}$
L_3	6	21 337 917	$-3.85345998 \cdot 10^{-7}$	2	249 070 022	$-2.40821692 \cdot 10^{-9}$
L_4	6	14 846 749	$4.79624763 \cdot 10^{-7}$	2	231 398 216	$4.94199354 \cdot 10^{-10}$
$\xi_{1,1}$	6	6 647 419	$6.40071398 \cdot 10^{-5}$	2	49 087 453	$1.19176180 \cdot 10^{-5}$
$\xi_{1,2}$	6	9 519 202	$4.31045582 \cdot 10^{-5}$	2	54 582 203	$-2.66787109 \cdot 10^{-5}$
$\xi_{1,3}$	6	9 519 540	$1.78819981 \cdot 10^{-5}$	2	54 571 866	$-6.27966745 \cdot 10^{-7}$
$\xi_{1,4}$	6	6 648 851	$1.04115311 \cdot 10^{-4}$	2	49 047 629	$3.57884702 \cdot 10^{-7}$
$\eta_{1,1}$	6	6 647 419	$-3.36281812 \cdot 10^{-5}$	2	49 087 453	$2.64552658 \cdot 10^{-5}$
$\eta_{1,2}$	6	9 519 202	$3.58742179 \cdot 10^{-4}$	2	54 582 203	$-6.70286265 \cdot 10^{-5}$
$\eta_{1,3}$	6	9 519 540	$-1.28682983 \cdot 10^{-4}$	2	54 571 866	$7.09670165 \cdot 10^{-7}$
$\eta_{1,4}$	6	6 648 844	$7.28930418 \cdot 10^{-5}$	2	49 047 629	$-2.03146108 \cdot 10^{-7}$
$\xi_{2,1}$	6	6 391 118	$-2.88198176 \cdot 10^{-6}$	2	37 869 571	$7.74293135 \cdot 10^{-7}$
$\xi_{2,2}$	6	9 178 235	$4.84331445 \cdot 10^{-6}$	2	42 197 361	$-1.22259847 \cdot 10^{-6}$
$\xi_{2,3}$	6	9 178 231	$-8.55646417 \cdot 10^{-8}$	2	42 199 155	$1.97376713 \cdot 10^{-8}$
$\xi_{2,4}$	6	6 391 106	$-2.26876299 \cdot 10^{-7}$	2	37 876 569	$2.64651808 \cdot 10^{-9}$
$\eta_{2,1}$	6	6 391 118	$-3.68467840 \cdot 10^{-6}$	2	37 869 571	$1.47358016 \cdot 10^{-6}$
$\eta_{2,2}$	6	9 178 235	$5.68948454 \cdot 10^{-6}$	2	42 197 361	$-2.30578292 \cdot 10^{-6}$
$\eta_{2,3}$	6	9 178 231	$9.01766954 \cdot 10^{-7}$	2	42 199 155	$-2.08105758 \cdot 10^{-8}$
$\eta_{2,4}$	6	6 391 106	$-2.94713226 \cdot 10^{-7}$	2	37 876 569	$5.40181961 \cdot 10^{-9}$
λ_1	6	15 103 737	$1.33020033 \cdot 10^{-3}$	0	0	0
λ_2	6	21 662 503	$-3.15873872 \cdot 10^{-3}$	0	0	0
λ_3	6	21 664 499	$-1.45890383 \cdot 10^{-2}$	0	0	0
λ_4	6	15 109 753	$9.63014041 \cdot 10^{-3}$	0	0	0

Число слагаемых N_{terms} и максимальные степени p_{max} для правых частей уравнений движения (ДУ) в средних элементах приведены в таблице 3.4. Поскольку большие полуоси орбит в планетной системе являются постоянными величинами в рамках осреднённой теории движения, то $\dot{L}_k = 0 \forall k$. Нулевое число слагаемых в уравнениях движения для элементов, являющихся аналогами больших полуосей, получается автоматическим образом, поскольку осреднённый гамильтониан не зависит от быстрых переменных. После подстановки постоянных значений больших полуосей орбит в уравнений движения, количество слагаемых существенно уменьшается. Последний столбец в таблице 3.4 содержит полное количество слагаемых N_{subs} в уравнениях движения после такой подстановки.

Таблица 3.4. Некоторые свойства уравнений движения в средних элементах

ДУ	слагаемые с μ^1		слагаемые с μ^2		слагаемые с μ^3		N_{subs}
	p_{max}	N_{terms}	p_{max}	N_{terms}	p_{max}	N_{terms}	
$\dot{E}_{1,1}, \dot{H}_{1,1}$	5	14 524	3	2 066 105	1	310 236 947	758
$\dot{E}_{1,2}, \dot{H}_{1,2}$	5	17 952	3	2 628 958	1	333 983 379	758
$\dot{E}_{1,3}, \dot{H}_{1,3}$	5	17 930	3	2 629 315	1	333 640 750	758
$\dot{E}_{1,4}, \dot{H}_{1,4}$	5	14 458	3	2 057 532	1	308 898 572	758
$\dot{E}_{2,1}, \dot{H}_{2,1}$	5	14 617	3	1 884 324	1	170 896 238	758
$\dot{E}_{2,2}, \dot{H}_{2,2}$	5	18 068	3	2 421 282	1	187 073 325	758
$\dot{E}_{2,3}, \dot{H}_{2,3}$	5	18 069	3	2 427 656	1	187 559 102	758
$\dot{E}_{2,4}, \dot{H}_{2,4}$	5	14 620	3	1 895 183	1	172 552 544	758
$\dot{\Lambda}_1$	6	34 736	2	437 050	0	0	1 573
$\dot{\Lambda}_2$	6	42 942	2	557 331	0	0	1 573
$\dot{\Lambda}_3$	6	42 943	2	559 030	0	0	1 573
$\dot{\Lambda}_4$	6	34 739	2	439 851	0	0	1 573

В приложении Б, для примера, приведены отрезки рядов, представляющие осреднённый гамильтониан четырёхпланетной задачи. В приложении В проведена численная оценка значений некоторых знаменателей, входящих в слагаемые осреднённого гамильтониана.

Приведём далее некоторые свойства двух вариантов разложения осреднённого гамильтониана, построенных до второго порядка по малому параметру. Эти разложения будут в дальнейшем применяться при изучении орбитальной эволюции внесолнечных планетных систем. В качестве исходного оскулирующего гамильтониана используются два разложения, построенные до 4 и 6 степени по элементам Пуанкаре (характеристики разложений приведены в таблице 2.5). В таблице 3.5 даны значения максимальных степеней p_{max} эксцентрических и облических элементов Пуанкаре, а также количество

слагаемых N_{terms} в этих двух вариантах разложения. При построении слагаемых гамильтониана второго порядка по малому параметру максимальный порядок сохраняемых в разложении тригонометрических аргументов в скобке Пуассона $\{T_1, h_1\}$ составляет $m_{\text{max}} = 20$.

Таблица 3.5. Некоторые свойства двух вариантов разложения осреднённого гамильтониана, построенных до второго порядка по малому параметру

	Первое разложение		Второе разложение	
	p_{max}	N_{terms}	p_{max}	N_{terms}
H_0	0	4	0	4
H_1	4	11500	6	60832
H_2	2	290870	4	4532556
сумма		302374		4593392

В таблице 3.6 приведены максимальные степени p_{max} элементов Пуанкаре и количество слагаемых N_{terms} в уравнениях движения, полученных при осреднении двух вариантов оскулирующего гамильтониана, построенного до квадрата по малому параметру.

Таблица 3.6. Некоторые свойства уравнений движения в средних элементах, соответствующих двум вариантам разложения осреднённого гамильтониана, построенного до квадрата по малому параметру

ДУ	Первое разложение				Второе разложение			
	слагаемые с μ^1		слагаемые с μ^2		слагаемые с μ^1		слагаемые с μ^2	
	p_{max}	N_{terms}	p_{max}	N_{terms}	p_{max}	N_{terms}	p_{max}	N_{terms}
$\dot{\Xi}_{1,1}, \dot{H}_{1,1}$	3	1 626	1	29 545	5	11 649	3	779 762
$\dot{\Xi}_{1,2}, \dot{H}_{1,2}$	3	1 943	1	32 792	5	13 927	3	860 153
$\dot{\Xi}_{1,3}, \dot{H}_{1,3}$	3	1 940	1	32 799	5	13 905	3	859 270
$\dot{\Xi}_{1,4}, \dot{H}_{1,4}$	3	1 617	1	29 438	5	11 583	3	774 415
$\dot{\Xi}_{2,1}, \dot{H}_{2,1}$	3	1 623	1	17 334	5	11 637	3	701 255
$\dot{\Xi}_{2,2}, \dot{H}_{2,2}$	3	1 943	1	19 335	5	13 938	3	780 991
$\dot{\Xi}_{2,3}, \dot{H}_{2,3}$	3	1 943	1	19 408	5	13 938	3	784 528
$\dot{\Xi}_{2,4}, \dot{H}_{2,4}$	3	1 623	1	17 523	5	11 649	3	709 574

3.4 Выводы

Представлен алгоритм метода Хори–Депри построения осреднённых уравнений движения четырёхпланетной задачи в элементах второй системы Пуанкаре. В третьем приближении метода Хори–Депри построен гамильтони-

ан задачи в средних элементах и производящая функция преобразования от оскулирующих элементов к средним.

Построены уравнения движения четырёхпланетной задачи с учётом слагаемых, включающих в себя третью степень малого параметра, и функции замены переменных с точностью до квадрата малого параметра. Проведена оценка правых частей уравнений движения и функций замены переменных численными значениями, соответствующими элементам орбит планет-гигантов Солнечной системы. Приведены оценки количества слагаемых входящих в ряды. Полученные уравнения движения в средних элементах и функции замены переменных будут использованы для исследования орбитальной эволюции планет-гигантов Солнечной системы на космогонических интервалах времени (глава 4).

Также проведено осреднение двух вариантов разложения оскулирующего гамильтониана, построенных с меньшей точностью — до второго порядка по малому параметру (соответственно до 4 и 6 степени по эксцентрическим и облическим элементам Пуанкаре). Оба варианта осреднённого гамильтониана могут быть использованы для моделирования орбитальной эволюции внесолнечных планетных систем (глава 5). Высокая точность разложения в данном случае не требуется, так как элементы орбит внесолнечных планетных систем известны с ошибками, а некоторые из них неизвестны вовсе. Построены уравнения движения в средних элементах и функции замены переменных.

Глава 4

Динамическая эволюция четырёхпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун на космогонических интервалах времени

При написании данной Главы диссертации использованы публикации (Перминов, Кузнецов, 2018; Perminov, Kuznetsov, 2020b, 2022b), выполненные соискателем Перминовым А.С. в соавторстве с Кузнецовым Э.Д., в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

4.1 Численное интегрирование уравнений движения в средних элементах

С помощью построенных методом Хори–Депри уравнений движения в средних элементах изучается динамическая эволюция четырёхпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун. Интегрирование уравнений движения 3 порядка по малому параметру выполняется методом Грегга–Булирша–Штера 12 порядка (Авдюшев, 2015; Press et al., 2017) на интервале времени 10 млрд лет с шагом 10 000 лет. Также используется метод Эверхарта 15 порядка (Everhart, 1974) для интегрирования уравнений движения 1, 2 и 3 порядков на интервале времени 100 млн лет с шагом 1 000 лет. Это дополнительное интегрирование выполнено для более точного определения периодов и пределов изменения элементов орбит. При этом интегратор Эверхарта очень точно сохраняет значение полной энергии системы, что делает процесс интегрирования достаточно медленным. Интегратор Грегга–Булирша–Штера, наоборот, менее точный, но при этом очень быстрый.

Начальные условия для интегрирования уравнений движения получены на основе барицентрических координат и скоростей планет-гигантов Солнеч-

ной системы относительно средней эклиптики и равноденствия J2000.0 на дату 31.01.2016 (на момент 00^h00^m00^s TDB), которые соответствуют эфемеридам DE 430 (Folkner et al., 2014). Барицентрические координаты и скорости преобразуются в систему Якоби. Затем координаты и скорости в системе Якоби преобразуются в оскулирующие элементы второй системы Пуанкаре. Наконец, средние элементы Пуанкаре могут быть получены с использованием функций замены переменных, построенных во втором приближении, в соответствии с таблицей 3.3.

Массы планет m (в соответствии с DE 430) в единицах μm_{\odot} (здесь m_{\odot} — масса Солнца), начальные значения средних кеплеровских элементов орбит и средних элементов орбит во второй системе Пуанкаре приведены в таблице 4.1. В таблице элементы орбит a , e , I , ω , Ω , l — это, соответственно, средняя большая полуось орбиты, её эксцентриситет, наклон, аргумент перицентра, долгота восходящего узла и средняя аномалия планеты. Элементы L , ξ_1 , η_1 , ξ_2 , η_2 и λ (средняя долгота) — средние элементы Пуанкаре.

Таблица 4.1. Средние элементы орбит планет-гигантов Солнечной системы в координатах Якоби относительно средней эклиптики и равноденствия J2000.0 на дату 31.01.2016 и массы планет в единицах μm_{\odot} .

	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
a , а.е.	5.202428147617	9.553279379707	19.218797432123	30.117805024735
e	0.048581009397	0.056835955703	0.046191489219	0.009096353838
I , °	1.302022155732	2.491898712401	0.772828084358	1.765791683571
ω , °	273.5094416547	339.8182441399	99.0045131669	274.8030322771
Ω , °	100.4814627046	113.6279753214	74.0335344544	131.7129758137
l , °	148.3452254626	153.2823720591	209.9384745467	292.9504952764
L	0.037436569021	0.015194300890	0.003292299879	0.004862007389
ξ_1	$9.12355497 \cdot 10^{-3}$	$-4.21305869 \cdot 10^{-4}$	$-2.63156198 \cdot 10^{-3}$	$4.36479597 \cdot 10^{-4}$
η_1	$-2.27321941 \cdot 10^{-3}$	$-6.99605223 \cdot 10^{-3}$	$-3.21341475 \cdot 10^{-4}$	$-4.60210970 \cdot 10^{-4}$
ξ_2	$-7.99377833 \cdot 10^{-4}$	$-2.14677442 \cdot 10^{-3}$	$2.12777351 \cdot 10^{-4}$	$-1.42981844 \cdot 10^{-3}$
η_2	$-4.32085815 \cdot 10^{-3}$	$-4.90724005 \cdot 10^{-3}$	$-7.43685308 \cdot 10^{-4}$	$-1.60406150 \cdot 10^{-3}$
λ , °	162.3361298219	246.7285915204	22.9765221680	339.4665033672
m	0.9545940905	0.2858150132	0.043658047416	0.051503137143

Рассмотрим далее результаты численного интегрирования уравнений движения в средних элементах, которые описывают орбитальную эволюцию четырёхпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун. На рисунках 4.1 и 4.2 показана эволюция средних эксцентрических ξ_1 , η_1 и облических ξ_2 , η_2 элементов второй системы Пуанкаре на интервале времени 2 млн лет для Юпитера (тонкая сплошная линия), Сатурна (тонкая пунктирная линия), Урана (толстая сплошная линия) и Нептуна (толстая пунктирная линия). Результаты получены для третьего порядка построенной численно-

аналитической теории движения. Поведение элементов орбит η_1 и η_2 подобно поведению элементов ξ_1 и ξ_2 , соответственно, для каждой из планет. Поведение эксцентрических элементов ξ_1 и η_1 на интервале времени 2 млн лет главным образом различается наличием фазового сдвига длиной около 60 000 лет для орбит всех планет. Поведение облических элементов ξ_2 и η_2 различается наличием фазового сдвига в 13 000 лет для орбит Юпитера и Сатурна, около 100 000 лет для орбиты Урана и около 550 000 лет для орбиты Нептуна. Также наблюдается сдвиг по амплитуде колебаний. Таким образом, при смещении кривых, представляющих поведение эксцентрических элементов ξ_1 и η_1 , по горизонтали (на указанный интервал по времени) и по вертикали их экстремумы совпадут с хорошей точностью. То же самое касается поведения облических элементов ξ_2 и η_2 . Эволюция эксцентрических и облических элементов Пуанкаре качественно сохраняет свой характер на интервале времени 10 млрд лет.

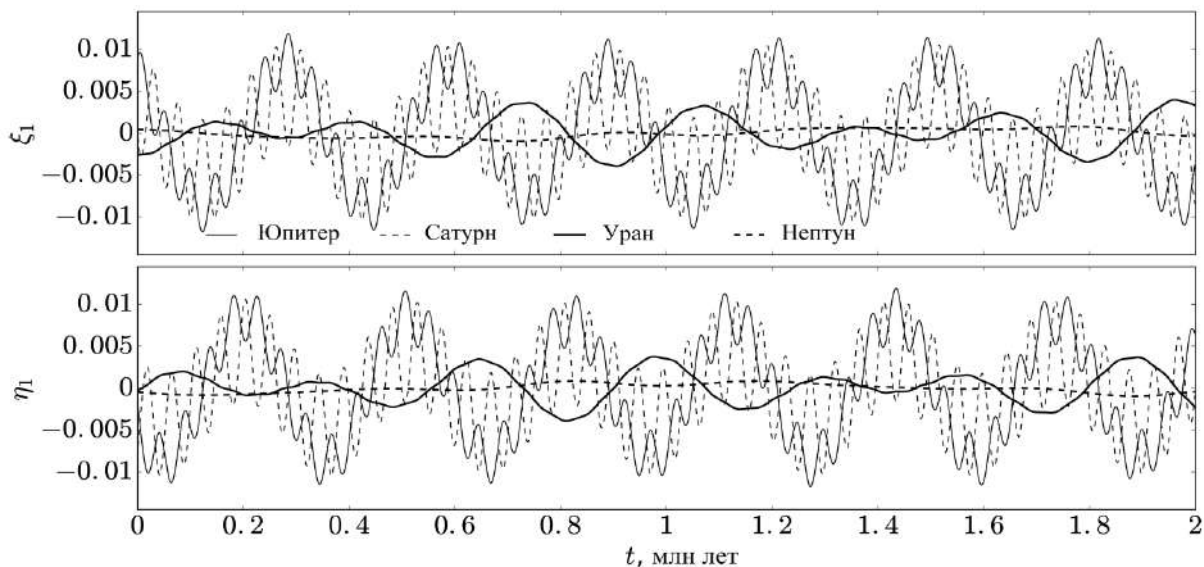


Рис. 4.1. Эволюция средних эксцентрических элементов ξ_1 и η_1 Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна на интервале времени 2 млн лет в рамках теории движения третьего порядка.

На рисунке 4.3 показана эволюция средних эксцентрических (слева, на плоскости (ξ_1, η_1)) и облических (справа, на плоскости (ξ_2, η_2)) элементов Пуанкаре в координатах Якоби для планет-гигантов Солнечной системы на интервале времени 2 млн лет, полученных в рамках теории движения третьего порядка. Интегрирование было выполнено методом Эверхарта 15 порядка.

В таблице 4.2 представлены минимальные (обозначены индексом ‘min’) и максимальные (‘max’) значения средних эксцентрических и облических элементов Пуанкаре в координатах Якоби на интервале времени 10 млрд лет, полученные в рамках теории движения третьего порядка. Интегрирование было выполнено методом Грегга–Булирша–Штера 12 порядка.

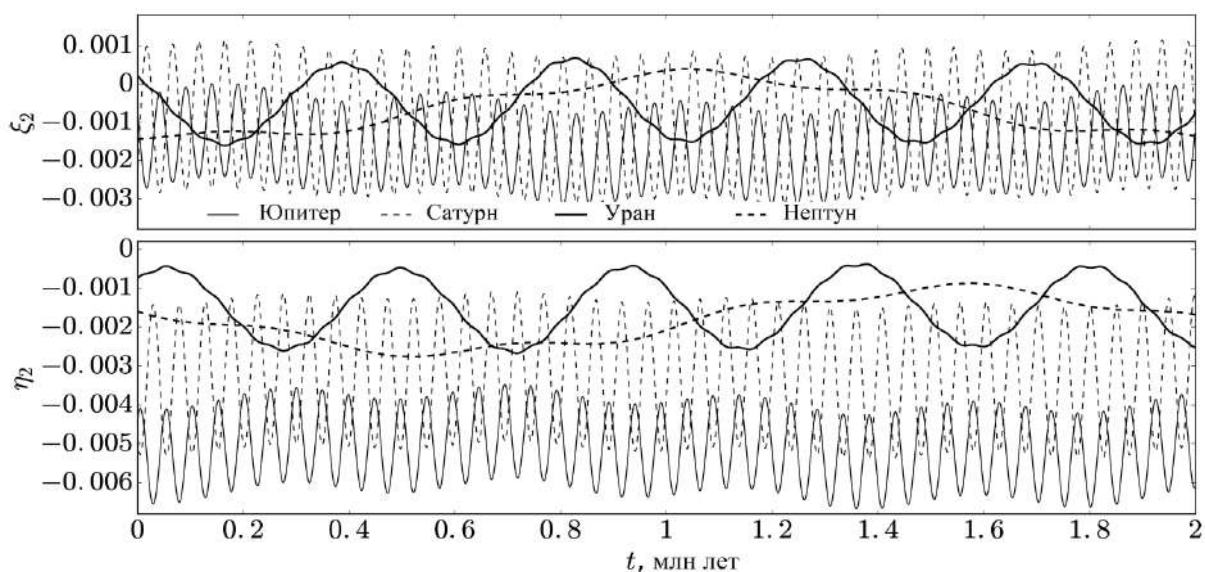


Рис. 4.2. Эволюция средних облических элементов ξ_2 и η_2 Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна на интервале времени 2 млн лет в рамках теории движения третьего порядка.

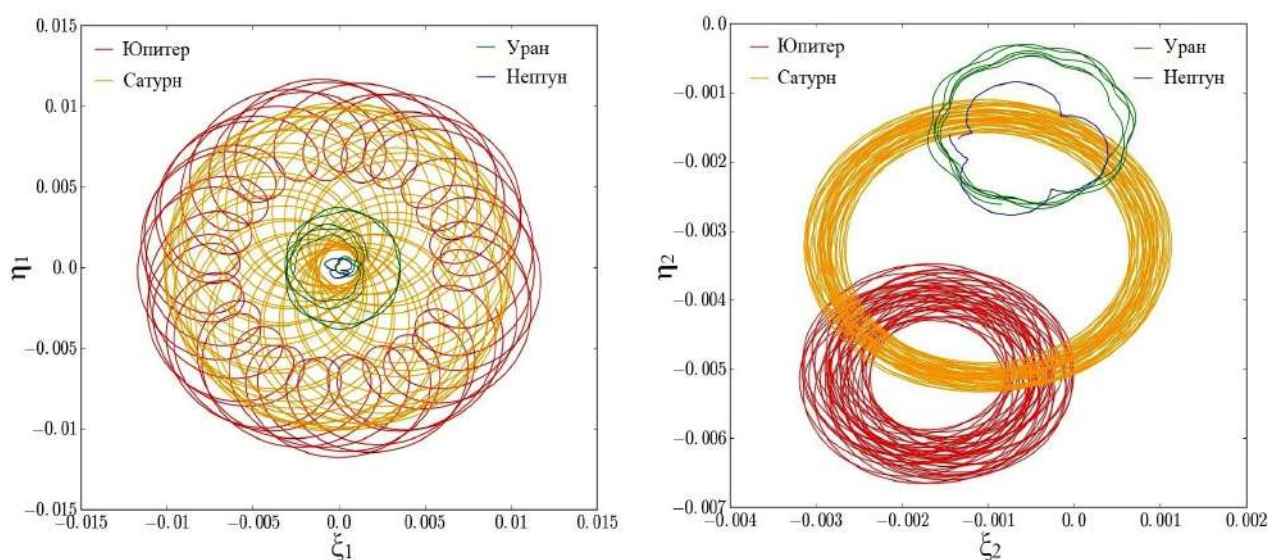


Рис. 4.3. Эволюция эксцентрических (слева) и облических (справа) элементов Пуанкаре орбит Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна на интервале времени 2 млн лет, полученные в рамках теории движения третьего порядка.

Значения в таблице 4.2 представляют собой границы кривых по вертикали и горизонтали на рисунке 4.3 достижимые на интервале времени 10 млрд лет.

На рисунках 4.4, 4.5, 4.6 и 4.7 показана соответственно эволюция эксцентриситетов, наклонов, долгот восходящих узлов и аргументов перицентров на интервале времени 2 млн лет в рамках теории движения третьего порядка для орбит Юпитера (тонкая сплошная линия), Сатурна (тонкая пунктирная линия), Урана (толстая сплошная линия) и Нептуна (толстая пунктирная ли-

Таблица 4.2. Диапазоны изменения эксцентрисических и облических элементов Пуанкаре для теории движения третьего порядка на интервале времени 10 млрд лет, полученные методом Грегга–Булирша–Штера.

элемент	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
$\xi_{1,\min}$	-0.01192312	-0.01060656	-0.00410620	-0.00105504
$\xi_{1,\max}$	0.01192145	0.01061406	0.00410376	0.00105354
$\eta_{1,\min}$	-0.01191904	-0.01061207	-0.00410648	-0.00105162
$\eta_{1,\max}$	0.01185786	0.01060602	0.00410482	0.00105487
$\xi_{2,\min}$	-0.00324295	-0.00321078	-0.00166268	-0.00154835
$\xi_{2,\max}$	0.00078165	0.00164624	0.00094744	0.00066644
$\eta_{2,\min}$	-0.00690354	-0.00553813	-0.00275323	-0.00287642
$\eta_{2,\max}$	-0.00344047	-0.00103476	0.00031468	-0.00085765

ния). Качественное поведение кеплеровских элементов орбит сохраняется на всём интервале времени 10 млрд лет.

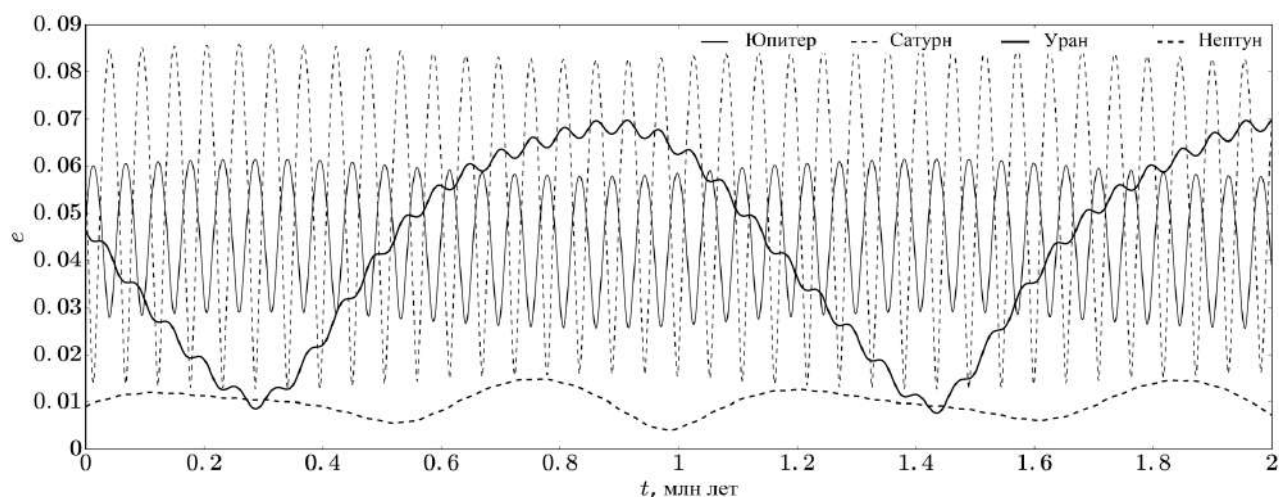


Рис. 4.4. Эволюция эксцентриситетов орбит Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна на интервале времени 2 млн лет в рамках теории движения третьего порядка.

Колебания эксцентриситета, наклона и долготы восходящего узла орбиты Юпитера происходят в противофазе с аналогичными элементами орбиты Сатурна. Из рисунка 4.4 видно, что локальные экстремумы (максимумы и минимумы) значений эксцентриситета орбиты Урана совпадают с экстремумами эксцентриситетов орбит Юпитера и Сатурна. Отметим также, что эксцентриситет орбиты Нептуна сохраняет значения близкие к нулю. Долготы восходящих узлов орбит всех планет колеблются около общего значения, которое близко к $107^{\circ}36'$ в начале интервала интегрирования. Вековое движение узлов орбит проявляется на интервале времени 10 млрд лет со скоростью около -0.8° за 1 млрд лет для всех планет. Аргументы перигелиев орбит всех планет изменяются в диапазоне от 0° до 360° с кратковременными

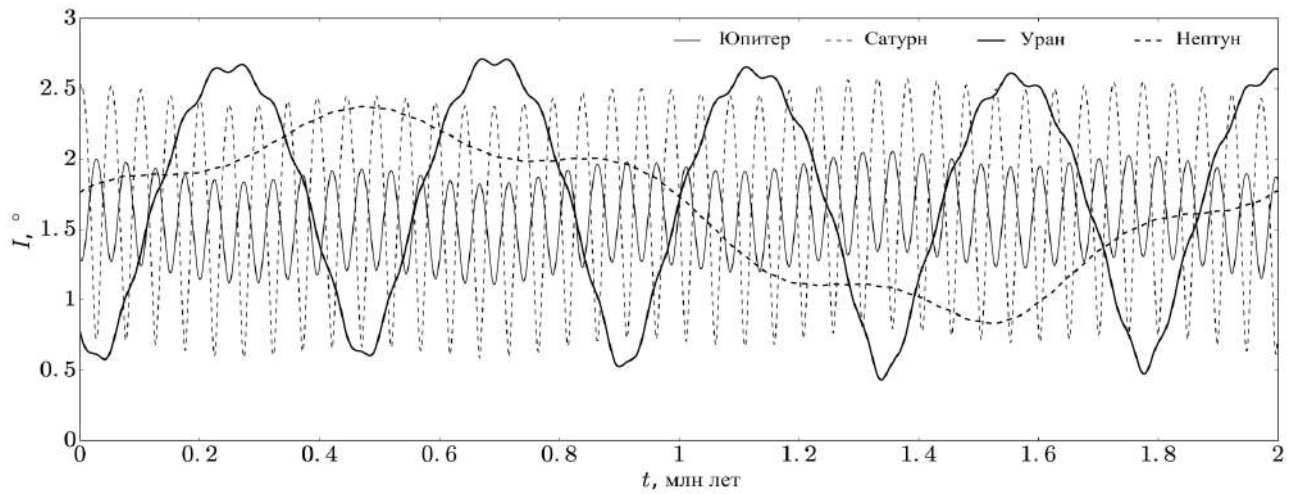


Рис. 4.5. Эволюция наклонов орбит Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна на интервале времени 2 млн лет в рамках теории движения третьего порядка.

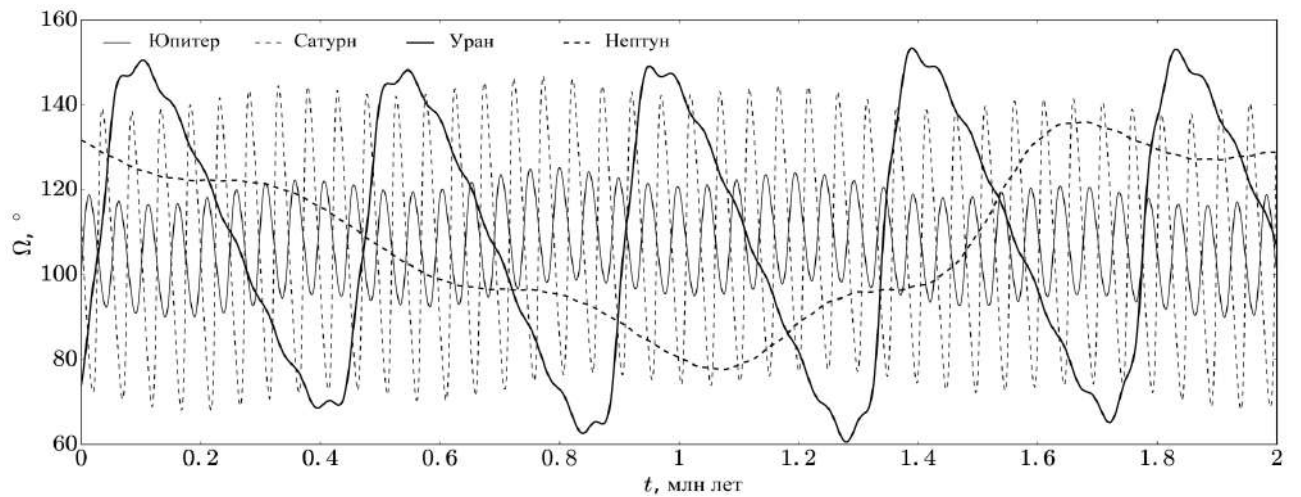


Рис. 4.6. Эволюция долгот восходящих узлов орбит Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна на интервале времени 2 млн лет в рамках теории движения третьего порядка.

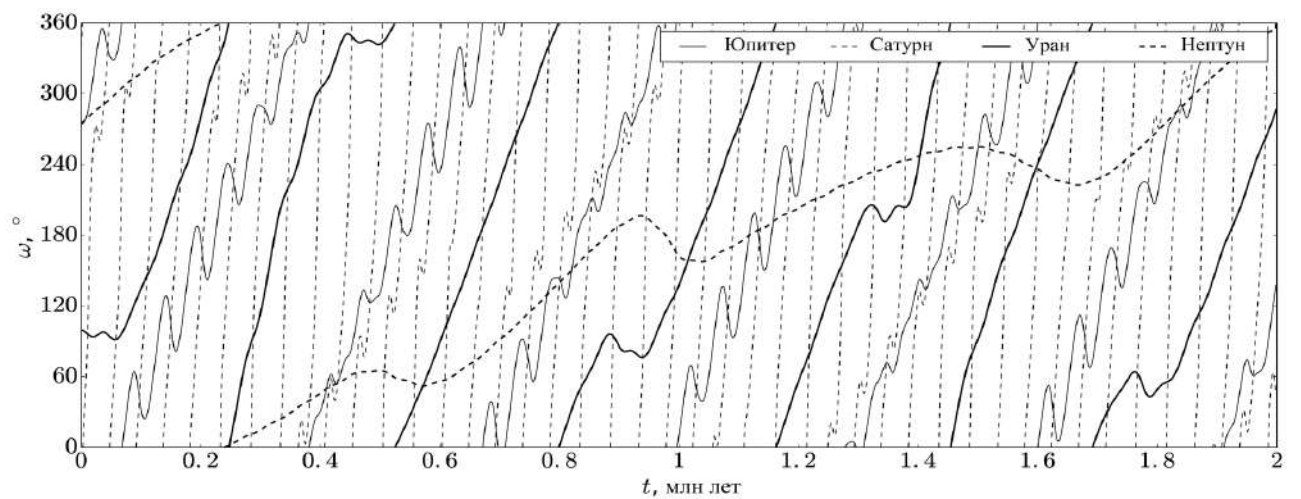


Рис. 4.7. Эволюция аргументов перигелиев орбит Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна на интервале времени 2 млн лет в рамках теории движения третьего порядка.

ми переходами в либрационный режим у Сатурна и Урана, как это видно на рисунке 4.7. Отметим, что период изменения аргумента перигелия орбиты Юпитера составляет около 306 800 лет с наложением колебаний с периодом около 46 400 лет. Этот период равен периоду изменения аргумента перигелия орбиты Сатурна.

В таблице 4.3 представлены минимальные значения (e_{\min} , I_{\min} , Ω_{\min}), максимальные значения (e_{\max} , I_{\max} , Ω_{\max}) и амплитуды колебаний (e_a , I_a , Ω_a) эксцентриситетов орбит e , наклонов I и аргументов перицентров Ω в координатах Якоби на интервале времени 10 млрд лет и периоды их изменения (T_e , T_I , T_Ω) для третьего порядка теории движения. Амплитуды колебаний элементов орбит определены как половина разности между их максимальными и минимальными значениями на всем интервале интегрирования (за исключением Ω_a , так как долготы восходящих узлов имеют вековой дрейф). Периоды изменения элементов орбит определены с помощью Фурье-анализа полученных временных рядов. Основные периоды (с максимальными амплитудами на рисунках 4.4, 4.5) отмечены звездочкой (*). Отметим, что периоды изменения долгот восходящих узлов совпадают с периодами изменения наклонов орбит.

Таблица 4.3. Диапазоны, амплитуды и периоды изменения эксцентриситетов, наклонов и долгот восходящих узлов орбит планет в третьем приближении теории движения на интервале времени 10 млрд лет, полученные методом Грегга–Булирша–Штера.

элемент	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
e_{\min}	0.02541911	0.01260263	0.00594877	0.00320516
e_{\max}	0.06161293	0.08603360	0.07159747	0.01515424
e_a	0.01809691	0.03671548	0.03282435	0.00597454
T_e , годы	54 688(*)	54 688(*)	1 136 622(*)	536 967(*)
	1 136 622	1 136 622	54 688	364 682(*)
I_{\min} , °	1.090399	0.553600	0.376341	0.772922
I_{\max} , °	2.065589	2.600945	2.780277	2.386374
I_a , °	0.487595	1.023673	1.201968	0.806726
T_I , годы	49 219(*)	49 219(*)	433 003(*)	1 875 119(*)
	433 003	433 003	49 219	433 003
Ω_{\min} , °	81.301109	59.040906	50.588179	68.745884
Ω_{\max} , °	125.428396	147.893544	157.167347	138.090662
Ω_a , °	17.905598	40.374785	49.158012	30.338182
T_Ω , годы	49 219(*)	49 219(*)	433 003(*)	1 875 119(*)
	433 003	433 003	49 219	433 003

Диапазоны изменения (минимальные e_{\min} , I_{\min} и максимальные e_{\max} , I_{\max} значения) и амплитуды колебаний (e_a , I_a) эксцентриситетов орбит и их наклонов на интервале времени 100 млн лет приведены в таблице 4.4. Значения

элементов орбит и амплитуды их колебаний приведены для всех трёх порядков построенной численно-аналитической теории движения. Столбец Δ_{21} содержит абсолютные значения относительных разностей между значениями элементов орбит во втором и первом приближениях теории движения. Столбец Δ_{32} — относительные разности между третьим и вторым приближениями теории движения. Все результаты получены с помощью интегрирования уравнений движения методом Эверхарта 15 порядка.

Таблица 4.4. Диапазоны изменения и амплитуды эксцентриситетов и наклонов орбит планет в трёх приближениях теории движения на интервале времени 100 млн лет, полученные методом Эверхарта.

элемент	1 st порядок	2 nd порядок	3 rd порядок	Δ_{21}	Δ_{32}
Юпитер					
e_{\min}	0.02468442	0.02559341	0.02543680	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$
e_{\max}	0.06139378	0.06158261	0.06160324	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$
e_a	0.01835468	0.01799460	0.01808322	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$
$I_{\min}, ^\circ$	1.09242866	1.09681997	1.09339411	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$
$I_{\max}, ^\circ$	2.06448605	2.06407638	2.06534388	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$
$I_a, ^\circ$	0.48602870	0.48362820	0.48597489	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$
Сатурн					
e_{\min}	0.01378821	0.01280412	0.01262111	$7.7 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
e_{\max}	0.08550206	0.08592936	0.08602141	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
e_a	0.03585693	0.03656262	0.03670015	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$
$I_{\min}, ^\circ$	0.56273502	0.56269001	0.55785653	$8.0 \cdot 10^{-5}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$
$I_{\max}, ^\circ$	2.59715433	2.59733523	2.60020927	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
$I_a, ^\circ$	1.01720965	1.01732261	1.02117637	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
Уран					
e_{\min}	0.01252242	0.00577616	0.00628336	1.2	$8.1 \cdot 10^{-2}$
e_{\max}	0.08124326	0.07108516	0.07160051	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$
e_a	0.03436042	0.03265450	0.03265857	$5.2 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
$I_{\min}, ^\circ$	0.46262453	0.41269269	0.38984521	$1.2 \cdot 10^{-1}$	$5.9 \cdot 10^{-2}$
$I_{\max}, ^\circ$	2.70245035	2.74985354	2.76703293	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$
$I_a, ^\circ$	1.11991291	1.16858043	1.18859386	$4.2 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$
Нептун					
e_{\min}	0.00448933	0.00337527	0.00324275	$3.3 \cdot 10^{-1}$	$4.1 \cdot 10^{-2}$
e_{\max}	0.01505711	0.01496073	0.01512544	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
e_a	0.00528389	0.00579273	0.00594134	$8.8 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$
$I_{\min}, ^\circ$	0.78167506	0.78080564	0.77591460	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$
$I_{\max}, ^\circ$	2.37501841	2.37441002	2.37683301	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$
$I_a, ^\circ$	0.79667168	0.79680219	0.80045920	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$

В нерезонансном случае разности между соседними приближениями теории движения Δ_{21} и Δ_{32} пропорциональны μ . Если эти разности пропорциональны $\sqrt{\mu}$, а не μ , то это может говорить о возможном наличии слабого

резонанса средних движений, поскольку значения знаменателей в уравнениях движения будут возрастать в этом случае.

Для Юпитера и Сатурна значение $\Delta_{21} \sim \sqrt{\mu}$ для e_{\min} и e_a , что говорит о слабом влиянии резонанса средних движений 2:5 на движения этих планет. Относительная разность Δ_{32} для эксцентриситетов и наклонов орбит Юпитера и Сатурна меньше, чем $\sqrt{\mu}$.

Для эксцентриситета и наклона орбиты Урана и эксцентриситета орбиты Нептуна существенная разница между первым и вторым приближениями теории движения вероятно говорит о наличии влияния на движение этих планет резонанса средних движений 1:2.

Уравнения движения для планет-гигантов Солнечной системы после подстановки в них значений масс планет и больших полуосей их орбит можно найти по адресу https://github.com/celesmec/motion_equations/.

4.2 Оценка точности численного интегрирования

Полная энергия планетной системы оценивается на каждом шаге численного интегрирования путём подстановки текущих значений средних элементов орбит в разложение осреднённого гамильтониана. Это позволяет контролировать точность процесса интегрирования. Относительная точность сохранения полной энергии системы определяется как относительная разность между начальной энергией системы E_0 и её текущим значением E

$$\Delta E = \frac{E - E_0}{E_0}. \quad (4.1)$$

Сохранение полной энергии системы означает, что фазовые траектории, которые соответствуют точному и приближённому решениям, лежат на одной фазовой поверхности. Но это не означает, что фазовые траектории расположены близко друг к другу.

На рисунке 4.8 показана зависимость величины ΔE от времени, полученная на основе результатов интегрирования методом Грегга–Булирша–Штера 12 порядка на интервале времени 10 млрд лет. Величина ΔE возрастает до $1.2 \cdot 10^{-11}$ к концу интервала моделирования. Относительная точность сохранения полной энергии системы не превышает значения 10^{-14} для метода Эверхарта 15 порядка на интервале времени 100 млн лет.

Изменение интеграла площадей с течением времени позволяет контролировать точность определения относительного положения плоскостей орбит. Компоненты интеграла площадей сохраняют свой вид в координатах Якоби (Шарлье, 1966) и при осредняющих преобразованиях (Холшевников,

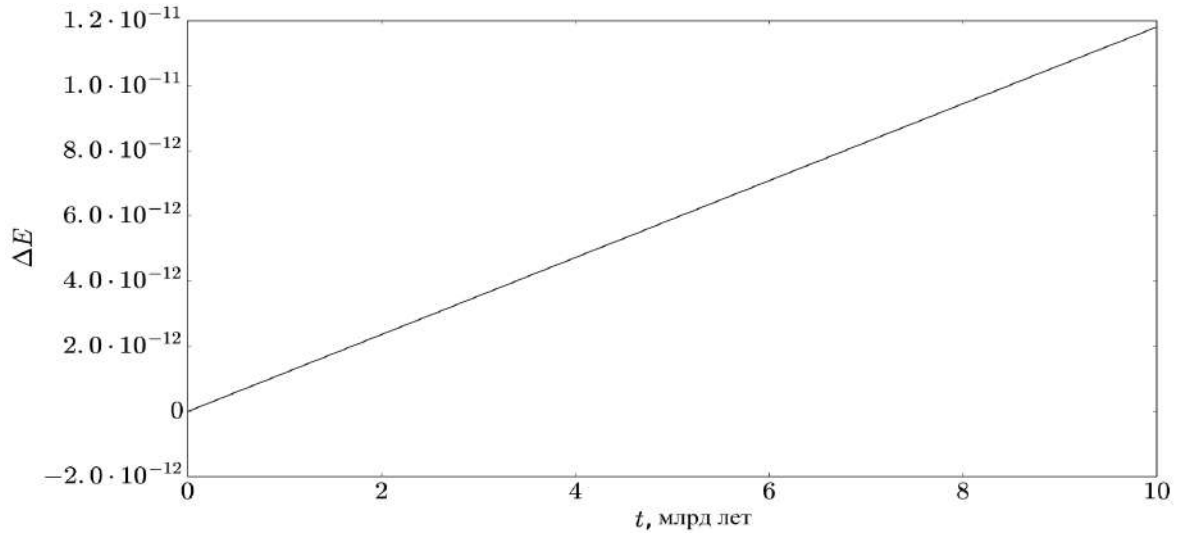


Рис. 4.8. Относительная точность сохранения полной энергии системы в третьем приближении теории движения на интервале времени 10 млрд лет. Численное интегрирование выполнено методом Грегга–Булирша–Штера 12 порядка.

1991), и определяются следующим образом

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^N M_k \varkappa_k \sqrt{a_k (1 - e_k^2)} \sin I_k \sin \Omega_k, \quad (4.2)$$

$$\sigma_y = - \sum_{k=1}^N M_k \varkappa_k \sqrt{a_k (1 - e_k^2)} \sin I_k \cos \Omega_k, \quad (4.3)$$

$$\sigma_z = \sum_{k=1}^N M_k \varkappa_k \sqrt{a_k (1 - e_k^2)} \cos I_k. \quad (4.4)$$

Обозначим через $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ и $\Delta\sigma_z$ относительные точности сохранения компонент интеграла площадей, и определим их аналогично формуле (4.1). На рисунке 4.9 показана зависимость от времени этих величин, вычисленных на основе результатов интегрирования уравнений движения методом Грегга–Булирша–Штера 12 порядка на интервале времени 10 млрд лет. Величина $\Delta\sigma_x$ на интервале моделирования возрастает от 0 до 0.036, а величина $\Delta\sigma_y$ уменьшается от 0 до -0.479 .

Несохранение x и y компонент интеграла площадей может быть объяснено усечением разложения гамильтониана задачи в ряд Пуассона, что детально объясняется в работе (Кузнецов, 2010).

Относительная точность сохранения z -компоненты интеграла площадей имеет то же значение, что и для интеграла энергии. Значение величины $\Delta\sigma_z$ возрастает от 0 до $8.5 \cdot 10^{-13}$, что может быть обусловлено точностью численного интегрирования.

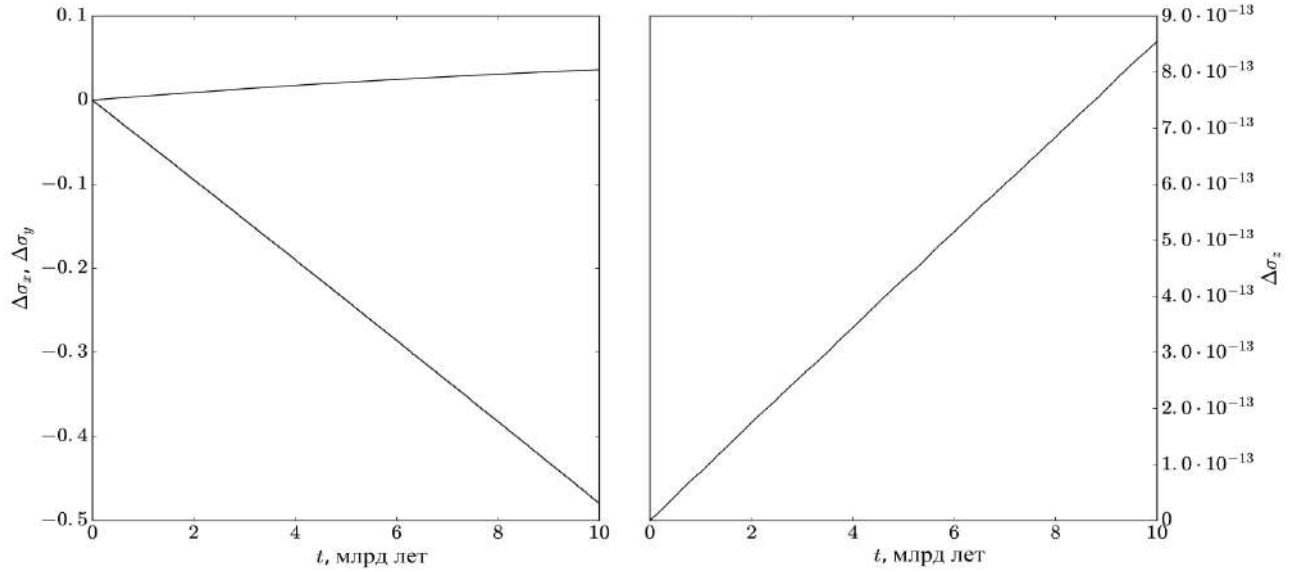


Рис. 4.9. Относительная точность сохранения компонент x (левый рисунок, восходящая линия), y (левый рисунок, нисходящая линия) и z (правый рисунок) интеграла площадей в третьем приближении теории движения на интервале времени 10 млрд лет. Численное интегрирование выполнено методом Грегга–Булирша–Штера 12 порядка.

4.3 Оценка короткопериодических возмущений

Функции замены переменных u_m , v_m в формулах (3.14) и (3.15) содержат информацию о короткопериодических возмущениях средних элементов орбит. В таблицах 4.5 и 4.6 представлены соответственно оценки среднеквадратичных и равномерных норм функций замены переменных u_m and v_m для кеплеровских элементов орбит. Среднеквадратичная норма определяется как

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k^2} \quad (4.5)$$

и равномерная норма

$$\|f\|_\infty = \max_{k=1, \dots, N} |f_k|, \quad (4.6)$$

где N — число шагов интегрирования, f_k — значение функции замены переменных f на шаге k . Табличные данные получены по результатам интегрирования уравнений движения третьего порядка на интервале 100 млн лет методом Эверхарта 15 порядка (в этом случае $N = 100\,000$).

Все ячейки содержат два значения, которые соответствуют функциям замены переменных построенным до первого порядка по малому параметру u_1 (верхнее значение) и построенным до второго порядка u_2 (нижнее значение). Для средних долгот приведены нормы только для функций замены переменных первого порядка по малому параметру v_1 . Значения функций замены

Таблица 4.5. Среднеквадратичные нормы функций замены переменных для кеплеровских элементов орбит на интервале времени 100 млн лет

элемент	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
a , AU	$2.06604487 \cdot 10^{-2}$	$1.23824231 \cdot 10^{-2}$	$6.07038180 \cdot 10^{-3}$	$8.74912312 \cdot 10^{-3}$
	$1.32938377 \cdot 10^{-5}$	$1.01947957 \cdot 10^{-4}$	$1.12468825 \cdot 10^{-4}$	$1.49058116 \cdot 10^{-4}$
e	$2.21825459 \cdot 10^{-3}$	$1.86899066 \cdot 10^{-3}$	$1.73036276 \cdot 10^{-3}$	$9.32290808 \cdot 10^{-4}$
	$1.17153635 \cdot 10^{-4}$	$4.75085594 \cdot 10^{-4}$	$2.70555062 \cdot 10^{-5}$	$1.07979803 \cdot 10^{-5}$
I , °	$1.24910606 \cdot 10^{-3}$	$2.99087012 \cdot 10^{-3}$	$6.66254656 \cdot 10^{-4}$	$3.57585659 \cdot 10^{-4}$
	$3.82101603 \cdot 10^{-4}$	$9.42940800 \cdot 10^{-4}$	$1.17876770 \cdot 10^{-5}$	$5.32638302 \cdot 10^{-6}$
ω , °	3.12328005	2.60563072	3.96543565	6.58817315
	0.18325535	0.63574931	0.05835548	0.07751854
Ω , °	0.046667231	0.132795886	0.031852436	0.014559119
	0.014267958	0.041858246	0.000549142	0.000206924
λ , °	0.010320261	0.025406611	0.011016313	0.007467585

Таблица 4.6. Равномерные нормы функций замены переменных для кеплеровских элементов орбит на интервале времени 100 млн лет

элемент	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
a , AU	$3.50650013 \cdot 10^{-2}$	$3.13553238 \cdot 10^{-2}$	$2.09524170 \cdot 10^{-2}$	$1.98641393 \cdot 10^{-2}$
	$3.67477326 \cdot 10^{-5}$	$2.53962637 \cdot 10^{-4}$	$4.84960027 \cdot 10^{-4}$	$4.77512796 \cdot 10^{-4}$
e	$5.27456489 \cdot 10^{-3}$	$4.36006536 \cdot 10^{-3}$	$4.27043048 \cdot 10^{-3}$	$1.96228172 \cdot 10^{-3}$
	$2.35196354 \cdot 10^{-4}$	$9.38492454 \cdot 10^{-4}$	$9.49299858 \cdot 10^{-5}$	$2.97185092 \cdot 10^{-5}$
I , °	$3.13083154 \cdot 10^{-3}$	$6.79898306 \cdot 10^{-3}$	$3.23208174 \cdot 10^{-3}$	$1.61108324 \cdot 10^{-3}$
	$6.84053324 \cdot 10^{-4}$	$1.74134392 \cdot 10^{-3}$	$5.60114567 \cdot 10^{-5}$	$2.10674085 \cdot 10^{-5}$
ω , °	10.63110729	14.51656492	30.28771906	33.50703740
	0.59805179	2.35343319	0.50017643	0.39888948
Ω , °	0.159646024	0.668660958	0.28401526	0.11131883
	0.033952947	0.166595529	0.005596863	0.001389856
λ , °	0.021500869	0.052529107	0.025062896	0.015684468

переменных u_m и v_m для кеплеровских элементов орбит получены следующим образом.

1. С помощью численного интегрирования уравнений движения получены средние элементы орбит во второй системе Пуанкаре.
2. Вычислены функции замены переменных и получены оскулирующие элементы Пуанкаре.
3. Средние и оскулирующие элементы Пуанкаре преобразованы в кеплеровские элементы.
4. Вычислены разности средних и оскулирующих кеплеровских элементов (функции замены переменных u_m и v_m).

Короткопериодические возмущения больших полуосей орбит планет значительно меньше, чем средние большие полуоси, приведенные в таблице 4.1. Амплитуды короткопериодических возмущений эксцентриситетов и наклонов орбит планет меньше, чем амплитуды их долгопериодических колебаний, приведённых в таблице 4.4.

4.4 Сравнение с результатами других теорий движения

Для сравнения с построенной численно-аналитической теорией движения проведено численное моделирование орбитальной эволюции планет-гигантов Солнечной системы. Использовался интегратор Коуэлла-Штермера 15 порядка, модифицированный В. И. Ньюманом (Goldstein, 1996). Этот интегратор является частью программного комплекса NBI (Varadi, 1999), предназначенного для численного интегрирования задачи N-тел. Второй используемый интегратор — это симплектический интегратор Виздома-Хольмана, а именно его конкретная реализация — WHFast (Rein and Tamayo, 2015), являющаяся частью программного комплекса Rebound.

Начальные условия для численного моделирования — барицентрические координаты и скорости планет-гигантов Солнечной системы относительно средней эклиптики и равноденствия J2000.0 на дату 31.01.2016 в соответствии с эфемеридами DE 430 (приведены в таблице 2.2). Интегрирование выполнено на интервале времени 100 млн лет с шагом 4 дня.

На рисунках 4.10, 4.11, 4.12 и 4.13 показана эволюция оскулирующих эксцентриситетов орбит, соответственно, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна в барицентрической системе координат в рамках численно-аналитической теории движения (сплошная линия) и по результатам интегрирования методом Коуэлла-Штермера (пунктирная линия). Средние элементы орбит получены в третьем порядке теории движения и далее преобразованы в оскулирующие элементы с использованием функций замены переменных второго порядка по малому параметру. Все рисунки показывают хорошее согласие между прямым численным интегрированием и численно-аналитической теорией движения, которое обеспечивается близостью оскулирующих и средних элементов орбит в начальный момент интегрирования.

Минимальные и максимальные значения эксцентриситетов орбит e_{min} , e_{max} и наклонов I_{min} , I_{max} планет-гигантов Солнечной системы представлены в таблице 4.7 для численно-аналитической теории движения третьего порядка и для результатов численного моделирования обоими методами (методы Коуэлла-Штермера и Виздома-Хольмана). Результаты показывают их каче-

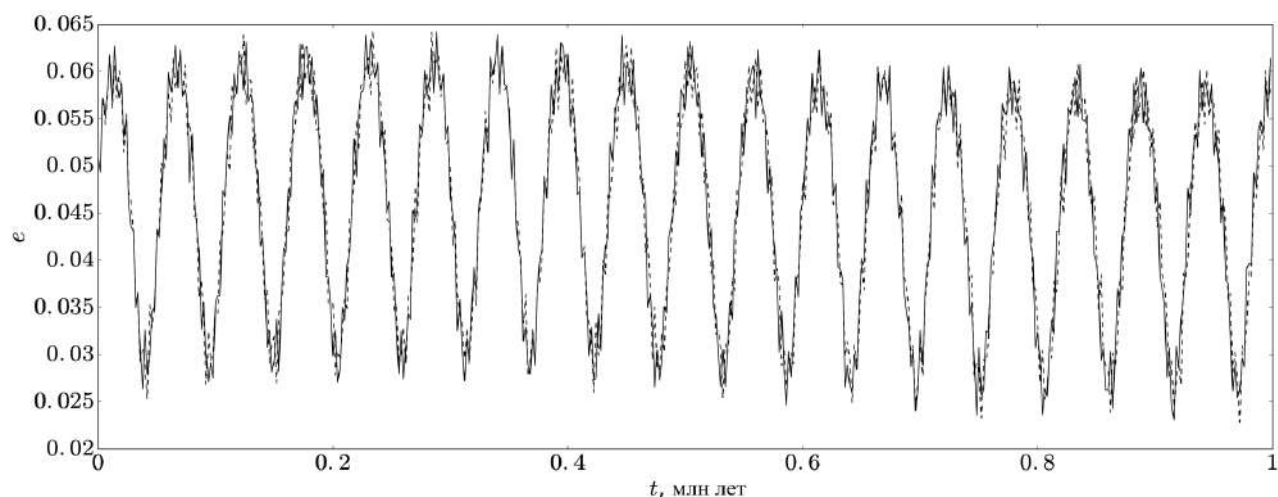


Рис. 4.10. Эволюция оскулирующего эксцентриситета орбиты Юпитера на интервале времени 1 млн лет. Сплошная линия соответствует численно-аналитической теории движения, пунктирная линия — результатам интегрирования методом Коуэлла–Штермера.

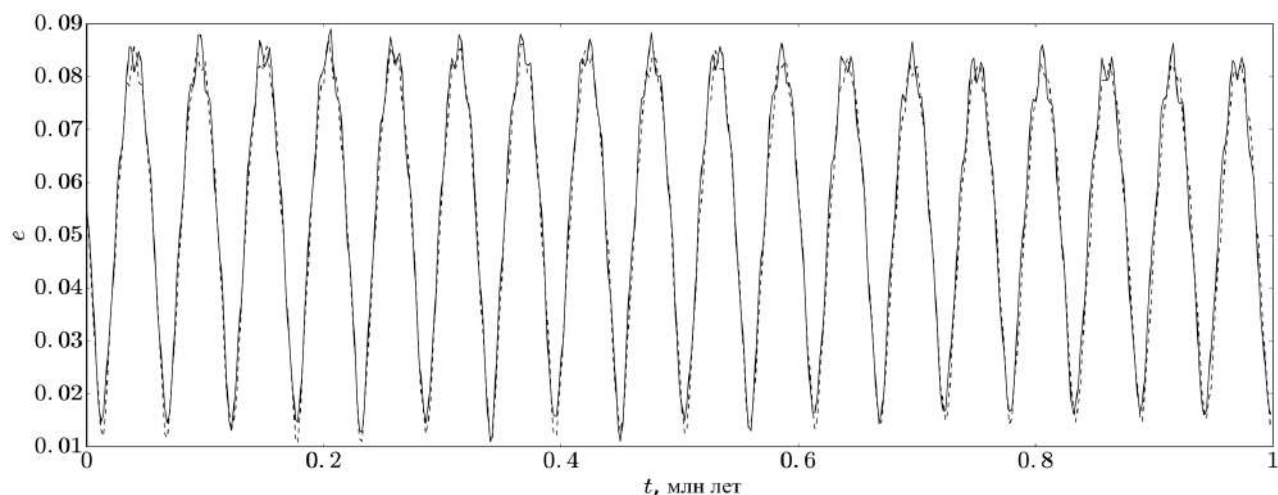


Рис. 4.11. Эволюция оскулирующего эксцентриситета орбиты Сатурна на интервале времени 1 млн лет. Сплошная линия соответствует численно-аналитической теории движения, пунктирная линия — результатам интегрирования методом Коуэлла–Штермера.

ственное соответствие друг другу. Отметим, что для большей части значений в таблице 4.7 численно-аналитическая теория лучше согласуется с методом интегрирования Коуэлла–Стормера, чем с симплектическим методом Уиздома-Холмана. Это можно объяснить тем, что в симплектических методах сохранение энергии системы действует как дополнительное ложное слагаемое в гамильтониане системы (Benettin and Giorgilli, 1994). Кроме того, относительная точность сохранения энергии системы для интегратора WHfast составляет около $10^{-10.5}$ на интервале времени около 10 млн оборотов Юпитера вокруг Солнца (Rein and Tamayo, 2015). Интегратор Коуэлла–Штермера имеет относительную точность сохранения энергии системы около 10^{-12} к концу интервала интегрирования в 100 млн лет.

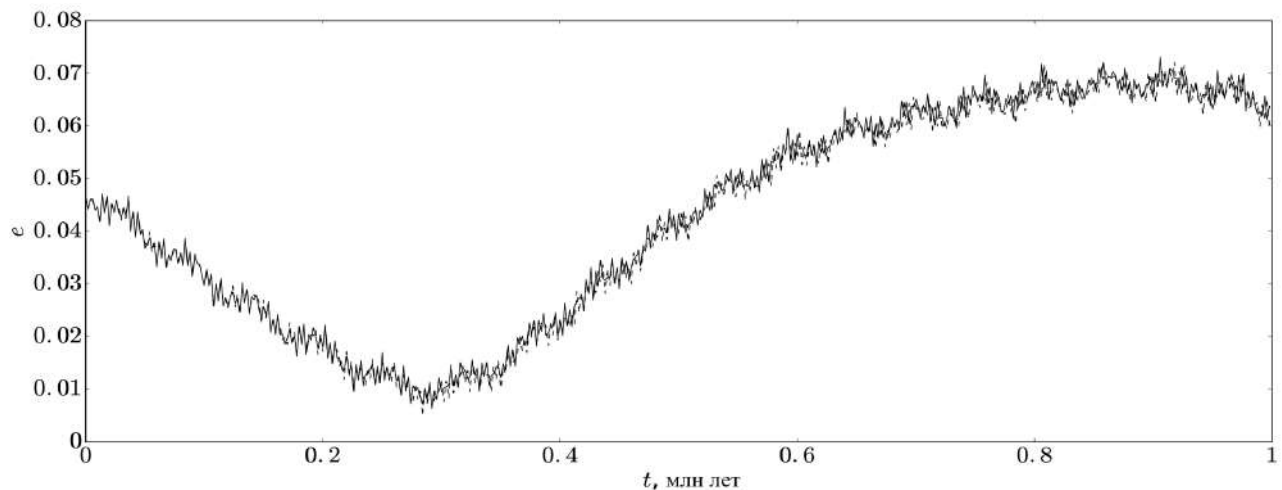


Рис. 4.12. Эволюция оскулирующего эксцентриситета орбиты Урана на интервале времени 1 млн лет. Сплошная линия соответствует численно-аналитической теории движения, пунктирная линия — результатам интегрирования методом Коуэлла–Штермера.

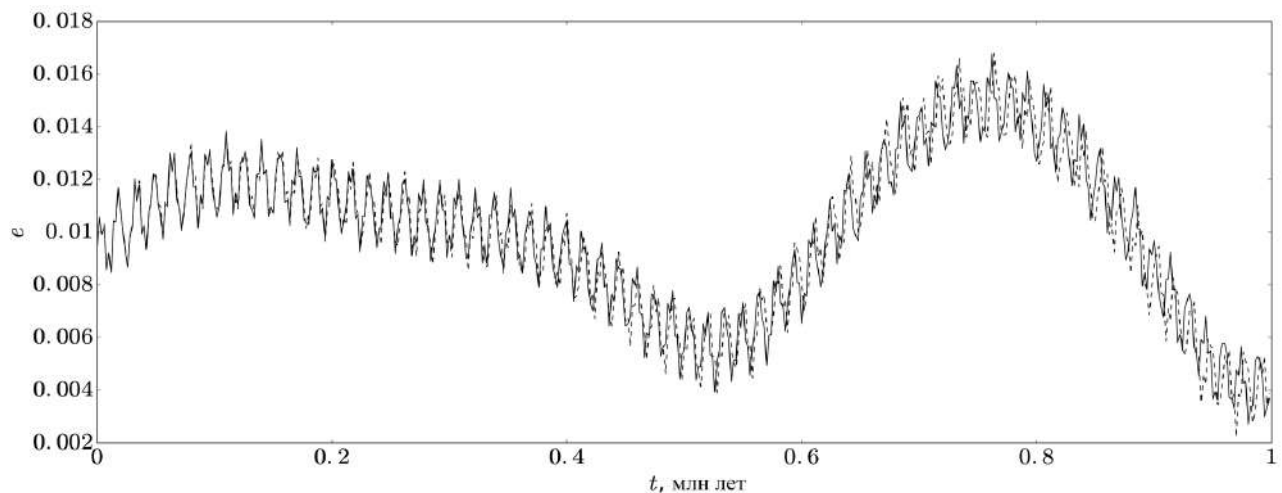


Рис. 4.13. Эволюция оскулирующего эксцентриситета орбиты Нептуна на интервале времени 1 млн лет. Сплошная линия соответствует численно-аналитической теории движения, пунктирная линия — результатам интегрирования методом Коуэлла–Штермера.

Основные периоды изменения эксцентриситетов и наклонов орбит Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна приведены в таблице 4.8. Отметим, что кривая изменения эксцентриситета орбиты Нептуна имеет два чередующихся пика с близкими амплитудами, но с различными периодами. Это ясно видно из рисунка 4.13. По этой причине в таблице 4.8 для периода изменения эксцентриситета орбиты Нептуна приведены два значения.

Периоды, приведённые в строке ‘LA’ таблицы 4.8, соответствуют фундаментальным частотам, которые были вычислены Ж. Ласкаром в работе (Laskar, 1990). Выберем фундаментальные частоты из таблиц II и III (столбец 4) вышеупомянутой работы, амплитуды которых более чем на порядок превышают амплитуды остальных частот. Далее можно получить следую-

Таблица 4.7. Диапазоны изменения оскулирующих эксцентриситетов и наклонов орбит на интервале времени 100 млн лет, полученные по данным численно-аналитической теории движения третьего порядка (SA), численными методами Коуэлла–Штермера (CS) и Виздома–Хольмана (WH) в барицентрической системе координат

	e_{min}	e_{max}	I_{min}, \circ	I_{max}, \circ	e_{min}	e_{max}	I_{min}, \circ	I_{max}, \circ
	Юпитер				Сатурн			
SA	0.02082	0.06577	1.09224	2.06480	0.00990	0.08984	0.55317	2.60154
CS	0.02172	0.06509	1.09317	2.06156	0.00935	0.08754	0.56297	2.59782
WH	0.02505	0.06191	1.09360	2.06263	0.00927	0.08745	0.56156	2.59505
	Уран				Нептун			
SA	0.00317	0.07503	0.38940	2.76761	0.00159	0.01691	0.77562	2.37692
CS	0.00247	0.07452	0.37555	2.77625	0.00135	0.01705	0.77480	2.37331
WH	0.00339	0.07366	0.37682	2.77510	0.00240	0.01607	0.77416	2.37331

Таблица 4.8. Периоды изменения оскулирующих эксцентриситетов и наклонов орбит, полученные по данным численно-аналитической теории движения первого (SA1), второго (SA2), третьего (SA3) порядков, методом Коуэлла–Штермера (CS), методом Виздома–Хольмана (WH) и согласно вековой теории (LA) Ласкара (Laskar, 1990)

	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
	периоды эксцентриситетов орбит, годы				периоды наклонов орбит, годы			
SA1	66 622	66 622	1 193 176	544 307, 373 776	49 282	49 282	432 321	1 874 064
SA2	54 290	54 290	1 129 803	538 101, 364 896	49 213	49 213	432 965	1 876 305
SA3	54 688	54 688	1 136 388	537 416, 364 880	49 215	49 215	432 913	1 875 638
CS	54 693	54 693	1 133 548	534 230, 363 076	49 102	49 102	432 552	1 873 823
WH	54 747	54 747	1 134 679	534 765, 363 438	49 151	49 151	432 984	1 875 689
LA	54 060	54 060	1 117 240	535 100, 361 810	49 220	49 220	431 280	1 872 830

щие комбинации фундаментальных частот (в обозначениях Ласкара), которые приближённо определяют периоды изменения эксцентриситетов и наклонов орбит.

1. $g_6 - g_5$ для эксцентриситетов орбит Юпитера и Сатурна.
2. $g_7 - g_5$ для эксцентриситета орбиты Урана.
3. $g_8 - g_7, g_8 - g_5$ для эксцентриситета орбиты Нептуна.
4. $-s_6, -s_6, -s_7, -s_8$ для наклонов орбит Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна соответственно.

Согласно таблице 4.8, периоды изменения элементов орбит в третьем приближении теории движения наиболее близки к результатам численных теорий. Расхождения между периодами изменения наклонов орбит, полученными различными численными методами и по данным численно-аналитической

теории движения третьего порядка, не превосходят 0.1% для всех планет. Расхождения между периодами изменения эксцентриситетов орбит Юпитера и Сатурна, полученными в рамках численно-аналитической теории движения и численным моделированием, составляют около 0.01%. Для Урана и Нептуна такие расхождения для эксцентриситетов орбит не превышают 0.3% и 0.6% соответственно, для всех численных методов. Расхождения для эксцентриситетов орбит достигают 1% при сравнении с результатами вышеупомянутой работы Ласкара.

4.5 Интегрирование с близкими начальными условиями

В работе (Hayes, 2007) рассматривается вопрос об эволюции внешней части Солнечной системы для слабозначимых (очень близких) начальных условий. Найдено, что в этом случае в системе могут существовать траектории со временем Ляпунова от 2 млн лет до 230 млн лет. В тоже самое время существуют траектории не показывающие хаотического поведения на интервалах времени до 1 млрд лет.

Для проверки работоспособности построенной численно-аналитической теории движения в слабохаотической области, были проинтегрированы уравнения движения второго порядка с близкими начальными условиями. Значение средней большой полуоси орбиты Урана (таблица 4.1) варьировалось в диапазоне от 1 см до 10 см с шагом 1 см. Совокупность этих начальных условий использовалась для интегрирования уравнений движения на интервале времени 100 млн лет методом Эверхарта 15 порядка.

Для определения расстояния между орбитами с близкими начальными условиями в пятимерном фазовом пространстве кеплеровских элементов орбит используется метрика Холшевникова ρ_2 , определённая в (Kholshchevnikov et al., 2016). Отметим, что размерность этой метрики — квадратный корень из длины.

По результатам интегрирования получено, что вычисленное значение метрики ρ_2^2 принимает только три значения $0, \pm 1.77 \cdot 10^{-15}$ а.е. (или $\pm 2.65 \cdot 10^{-7}$ м) на интервале времени 100 млн лет для всех орбит. Это может быть объяснено точностью компьютерных вычислений с вещественными числами двойной точности. Эти примеры подтверждают вычислительную стабильность алгоритмов, которые используются для построения теории движения и численного интегрирования.

Далее средняя большая полуось орбиты Урана увеличивалась на величину Δa , принимавшую значения $1 \cdot 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6}, 4 \cdot 10^{-6}, 8 \cdot 10^{-6}$ а.е. С этими но-

выми начальными условиями интегрировались уравнения движения второго порядка методом Эверхарта на интервале времени 100 млн лет. В качестве примера, зависимость метрики ρ_2 от времени показана на рисунке 4.14 для двух орбит Урана отличающихся по начальному значению большой полуоси на $2 \cdot 10^{-6}$ а.е.

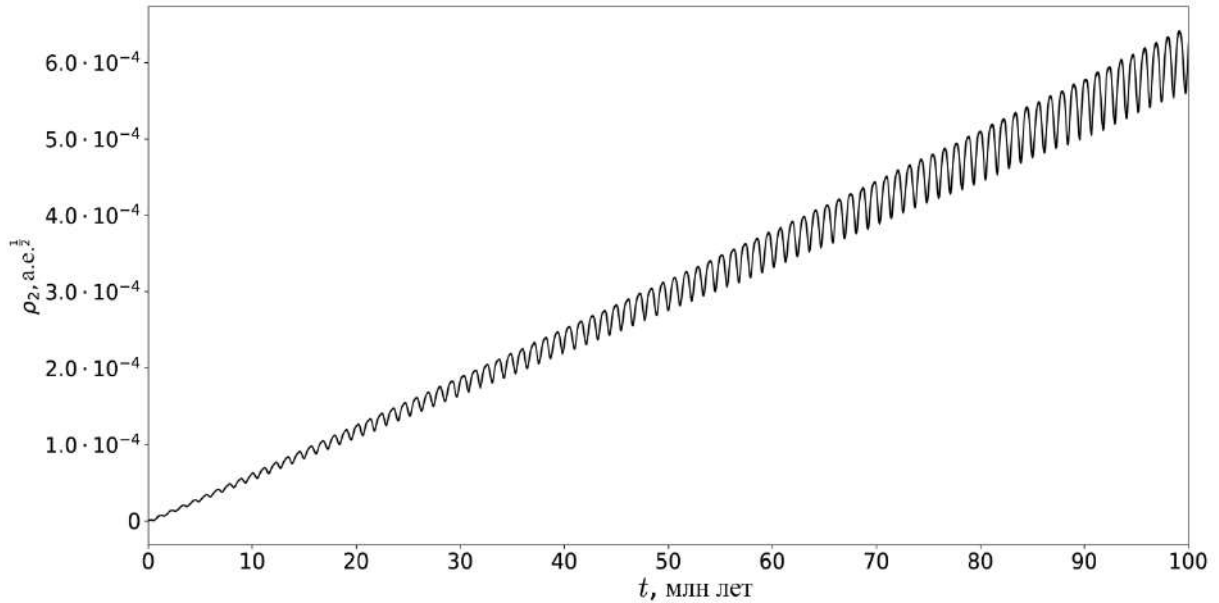


Рис. 4.14. Зависимость метрики ρ_2 от времени для двух орбит Урана, отличающихся по начальному значению большой полуоси на $2 \cdot 10^{-6}$ а.е.

Характеристический показатель Ляпунова вычисляется для каждого момента времени t_k следующим способом (Lichtenberg and Lieberman, 1992)

$$\sigma_k = \frac{1}{k\tau} \sum_{j=0}^k \ln \frac{\rho_2^{j+1}}{\rho_2^j}, \quad (4.7)$$

где $\tau = t_k - t_{k-1}$, ρ_2^j — расстояние между двумя орбитами в момент времени t_j . Зависимость величины σ_k от времени показана на рисунке 4.15 для двух орбит Урана, отличающихся по начальному значению большой полуоси на $\Delta a = 2 \cdot 10^{-6}$ а.е. Поведение величины σ_k для других планет и начальных условий является аналогичным.

Время Ляпунова T_L , характеризующее экспоненциальное расхождение изначально близких траекторий, представляет собой обратное значение показателя Ляпунова σ_1 к которому σ_k стремится. Максимально достижимое значение метрики ρ_2 , показатель Ляпунова σ_1 и время Ляпунова T_L приведены в таблице 4.9 для всех четырёх пар из системы с неизменённой большой полуосью Урана и системы с изменённой на величину Δa большой полуосью Урана.

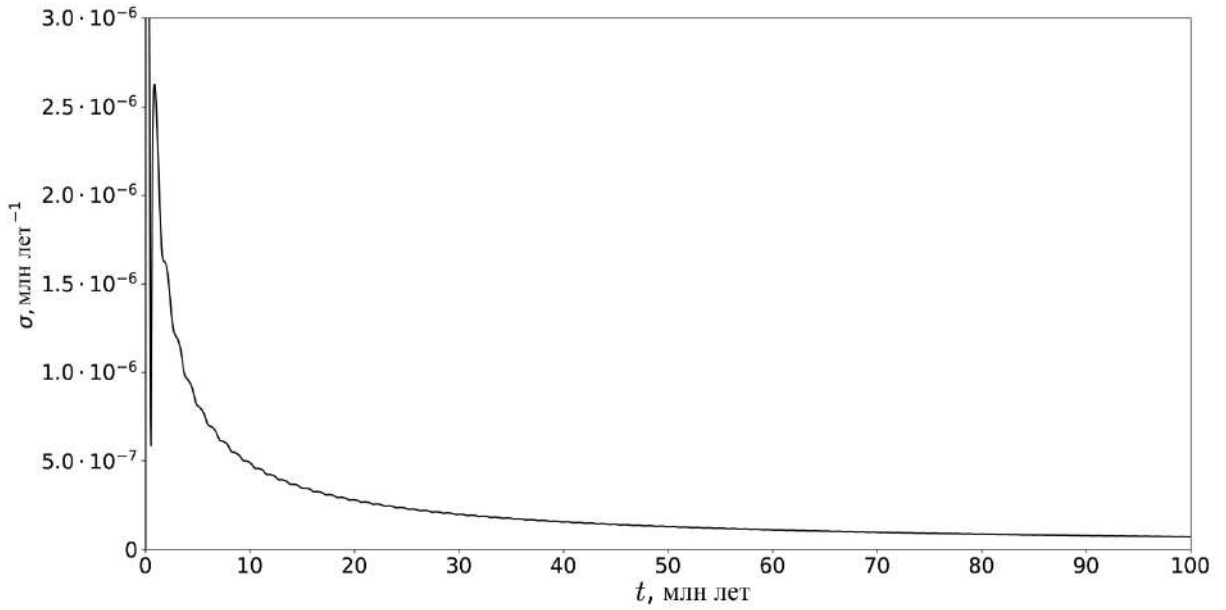


Рис. 4.15. Зависимость от времени характеристического показателя Ляпунова для двух орбит Урана, отличающихся по начальному значению большой полуоси на $2 \cdot 10^{-6}$ а.е.

Таблица 4.9. Максимально достижимое значение метрики ρ_2 , показатель Ляпунова σ_1 и время Ляпунова T_L

	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
$\Delta a = 1 \cdot 10^{-6}$ а.е.				
ρ_2 , а.е. ^{1/2}	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$
σ_1 , 1/млн лет	$6.0 \cdot 10^{-8}$	$6.9 \cdot 10^{-8}$	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$
T_L , млн лет	16.700	14.566	13.923	29.5333
$\Delta a = 2 \cdot 10^{-6}$ а.е.				
ρ_2 , а.е. ^{1/2}	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$
σ_1 , 1/млн лет	$8.4 \cdot 10^{-8}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$7.3 \cdot 10^{-8}$	$5.9 \cdot 10^{-8}$
T_L , млн лет	11.868	18.275	13.794	16.997
$\Delta a = 4 \cdot 10^{-6}$ а.е.				
ρ_2 , а.е. ^{1/2}	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$
σ_1 , 1/млн лет	$6.6 \cdot 10^{-8}$	$6.2 \cdot 10^{-8}$	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$7.6 \cdot 10^{-8}$
T_L , млн лет	15.093	16.211	13.860	13.115
$\Delta a = 8 \cdot 10^{-6}$ а.е.				
ρ_2 , а.е. ^{1/2}	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$
σ_1 , 1/млн лет	$8.4 \cdot 10^{-8}$	$6.2 \cdot 10^{-8}$	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$8.1 \cdot 10^{-8}$
T_L , млн лет	11.867	16.211	13.836	12.319

4.6 Сравнение результатов интегрирования уравнений движения в средних элементах для различных начальных условий

Дополнительно проведено интегрирование уравнений движения третьего порядка в средних элементах методом Эверхарта 15 порядка на интервале

времени 100 млн лет с шагом 1000 лет для моделирования орбитальной эволюции планет-гигантов Солнечной системы для различных начальных условий, соответствующих эфемеридам DE 432. Также моделирование для тех же самых начальных условий проведено с помощью интегратора Виздома–Хольмана с симплектическим корректором 11 порядка (Rein and Tamayo, 2015) на интервале времени 100 млн лет и шагом интегрирования 4 дня. Пределы изменения оскулирующих эксцентриситетов орбит (e_{min} , e_{max}) и наклонов (I_{min} , I_{max}) в барицентрической системе координат для численно-аналитической теории движения (SA) и интегратора Виздома–Хольмана (WH) представлены в таблице 4.10 для четырёх начальных дат интегрирования (на момент 00^h00^m00^s TDB). Переход от средних элементов орбит к оскулирующим выполнялся с помощью функций замены переменных первого порядка. В таблице 4.11 приведены периоды изменения средних элементов орбит и показатель MEGNO (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits), который автоматически вычисляется в процессе численного интегрирования. Показатель MEGNO характеризует степень расхождения изначально близких траекторий и наличие хаоса в системе. Если значение показателя MEGNO близко к 2, то движение квазипериодическое. Чем выше значение MEGNO, тем более хаотическим является движение в системе.

Расхождения между периодами изменения наклонов орбит, определённых численным интегрированием и по данным численно-аналитической теории движения, не превышают 0.2% для всех планет и для всех начальных условий. Расхождения между периодами изменения эксцентриситетов Юпитера и Сатурна находятся в диапазоне 0.1% – 0.8%. Для Урана и Нептуна эти расхождения не превышают 1.1% и 0.7% соответственно. Различия для минимальных и максимальных значений эксцентриситетов и наклонов орбит не превышают нескольких процентов, за исключением минимальных значений эксцентриситетов орбит Сатурна, Урана и Нептуна.

Таблица 4.10. Диапазоны изменения оскулирующих эксцентриситетов и наклонов орбит

Дата	Теория	Юпитер				Сатурн			
		e_{min}	e_{max}	$I_{min}, ^\circ$	$I_{max}, ^\circ$	e_{min}	e_{max}	$I_{min}, ^\circ$	$I_{max}, ^\circ$
31.01.2016	SA	0.025428	0.061603	1.093929	2.065336	0.012644	0.086018	0.557715	2.600120
	WH	0.025074	0.061959	1.093609	2.062945	0.009449	0.087273	0.561106	2.595098
29.02.2016	SA	0.025663	0.061743	1.093711	2.065397	0.012919	0.086132	0.559167	2.597615
	WH	0.025252	0.062026	1.095261	2.063808	0.009323	0.087498	0.561043	2.596079
31.01.2020	SA	0.026164	0.061377	1.089352	2.066233	0.012506	0.085095	0.559413	2.599554
	WH	0.025670	0.061914	1.094836	2.065492	0.009516	0.087377	0.560680	2.595056
29.02.2020	SA	0.025727	0.061232	1.094927	2.065816	0.012196	0.085157	0.563841	2.595928
	WH	0.025180	0.061789	1.094095	2.062955	0.009289	0.087229	0.565407	2.594549
Уран									
31.01.2016	SA	0.006304	0.071602	0.391638	2.766937	0.003247	0.015126	0.775906	2.376785
	WH	0.003386	0.073773	0.378761	2.777150	0.002383	0.016046	0.773544	2.373315
29.02.2016	SA	0.006084	0.071265	0.425230	2.740155	0.003322	0.015133	0.780070	2.374410
	WH	0.003572	0.073201	0.427249	2.734788	0.002635	0.015978	0.783357	2.373475
31.01.2020	SA	0.005017	0.070079	0.446119	2.718907	0.003483	0.014972	0.769256	2.390563
	WH	0.002174	0.071974	0.444978	2.728521	0.002727	0.015824	0.777828	2.379745
29.02.2020	SA	0.005501	0.070569	0.414775	2.735945	0.003487	0.014914	0.776324	2.380880
	WH	0.002735	0.072512	0.430827	2.730216	0.002553	0.015786	0.779464	2.379941

Таблица 4.11. Периоды изменения оскулирующих элементов орбит и значение показателя MEGNO

Дата	Теория	Юпитер		Сатурн		Уран		Нептун		MEGNO
		Периоды эксцентриситетов орбит, годы	Периоды наклонов орбит, годы	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун			
31.01.2016	SA	54 675	54 675	1 136 375	537 640, 364 967	49 213	49 213	432 905	1 886 811	2.28
	WH	54 735	54 735	1 136 375	534 765, 363 640	49 141	49 141	432 905	1 886 811	
29.02.2016	SA	53 764	53 764	1 136 375	537 640, 364 967	49 262	49 262	432 905	1 886 811	6.69
	WH	54 055	54 055	1 123 607	534 765, 362 323	49 189	49 189	432 905	1 886 811	
31.01.2020	SA	51 949	51 949	1 111 122	540 546, 363 640	49 432	49 432	432 905	1 886 811	103.63
	WH	51 841	51 841	1 098 912	537 640, 362 323	49 335	49 335	432 905	1 886 811	
29.02.2020	SA	54 113	54 113	1 123 607	540 546, 364 967	49 335	49 335	432 905	1 886 811	1.99
	WH	53 677	53 677	1 111 122	537 640, 362 323	49 237	49 237	432 905	1 886 811	

4.7 Выводы

Моделирование эволюции четырёхпланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн — Уран — Нептун на интервале времени 10 млрд. лет показало, что движение планет имеет почти-периодический характер. Эксцентриситеты и наклоны орбит планет-гигантов Солнечной системы остаются малыми. Эксцентриситеты орбит Юпитера, Сатурна, Урана отделены от нуля. Эксцентриситет орбиты Нептуна может принимать близкие к нулю значения. Короткопериодические возмущения эксцентриситетов и наклонов орбит сохраняют малые значения на всём интервале моделирования.

Численное интегрирование уравнений движения в средних элементах планет-гигантов Солнечной системы показало, что интеграл энергии сохраняется со значительно более высокой точностью, чем интеграл площадей. По причине того, что гамильтониан задачи в средних элементах представлен в виде отрезка разложения в ряд Пуассона, компоненты интеграла площадей σ_x и σ_y сохраняются со значительно меньшей точностью, чем z -компонента (Кузнецов, 2010).

Интегрирование уравнений движения с близкими начальными условиями показало, что время Ляпунова для орбит планет-гигантов составляет около 10–30 млн лет.

Построенная теория движения отлично согласуется с результатами численного интегрирования и позволяет с высокой точностью проводить моделирование орбитальной эволюции. Построенные аналитические ряды могут использоваться для исследования резонансных свойств, поиска трёхчастотных резонансов, влияющих на устойчивость и стохастические свойства орбитальной эволюции. Построенная численно-аналитическая теория движения также может быть использована для исследования орбитальной эволюции внесолнечных планетных систем.

Глава 5

Исследование динамической эволюции внесолнечных планетных систем

При написании данной Главы диссертации использованы публикации (Перминов, Кузнецов, 2019; Perminov, Kuznetsov, 2022a), выполненные соискателем Перминовым А.С. в соавторстве с Кузнецовым Э.Д., в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

5.1 Общие соображения

Далее рассматривается характер орбитальной эволюции двух трёхпланетных систем GJ 3138, HD 39194 и двух четырёхпланетных систем HD 141399, HD 160691 (μ Ara). Элементы орбит внесолнечных планетных систем, получаемые из наблюдений, известны с ошибками, некоторые же элементы, в силу специфики используемых методов наблюдений, не определяются. На основе моделирования динамической эволюции внесолнечных планетных систем определяются допустимые значения орбитальных параметров. Все неизвестные и известные с ошибками элементы орбит в планетных системах варьируются в допустимых пределах, что определяет набор всех возможных начальных условий для численного интегрирования уравнений движения в средних элементах.

По результатам моделирования определяются диапазоны изменения элементов орбит в зависимости от начальных условий. Предположение, что наблюдаемые планетные системы эволюционируют достаточно долгое время и являются устойчивыми, позволяет исключить начальные условия, приводящие к экстремальному росту эксцентриситетов и наклонов орбит, и выявить те, при которых указанные элементы сохраняются малыми на всем интервале моделирования. Это позволяет сузить диапазон возможных значений неизвестных элементов орбит и определить их наиболее вероятные значения,

при которых планетная система остается устойчивой на длительных интервалах времени.

Уравнения движения в средних элементах численно интегрируются методом Эверхарта 7 порядка (Everhart, 1974) для планетных систем HD 39194, HD 141399, HD 160691 и методом Грегга–Булирша–Штера 7 порядка (Press et al., 2017; Авдюшев, 2015) для планетной системы GJ 3138. Интервал интегрирования составляет 1 млн лет, задаваемый шаг интегрирования — 1000 лет (в действительности шаг интегрирования автоматически определяется внутри алгоритма, таким образом, чтобы на момент кратный 1000 лет, интеграл энергии системы сохранялся с наибольшей возможной точностью). Начальные условия для численного интегрирования определяются следующим образом — барицентрические кеплеровские элементы орбит планет преобразуются в элементы Пуанкаре в координатах Якоби, а затем с помощью функций замены переменных выполняется переход к средним элементам. Дальнейшая эволюция системы рассматривается уже в средних элементах. Контроль точности интегрирования проводится сравнением текущего значения энергии системы с её начальным значением.

Следует отметить, что применяемая численно-аналитическая теория движения позволяет исследовать орбитальную эволюцию внесолнечных планетных систем с умеренными значениями наклонов и эксцентриситетов орбит. Поэтому, если в процессе моделирования орбитальной эволюции системы происходит существенный рост эксцентриситетов и наклонов, то точные значения элементов орбит не могут быть определены в рамках рассматриваемой теории движения. Можно говорить лишь о том, что качественное поведение эксцентриситетов и наклонов орбит соответствует росту вплоть до экстремальных значений. Но поведение системы после начала подобного роста элементов орбит невозможно исследовать количественно в рамках построенной теории движения.

В соответствии с работой (Холшевников, 2001) для рядов, представляющих уравнения движения в средних элементах, были вычислены значения даламберовских радиусов для эксцентриситетов и наклонов орбит — в этих пределах функции сохраняют свои даламберовские свойства. В работе (Холшевников и др., 2002) показано, что оценки даламберовских радиусов близки к оценкам радиусов сходимости рядов по эксцентриситетам и наклонам орбит, внутри которых разложения функций в ряды ещё сохраняют свои аналитические свойства.

Известные из наблюдений параметры внесолнечных планетных систем GJ 3138, HD 39194, HD 141399 и HD 160691 приведены соответственно в таблицах 5.1, 5.2, 5.3 и 5.4 вместе с погрешностями их определения. Приве-

данные в таблицах элементы орбит, периоды и массы планет соответствуют данным каталога внесолнечных планетных систем www.exoplanet.eu/catalog (Schneider, 2010). Массы планет приведены в массах Юпитера M_{Jup} . Поскольку планеты во всех системах открыты методом доплеровской спектроскопии, то для них известны только минимальные значения масс M_p

$$M_p = M \sin I_p, \quad (5.1)$$

где I_p — неизвестный наклон плоскости орбиты к картинной плоскости, а M — неизвестная «истинная» масса планеты. Кроме того, известны большие полуоси орбит a , их эксцентриситеты e и периоды обращения планет P . Для обеих четырёхпланетных систем также известны аргументы перицентров орбит ω .

Таблица 5.1. Известные из наблюдений параметры планетной системы GJ 3138

Планета	GJ 3138 c	GJ 3138 b	GJ 3138 d
M_p, M_{Jup}	$0.0056^{+0.0010}_{-0.0011}$	0.0132 ± 0.0019	$0.033^{+0.0071}_{-0.0066}$
$a, \text{ а.е.}$	0.00197 ± 0.0005	0.057 ± 0.001	$0.698^{+0.0018}_{-0.0019}$
e	$0.19^{+0.18}_{-0.13}$	$0.11^{+0.11}_{-0.07}$	$0.32^{+0.20}_{-0.21}$
$P, \text{ сутки}$	$1.22003^{+0.00006}_{-0.00004}$	5.974 ± 0.001	$257.8^{+3.6}_{-3.5}$

Таблица 5.2. Известные из наблюдений параметры планетной системы HD 39194

Планета	HD 39194 b	HD 39194 c	HD 39194 d
M_p, M_{Jup}	0.0117 ± 0.001	0.0187 ± 0.00148	0.0162 ± 0.0026
$a, \text{ а.е.}$	0.0519 ± 0.0008	0.0954 ± 0.0016	0.172 ± 0.0029
e	0.2 ± 0.1	0.11 ± 0.006	0.2 ± 0.16
$P, \text{ сутки}$	5.6363 ± 0.0008	14.025 ± 0.0051	33.941 ± 0.0353

Таблица 5.3. Известные из наблюдений параметры планетной системы HD 141399

Планета	HD 141399 b	HD 141399 c	HD 141399 d	HD 141399 e
M_p, M_{Jup}	0.451 ± 0.03	1.33 ± 0.08	1.18 ± 0.08	0.66 ± 0.1
$a, \text{ а.е.}$	0.415 ± 0.011	0.689 ± 0.02	2.09 ± 0.06	5 ± 1.5
e	0.04 ± 0.02	0.048 ± 0.009	0.074 ± 0.025	0.26 ± 0.22
$\omega, ^\circ$	270 ± 80	220 ± 40	220 ± 30	350 ± 20
$P, \text{ сутки}$	94.44 ± 0.05	201.99 ± 0.08	1069.8 ± 6.7	5000^{+560}_{-2000}

Все планетные системы обладают умеренными значениями эксцентриситетов орбит. Следует отметить, что трёхпланетные системы GJ 3138 и HD 39194

Таблица 5.4. Известные из наблюдений параметры планетной системы HD 160691

Планета	HD 160691 c	HD 160691 d	HD 160691 b	HD 160691 e
$M_p, M_{\text{Юр}}$	0.03321	0.5219	1.676	1.814
$a, \text{ а.е.}$	0.09094	0.921	1.5 ± 0.02	5.235
e	0.172 ± 0.04	0.0666 ± 0.0122	0.128 ± 0.017	0.0985 ± 0.0627
$\omega, ^\circ$	212.7 ± 13.3	189.6 ± 9.4	22 ± 7	57.6 ± 43.7
$P, \text{ сутки}$	9.6386 ± 0.0015	310.55 ± 0.83	643.25 ± 0.9	4205.8 ± 758.9

являются компактными — расстояние всех планет в апоастре с учетом максимально возможных значений эксцентриситетов не превышает 1.1 а.е. для GJ 3138 и 0.24 а.е для HD 39194.

Определим систему координат, в которой будет рассматриваться движение планет. В силу произвольности выбора основной плоскости планетной системы определим её совпадающей в начальный момент времени с плоскостью орбиты внутренней планеты для систем HD 39194 и HD 141399. Таким образом, в начальный момент времени наклон орбит внутренних планет (HD 39194 b и HD 141399 b) по определению будет равен $I_0 = 0^\circ$. Если плоскость орбиты совпадает с основной плоскостью, то долгота восходящего узла не определена. Поэтому для определенности полагаем долготу восходящего узла равной 0° .

В системе HD 160691 самая внешняя планета является самой массивной. Очевидно, что в процессе орбитальной эволюции положение плоскости данной орбиты будет изменяться наименьшим образом. Поэтому определим основную плоскость планетной системы HD 160691 совпадающей в начальный момент времени с плоскостью орбиты планеты HD 160691 e. Положим долготу восходящего узла орбиты этой планеты равной 0° в начальный момент времени.

В системе GJ 3138 в качестве основной плоскости выбрана плоскость самой внешней и самой массивной планеты GJ 3138 d. Таким образом, без потери общности, наклон и долгота восходящего узла орбиты этой планеты приняты равными 0° в начальный момент времени.

Начальные значения наклонов орбит I_0 всех оставшихся планет в системах принимаются равными друг другу и варьируются в диапазоне от 0° до 45° (до 35° для GJ 3138) с шагом 5° , формируя таким образом набор различных начальных условий для моделирования.

Различные пространственные конфигурации планет на орбитах достигаются варьированием, как долгот восходящих узлов Ω , так и аргументов перигелиев ω . Для обеих четырёхпланетных систем долготы восходящих узлов орбит варьируются с шагом 90° . В системе HD 141399 аргументы перигелиев

орбит первой и второй планет варьируются с шагом 40° в пределах допустимых значений, аргумент перицентра орбиты третьей планеты — с шагом 30° , для четвёртой — не варьируется. В системе HD 160691 варьируется только аргумент перицентра последней планеты, принимая три значения — минимальное, среднее и максимальное (так как он известен с большой погрешностью).

В системе HD 39194 начальные значения как аргументов перицентров, так и долгот восходящих узлов варьируются с шагом 45° .

В системе GJ 3138 аргументы перицентров и долготы восходящих узлов варьируются с шагом 90° (и дополнительно с шагом 30°).

Все начальные значения эксцентриситетов орбит планет принимаются поочередно равными минимальным, средним и максимально допустимым значениям в соответствии с таблицами 5.1 — 5.4.

Массы планет выбираются равными своим минимальным значениям, без учёта погрешности. При варьировании начального значения наклона орбиты массы планет меняются в соответствии с формулой 5.1. Варьирование непосредственно масс планет проводится только для системы HD 160691, путём изменения наклона основной плоскости системы к картинной плоскости. Большие полуоси орбит не варьируются, в качестве начальных значений для интегрирования принимаются их номинальные значения.

В соответствии с (Холшевников, 2001) и (Холшевников и др., 2002) вычислены оценки теоретических радиусов сходимости по эксцентриситетам орбит R_e и по наклонам орбит R_I для рядов, представляющих уравнения движения в средних элементах для планетных систем GJ 3138, HD 39194, HD 141399 и HD 160691.

Радиусы сходимости по эксцентриситетам орбит определяются следующим образом. Пусть $e_i < R_{e,i}$, где e_i — эксцентриситет орбиты i -той планеты, а $R_{e,i}$ — соответствующий радиус сходимости. Тогда можно записать выражения для радиусов сходимости по эксцентриситетам орбит i -той и k -той планет

$$R_{e,i} = \frac{A_k (1 - \varepsilon_i) - A_i (1 + \varepsilon_i)}{qA_k (1 - \varepsilon_i) + A_i (1 + \varepsilon_i)}, \quad (5.2)$$

$$R_{e,k} = qR_{e,i}, \quad (5.3)$$

где A_i и A_k — средние большие полуоси орбит i -той и k -той планет ($k = i + 1$), $\varepsilon_i = |a_i - A_i|/A_i$ (здесь a_i — оскулирующая большая полуось орбиты i -той планеты), $q = e_k/e_i$.

Далее для первой планеты в системе вычисляется значение величины $R_{e,1}$ по формуле (5.2). Значение величины $R_{e,2}$ может быть вычислено как по формуле (5.2), так по формуле (5.3) с использованием полученного значения

$R_{e,1}$. В этом случае в качестве радиуса сходимости $R_{e,i}$ по эксцентриситету орбиты i -той планеты выбирается минимальное из этих значений.

Радиусы сходимости по наклонам орбит определяются по известным значениям $R_{e,i}$. Пусть $|s_i| < R_{s,i} = R_{e,i}$, где s_i и $R_{s,i}$ — синус половины угла наклона орбиты i -той планеты и радиус сходимости по данной переменной. Тогда радиус сходимости по наклону орбиты определим следующим образом

$$R_{I,i} = 2 \arcsin R_{e,i}. \quad (5.4)$$

Оценки радиусов сходимости приведены в таблице 5.5. Если значения эксцентриситетов и наклонов орбит планет лежат в пределах, указанных в таблице 5.5, то гарантируется сходимость рядов, представляющих уравнения движения и, как следствие, применимость построенной теории движения в данных условиях. Оценки радиусов сходимости получены для номинальных значений больших полуосей и эксцентриситетов орбит, приведенных в таблицах 5.1 — 5.4 при условии, что возмущения больших полуосей орбит близки к нулю (подтверждено оценками функций замены переменных для больших полуосей).

Таблица 5.5. Оценки радиусов сходимости рядов, представляющих уравнения движения, по эксцентриситетам и наклонам орбит планет

Планеты	GJ 3138			HD 39194			HD 141399				HD 160691			
	c	b	d	b	c	d	b	c	d	e	c	d	b	e
R_e	0.66	0.38	0.66	0.42	0.19	0.34	0.22	0.26	0.15	0.52	0.66	0.15	0.29	0.52
R_I, \circ	80	44	80	49	22	40	26	31	17	63	80	18	34	63

При моделировании орбитальной эволюции планетных систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691 используется осреднённый гамильтониан задачи, построенный в первом порядке по малому параметру до 4 степени по эксцентрисическим и облическим элементам Пуанкаре, а во втором порядке — до 2 степени по этим элементам. При моделировании орбитальной эволюции планетной системы GJ 3138 используется осреднённый гамильтониан, построенный до 6 (в первом порядке) и 4 (во втором порядке) степени по эксцентрисическим и облическим элементам Пуанкаре.

Уравнения движения для планет исследуемых внесолнечных систем после подстановки в них значений масс планет и больших полуосей их орбит можно найти по адресу https://github.com/celesmec/motion_equations/.

5.2 Динамическая эволюция трёхпланетной системы GJ 3138

5.2.1 Результаты моделирования

Интервал моделирования орбитальной эволюции системы GJ 3138 составляет 1 млн лет, что соответствует $300 \cdot 10^6$ оборотам планеты GJ 3138 с вокруг центральной звезды, $60 \cdot 10^6$ и $1.4 \cdot 10^6$ оборотам вокруг звезды планет GJ 3138 b и GJ 3138 d соответственно. В некоторых случаях интервал моделирования был увеличен до 10 млн лет (раздел 5.2.2).

Для каждого начального значения наклона орбиты I_0 двух внутренних планет (7 значений) и каждого из трёх наборов начальных значений эксцентриситетов орбит, была промоделирована орбитальная эволюция планетной системы для 1024 вариантов начальных условий, определяемых различными комбинациями начальных значений долгот восходящих узлов (Ω_c, Ω_b) и аргументов перицентров ($\omega_c, \omega_b, \omega_d$).

В таблицах 5.6, 5.7 и 5.8 представлены максимальные значения средних эксцентриситетов e_{\max} и наклонов орбит I_{\max} , достижимых на интервале моделирования для планет GJ 3138 b, c и d соответственно. В зависимости от начальных значений эксцентриситета орбиты e_0 и наклонов двух внутренних планет I_0 (в барицентрической системе координат), каждая ячейка таблицы содержит диапазон наибольших значений e_{\max} и I_{\max} (в координатах Якоби), определённый для всех начальных комбинаций аргументов перицентров ω_0 долгот восходящих узлов Ω_0 . Столбцы, обозначенные как M в таблицах 5.6 и 5.7 содержат значения масс планет, соответствующих начальному значению наклона орбиты I_0 (для планет GJ 3138 c и b). Если наклон плоскости орбиты к картинной плоскости $I_p = 90^\circ - I_0$, то масса планеты $M = M_p / \sin(90^\circ - I_0)$. Масса планеты GJ 3138 d равна своему номинальному значению в соответствии с таблицей 5.4. Значения эксцентриситетов и наклонов орбит, превышающие величины радиусов сходимости выделены полужирным шрифтом.

Для большей наглядности результаты моделирования представлены на рисунках 5.1 – 5.4. Показаны максимально достижимые значения (на всём интервале моделирования) средних эксцентриситетов двух внутренних планет GJ 3138 c и GJ 3138 b для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит. Начальные значения наклонов I_0 двух внутренних планет следующие — 15° (рисунок 5.1), 20° (рисунок 5.2), 30° (рисунок 5.3) и 35° (рисунок 5.4). На рисунках 5.5 ($I_0 = 15^\circ$) и 5.6 ($I_0 = 35^\circ$) представлены максимально достижимые значения средних наклонов планет GJ 3138 c и GJ 3138 b (в градусах). Шаг варьирования начальных значений $\omega_c, \omega_b, \omega_d$ и Ω_c, Ω_d равен 90° . Начальные значения Ω_b отмечены вдоль горизонтальной

Таблица 5.6. Максимально достижимые значения средних эксцентриситетов и наклонов орбиты планеты GJ 3138 c

e_0		0.06		0.19		0.37	
$I_0, ^\circ$	M, M_{Jup}	e_{max}	$I_{\text{max}}, ^\circ$	e_{max}	$I_{\text{max}}, ^\circ$	e_{max}	$I_{\text{max}}, ^\circ$
0	0.005600	0.06 – 0.10	0	0.19 – 0.28	0	0.38 – 0.57	0
5	0.005621	0.06 – 0.10	11	0.19 – 0.28	12	0.38 – 0.57	15.5
10	0.005686	0.06 – 0.11	22	0.19 – 0.31	23	0.38 – 0.59	29
15	0.005798	0.06 – 0.14	33	0.19 – 0.36	35	0.38 – 0.64	42
20	0.005959	0.06 – 0.44	45	0.20 – 0.57	47	0.38 – 0.8	60
30	0.006466	0.06 – 0.75	79	0.2 – 0.9	72	0.4 – 1	75
35	0.006836	0.06 – 1	82	0.2 – 1	85	0.4 – 1	> 90

Таблица 5.7. Максимально достижимые значения средних эксцентриситетов и наклонов орбиты планеты GJ 3138 b

e_0		0.04		0.11		0.22	
$I_0, ^\circ$	M, M_{Jup}	e_{max}	$I_{\text{max}}, ^\circ$	e_{max}	$I_{\text{max}}, ^\circ$	e_{max}	$I_{\text{max}}, ^\circ$
0	0.013200	0.04 – 0.05	0	0.11 – 0.14	0	0.22 – 0.29	0
5	0.013250	0.04 – 0.05	6	0.11 – 0.14	6	0.22 – 0.29	6
10	0.013404	0.04 – 0.05	11	0.11 – 0.15	11	0.22 – 0.29	12
15	0.013666	0.04 – 0.06	17	0.11 – 0.15	17	0.22 – 0.31	18
20	0.014047	0.04 – 0.14	22	0.11 – 0.24	23	0.22 – 0.38	25
30	0.015242	0.04 – 0.35	33	0.11 – 0.47	34	0.22 – 0.5	36
35	0.016114	0.04 – 0.5	39	0.11 – 0.6	40	0.22 – 0.6	40

Таблица 5.8. Максимально достижимые значения средних эксцентриситетов и наклонов орбиты планеты GJ 3138 d

e_0	0.11		0.32		0.52	
$I_0, ^\circ$	e_{max}	$I_{\text{max}}, ^\circ$	e_{max}	$I_{\text{max}}, ^\circ$	e_{max}	$I_{\text{max}}, ^\circ$
0	0.11	0	0.32	0	0.52	0
5	0.1102	1.2	0.3203	1.3	0.5205	1.4
10	0.1102	2.5	0.3203	2.6	0.5206	2.9
15	0.1102	3.8	0.3204	4.0	0.5223	4.5
20	0.1108	5.2	0.3214	5.8	0.5242	6.0
30	0.1119	8.3	0.3230	9.0	0.5230	10.5
35	0.1180	11.5	0.3282	12.2	0.5270	13.3

оси на обоих половинах каждого рисунка, а начальные значения ω_c — вдоль вертикальной оси. Каждый маленький квадрат на рисунках соответствует конкретным начальным значениям Ω_b (по горизонтали) и ω_b (по вертикали). Также в каждом таком квадрате начальное значение ω_d изменяется по вертикали.

В качестве примера рассмотрим левую часть рисунка 5.1. В первом (самом левом) «столбце», ограниченном вертикальными линиями, значения долгот

узлов $\Omega_c = 0^\circ$ и $\Omega_b = 0^\circ$. Во втором таком «столбце» $\Omega_c = 0^\circ$ и $\Omega_b = 90^\circ$, в третьем — $\Omega_c = 0^\circ$ и $\Omega_b = 180^\circ$, а в четвёртом — $\Omega_c = 0^\circ$ и $\Omega_b = 270^\circ$. С пятого по восьмой «столбцы» значение $\Omega_c = 90^\circ$, а значение Ω_b меняется аналогично «столбцам» с первого по четвёртый. Перейдём к «строкам». В первой «строке», ограниченной горизонтальными линиями, значения $\omega_c = 0^\circ$ и $\omega_b = 0^\circ$, во второй «строке» — $\omega_c = 0^\circ$ и $\omega_b = 90^\circ$, в третьей — $\omega_c = 0^\circ$ и $\omega_b = 180^\circ$, а в четвёртой — $\omega_c = 0^\circ$ и $\omega_b = 270^\circ$. Далее ситуация повторяется аналогично «столбцам».

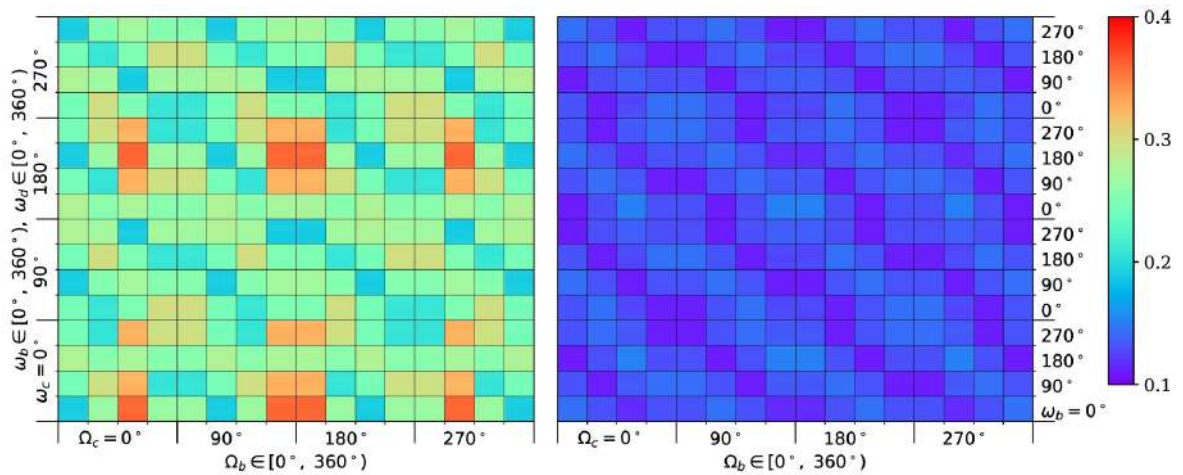


Рис. 5.1. Максимальные значения средних эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 с (слева) и b (справа) для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит; начальные наклоны орбит планет с и b — 15° .

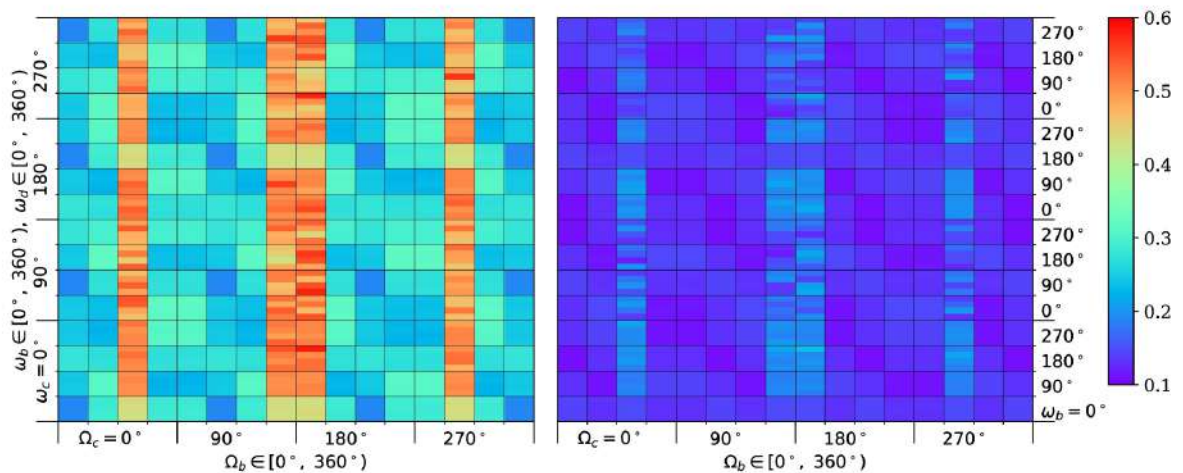


Рис. 5.2. Максимальные значения средних эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 с (слева) и b (справа) для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит; начальные наклоны орбит планет с и b — 20° .

Диапазон максимальных значений средних эксцентриситетов на рисунках 5.1 – 5.4 соответствует, приведённому в таблицах 5.6 и 5.7. Максимально

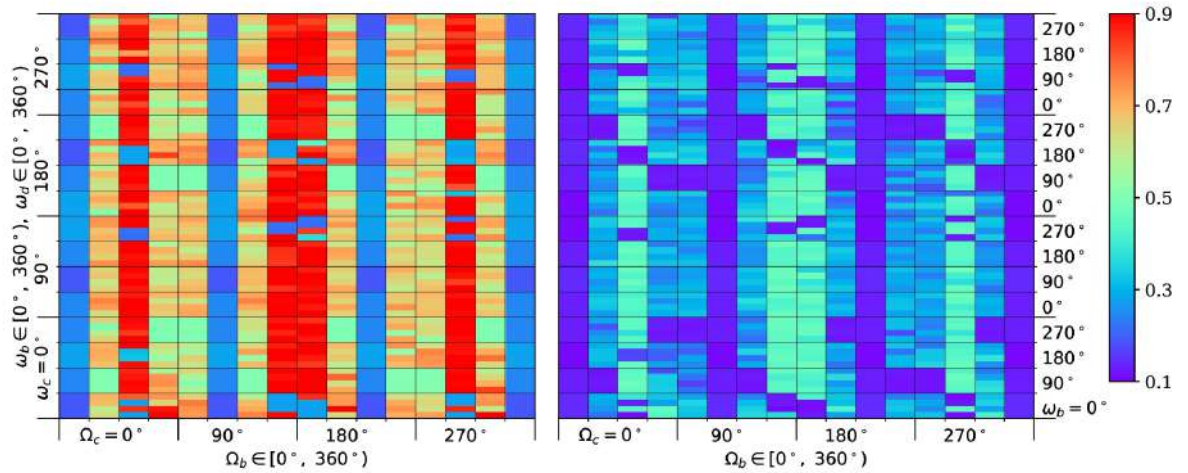


Рис. 5.3. Максимальные значения средних эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 с (слева) и b (справа) для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит; начальные наклоны орбит планет с и b — 30° .

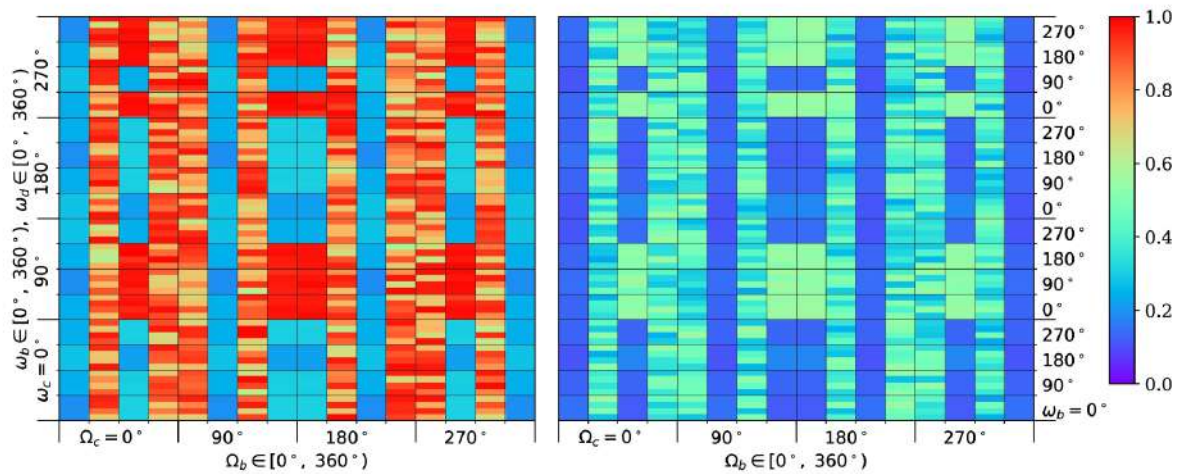


Рис. 5.4. Максимальные значения средних эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 с (слева) и b (справа) для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит; начальные наклоны орбит планет с и b — 35° .

достижимые значения эксцентриситетов и наклонов орбит планеты GJ 3138 d меняются незначительно с ростом начального значения наклона I_0 планет с и b (см. таблицу 5.8). Диапазон максимальных значений средних наклонов орбит на рисунках 5.5 – 5.6 соответствует диапазону от I_0 до значения, приведённого в таблицах 5.6 и 5.7. Показанное поведение элементов орбит качественно сохраняется для минимальных и максимальных начальных значений эксцентриситетов орбит. Аргументы перицентров и долготы восходящих узлов всех планет меняются в диапазоне от 0° до 360° без либраций для всех рассмотренных начальных условий.

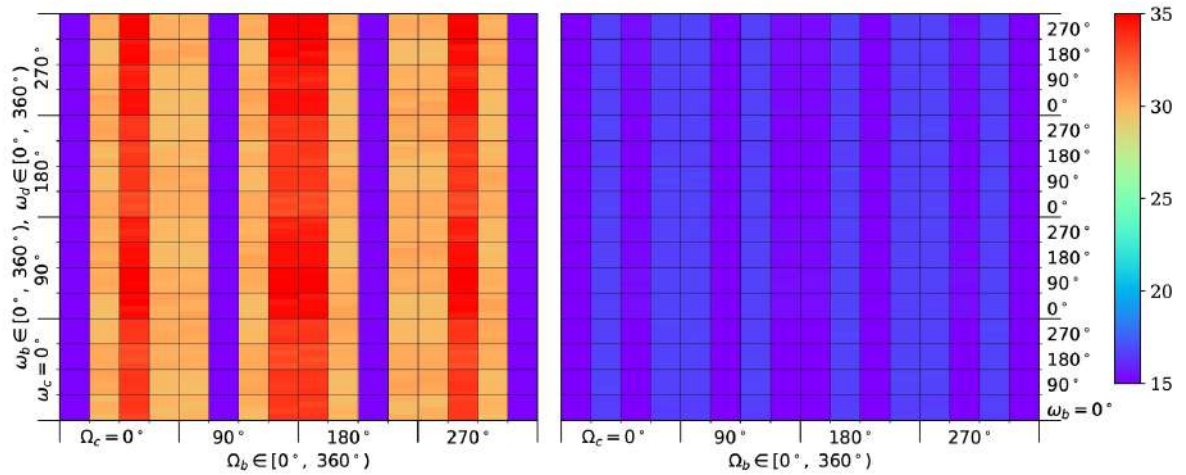


Рис. 5.5. Максимальные значения средних наклонов орбит (в градусах) планет GJ 3138 с (слева) и b (справа) для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит; начальные наклоны орбит планет с и b — 15° .

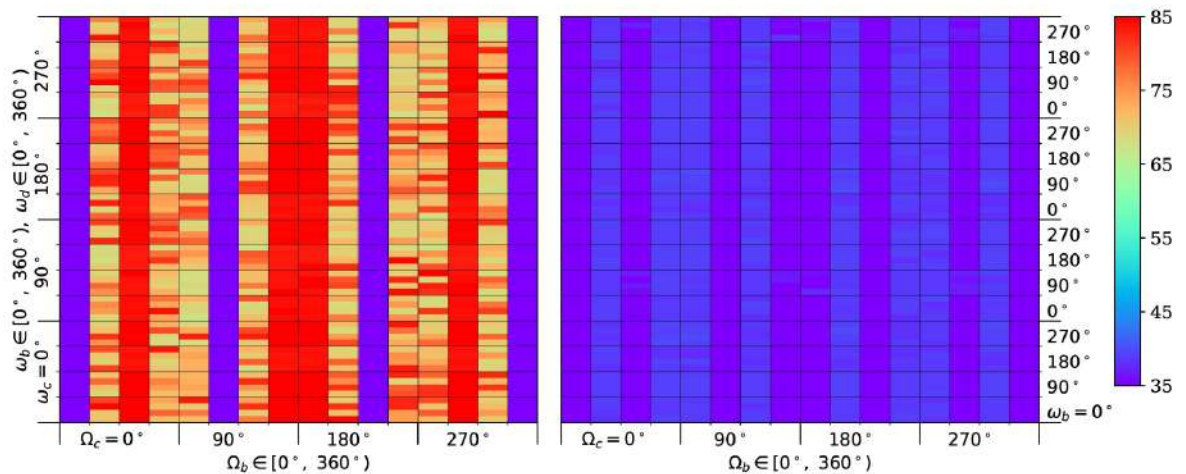


Рис. 5.6. Максимальные значения средних наклонов орбит (в градусах) планет GJ 3138 с (слева) и b (справа) для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит; начальные наклоны орбит планет с и b — 35°

Как видно из таблиц 5.6 – 5.8 и рисунков 5.1 – 5.6, существует набор начальных комбинаций аргументов перицентров и долгот восходящих узлов, обеспечивающий устойчивую динамическую эволюцию планетной системы. В то же время, существуют такие начальные условия, которые приводят к существенному росту эксцентриситетов орбит и возможным флипам (переходы от прямого движения по орбите к обратному). Напомним, что флипы и экстремальные значения эксцентриситетов орбит (близкие к 1) могут быть артефактами численно-аналитической теории, поскольку такие значения наклонов и эксцентриситетов превышают величины радиусов сходимости. В

этом случае, реальная орбитальная эволюция, включая наличие флипов орбит, может быть изучена только численными методами.

Более детальные карты распределения максимальных значений средних эксцентриситетов и наклонов орбит представлены на рисунках 5.7 ($I_0 = 15^\circ$) и 5.8 ($I_0 = 20^\circ$). Шаг варьирования начальных значений ω_b , ω_d and Ω_b меньше и равен 0° . Орбитальная эволюция для таких начальных условий моделируется для всех значений I_0 рассмотренных выше и для всех наборов начальных значений эксцентриситетов орбит. Таким образом, имеется 1728 комбинаций начальных значений ω_b , ω_d , and Ω_b для каждого значения I_0 вместе с конкретным набором начальных значений эксцентриситетов орбит.

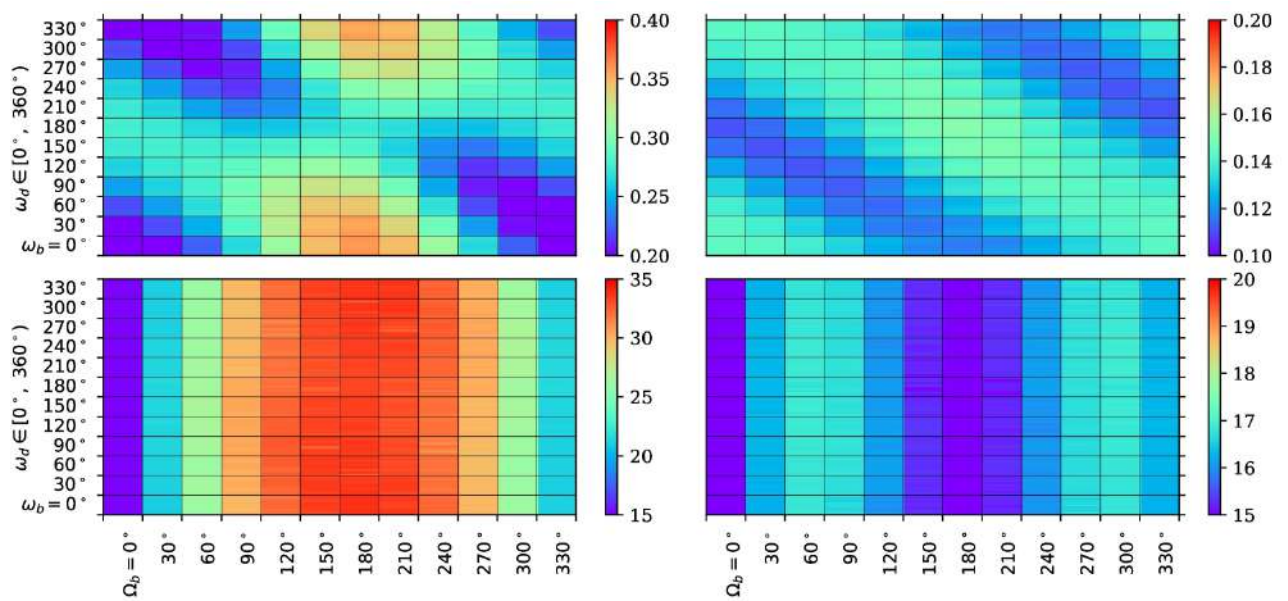


Рис. 5.7. Максимальные значения средних эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 c (верхняя левая панель) и b (верхняя правая панель), средних наклонов орбит планет GJ 3138 c (нижняя левая панель) и b (нижняя правая панель) для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит и начальных наклонов орбит планет c и b $I_0 = 15^\circ$.

Для $I_0 \leq 15^\circ$, распределение максимальных значений эксцентриситетов орбит качественно соответствует показанному на рисунке 5.7. С увеличением начального значения наклона ($I_0 \geq 20^\circ$) области существенного роста эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 c (верхняя левая часть рисунка 5.7 и левая часть рисунка 5.1) сливаются вместе в вертикальные линии с большим максимальным эксцентриситетом (верхняя левая часть рисунка 5.8 или левая часть рисунка 5.2). Поведение областей с существенным ростом эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 b аналогично для планеты GJ 3138 c при $I_0 \geq 20^\circ$.

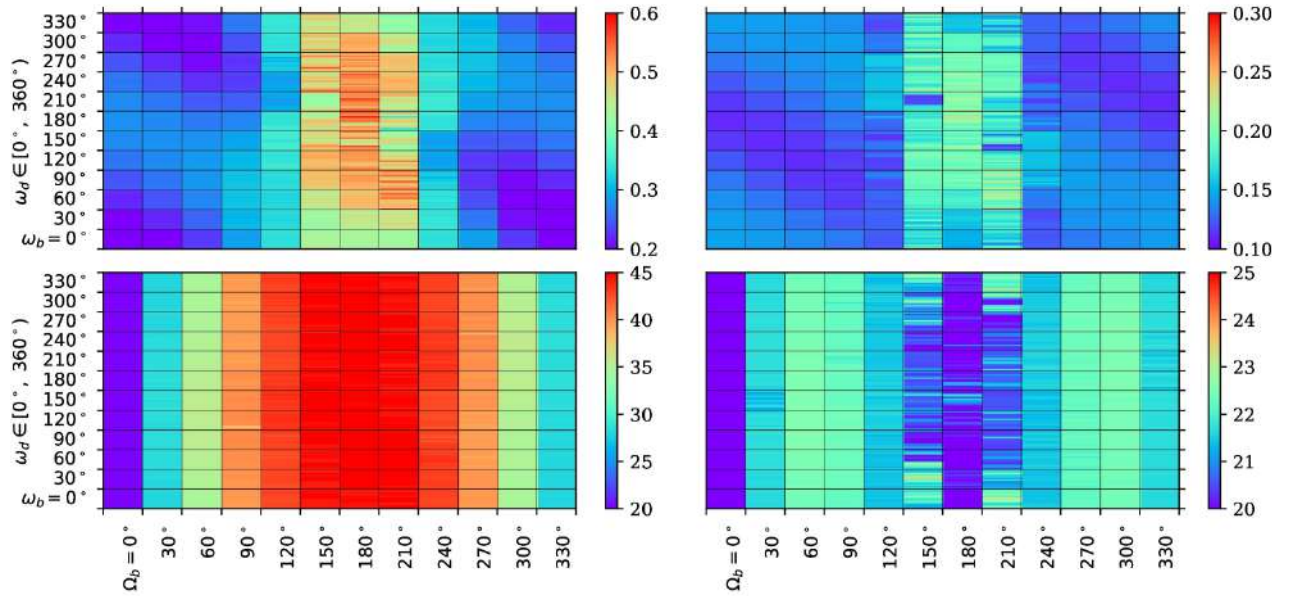


Рис. 5.8. Максимальные значения средних эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 c (верхняя левая панель) и b (верхняя правая панель), средних наклонов орбит планет GJ 3138 c (нижняя левая панель) и b (нижняя правая панель) для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит и начальных наклонов орбит планет c и b $I_0 = 20^\circ$.

5.2.2 Точность интегрирования уравнений движения в средних элементах

В случае, когда шаг варьирования аргументов перигелиев и долгот восходящих узлов равен 90° , точность интегрирования методом Грегга–Булирша–Штера устанавливается равной $\varepsilon = 10^{-7}$ (ε — разность между приближённым решением на текущем шаге и на предыдущем). Если шаг варьирования равен 30° , точность устанавливается равной $\varepsilon = 10^{-9}$. Первый случай соответствует значению $\Delta E \in [10^{-7}, 10^{-4}]$, достигаемого к концу интервала моделирования в 1 млн лет (ΔE — относительная точность сохранения энергии системы, рассчитывается по формуле 4.1). Второй случай соответствует значению $\Delta E \in [10^{-8}, 10^{-5}]$ к концу такого же интервала моделирования. Значения на левой границе вышеуказанных диапазонов реализуются в случае, когда значения эксцентриситетов и наклонов орбит остаются близкими к своим начальным значениям на всём интервале моделирования. Наоборот, значения эксцентриситетов орбит близкие к 1 и наклоны орбит близкие к 90° , могут реализовать значения ΔE , лежащие вблизи правых границ вышеприведённых диапазонов. Если $\varepsilon = 10^{-12}$, то $\Delta E \lesssim 10^{-10}$, но при этом время интегрирования существенно возрастает.

Рассмотрим результаты интегрирования с различными установленными значениями точности $\varepsilon = 10^{-7}, 10^{-9}, 10^{-12}$. Возьмём в качестве примера следующие начальные условия: $I_0 = 15^\circ, 30^\circ$; $\Omega_b = 180^\circ, \omega_d = 90^\circ$; остальные ар-

гументы перигелиев и долготы восходящих узлов равны 0° ; все начальные эксцентриситеты орбит приняты равными своим номинальным значениям. На рисунках 5.9, 5.10 ($I_0 = 15^\circ$) и 5.11, 5.12 ($I_0 = 30^\circ$) показаны результаты интегрирования с $\varepsilon = 10^{-7}$ (красные линии), $\varepsilon = 10^{-9}$ (голубые линии) и $\varepsilon = 10^{-12}$ (чёрные линии).

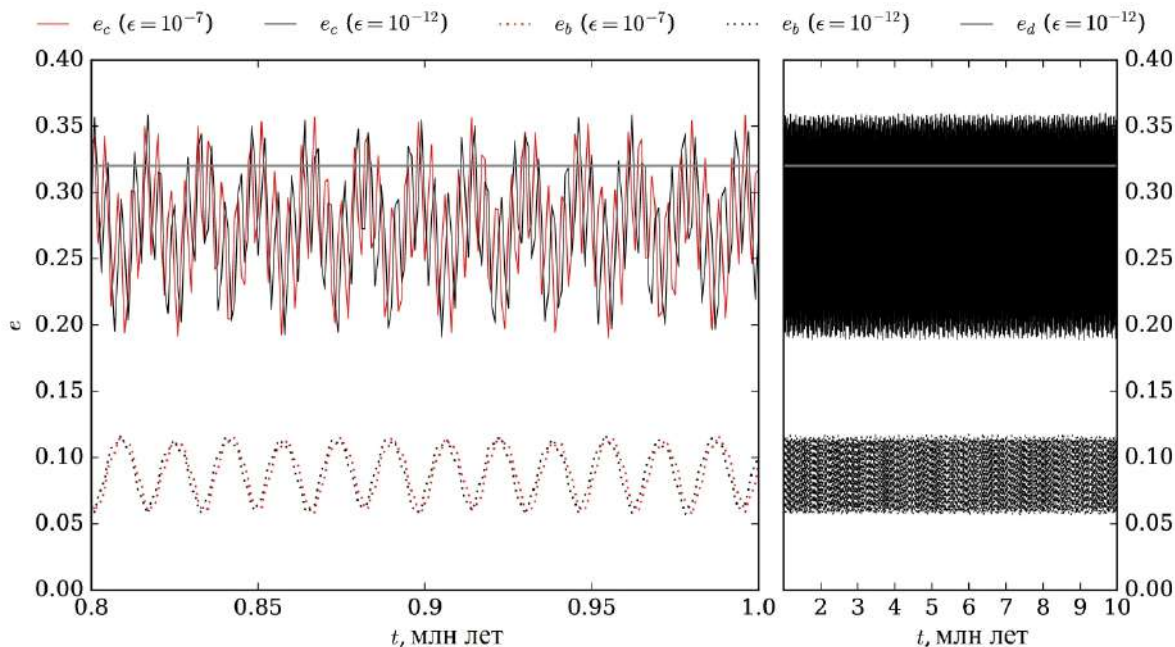


Рис. 5.9. Эволюция средних эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 c (красная и чёрная сплошные линии), GJ 3138 b (пунктирные линии) и GJ 3138 d (серая линия) на интервале времени 1 и 10 млн лет для различных значений точности интегрирования ε . Начальные значения наклонов орбит планет c и b, $I_0 = 15^\circ$.

На рисунках 5.9 и 5.10 показана эволюция средних эксцентриситетов и наклонов орбит всех планет на интервале времени 10 млн лет. Видно хорошее согласие между результатами, полученными с $\varepsilon = 10^{-7}$ и $\varepsilon = 10^{-12}$, если $I_0 = 15^\circ$ (и меньше). Из рисунка 5.11 видно, что средние эксцентриситеты орбит двух внутренних планет экстремально возрастают после 0.9 млн лет эволюции для $\varepsilon = 10^{-7}$ и $\varepsilon = 10^{-9}$, если $I_0 = 30^\circ$. Если $\varepsilon = 10^{-12}$ средние эксцентриситеты орбит двух внутренних планет начинают рост после 4 млн лет эволюции. Врезка на рисунке 5.11 показывает эволюцию средних эксцентриситетов орбит на интервале времени от 0 до 0.1 млн лет. На рисунке 5.12 показана эволюция средних наклонов для случая $I_0 = 30^\circ$. Отметим, что в то время, как эксцентриситеты орбит двух внутренних планет существенно возрастают, наклоны их орбит незначительно уменьшаются (см. рисунки 5.11 и 5.12).

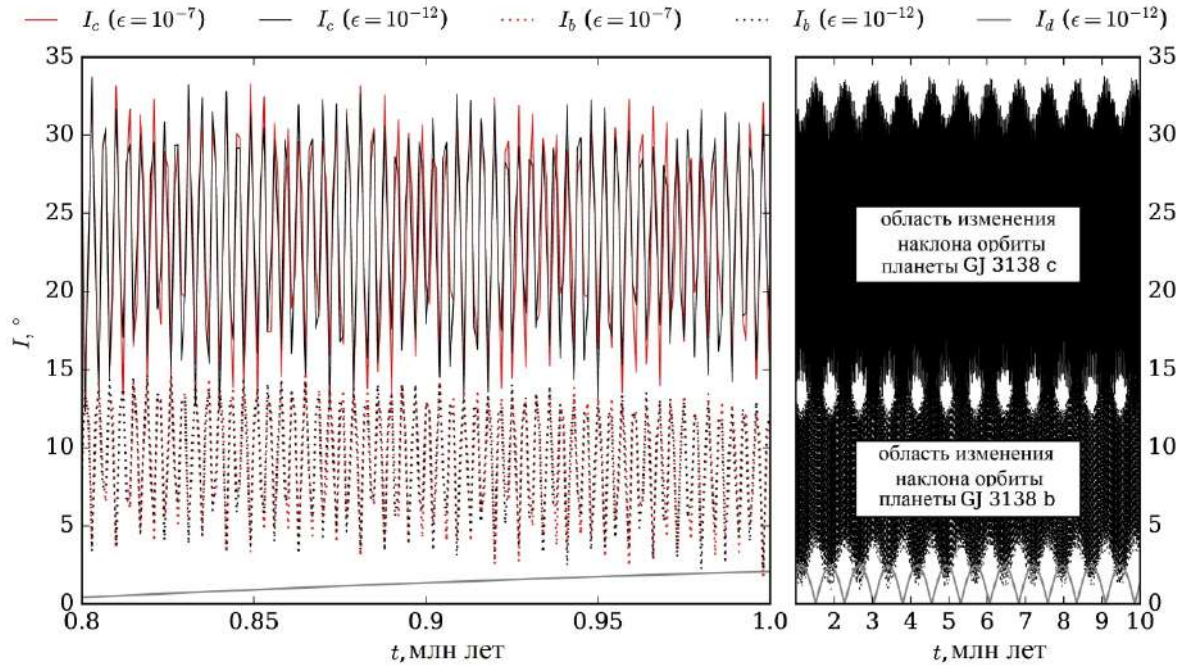


Рис. 5.10. Эволюция средних наклонов орбит планет GJ 3138 с (красная и чёрная сплошные линии), b (пунктирные линии) и d (серая линия) на интервале времени 1 и 10 млн лет для различных значений точности интегрирования ϵ . Начальные значения наклонов орбит планет с и b, $I_0 = 15^\circ$.

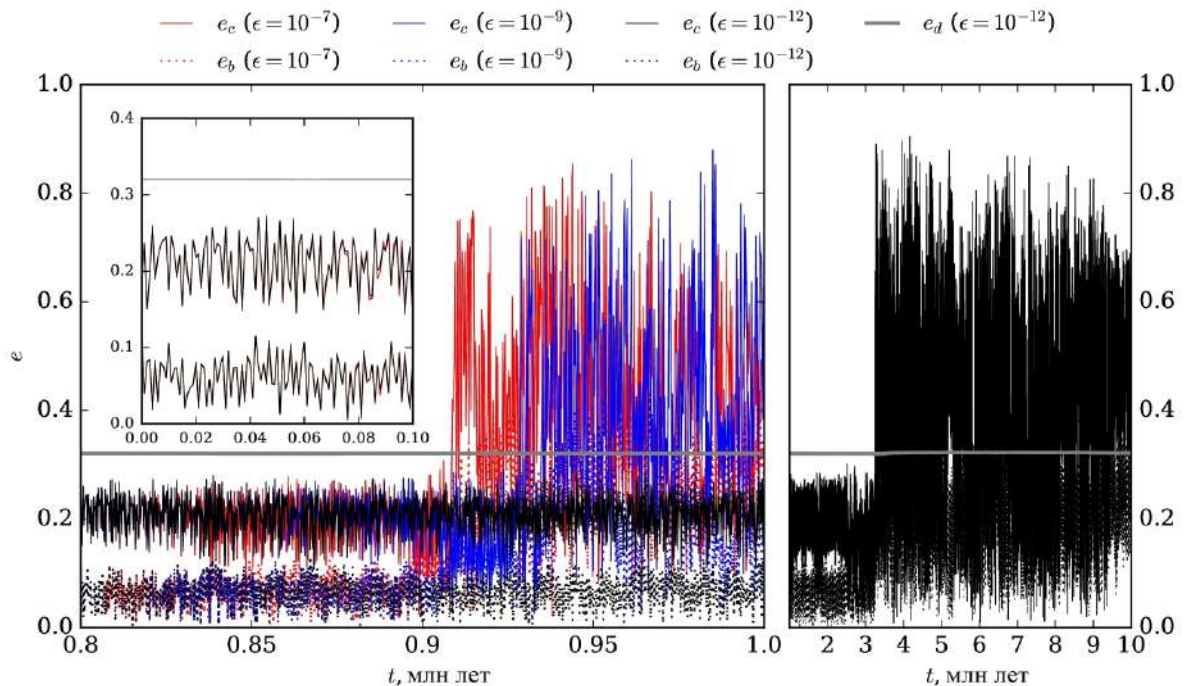


Рис. 5.11. Эволюция средних эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 с (красная, голубая и чёрная сплошные линии), b (пунктирные линии) и d (серая линия) на интервале времени 1 и 10 млн лет для различных значений точности интегрирования ϵ . Начальные значения наклонов орбит планет с и b, $I_0 = 30^\circ$.

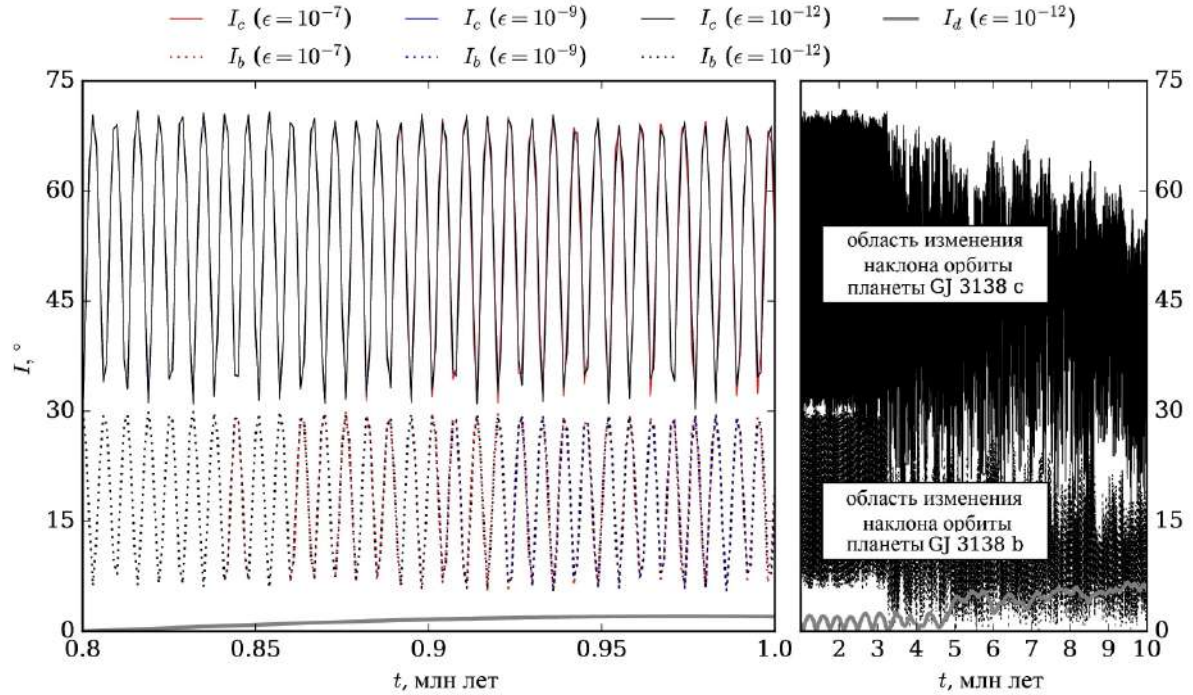


Рис. 5.12. Эволюция средних наклонов орбит планет GJ 3138 c (красная, голубая и чёрная сплошные линии), b (пунктирные линии) и d (серая линия) на интервале времени 1 и 10 млн лет для различных значений точности интегрирования ϵ . Начальные значения наклонов орбит планет c и b, $I_0 = 30^\circ$.

5.2.3 Сравнение с результатами прямого численного интегрирования

Прямое численное интегрирование, для исследования орбитальной эволюции планетной системы GJ 3138, выполнено с помощью симплектического метода Виздома–Хольмана (интегратор WHFast), реализованного в программном пакете REBOUND (Rein and Tamayo, 2015). Интервал численного интегрирования составляет 1 млн лет, шаг интегрирования 0.1 суток. Для некоторого набора начальных условий проведено сравнение результатов прямого численного интегрирования ньютоновских уравнений движения с результатами численно-аналитической теории движения.

На рисунке 5.13 представлена эволюция эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 c (данные отмечены красным), b (голубым) и d (серым) для различных начальных условий. Сплошные линии и точки показывают результаты численно-аналитической теории движения и численного моделирования соответственно. Левый столбец на рисунке 5.13 показывает результаты моделирования для следующих начальных значений аргументов перицентров и долгот восходящих узлов $\omega_c = 0^\circ$, $\omega_b = 150^\circ$, $\omega_d = 210^\circ$ и $\Omega_b = 30^\circ$, $\Omega_c = \Omega_d = 0^\circ$. Результаты, представленные в правом столбце на этом рисунке соответствуют $\omega_c = 0^\circ$, $\omega_b = 30^\circ$, $\omega_d = 30^\circ$ и $\Omega_b = 180^\circ$, $\Omega_c = \Omega_d = 0^\circ$. Значение I_0

варьируется как отмечено на рисунке 5.13 (а – j). Эволюция наклонов орбит для двух наборов начальных условий показана на рисунке 5.14.

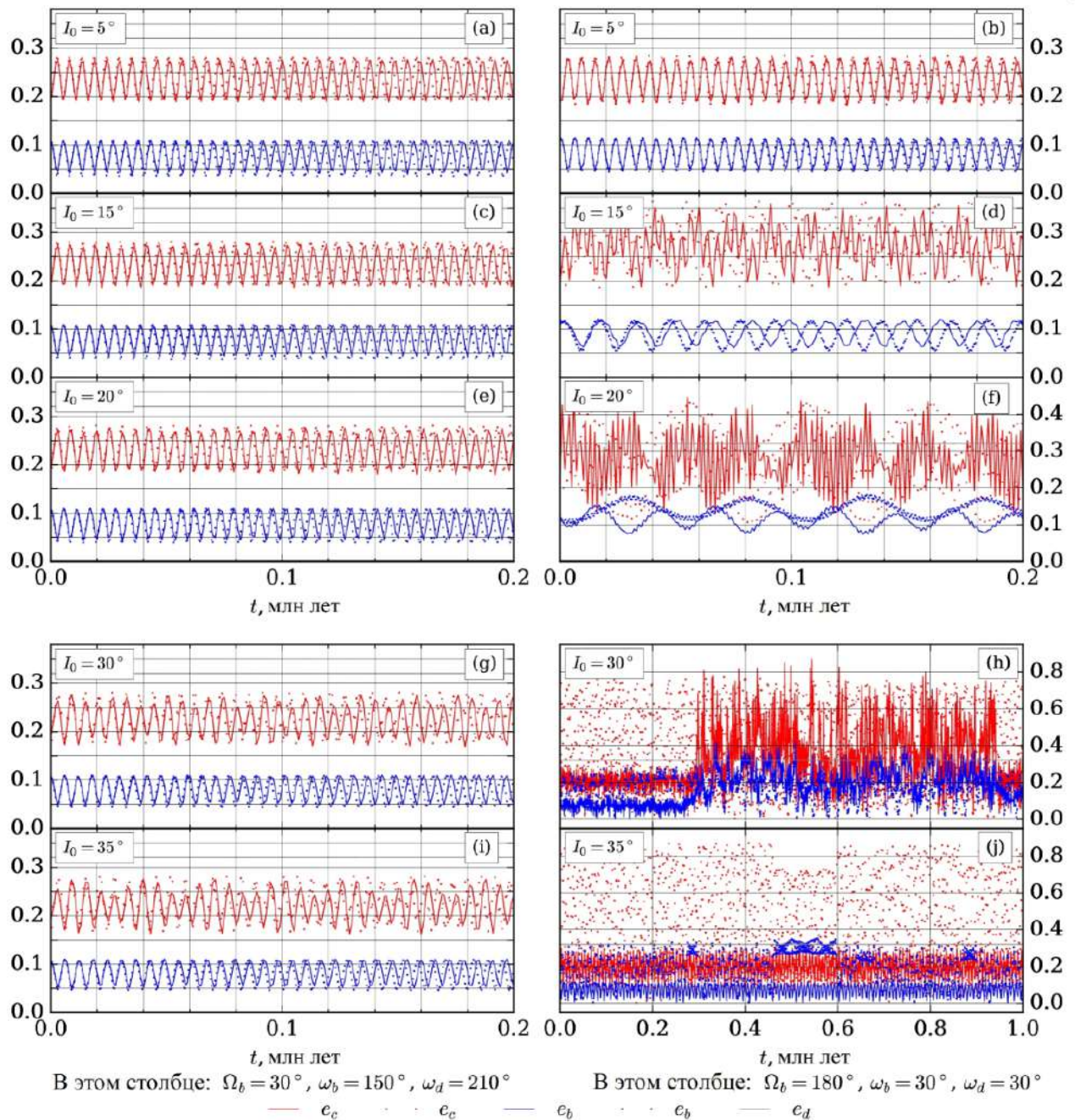


Рис. 5.13. Эволюция эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 с (красная линия и красные точки), b (голубая линия и голубые точки) and d (серая сплошная линия) на интервале времени 0.2 и 1 млн лет для различных начальных условий. Сплошные линии соответствуют результатам численно-аналитической теории движения, точки — прямому численному интегрированию.

Согласно рисунку 5.13 результаты численного моделирования и численно-аналитической теории движения качественно совпадают для первого набора начальных условий (для каждого значения I_0). Показанное поведение экс-

центриситетов орбит сохраняется на всём интервале моделирования для всех планет. То же самое относится и к поведению эксцентриситетов орбит для второго набора начальных условий при $I_0 \leq 15^\circ$. Отметим что, если $I_0 = 20^\circ$, периоды изменения эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 b и c, определяемые различными методами, различаются значительно, но пределы изменения эксцентриситетов отличаются слабо (см. рисунок 5.13 (f)). Для $I_0 \geq 30^\circ$, рост эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 c в процессе численного моделирования происходит непосредственно после начала интегрирования (рисунки 5.13 (h) и (j)), а не спустя 0.3 млн лет, как предсказывает численно-аналитическая модель для $I_0 = 30^\circ$ (рисунок 5.13 (h)). В некоторых случаях, как показано на рисунке 5.13 (j), численно-аналитическая модель не прогнозирует значительный рост эксцентриситета орбиты GJ 3138 c, в отличие от численного моделирования (см. также рисунки 5.3 и 5.4).

Пределы изменения (и амплитуды) наклонов орбит возрастают с ростом значения I_0 в соответствии с рисунком 5.14.

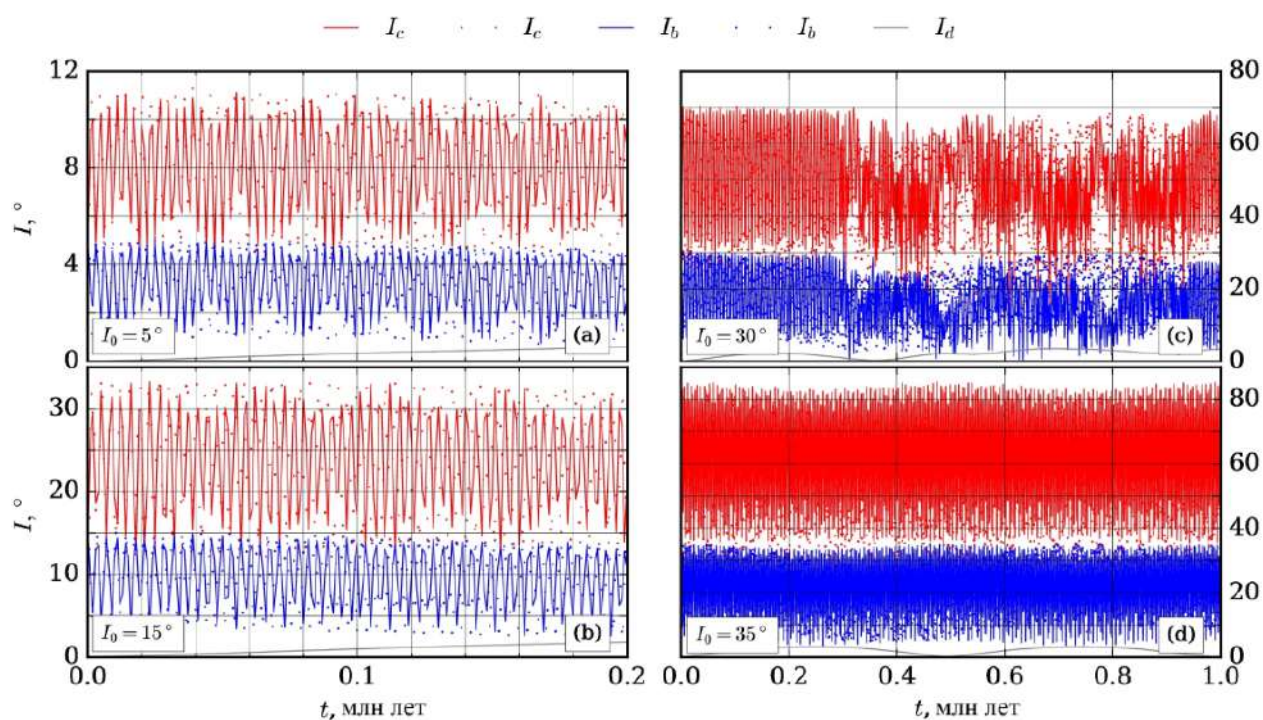


Рис. 5.14. Эволюция наклонов орбит планет GJ 3138 c (красная линия и красные точки), b (голубая линия и голубые точки) and d (серая сплошная линия) на интервале времени 0.2 и 1 млн лет для различных начальных условий. Сплошные линии соответствуют результатам численно-аналитической теории движения, точки — прямому численному интегрированию.

На рисунках 5.13 (h) и (j) начальные условия моделирования соответствуют конфигурации планетных орбит в которой линии узлов обеих орбит направлены в противоположные стороны. По этой причине относительный на-

клон орбит планет GJ 3138 c и GJ 3138 b друг к другу в начальный момент времени составляет 60° и 70° соответственно. Также, согласно рисункам 5.14 (c) и (d) для аналогичных начальных условий происходит рост значений наклона орбиты планеты GJ 3138 c до значений 70° и 85° соответственно (как по данным численно-аналитической теории, так и по результатам численного моделирования). В случае начального значения наклонов орбит планет GJ 3138 c и GJ 3138 b $I_0 = 30^\circ$ численно-аналитическая теория предсказывает рост эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 c спустя 0.3 млн лет с начала моделирования, а не сразу, поскольку в данном случае начальные условия находятся на границе применимости теории движения. Значения наклона орбиты планеты GJ 3138 c с самого начала моделирования близки к радиусу сходимости (равному 80° для наклона орбиты этой планеты). При $I_0 = 35^\circ$ начальные условия находятся за пределами границ применимости численно-аналитической теории движения (наклон орбиты возрастает до значений, превышающих радиус сходимости). Теория не предсказывает роста эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 c и, следовательно, не может применяться для изучения орбитальной эволюции при данных начальных условиях.

На рисунках 5.13 (g) и (i) начальное значение относительного наклона орбит двух внутренних планет системы составляет около 15° и 17° соответственно. В процессе моделирования значения наклонов и эксцентриситетов орбит не превышают радиусы сходимости. Следовательно, численно-аналитическая теория согласуется с численным моделированием.

Теперь сравним результаты, полученные с помощью интегратора WHFast, с результатами интегратора IAS15 (Integrator with Adaptive Step-size control — интегратор с адаптивным контролем размера шага, 15 порядка, реализованный в программном коде REBOUND). IAS15 — это адаптивный интегратор, который автоматически выбирает размер шага. Точность данного интегратора по умолчанию 10^{-9} . Проведено моделирование орбитальной эволюции на интервале времени 80 тыс лет с номинальным шагом 0.1 суток с помощью интеграторов WHFast и IAS15. На рисунке 5.15 приведено сравнение эволюции эксцентриситетов и наклонов орбит, по результатам, полученным интегратором WHFast (сплошные линии) с результатами, полученными IAS15 (точки). Начальные значения элементов орбит следующие: $\omega_c = 0^\circ$, $\omega_b = \omega_d = 30^\circ$, $\Omega_c = \Omega_d = 0^\circ$, $\Omega_b = 180^\circ$, средние долготы приняты равными нулю, эксцентриситеты орбит — номинальные значения.

Процесс интегрирования (на интервалах времени до 0.1 млн лет) занимает около 15 часов для интегратора IAS15 и около 10 минут для интегратора WHFast (для 3300 MHz Core i7 PC). Из рисунка 5.15 видно, что дан-

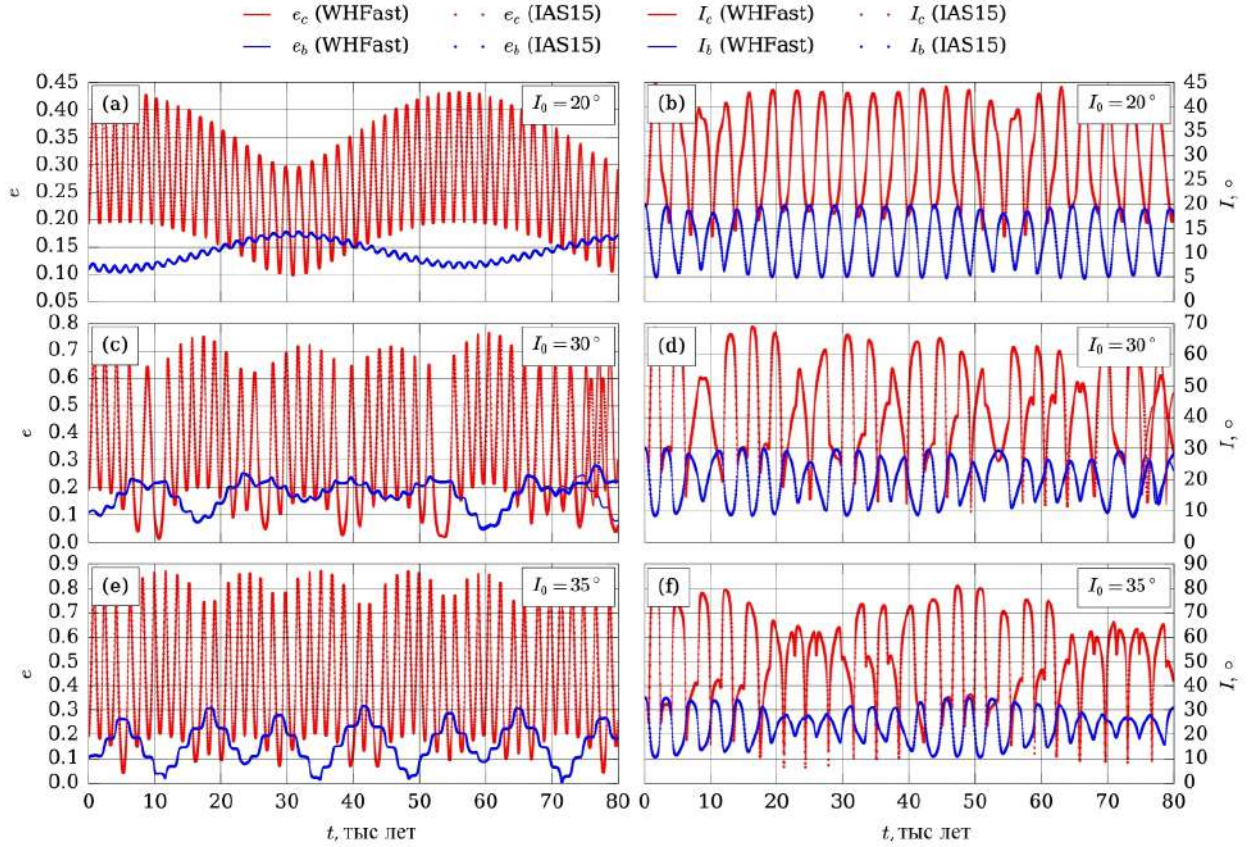


Рис. 5.15. Эволюция эксцентриситетов орбит (слева) и наклонов (справа) планет GJ 3138 c (красная сплошная линия и красные точки) и b (голубая сплошная линия и голубые точки) на интервале времени 80 тыс лет для номинальных начальных значений эксцентриситетов орбит и различных начальных значений наклонов орбит. Сплошные линии соответствуют результатам интегратора WHFast, точки — интегратор IAS15.

ные, полученные обоими интеграторами находятся в отличном соответствии друг с другом на интервале времени до 80 тыс лет. Отметим, однако, что если $I_0 = 30^\circ$ результаты, полученные интеграторами WHFast и IAS15 начинают расходиться после примерно 75 тыс лет эволюции, как это видно из рисунков 5.15 (c) и (d). В этом случае значение показателя MEGNO (см. раздел 5.2.4) не превышает 2.01 к концу интервала моделирования. Таким образом, эта разница может быть объяснена использованием различных интеграторов, но не хаотичностью движения. Поскольку такие различия несущественны для малых значений начальных наклонов орбит ($I_0 \leq 20^\circ$), более выгодно использовать интегратор WHFast, который хоть и менее точный, но более быстрый.

5.2.4 Свойства динамической эволюции системы GJ 3138

Как видно из рисунка 5.11 характер орбитальной эволюции зависит от точности используемого метода интегрирования уравнений движения в средних

элементах. Для проверки хаотичности орбитальной динамики можно оценить значение показателя MEGNO (Cincotta et al. , 2003; Goździewski et al., 2001; Goździewski et al. , 2008), который характеризует степень расхождения двух изначально близких траекторий. Показатель MEGNO $\langle Y \rangle$ подобен по смыслу максимальному показателю Ляпунова и является мерой хаоса в динамических системах. Если значение $\langle Y \rangle$ неограниченно растёт с течением времени, то движение в системе хаотическое. Если значение показателя со временем стремится к $\langle Y \rangle \approx 2$, то движение в системе устойчивое квазипериодическое. Если $\langle Y \rangle \lesssim 2$, то движение устойчивое периодическое, если $\langle Y \rangle \gtrsim 2$, то движение неустойчивое периодическое.

Расчёт значений показателя MEGNO реализован в коде REBOUND для интегратора WHFast. Вычислим значение показателя MEGNO для следующего набора начальных условий: $I_0 \in \{5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 35^\circ\}$, Ω_c и Ω_b варьируются с шагом 90° , $\Omega_d = 0^\circ$, значения средних долгот приняты равными нулю, начальные значения эксцентриситетов орбит — номинальные. Два набора начальных значений аргументов перицентров следующие: $\omega_1 = \{\omega_c = \omega_b = \omega_d = 0^\circ\}$ и $\omega_2 = \{\omega_c = \omega_b = 90^\circ, \omega_d = 0^\circ\}$. Интервал интегрирования 1 млн лет.

Если $I_0 \leq 15^\circ$, то $\langle Y \rangle \in (1.77, 2.04)$ для всех начальных условий. Это означает, что движение планет квазипериодическое и начальные условия нехаотические. Таблица 5.9 содержит значения $\langle Y \rangle$ и максимальные достижимые значения эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 c и GJ 3138 b, полученные с помощью интегратора WHFast ($e_c^{\text{WH}}, e_b^{\text{WH}}$) и численно-аналитической теории движения ($e_c^{\text{SA}}, e_b^{\text{SA}}$). Результаты численно-аналитической теории ($e_c^{\text{SA}}, e_b^{\text{SA}}$) получены с помощью метода Грегга–Булирша–Штера 7 порядка (см. рисунки 5.2 – 5.4). Видно, что с ростом значения I_0 (и как следствие относительного наклона двух внутренних планет), хаотичность в движении планет и число начальных условий, принадлежащих к хаотической области фазового пространства, возрастает. Значения $\langle Y \rangle$, которые соответствуют хаотическим начальным условиям, отмечены в таблице 5.9 полужирным шрифтом. Если $I_0 \leq 20^\circ$, то $e_c^{\text{WH}} \approx e_c^{\text{SA}}$ и $e_b^{\text{WH}} \approx e_b^{\text{SA}}$ для всех начальных условий.

Рассмотрим вековой резонанс Лидова–Козаи, который представляет собой связанные периодические колебания эксцентриситета и наклона орбиты, вызванные наличием внешнего возмущающего тела. При резонансе Лидова–Козаи возникает либрация аргумента перицентра ω обращаемого тела. Существует два интеграла движения, связанные с резонансом Лидова–Козаи (Shevchenko , 2017)

$$c_1 = (1 - e^2) \cos^2 I \quad (5.5)$$

и

$$c_2 = e^2 \left(\frac{2}{5} - \sin^2 I \sin^2 \omega \right). \quad (5.6)$$

Если $0 \leq c_1 \leq 3/5$ и $c_2 < 0$, аргумент перицентра ω либрирует вокруг 90° или 270° .

Если $0 \leq c_1 \leq 1$ и $c_2 > 0$, то это соответствует случаю циклического изменения ω .

Таблица 5.9. Значения показателя MEGNO и максимальные достижимые значения эксцентриситетов орбит планет GJ 3138 c и GJ 3138 b

Ω_c	Ω_b	ω_i	$I_0 = 20^\circ$					$I_0 = 30^\circ$					$I_0 = 35^\circ$				
			e_c^{WH}	e_c^{SA}	e_b^{WH}	e_b^{SA}	$\langle Y \rangle$	e_c^{WH}	e_c^{SA}	e_b^{WH}	e_b^{SA}	$\langle Y \rangle$	e_c^{WH}	e_c^{SA}	e_b^{WH}	e_b^{SA}	$\langle Y \rangle$
0°	0°	ω_1	0.193	0.193	0.145	0.145	2.0	0.193	0.193	0.146	0.146	2.0	0.194	0.193	0.147	0.146	2.0
		ω_2	0.189	0.191	0.143	0.144	2.0	0.189	0.191	0.143	0.143	2.0	0.189	0.191	0.143	0.143	2.0
0°	90°	ω_1	0.296	0.290	0.133	0.132	1.9	0.487	0.631	0.156	0.225	1.9	0.605	0.703	0.205	0.280	75
		ω_2	0.272	0.274	0.134	0.134	2.0	0.423	0.645	0.162	0.285	57	0.590	0.893	0.185	0.471	73
0°	180°	ω_1	0.427	0.428	0.181	0.148	1.9	0.805	0.276	0.340	0.113	54	0.874	0.308	0.347	0.118	157
		ω_2	0.377	0.487	0.117	0.152	58	0.736	0.875	0.114	0.437	1.5	0.872	0.949	0.111	0.467	85
0°	270°	ω_1	0.295	0.289	0.133	0.132	1.9	0.487	0.904	0.156	0.440	1.9	0.617	0.700	0.215	0.348	67
		ω_2	0.271	0.272	0.134	0.132	2.0	0.431	0.666	0.149	0.296	3.5	0.618	0.754	0.203	0.426	72
90°	0°	ω_1	0.291	0.287	0.132	0.131	1.9	0.487	0.732	0.155	0.319	1.9	0.573	0.698	0.170	0.285	53
		ω_2	0.271	0.271	0.134	0.133	2.0	0.424	0.693	0.162	0.308	14	0.625	0.700	0.208	0.275	76
90°	90°	ω_1	0.190	0.191	0.144	0.145	2.0	0.190	0.192	0.145	0.145	2.0	0.190	0.192	0.145	0.146	2.0
		ω_2	0.189	0.190	0.143	0.143	2.0	0.189	0.189	0.143	0.143	2.0	0.189	0.189	0.142	0.142	2.0
90°	180°	ω_1	0.293	0.287	0.134	0.133	1.6	0.482	0.762	0.159	0.360	1.9	0.577	0.917	0.175	0.495	79
		ω_2	0.270	0.272	0.134	0.133	2.0	0.425	0.661	0.150	0.294	2.9	0.618	0.616	0.220	0.227	89
90°	270°	ω_1	0.421	0.434	0.175	0.147	1.8	0.792	0.889	0.303	0.364	54	0.876	0.305	0.327	0.117	41
		ω_2	0.396	0.474	0.118	0.136	50	0.736	0.849	0.116	0.473	2.6	0.872	0.960	0.113	0.544	35
180°	0°	ω_1	0.421	0.431	0.172	0.150	1.9	0.781	0.281	0.296	0.128	57	0.881	0.305	0.339	0.117	37
		ω_2	0.388	0.577	0.110	0.220	41	0.736	0.884	0.114	0.415	1.8	0.872	0.963	0.112	0.543	71
180°	90°	ω_1	0.291	0.285	0.133	0.133	1.9	0.467	0.638	0.144	0.277	1.9	0.579	0.986	0.193	0.408	92
		ω_2	0.271	0.274	0.134	0.134	2.0	0.422	0.715	0.169	0.327	21	0.566	0.724	0.172	0.299	81
180°	180°	ω_1	0.190	0.190	0.145	0.145	2.0	0.190	0.190	0.145	0.145	2.0	0.190	0.190	0.145	0.145	2.0
		ω_2	0.189	0.191	0.143	0.144	2.0	0.189	0.191	0.143	0.143	2.0	0.189	0.191	0.143	0.144	2.0
180°	270°	ω_1	0.291	0.286	0.133	0.132	1.9	0.486	0.707	0.157	0.299	1.9	0.579	0.919	0.185	0.459	76
		ω_2	0.271	0.272	0.134	0.132	2.0	0.427	0.606	0.150	0.265	3.6	0.628	0.985	0.214	0.519	91
270°	0°	ω_1	0.291	0.289	0.132	0.131	1.9	0.492	0.727	0.156	0.324	1.9	0.561	0.766	0.188	0.346	84
		ω_2	0.275	0.274	0.134	0.133	2.0	0.443	0.684	0.149	0.293	1.9	0.578	0.963	0.191	0.561	86
270°	90°	ω_1	0.422	0.429	0.175	0.148	1.9	0.804	0.278	0.318	0.115	73	0.874	0.306	0.328	0.117	44
		ω_2	0.369	0.497	0.111	0.180	69	0.735	0.916	0.113	0.463	1.7	0.871	0.983	0.111	0.517	10
270°	180°	ω_1	0.293	0.288	0.134	0.133	1.9	0.484	0.912	0.155	0.417	1.9	0.727	0.662	0.284	0.252	56
		ω_2	0.275	0.275	0.134	0.133	2.0	0.443	0.584	0.149	0.223	3.7	0.574	0.654	0.171	0.298	53
270°	270°	ω_1	0.190	0.192	0.144	0.145	2.0	0.190	0.192	0.145	0.145	2.0	0.190	0.192	0.145	0.146	1.9
		ω_2	0.192	0.192	0.145	0.144	2.0	0.192	0.192	0.145	0.144	2.0	0.192	0.192	0.145	0.145	2.0

Введём понятие относительного наклона I_{rel} орбит планет GJ 3138 c и GJ 3138 b

$$\cos(I_{rel}) = \cos I_c \cos I_b + \sin I_c \sin I_b \cos(\Omega_c - \Omega_b). \quad (5.7)$$

Начиная с $I_0 = 20^\circ$, начальные значения относительного наклона I_{rel} могут достигать значений 40° и выше, в зависимости от начальных значений Ω_c , Ω_b . Если $I_{rel} > I_{crit} \approx 39.23^\circ$, значение $c_1 < 3/5$ и резонанс Лидова–Козаи становится возможным (если $c_2 > 0$).

На рисунке 5.16 показаны примеры эволюции аргумента перицентра ω_c и эксцентриситета орбиты e_c самой внутренней планеты GJ 3138 c, эксцентриситета орбиты e_b планеты GJ 3138 b, относительный наклон I_{rel} двух внутренних планет и два интеграла движения c_1 и c_2 на интервалах времени до 1 млн лет для различных начальных условий. Все данные были получены с помощью прямого численного интегрирования (интегратор WHFast). Можно выделить следующие варианты эволюции для ω_c в зависимости от начальных условий.

1. Либрации вокруг 90° (рисунок 5.16 (e)) или 270° (рисунок 5.16 (f)). Такое поведение означает, что система находится в резонансе Лидова–Козаи.
2. Переходы между либрациями вокруг 90° и 270° (см. рисунок 5.16 (a) и (c)).
3. Выход из резонанса (см. рисунок 5.16 (b)).
4. Эволюция вне резонанса (см. рисунок 5.16 (d)).

Относительный наклон I_{rel} и эксцентриситет e_c изменяются в противофазе для всех начальных условий.

Если начальные наклоны орбит двух внутренних планет $I_0 \leq 15^\circ$, планетная система GJ 3138 полностью устойчива на интервалах времени до 1 млн лет для всех начальных значений эксцентриситетов орбит, долгот восходящих узлов и аргументов перицентров. При этом максимально достижимые значения эксцентриситетов и наклонов орбит $e_{max}, I_{max} \leq R_e, R_I$ (см. радиусы сходимости в таблице 5.5).

На рисунке 5.1 можно отметить симметрию в распределении максимумов эксцентриситетов орбит, а именно каждый большой квадрат (4 на 4 малых квадрата) содержит распределение подобное показанному на рисунке 5.7 с некоторым смещением по долготам восходящих узлов и по аргументам перицентров. Комбинации начальных значений углов (долгот узлов и аргументов перицентров), соответствующие максимальному росту среднего эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 c, удовлетворяют следующему усло-

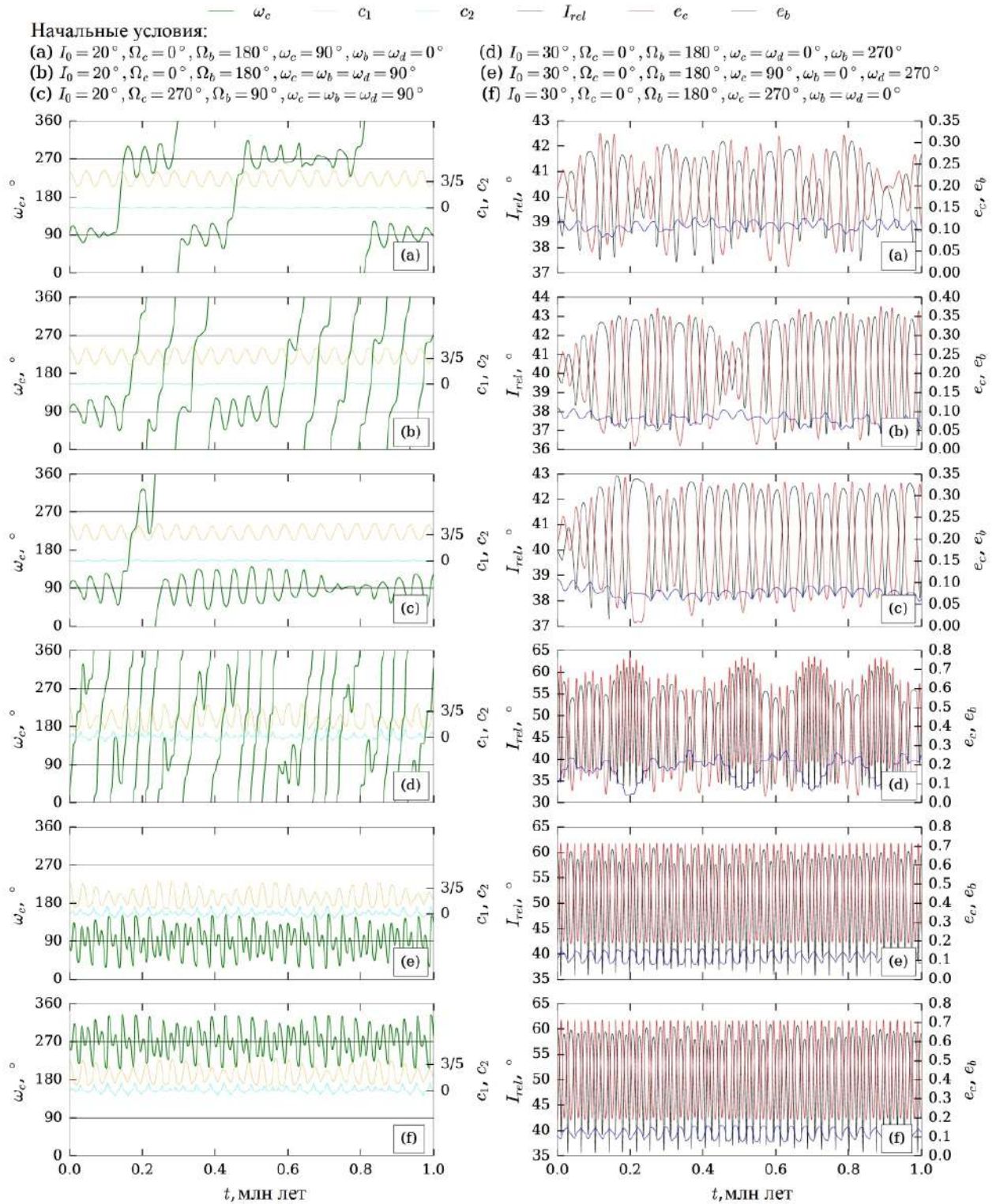


Рис. 5.16. Эволюция аргумента перигея орбиты планеты GJ 3138 с (зелёная линия), её эксцентриситет (красная линия), эксцентриситет орбиты планеты GJ 3138 b (синяя линия), относительный наклон орбит планет GJ 3138 с и b (чёрная линия) и два интеграла движения (оранжевая и голубая линии) на интервале времени 1 млн лет для различных начальных условий. Начальные значения эксцентриситетов орбит — номинальные.

вию: $(\Omega_b - \Omega_c) + (\omega_b - \omega_c) = 180^\circ$. В тоже время, максимальный рост среднего эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 b реализуется при условии $(\Omega_b - \Omega_c) + (\omega_b - \omega_c) = 0^\circ$. При увеличении начального значения наклона I_0 , эти области расширяются вдоль направления $(\Omega_b - \Omega_c) = 180^\circ$, а зависимость от аргументов перицентров (ω_c и ω_b) уменьшается.

Если $I_0 = 20^\circ$, то $e_{max} \sim R_e$ для планет GJ 3138 c и b для любых начальных значений эксцентриситетов орбит. Максимальный рост средних эксцентриситетов орбит двух внутренних планет происходит если $(\Omega_b - \Omega_c) = 180^\circ$. Предположим, что восходящие узлы этих двух орбит расположены на одной прямой друг напротив друга. В этом случае максимальное значение средних эксцентриситетов орбит может достигать значений вплоть до 0.6 (см. рисунок 5.2).

В случае, если $I_0 > 20^\circ$, существуют начальные условия приводящие к существенному росту эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 c (до значений близких к 1). Прямое численное интегрирование подтверждает увеличение наклона орбиты планеты GJ 3138 c до значений близких к 90° . Таким образом, флипы орбиты внутренней планеты становятся вполне возможны. Но в то же самое время, области устойчивого движения также частично сохраняются. Кроме того, результаты численно-аналитической теории движения должны быть проверены путём прямого численного моделирования для больших значений начального наклона орбит ($I_0 = 35^\circ$). Максимальный рост средних эксцентриситетов орбит двух внутренних планет возникает для следующих значений долгот восходящих узлов: $(\Omega_b - \Omega_c) \in [90^\circ, 270^\circ]$.

Для любых значений I_0 , максимальный рост эксцентриситетов орбит двух внутренних планет происходит, если начальное значение величины $(\Omega_b - \Omega_c)$ близко к 180° . Если $(\Omega_b - \Omega_c) = 0^\circ$, плоскости орбит двух внутренних планет совпадают, а амплитуды колебаний наклонов орбит не превышают десятые доли градуса.

Отметим, что орбитальная эволюция планеты GJ 3138 d устойчива для всех начальных условий и $e_m, I_m < R_e, R_I$.

Сравнение численно-аналитической теории движения с результатами прямого численного интегрирования показывает их хорошее соответствие для большинства начальных условий. Сравнение различных численных методов интегрирования показывает качественное соответствие полученных результатов.

Если начальное значение наклонов орбит двух внутренних планет $I_0 \leq 15^\circ$, значение показателя MEGNO не превышает 2 на интервале времени 1 млн лет. С ростом I_0 , число начальных условий приводящих к хаотической эволюции системы возрастает.

Если $I_0 \geq 20^\circ$, появляются начальные условия, приводящие к резонансу Лидова–Козаи. Если $I_0 = 20^\circ$, условия для резонанса Лидова–Козаи возникают для следующих начальных значений элементов орбит: $\Omega_c - \Omega_b = 180^\circ$ и $\omega_c = \omega_b \neq 0^\circ, 180^\circ$. Но захвата в резонанс не происходит на всём рассматриваемом интервале 1 млн лет (см. рисунки 5.16 (а) – (с)), поскольку условия $0 \leq c_1 \leq 3/5$ и $c_2 < 0$ не выполняются ни в какой момент времени. Если $I_0 \geq 30^\circ$, планетная система может находиться в резонансе Лидова–Козаи на всём интервале моделирования при указанных выше начальных условиях.

Источник неустойчивости движения в рассматриваемой планетной системе может быть связан с резонансом Лидова–Козаи и попаданием траекторий в области фазового пространства, в которых перекрываются резонансы.

5.3 Динамическая эволюция трёхпланетной системы HD 39194

Для системы HD 39194 построены карты экстремальных значений средних элементов орбит в зависимости от начальных орбитальных конфигураций планет для различных начальных значений средних наклонов и эксцентриситетов орбит. Рассмотрим вначале эволюцию планетной системы для значения массы звезды $M_\star = 0.72M_\odot$.

На рисунках 5.17, 5.18 и 5.19, в качестве примера, представлены карты максимальных значений средних эксцентриситетов и средних наклонов орбит планет HD 39194 b, c и d соответственно. Рисунок 5.17 соответствует случаю, когда начальные значения наклонов орбит двух внешних планет системы c и d равны $I_0 = 5^\circ$. Для случаев, представленных на рисунках 5.18 и 5.19, начальные значения наклонов равны $I_0 = 10^\circ$ и $I_0 = 15^\circ$ соответственно. Начальные значения эксцентриситетов орбит — $e_b = 0.2$, $e_c = 0.11$, $e_d = 0.2$.

На всех рисунках комбинации начальных значений долгот восходящих узлов расположены по горизонтали, аргументы перицентров — по вертикали. Внутри каждого участка с фиксированными значениями долготы узла Ω_c и аргумента перицентра ω_b указанные элементы орбит остальных планет варьируются во всем диапазоне с шагом 45° , что в итоге дает 32768 комбинаций начальных условий.

Для начальных значений наклонов $I_0 = 0^\circ, 5^\circ$ характер распределения максимально достижимых значений эксцентриситетов орбит всех планет аналогичен показанному на рисунке 5.17 для всех начальных значений эксцентриситетов. Как видно из рисунка 5.17, области начальных значений, для которых рост эксцентриситетов наименьший (или наибольший), линейно смещаются вдоль значения аргумента перицентра второй планеты (HD 39194 c) с

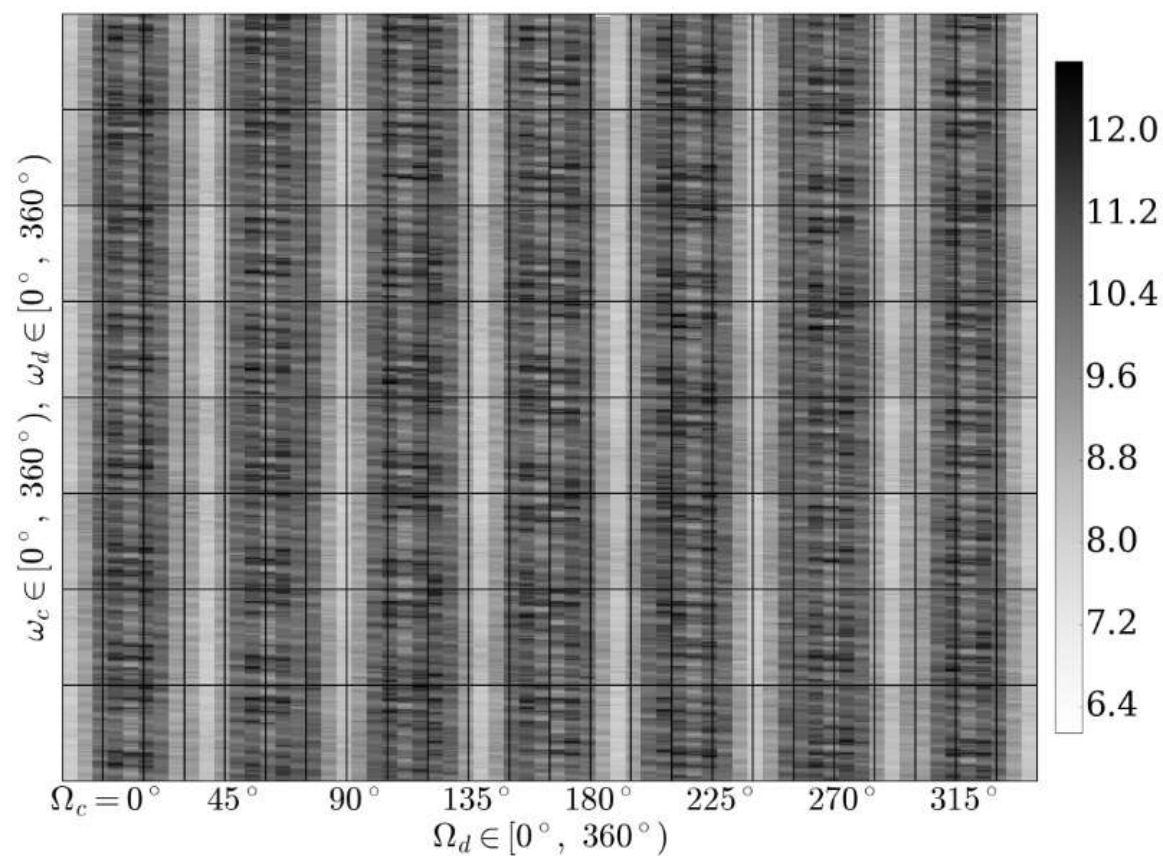
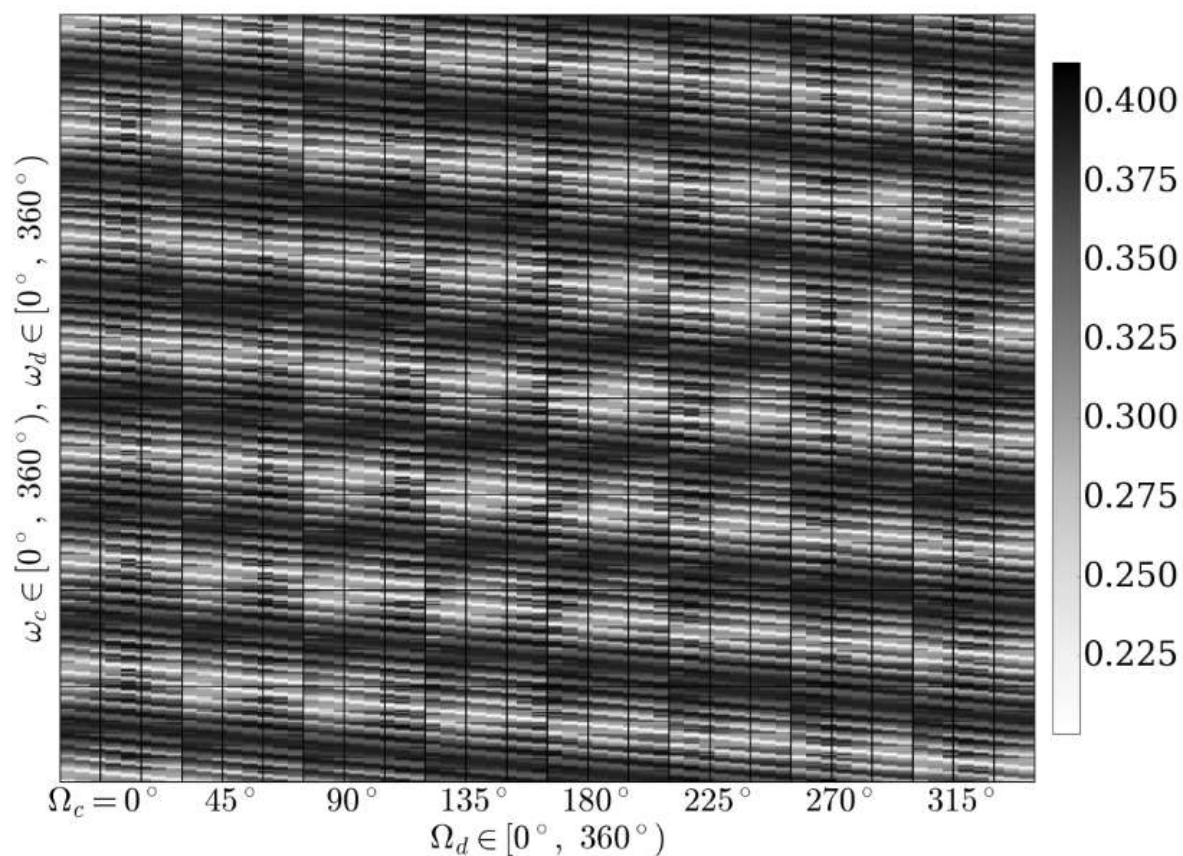


Рис. 5.17. Карты максимальных значений средних эксцентриситета (вверху) и наклона (внизу) орбиты планеты HD 39194 b для начальных значений наклонов двух внешних планет $I_0 = 5^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.2, e_c = 0.11, e_d = 0.2$.

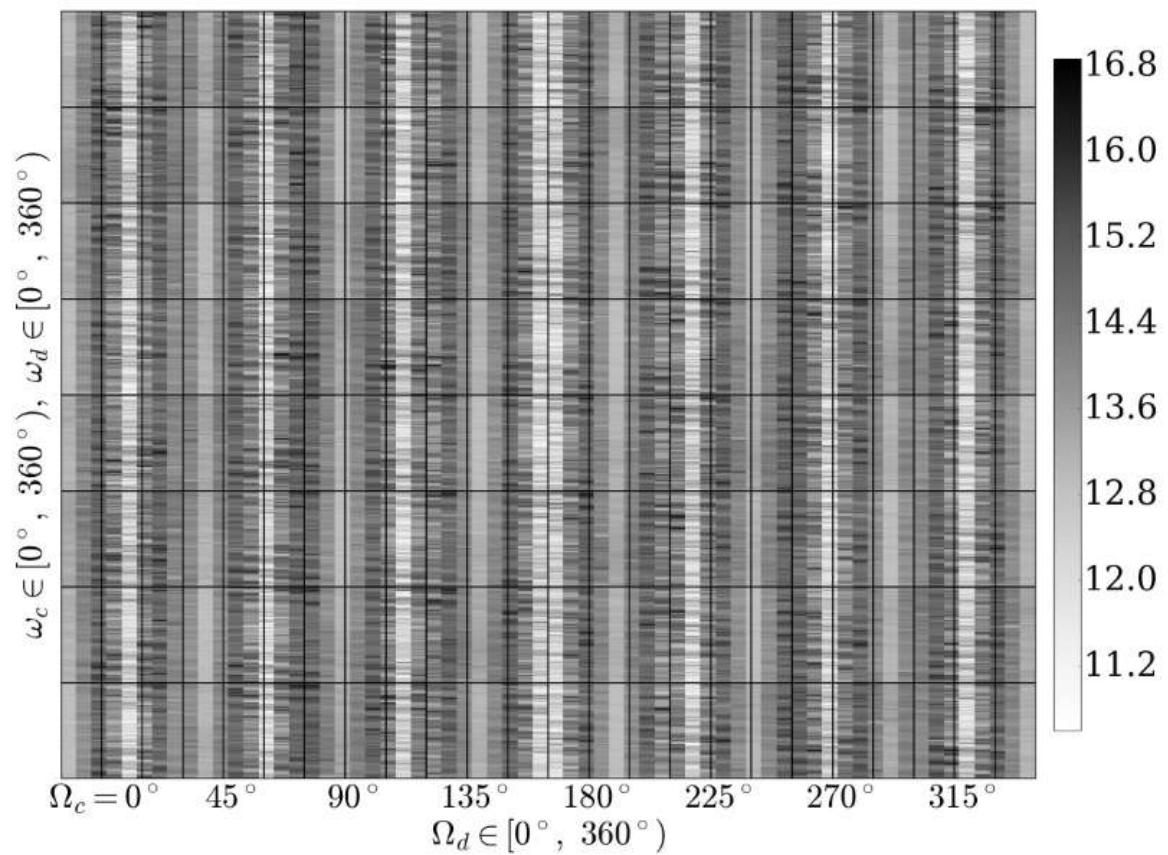
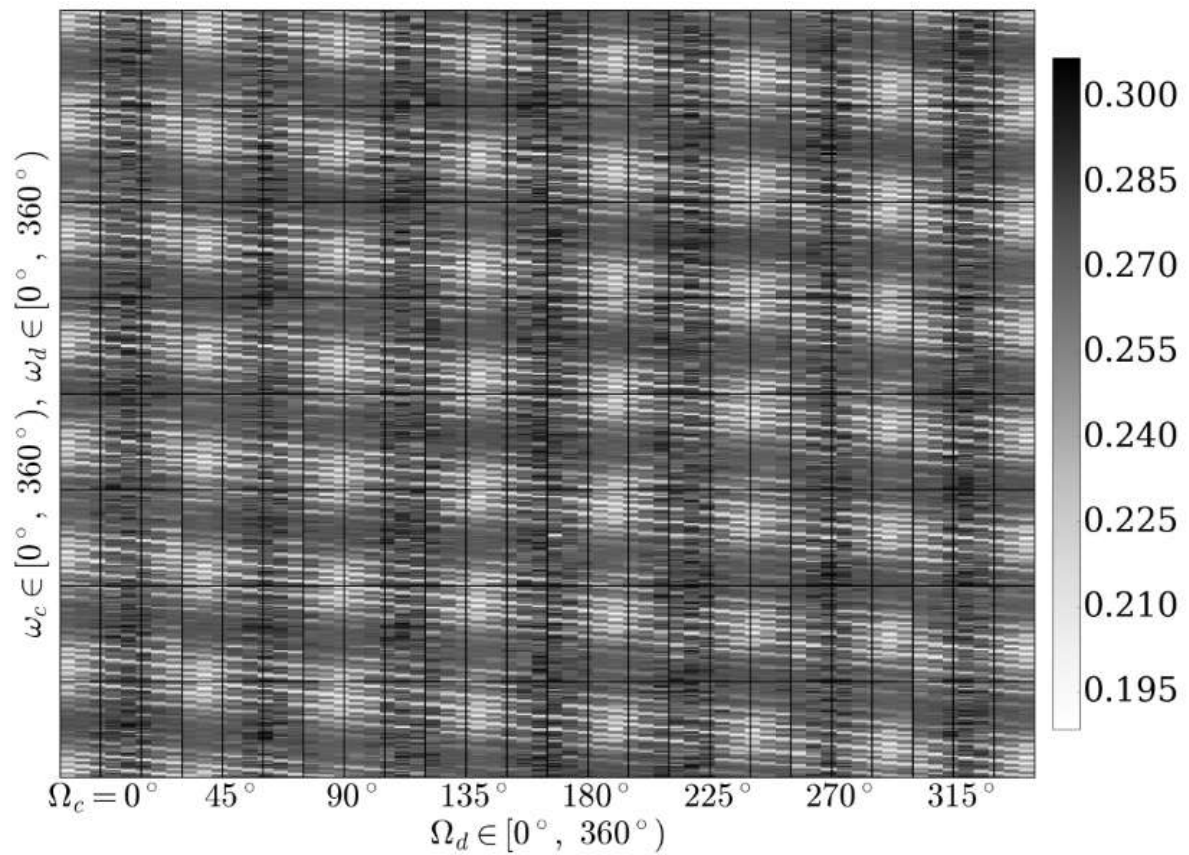


Рис. 5.18. Карты максимальных значений средних эксцентриситета (вверху) и наклона (внизу) орбиты планеты HD 39194 b для начальных значений наклонов двух внешних планет $I_0 = 10^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.2, e_c = 0.11, e_d = 0.2$.

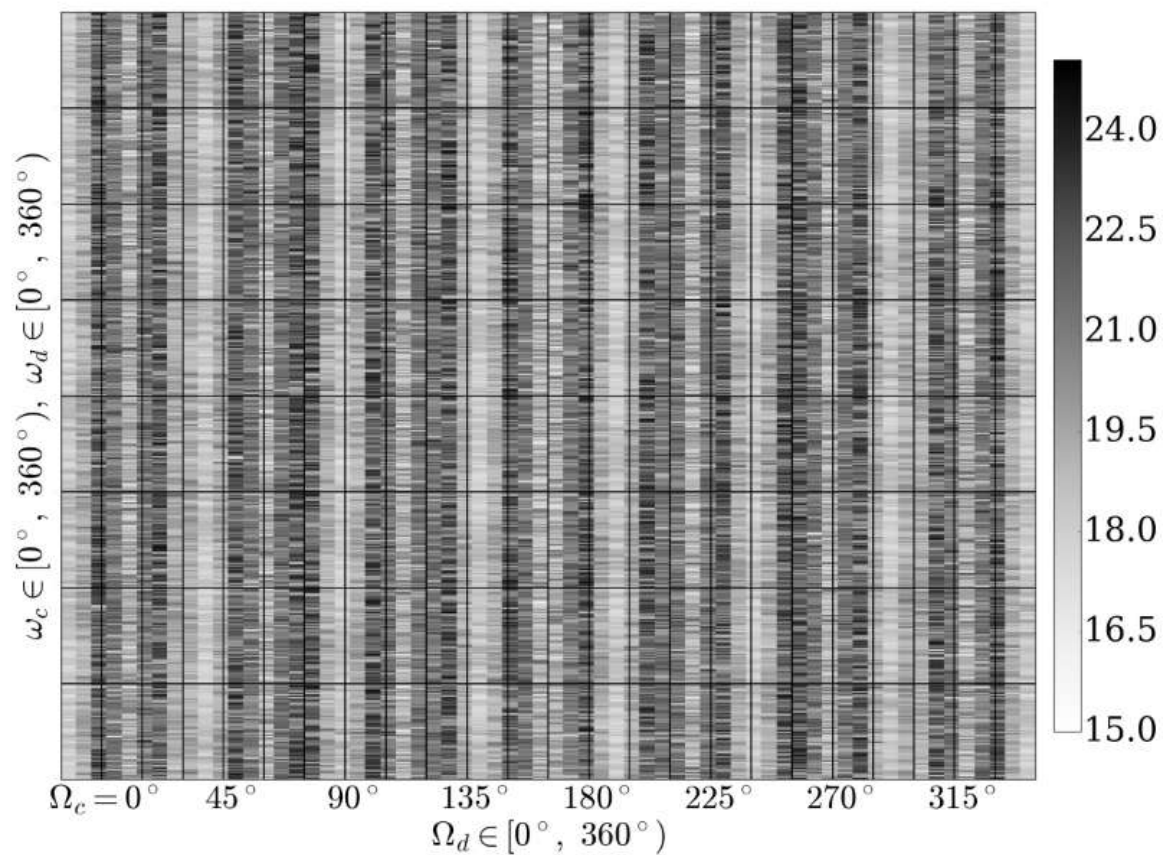
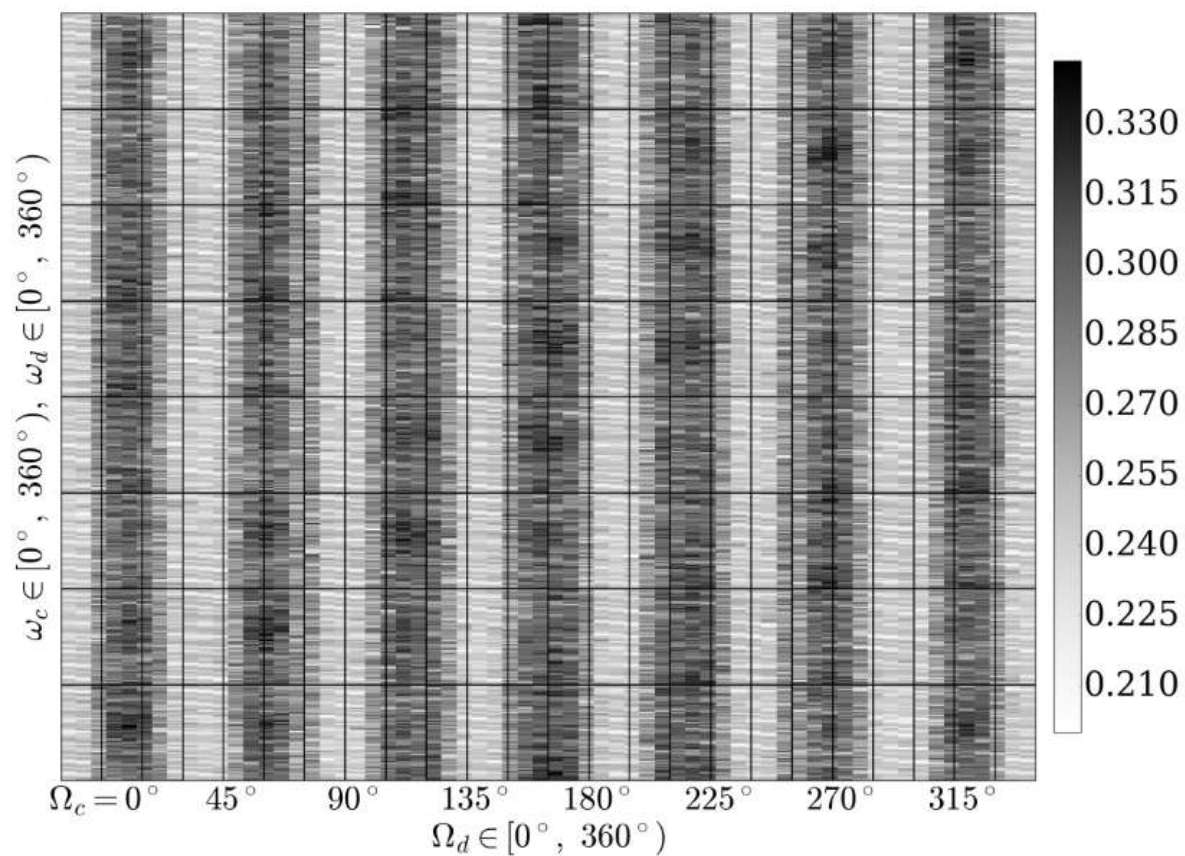


Рис. 5.19. Карты максимальных значений средних эксцентриситета (вверху) и наклона (внизу) орбиты планеты HD 39194 b для начальных значений наклонов двух внешних планет $I_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.2, e_c = 0.11, e_d = 0.2$.

ростом долгот узлов второй и третьей планет (с и d). Для начальных значений наклонов $I_0 = 10^\circ$ распределение максимальных значений эксцентриситетов принимает характер «решетки», в «ячейках» которой рост эксцентриситетов минимален, а в «узлах» и на «гранях» — максимален (см. рисунок 5.18). Для значений $I_0 \geq 15^\circ$ минимальный и максимальный рост эксцентриситетов чередуются в зависимости от значений долгот восходящих узлов (см. рисунок 5.19). Области минимального роста эксцентриситетов орбит лежат около близких (равных) между собой начальных значений долгот восходящих узлов второй и третьей планет ($\Omega_c \approx \Omega_d$) — при выполнении этого условия взаимные начальные значения наклонов плоскостей орбит малы (равны). С ростом значения I_0 эти области сужаются и при $I_0 \geq 30^\circ$ полностью исчезают.

Характер распределения максимально достижимых значений наклона орбиты первой планеты (HD 39194 b) аналогичен представленному на рисунке 5.17 для всех допустимых значений I_0 . Области минимального роста наклона орбиты лежат вблизи равных между собой начальных значений долгот восходящих узлов второй и третьей планет ($\Omega_c \approx \Omega_d$). При $I_0 \geq 30^\circ$ эти области полностью исчезают. Для второй и третьей планет области минимального роста наклонов орбит соответствует двум условиям $\Omega_c \approx \Omega_d$ и $\Omega_d \approx \Omega_c + 180^\circ$.

В таблице 5.10 в зависимости от значений начальных наклонов орбит I_0 и эксцентриситетов e_0 (даны в барицентрической системе координат), приведены максимально достижимые на интервале моделирования значения эксцентриситетов e_{\max} и наклонов I_{\max} орбит планетной системы HD 39194 (даны в координатах Якоби). Данные, приведенные в таблице, соответствуют начальным значениям долгот узлов и аргументов перицентров при которых, для одних и тех же начальных значений наклонов и эксцентриситетов, реализуются наименьшие и наибольшие значения e_{\max} и наибольшие значения I_{\max} . Анализ диапазонов значений e_{\max} при $I_0 \geq 25^\circ$ в таблице 5.10 позволяет сделать вывод, что существуют комбинации начальных значений долгот восходящих узлов и аргументов перицентров, при которых эксцентриситеты орбит сохраняют малые и умеренные значения, обеспечивая устойчивую динамическую эволюцию системы. Эти области соответствуют условию $\Omega_c \approx \Omega_d$.

В то же время существуют комбинации начальных условий, приводящие к значительному росту эксцентриситетов и, возможно, к флипам орбит (переходу от прямого движения к обратному). Следует помнить, что флипы здесь проявляются как артефакт аналитической теории, поскольку в данных условиях значения наклонов орбит превышают значения радиусов сходимости рядов уравнений движения (таблица 5.5), внутри которых функции сохраняют свои аналитические свойства. Реальная эволюция системы в этом случае,

Таблица 5.10. Максимально достижимые значения средних эксцентриситетов и наклонов орбит планет системы HD 39194 для значения массы звезды $M_\star = 0.72M_\odot$

I_0, \circ	HD 39194 b			HD 39194 c			HD 39194 d		
	e_0	e_{\max}	I_{\max}, \circ	e_0	e_{\max}	I_{\max}, \circ	e_0	e_{\max}	I_{\max}, \circ
0	0.1	0.115–0.178	0	0.104	0.104–0.107	0	0.04	0.040–0.122	0
	0.2	0.20–0.39	0	0.110	0.184– 0.27	0	0.20	0.20–0.22	0
	0.3	0.39– 0.62	0	0.116	0.28–0.44	0	0.36	0.36–0.41	0
5	0.1	0.114–0.198	11	0.104	0.104–0.135	7	0.04	0.040–0.123	7
	0.2	0.20–0.41	13	0.110	0.184– 0.28	8	0.20	0.20–0.26	7
	0.3	0.39– 0.64	17	0.116	0.28–0.45	9	0.36	0.36–0.42	7
10	0.1	0.114–0.26	22	0.104	0.104–0.167	15	0.04	0.040–0.147	13
	0.2	0.21– 0.47	27	0.110	0.188– 0.31	17	0.20	0.20–0.28	16
	0.3	0.39– 0.68	43	0.116	0.28–0.47	23	0.36	0.36–0.43	23
15	0.1	0.128– 0.49	34	0.104	0.104– 0.29	23	0.04	0.048–0.26	21
	0.2	0.20– 0.59	40	0.110	0.188– 0.38	27	0.20	0.20–0.34	25
	0.3	0.40– 0.79	53	0.116	0.29–0.50	35	0.36	0.36–0.47	32
20	0.1	0.147– 0.66	45	0.104	0.104– 0.41	30	0.04	0.056–0.36	28
	0.2	0.20– 0.75	51	0.110	0.191–0.47	34	0.20	0.20– 0.41	31
	0.3	0.40– 0.95	69	0.116	0.31–0.58	40	0.36	0.36–0.53	36
25	0.1	0.194– 0.87	61	0.104	0.105– 0.54	38	0.04	0.082– 0.49	34
	0.2	0.30– 0.96	71	0.110	0.21–0.60	40	0.20	0.20– 0.51	37
	0.3	0.50–1	> 90	0.116	0.30–0.83	51	0.36	0.36–0.80	44
30	0.1	0.42–1	> 90	0.104	0.23–0.80	47	0.04	0.157– 0.78	42
	0.2	0.38–1	> 90	0.110	0.25–0.83	55	0.20	0.20– 0.77	50
	0.3	0.52–1	> 90	0.116	0.34–0.84	61	0.36	0.36–0.83	53
35	0.1	0.47–1	> 90	0.104	0.23–0.83	60	0.04	0.145– 0.81	54
	0.2	0.45–1	> 90	0.110	0.26–0.85	59	0.20	0.20– 0.84	55
	0.3	0.53–1	> 90	0.116	0.39–0.87	68	0.36	0.36–0.85	58
40	0.1	0.40–1	> 90	0.104	0.20–0.89	64	0.04	0.147– 0.88	59
	0.2	0.49–1	> 90	0.110	0.29–0.91	67	0.20	0.20– 0.88	61
	0.3	0.59–1	> 90	0.116	0.39–0.95	73	0.36	0.36–0.93	65
45	0.1	0.20–1	> 90	0.104	0.13– 0.95	73	0.04	0.105– 0.93	69
	0.2	0.51–1	> 90	0.110	0.29–0.97	78	0.20	0.20– 0.95	71
	0.3	0.63–1	> 90	0.116	0.40–0.99	83	0.36	0.36–0.98	75

в том числе и действительное наличие флипов, может быть изучена только численными методами.

Дополнительно проведено моделирование орбитальной эволюции системы HD 39194 для значения массы звезды $M_\star = 0.85M_\odot$. При этом значения долгот восходящих узлов и аргументов перицентров орбит варьировались с шагом 90° для одного набора начальных значений эксцентриситетов орбит — $e_b = 0.2, e_c = 0.11, e_d = 0.2$. В таблице 5.11 дано сравнение значений e_{\max} и I_{\max} для двух значений масс звезды — 0.72 и 0.85 масс Солнца. Из табли-

цы 5.11 видно, что для значений $I_0 \leq 25^\circ$ максимально достижимые значения элементов орбит совпадают для разных значений масс центральной звезды.

Таблица 5.11. Сравнение максимально достижимых значений средних эксцентриситетов и наклонов орбит планет системы HD 39194 для различных масс звезды

$I_0, ^\circ$	M_*, M_\odot	HD 39194 b		HD 39194 c		HD 39194 d	
		e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$
0	0.72	0.20–0.39	0	0.18– 0.27	0	0.20–0.22	0
	0.85	0.20–0.39	0	0.18– 0.27	0	0.20–0.25	0
5	0.72	0.20–0.41	13	0.18– 0.28	8	0.20–0.26	7
	0.85	0.20–0.41	12	0.18– 0.28	8	0.20–0.25	7
10	0.72	0.21– 0.47	27	0.19– 0.31	17	0.20–0.28	16
	0.85	0.21– 0.47	25	0.19– 0.31	16	0.20–0.28	15
15	0.72	0.20– 0.59	40	0.19– 0.38	27	0.20–0.34	25
	0.85	0.20– 0.59	40	0.19– 0.38	26	0.20–0.34	25
20	0.72	0.20– 0.75	51	0.19– 0.47	34	0.20– 0.41	31
	0.85	0.20– 0.72	49	0.19– 0.46	33	0.21– 0.41	30
25	0.72	0.30– 0.96	71	0.21–0.60	40	0.20– 0.51	37
	0.85	0.36– 0.91	64	0.21–0.57	40	0.20– 0.51	36
30	0.72	0.38–1	> 90	0.25–0.83	55	0.20– 0.77	50
	0.85	0.43–1	87	0.28–0.67	47	0.26– 0.65	44
35	0.72	0.45–1	> 90	0.26–0.85	59	0.20– 0.84	55
	0.85	0.46–1	> 90	0.26–0.78	54	0.20– 0.76	50
40	0.72	0.49–1	> 90	0.29–0.91	67	0.20– 0.88	61
	0.85	0.52–1	> 90	0.33–0.87	62	0.21– 0.85	56
45	0.72	0.51–1	> 90	0.29–0.97	78	0.20– 0.95	71
	0.85	0.58–1	> 90	0.31–0.94	75	0.20– 0.91	66

Значения эксцентриситетов и наклонов орбит, превышающие величины радиусов сходимости, выделены в таблицах 5.10 и 5.11 полужирным шрифтом.

5.4 Динамическая эволюция четырёхпланетной системы HD 141399

На рисунках 5.20 — 5.23 представлены карты максимальных эксцентриситетов орбит планет HD 141399 b (рисунок 5.20), HD 141399 c (рисунок 5.21), HD 141399 d (рисунок 5.22) и HD 141399 e (рисунок 5.23). Данные на рисунках 5.20 — 5.23 соответствует случаю, когда начальные значения наклонов орбит трёх внешних планет системы c, d и e равны $I_0 = 15^\circ$. Начальные значения эксцентриситетов орбит — $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$, $e_e = 0.26$. Как и ранее комбинации начальных значений долгот восходящих узлов орбит расположены по горизонтали, аргументы перицентров — по вертикали.

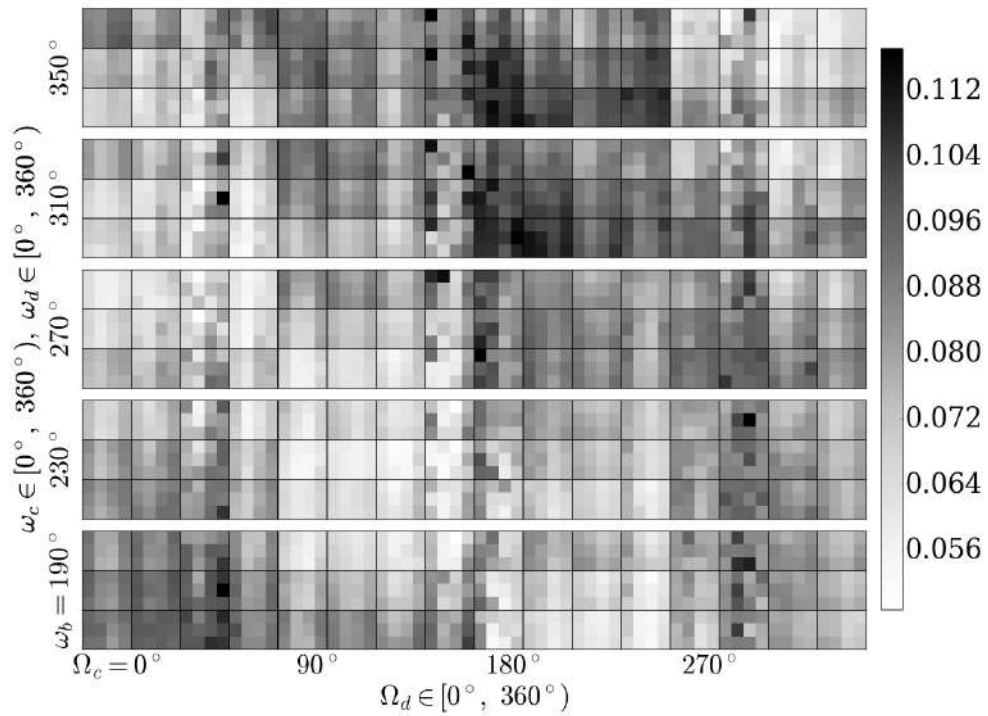


Рис. 5.20. Карта максимальных значений средних эксцентриситетов орбиты планеты HD 141399 b для начальных значений наклонов трёх внешних планет $I_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$, $e_e = 0.26$.

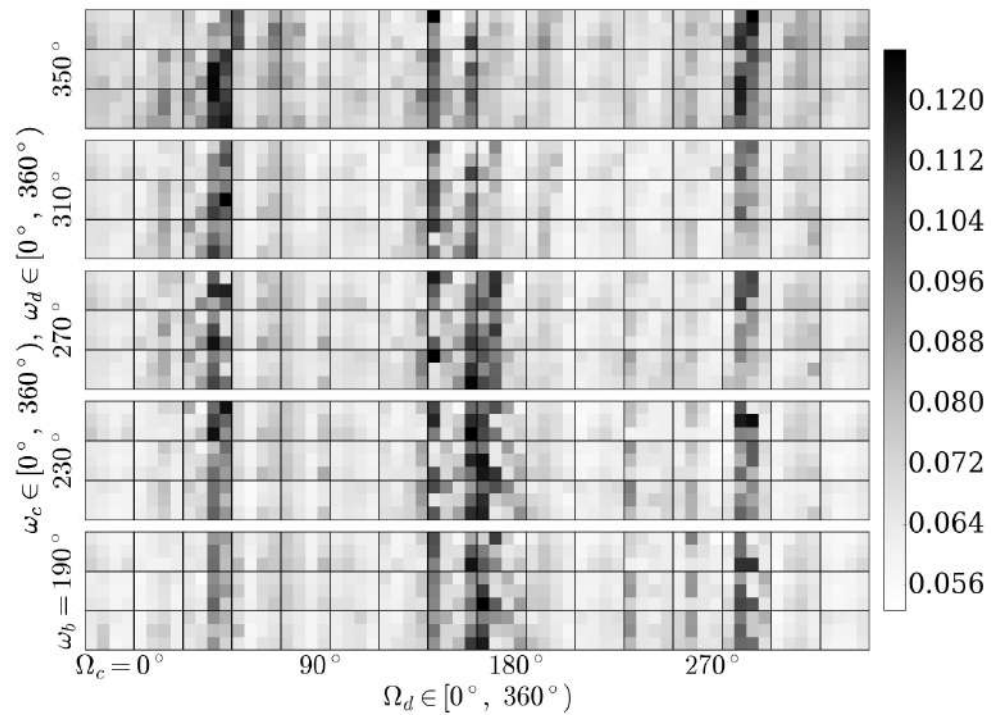


Рис. 5.21. Карта максимальных значений средних эксцентриситетов орбиты планеты HD 141399 c для начальных значений наклонов трёх внешних планет $I_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$, $e_e = 0.26$.

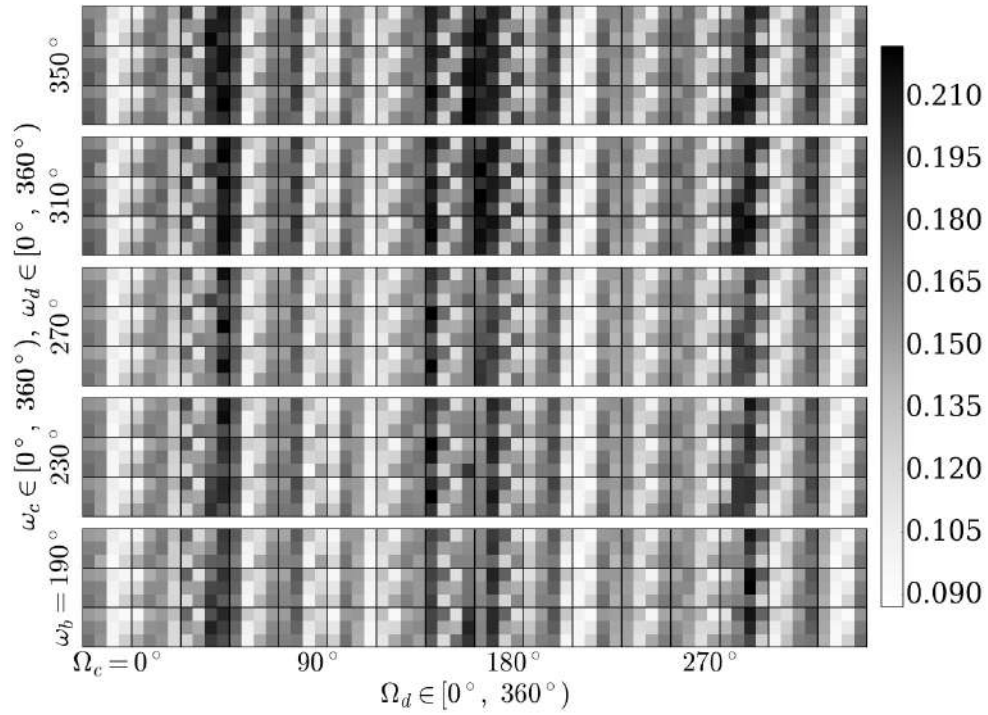


Рис. 5.22. Карта максимальных значений средних эксцентриситетов орбиты планеты HD 141399 d для начальных значений наклонов трёх внешних планет $I_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$, $e_e = 0.26$.

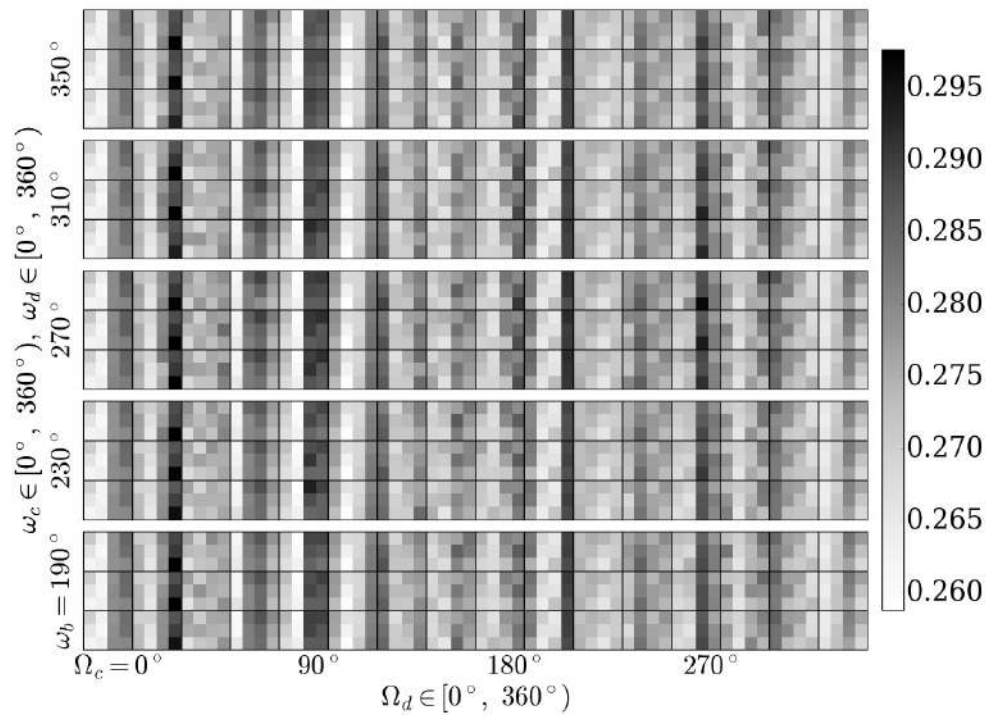


Рис. 5.23. Карта максимальных значений средних эксцентриситетов орбиты планеты HD 141399 e для начальных значений наклонов трёх внешних планет $I_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$, $e_e = 0.26$.

Для начальных значений наклонов $I_0 \leq 15^\circ$ распределение максимально достижимых значений эксцентриситетов орбит относительно начальных значений долгот восходящих узлов и перицентров орбит аналогично показанному на рисунках 5.20 — 5.23 для всех начальных значений эксцентриситетов. Для значений $I_0 \leq 20^\circ$ области минимального роста наклона орбиты лежат вблизи равных между собой начальных значений долгот восходящих узлов второй и третьей планет ($\Omega_c \approx \Omega_d$). При $I_0 \geq 25^\circ$ эти области полностью исчезают.

В таблице 5.12 в зависимости от начальных условий (в барицентрической системе координат), приведены максимально достижимые на интервале моделирования значения эксцентриситетов e_{\max} и наклонов I_{\max} орбит планетной системы HD 141399 (в координатах Якоби). При $I_0 \leq 15^\circ$ эксцентриситеты орбит всех планет сохраняются малыми (или умеренными для планеты HD 141399 e в случае высокой начальной эксцентричности её орбиты) на всем интервале времени 1 млн. лет для всех начальных условий, что обеспечивает динамическую устойчивость планетной системы. При $I_0 = 20^\circ$ эксцентриситеты орбит могут, как сохранять свои малые значения, так и достигать экстремально больших значений, в зависимости от соответствующих комбинаций начальных значений долгот восходящих узлов и аргументов перицентров. В случае $I_0 = 20^\circ$ подавляющее большинство начальных условий приводят к значительному росту эксцентриситета и, возможно, к флипам орбиты ближайшей к звезде планеты. Значения эксцентриситетов и наклонов, превышающие величины радиусов сходимости отмечены в таблице полужирным шрифтом.

5.5 Динамическая эволюция четырёхпланетной системы HD 160691

В таблице 5.13 в зависимости от начальных условий, приведены максимально достижимые значения эксцентриситетов и наклонов орбит планетной системы HD 160691. Значения превышающие радиусы сходимости выделены полужирным шрифтом.

Начальное значение наклона орбиты внешней планеты в системе (планета HD 160691 e) не варьируется и равно нулю для всех комбинаций начальных условий. Эксцентриситет внутренней планеты системы (HD 160691 c) сохраняет умеренные значения при $I_0 \leq 10^\circ$ для всех начальных значений эксцентриситетов орбит. При $I_0 \geq 15^\circ$ для трёх внешних планет системы существуют комбинации начальных значений долгот восходящих узлов и аргументов перицентров при которых эксцентриситеты орбит сохраняют свои малые и

Таблица 5.12. Максимально достижимые значения средних эксцентриситетов и наклонов орбит планет системы HD 141399

$I_0, ^\circ$	HD 141399 b		HD 141399 c		HD 141399 d		HD 141399 e	
	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$
Начальные значения эксцентриситетов в барицентрической системе координат: $e_b = 0.02, e_c = 0.039, e_d = 0.049, e_e = 0.04$								
0	0.024–0.088	0	0.040–0.058	0	0.053–0.067	0	0.038–0.067	0
5	0.023–0.088	13	0.042–0.058	10	0.053–0.068	8	0.038–0.067	8
10	0.021–0.085	26	0.040–0.059	19	0.054–0.068	15	0.038–0.067	16
15	0.020–0.085	38	0.040–0.079	29	0.052–0.081	23	0.038–0.073	24
20	0.020– 0.90	73	0.045– 0.58	39	0.055– 0.46	31	0.038–0.47	33
25	0.53–1	> 90	0.33–0.71	49	0.22–0.59	38	0.082– 0.61	41
30	0.52–1	> 90	0.34–0.82	63	0.153–0.70	46	0.065– 0.73	49
35	0.58–1	> 90	0.36–0.9	71	0.185–0.81	54	0.127– 0.84	57
40	0.73–1	> 90	0.62–1	81	0.56–0.89	62	0.39– 0.90	67
45	0.90–1	> 90	0.63–1	> 90	0.61–0.93	73	0.36– 0.96	77
Начальные значения эксцентриситетов в барицентрической системе координат: $e_b = 0.04, e_c = 0.048, e_d = 0.074, e_e = 0.26$								
0	0.035–0.112	0	0.055–0.085	0	0.081– 0.183	0	0.26–0.28	0
5	0.034–0.111	13	0.055–0.085	10	0.082– 0.184	8	0.26–0.28	8
10	0.033–0.109	25	0.055–0.085	19	0.081– 0.190	15	0.26–0.28	16
15	0.030–0.117	38	0.053–0.149	29	0.087– 0.24	23	0.26–0.30	25
20	0.038– 0.94	82	0.060– 0.63	41	0.093– 0.51	33	0.26– 0.53	36
25	0.56–1	> 90	0.34–0.74	51	0.22–0.62	41	0.26– 0.65	44
30	0.60–1	> 90	0.41–0.84	61	0.33–0.72	49	0.26– 0.75	51
35	0.71–1	> 90	0.44–0.91	71	0.28–0.82	56	0.28– 0.86	61
40	0.61–1	> 90	0.39–1	83	0.38–0.89	65	0.27– 0.92	71
45	0.73–1	> 90	0.37–1	> 90	0.29–0.96	> 90	0.26– 0.98	81
Начальные значения эксцентриситетов в барицентрической системе координат: $e_b = 0.06, e_c = 0.057, e_d = 0.099, e_e = 0.48$								
0	0.051–0.145	0	0.073–0.123	0	0.187–0.35	0	0.48–0.50	0
5	0.050–0.144	13	0.075–0.125	9	0.186–0.35	8	0.48–0.50	9
10	0.051–0.143	25	0.075–0.128	19	0.184–0.39	16	0.48–0.50	17
15	0.053–0.182	39	0.076–0.23	29	0.166–0.43	24	0.48–0.51	28
20	0.074–1	> 90	0.094– 0.74	50	0.206–0.63	39	0.48– 0.63	42
25	0.55–1	> 90	0.35–0.85	60	0.30–0.69	44	0.48– 0.70	50
30	0.60–1	> 90	0.31–0.91	76	0.24–0.80	53	0.48– 0.84	56
35	0.61–1	> 90	0.50–1	79	0.35–0.85	61	0.48– 0.86	64
40	0.85–1	> 90	0.68–1	> 90	0.55–0.93	67	0.48– 0.97	73
45	0.61–1	> 90	0.31–1	> 90	0.40–0.96	75	0.48– 0.98	82

умеренные значения на всем интервале численного интегрирования. Также в случае $I_0 \geq 15^\circ$ существуют начальные условия, приводящие к значительному росту эксцентриситета и наклона орбиты ближайшей к звезде планеты (в том числе к возможным флипам орбит). Отметим, что для случая $I_0 = 45^\circ$, как следует из таблицы 5.13, существуют начальные условия, при которых

Таблица 5.13. Максимально достижимые значения средних эксцентриситетов и наклонов орбит планет системы HD 160691

$I_0, ^\circ$	HD 160691 c		HD 160691 d		HD 160691 b		HD 160691 e	
	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$
Начальные значения эксцентриситетов в барицентрической системе координат: $e_c = 0.132, e_d = 0.0544, e_b = 0.111, e_e = 0.0358$								
0	0.018–0.28	0	0.107– 0.25	0	0.108–0.134	0	0.038–0.049	0
5	0.018–0.28	15	0.105– 0.25	11	0.108–0.134	6	0.038–0.050	4
10	0.020–0.31	28	0.079– 0.25	23	0.109–0.136	11	0.038–0.055	8
15	0.028– 0.78	82	0.057– 0.46	37	0.110–0.23	17	0.039–0.109	11
20	0.092–1	> 90	0.128– 0.66	47	0.111– 0.31	23	0.039–0.21	15
25	0.141–1	> 90	0.129– 0.81	59	0.112– 0.41	28	0.039–0.25	19
30	0.78 –1	> 90	0.131– 0.82	71	0.117– 0.48	34	0.039–0.32	23
35	0.70 –1	> 90	0.135– 0.96	85	0.124– 0.56	39	0.038–0.35	26
40	0.48–1	> 90	0.142–1	> 90	0.110– 0.65	44	0.038–0.39	30
45	0.64–1	> 90	0.153 –1	> 90	0.110– 0.68	50	0.038–0.31	34
Начальные значения эксцентриситетов в барицентрической системе координат: $e_c = 0.172, e_d = 0.0666, e_b = 0.128, e_e = 0.0985$								
0	0.050–0.33	0	0.133– 0.29	0	0.129–0.156	0	0.101–0.114	0
5	0.051–0.33	15	0.131– 0.29	11	0.129–0.156	6	0.101–0.114	4
10	0.057–0.34	30	0.093– 0.29	23	0.130–0.165	11	0.101–0.119	8
15	0.061– 0.83	85	0.057– 0.51	39	0.129–0.24	19	0.102–0.150	11
20	0.088–1	> 90	0.156 – 0.68	49	0.130– 0.34	24	0.102–0.21	15
25	0.181–1	> 90	0.156 – 0.84	61	0.130– 0.44	29	0.102–0.24	19
30	0.30–1	> 90	0.158 – 0.86	72	0.132– 0.48	34	0.102–0.32	23
35	0.74 –1	> 90	0.163 – 0.95	86	0.135– 0.56	39	0.101–0.39	27
40	0.54–1	> 90	0.173 –1	> 90	0.128– 0.65	44	0.102–0.43	30
45	0.116 –1	> 90	0.189 –1	> 90	0.125– 0.73	51	0.102–0.46	34
Начальные значения эксцентриситетов в барицентрической системе координат: $e_c = 0.212, e_d = 0.0788, e_b = 0.145, e_e = 0.1612$								
0	0.081–0.37	0	0.153 – 0.33	0	0.145–0.183	0	0.164–0.178	0
5	0.082–0.37	15	0.144– 0.33	11	0.145–0.184	6	0.164–0.179	4
10	0.092–0.39	30	0.105– 0.33	23	0.145–0.20	11	0.164–0.184	8
15	0.095– 0.84	87	0.099– 0.60	43	0.147– 0.31	21	0.164–0.20	12
20	0.131–1	> 90	0.182 – 0.73	54	0.148– 0.37	26	0.164–0.26	16
25	0.41–1	> 90	0.182 – 0.86	64	0.147– 0.46	31	0.164–0.29	19
30	0.82 –1	> 90	0.183 – 0.88	72	0.149– 0.54	36	0.165–0.37	23
35	0.75 –1	> 90	0.188 – 0.98	87	0.147– 0.60	41	0.165–0.41	27
40	0.60–1	> 90	0.20 –1	> 90	0.147– 0.67	45	0.164–0.44	31
45	0.197 –1	> 90	0.22 –1	> 90	0.142– 0.74	51	0.164–0.44	34

эксцентриситет орбиты ближайшей к звезде планеты (HD 160691 c) сохраняет малые значения на всем интервале моделирования.

В таблице 5.14 приведены максимальные значения средних эксцентриситетов e_{\max} и наклонов орбит I_{\max} для различных масс планет. Варьирование масс планет происходит через изменение значения угла наклона I_p основной

плоскости системы к картинной плоскости, входящей в комбинацию $M \sin I_p$, значение которой известно. Данные приведены для начальных значений эксцентриситетов орбит $e_c = 0.172$, $e_d = 0.0666$, $e_b = 0.128$, $e_e = 0.0985$.

Таблица 5.14. Сравнение максимально достижимых значений средних эксцентриситетов орбит планет системы HD 160691 для различных масс планет

$I_0, ^\circ$	$I_p, ^\circ$	HD 160691 c		HD 160691 d		HD 160691 b		HD 160691 e	
		e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$I_{\max}, ^\circ$
0–10	15	0.17–0.79	43	0.20–0.52	25	0.15–0.23	12	0.11–0.13	8
	30	0.05–0.50	22	0.12–0.37	23	0.13–0.18	11	0.10–0.12	8
	60	0.04–0.37	28	0.10–0.30	23	0.13–0.17	11	0.10–0.12	8
15	15	0.18–0.95	> 90	0.23–0.52	39	0.15–0.27	19	0.11–0.17	11
	30	0.06–1	> 90	0.12–0.53	40	0.13–0.25	19	0.10–0.17	11
	60	0.06–0.80	81	0.07–0.52	39	0.13–0.27	18	0.10–0.16	11
20	15	0.19–1	> 90	0.23–0.64	52	0.15–0.29	26	0.11–0.17	16
	30	0.08–1	> 90	0.12–0.69	50	0.13–0.34	24	0.10–0.20	15
	60	0.06–1	> 90	0.15–0.66	49	0.13–0.27	24	0.10–0.23	15
25	15	0.26–1	> 90	0.23–0.79	61	0.15–0.42	30	0.11–0.25	19
	30	0.21–1	> 90	0.12–0.82	60	0.13–0.43	29	0.10–0.27	19
	60	0.31–1	> 90	0.15–0.83	60	0.13–0.42	29	0.10–0.27	19
30	15	0.47–1	> 90	0.23–0.91	74	0.15–0.49	35	0.11–0.33	23
	30	0.31–1	> 90	0.12–0.82	74	0.13–0.51	34	0.10–0.34	23
	60	0.52–1	> 90	0.15–0.93	72	0.13–0.50	34	0.10–0.32	23

Различные значения угла I_p в таблице 5.14 соответствуют следующим массам планет (в массах Юпитера):

- $M_c = 0.038$, $M_d = 0.603$, $M_b = 1.935$, $M_e = 2.095$ при $I_p = 60$;
- $M_c = 0.066$, $M_d = 1.044$, $M_b = 3.352$, $M_e = 3.628$ при $I_p = 30$;
- $M_c = 0.128$, $M_d = 2.016$, $M_b = 6.476$, $M_e = 7.009$ при $I_p = 15$.

Из анализа данных в таблице 5.14 видно, что орбиты двух внешних наиболее массивных планет системы (b и e) динамически устойчивы в широком диапазоне масс. Увеличение их масс приводит к тому, что орбиты первой и второй планет в системе (c и d) становятся менее устойчивыми при значениях $I_0 \leq 10^\circ$ — происходит рост эксцентриситетов орбит до более высоких значений.

5.6 Границы применимости теории движения

Осредненный гамильтониан планетной задачи во втором приближении можно представить в координатах Якоби в виде суммы $h_0 = h_0 + \mu h_1 + \mu^2 h_2$, где h_0 — невозмущенный (кеплеровский) гамильтониан задачи, μh_1 — слагаемые первого приближения возмущающей функции, $\mu^2 h_2$ — слагаемые второго

приближения возмущающей функции, μ — малый параметр задачи. В слагаемых второго приближения естественным образом возникают знаменатели, представляющие собой линейные комбинации средних частот движения планет вида $(n_i\nu_i - n_j\nu_j)^m$, где $n_i, n_j \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu_k = \sqrt{\mathcal{X}_k^2/a_k^3}$ — средняя частота движения k -той планеты, \mathcal{X}_k^2 — её гравитационный параметр, a_k — большая полуось орбиты. В случае линейной соизмеримости средних частот движения планет значения некоторых знаменателей становятся равными нулю (или достаточно близкими к нулю), что приводит к росту значений слагаемых гамильтониана, содержащих данные знаменатели. Построенная теория движения предполагает, что вклад возмущающей функции в значение гамильтониана в каждом последующем приближении теории (первом, втором и т.д.) пропорционален малому параметру задачи μ в соответствующей степени (первой, второй и т.д.). Если отношение слагаемых второго приближения возмущающей функции $\mu^2 h_2$ к первому приближению μh_1 существенно превышает малый параметр, например, $\sqrt{\mu}$, то это может свидетельствовать о наличии резонанса, тем более сильного, чем больше значение данного отношения. Таким образом, используемая численно-аналитическая теория движения может оказаться неприменимой вблизи резонанса средних движений ввиду экстремального роста значений некоторых слагаемых гамильтониана. Отметим, что значение малого параметра для всех рассматриваемых планетных систем выбрано равным $\mu = 0.001$ (для системы GJ 3138 $\mu = 0.0001$).

Ввиду усечения рядов, представляющих разложение гамильтониана задачи, до заданных степеней по эксцентрическим и облическим элементам второй системы Пуанкаре, для исследования орбитальной эволюции используется конкретная реализация теории движения для заданного набора знаменателей. Список знаменателей, входящих в слагаемые гамильтониана задачи, используемого при моделировании эволюции планетных систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691, приведён в таблице 5.15. Индексы средних частот движения пробегают значения $1 \leq i < j \leq 4$, $1 \leq k \leq 4$.

Таблица 5.15. Знаменатели, входящие в слагаемые осреднённого гамильтониана задачи

$m = 1$	$m = 1$	$m = 1, 2$	$m = 1, 2$	$m = 1, 2$	$m = 1, 2$
$(\nu_i - 3\nu_j)^m$	$(3\nu_i - \nu_j)^m$	$(\nu_k)^m$	$(\nu_i - \nu_j)^m$	$(5\nu_i - 6\nu_j)^m$	$(6\nu_i - 5\nu_j)^m$
$(3\nu_i - 5\nu_j)^m$	$(5\nu_i - 3\nu_j)^m$	$(\nu_i - 2j\nu_j)^m$	$(2\nu_i - \nu_j)^m$	$(6\nu_i - 7\nu_j)^m$	$(7\nu_i - 6\nu_j)^m$
$(5\nu_i - 7\nu_j)^m$	$(7\nu_i - 5\nu_j)^m$	$(2\nu_i - 3\nu_j)^m$	$(3\nu_i - 2\nu_j)^m$	$(7\nu_i - 8\nu_j)^m$	$(8\nu_i - 7\nu_j)^m$
$(7\nu_i - 9\nu_j)^m$	$(9\nu_i - 7\nu_j)^m$	$(3\nu_i - 4\nu_j)^m$	$(4\nu_i - 3\nu_j)^m$	$(8\nu_i - 9\nu_j)^m$	$(9\nu_i - 8\nu_j)^m$
$(9\nu_i - 11\nu_j)^m$	$(11\nu_i - 9\nu_j)^m$	$(4\nu_i - 5\nu_j)^m$	$(5\nu_i - 4\nu_j)^m$	$(9\nu_i - 10\nu_j)^m$	$(10\nu_i - 9\nu_j)^m$

Для рассматриваемых планетных систем был выполнен поиск резонансных областей и определены их границы по значениям масс планет и больших

полуосей орбит. Для каждого знаменателя в слагаемых гамильтониана задачи проводится варьирование масс и больших полуосей орбит планет, средние движения которых входят в линейную комбинацию знаменателя. Большие полуоси орбит планет варьируются в пределах наблюдательных погрешностей (если таковые имеются), приведённых в таблицах 5.1, 5.2 и 5.3, и принимаются равными своим минимальным, средним и максимально возможным значениям. Массы планет варьируются в диапазоне от минимально возможных до максимально допустимых значений (не более 13 масс Юпитера — теоретический предел массы планеты). Большие полуоси орбит и массы планет, частоты которых не входят в знаменатели, не варьируются. При оценке значений возмущающей функции эксцентрические и облические элементы орбит принимаются равными своим максимально допустимым значениям — в определении данных элементов тригонометрическая часть принимается равной единице, а массы — максимально возможными. Это позволяет дать оценку возмущающей функции сверху.

Рассмотрим далее критерии поиска резонансов, связанные со знаменателями.

Критерий 1. Уравнение $(n_i\nu_i - n_j\nu_j) = 0$, где $n_i, n_j = \text{const}$, задаёт пересечение плоскости $z = n_i\nu_i - n_j\nu_j$ с плоскостью $z = 0$, что соответствует условию резонанса. Если при варьировании масс и больших полуосей орбит и, как следствие, средних частот ν_i и ν_j происходит смена знака величины $n_i\nu_i - n_j\nu_j$, то это означает переход через точный резонанс.

Критерий 2. Уравнение $(n_i\nu_i - n_j\nu_j)^2 = 0$, где $n_i, n_j = \text{const}$, задаёт прямую пересечения параболического цилиндра $z = (n_i\nu_i - n_j\nu_j)^2$ и касательной к нему плоскости $z = 0$, что соответствует условию резонанса. Если при варьировании средних частот ν_i и ν_j происходит сначала убывание, а затем возрастание (или наоборот) величины $n_i\nu_i - n_j\nu_j$, то это говорит о переходе через точный резонанс. Настоящий критерий введён по следующим соображениям. Разность частот $n_i\nu_i - n_j\nu_j$ в знаменателе может быть недостаточно мала и соответствующее слагаемое не будет резонансным. Квадрат разности $(n_i\nu_i - n_j\nu_j)^2$ может стать уже достаточно малым для этого. На рисунке 5.24 показана геометрическая трактовка данного критерия (критерий 1 геометрически очевиден). Плоскость $\nu_i\nu_j$ является касательной к параболическому цилиндру. Пересечение обеих поверхностей происходит вдоль прямой $\nu_i = k\nu_j$, где $k = n_j/n_i$. Если значения частот средних движений лежат на данной прямой, то это соответствует условию точного резонанса.

Критерий 3. Если критерии 1 и 2 не выполняются, то область точного резонанса лежит вне области определения (варьирования) больших полуосей орбит и масс планет. Далее для всех значений варьируемых параметров вы-

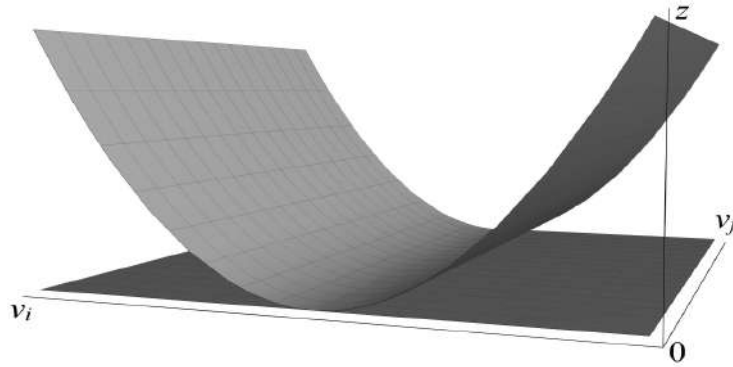


Рис. 5.24. Геометрическая трактовка критерия 2.

числяется величина $\Delta = |\mu h_1 / \mu^2 h_2|$. Случаи, в которых $\Delta > \sqrt{\mu}$, объясняются влиянием резонанса средних движений планет.

Отметим, что критерии 1 и 2 соответствуют определению так называемой узкой резонансной зоны, то есть, случаю, когда области различных резонансов средних движений не перекрываются. Критерий 3 соответствует случаю широкой резонансной зоны, в которой могут перекрываться области различных резонансов средних движений (Соколов, 1980; Соколов, Холшевников, 1981).

Для систем HD 141399 и HD 160691 критерии 1 и 2 не выполнялись нигде в области варьируемых параметров, то есть никакие значения больших полуосей орбит и масс планет не соответствуют точному резонансу. На основании критерия 3 найдены следующие резонансные соотношения частот в системах HD 141399 и HD 160691, приведённые соответственно в таблицах 5.16 и 5.17. В первых двух столбцах таблиц 5.16 и 5.17 указаны значения больших полуосей орбит планет (в астрономических единицах), в третьем столбце даны диапазоны масс планет, приведённые в массах Юпитера $M_{\text{Юп}}$, а в последнем столбце приведены соотношения частот, линейные комбинации которых близки к нулю для указанных в предыдущих столбцах параметров.

Для системы HD 141399 в таблице 5.16 приводится только одно значение большой полуоси внешней планеты (минимально возможное с учетом наблюдательной ошибки), так как для остальных варьируемых значений большой полуоси малые знаменатели не появляются. Как видно из таблицы 5.16, для минимальных значений масс планет и средних значений больших полуосей орбит, для которых проводится интегрирование уравнений движения, малые знаменатели в слагаемых гамильтониана не возникают.

В системе HD 160691 для больших полуосей $a_2 = 0.921$ а.е., $a_3 = 1.5$ а.е. и для масс планет $m_2 = 0.5219M_{\text{Юп}}$, $m_3 = 1.676M_{\text{Юп}}$ (вторая и третья планеты) возникает резонанс средних движений 1:2. Данные значения больших полуосей и масс являются номинальными, для которых проводится численное

Таблица 5.16. Положение резонансных областей в планетной системе HD 141399

a_i	a_j	Диапазоны масс планет	$n_i:n_j$
$i = 1, j = 2$ (внутренняя пара планет)			
0.404	0.669	$m_1 = 0.451, m_2 \in [7, 13]$	1:2
	0.689	$m_1 = 0.451, m_2 \in [7, 13]$	1:2, 2:3
	0.709	$m_1 = 0.451, m_2 \approx 13$	1:2, 2:3
0.415	0.669	$m_1 \in [0.451, 7], m_2 \in [1.33, 13]$ или $m_1, m_2 \approx 13$	1:2
		$m_1 \in [7, 13], m_2 = 1.33$ или $m_1, m_2 \approx 13$	2:3
		$m_1 \approx 13, m_2 = 1.33$	3:4
	0.689	$m_1 = 0.451, m_2 \in [7, 13]$	1:2
	0.709	$m_1 = 0.451, m_2 \in [7, 13]$	1:2, 2:3, 3:4
0.426	0.669	$m_1 = 0.451, m_2 \in [7, 13]$ или $m_1 \in [7, 13], m_2 = 1.33$	2:3
		$m_1 \in [0.451, 7], m_2 \in [1.33, 13]$ или $m_1 \approx 13, m_2 \in [7, 13]$	1:2
	0.689	$m_1 \in [0.451, 7], m_2 \in [1.33, 13]$ или $m_1, m_2 \approx 13$	1:2
		$m_1 \in [7, 13], m_2 = 1.33$	3:4
		$m_1 \in [7, 13], m_2 \in [1.33, 13]$	2:3
	0.709	$m_1 = 0.451, m_2 \in [7, 13]$	1:2, 3:4
$i = 3, j = 4$ (внешняя пара планет)			
2.03		$m_3 = 1.18, m_4 \approx 7$	2:3, 3:4, 3:5
		$m_3 = 1.18, m_4 \in [7, 13]$	1:2, 1:3, 2:3
2.09	3.5	$m_3 = 1.18, m_4 \approx 7$ или $m_3 \in [7, 13], m_4 \in [0.66, 13]$	2:3, 3:4, 3:5, 4:5
		$m_3 \in [1.18, 7], m_4 \in [7, 13]$ или $m_3 \approx 13, m_4 \in [0.66, 13]$	1:2, 1:3, 2:3
		$m_3 \in [7, 13], m_4 \in [7, 13]$	3:4, 5:6, 5:7
2.15		$m_3 = 1.18, m_4 \approx 13$ или $m_3 \in [7, 13], m_4 \in [0.66, 13]$	1:2
		$m_3 \in [7, 13], m_4 = 0.66$	4:5
		$m_3 \in [7, 13], m_4 \in [7, 13]$	1:3
		$m_3 \in [7, 13], m_4 \in [0.66, 13]$	2:3, 3:4, 3:5

Таблица 5.17. Положение резонансных областей в планетной системе HD 160691

a_2	a_3	Диапазоны масс планет	$n_2:n_3$
	1.48	$m_2 \in [7, 13], m_3 = 1.676$	2:3, 3:5
		$m_2 \in [0.5219, 13], m_3 \in [1.676, 13]$	1:2
		$m_2 \approx 13, m_3 = 1.676$	3:4
0.921	1.50	$m_2 = 0.5219, m_3 \in [1.676, 13]$ или $m_2 \approx 7, m_3 \in [1.676, 7]$	1:2
		или $m_2 \approx 13, m_3 \leq 13$	1:2
		$m_2 \in [7, 13], m_3 = 1.676$	2:3, 3:4, 3:5
		$m_2 \approx 13, m_3 = 1.676$	4:5
	1.52	$m_2 = 0.5219, m_3 \in [1.676, 13]$ или $m_2 \approx 7, m_3 = 1.676$	1:2
		$m_2 \in [7, 13], m_3 = 1.676$	2:3, 3:4, 3:5, 4:5
		$m_2 \approx 13, m_3 \approx 7$	3:5
		$m_2 \approx 13, m_3 \in [1.676, 13]$	1:2

интегрирование уравнений движения. Оценка значения возмущающей функции в первом приближении $\mu h_1 = -4.484 \cdot 10^{-7}$, во втором приближении

$\mu^2 h_2 = -3.218 \cdot 10^{-8}$. Вклад слагаемых со знаменателями $(\nu_2 - 2\nu_3)$ и $(\nu_2 - 2\nu_3)^2$ в значение величины $\mu^2 h_2$ составляет $\delta = -3.205 \cdot 10^{-8}$.

В условиях данного резонанса для нескольких вариантов начальных условий, различающихся значениями долгот восходящих узлов планет, проведено моделирование орбитальной эволюции с использованием численного симплектического интегратора 4 порядка из набора программ NBI (Varadi, 1999). Интегрирование проводилось с шагом 1 сутки на интервале времени 1 млн. лет. На рисунке 5.25, в качестве примера, представлены результаты эволюции оскулирующих эксцентриситетов орбит планет системы HD 160691 на интервале времени 200 тыс. лет для одного выбранного набора начальных условий.

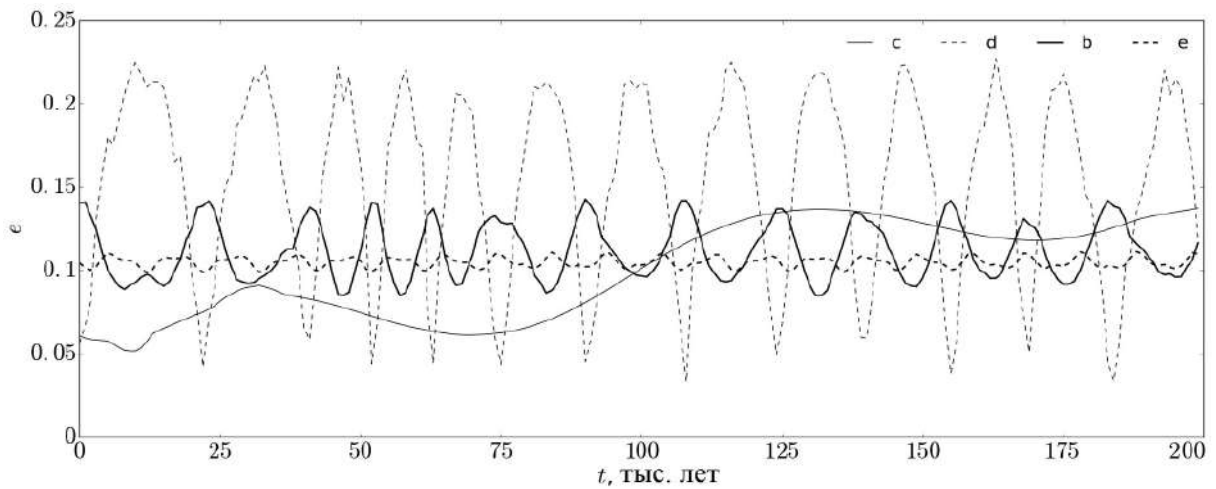


Рис. 5.25. Эволюция оскулирующих эксцентриситетов орбит планет системы HD 160691 в координатах Якоби. Начальные значения наклонов орбит внутренних планет $I_0 = 5^\circ$ и начальные значения эксцентриситетов орбит $e_c = 0.172$, $e_d = 0.0666$, $e_b = 0.128$, $e_e = 0.0985$ (в барицентрической системе координат). Данные численного моделирования.

На рисунке 5.26 показана эволюция средних эксцентриситетов орбит в рамках численно-аналитической теории движения для тех же начальных условий. Сравнение между собой характера эволюции элементов орбит в обоих рассмотренных случаях позволяет сделать вывод о возможности применения численно-аналитической теории для исследования орбитальной эволюции для данных начальных условий. В обоих случаях эволюция эксцентриситетов орбит сохраняет свой характер на интервале времени 1 млн. лет.

Планетные системы HD 39194 и GJ 3138 являются нерезонансными для всех значений варьируемых параметров.

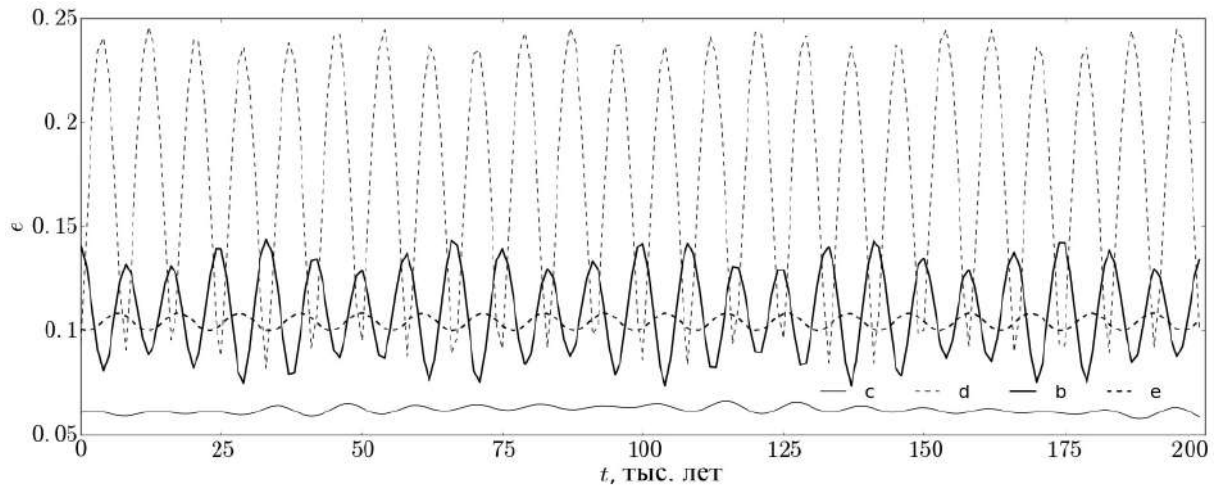


Рис. 5.26. Эволюция средних эксцентриситетов орбит планет системы HD 160691 в координатах Якоби. Начальные значения наклонов орбит внутренних планет $I_0 = 5^\circ$ и начальные значения эксцентриситетов орбит $e_c = 0.172$, $e_d = 0.0666$, $e_b = 0.128$, $e_e = 0.0985$ (в барицентрической системе координат). Данные численно-аналитической теории движения.

5.7 Выводы

В работе качественно и количественно исследована орбитальная эволюция четырёх внесолнечных планетных систем GJ 3138, HD 39194, HD 141399 и HD 160691 с помощью осредненной теории движения на интервале времени 1 млн лет. Численное интегрирование уравнений движения проводилось для различных начальных значений эксцентриситетов, наклонов, долгот восходящих узлов и аргументов перицентров орбит планет.

По итогам моделирования орбитальной эволюции выявлены начальные условия, приводящие к экстремальному росту эксцентриситетов и наклонов орбит, который может привести планетную систему к потере устойчивости и разрушению. В противном случае, если элементы орбит сохраняются малыми, то систему можно считать динамически устойчивой.

Показанный способ позволяет определить наиболее вероятные значения неизвестных из наблюдений долгот восходящих узлов и аргументов перицентров, а также сузить диапазон возможных значений наклонов и эксцентриситетов орбит.

Для рассмотренных планетных систем выполнен поиск резонансных областей, определены их границы по значениям масс планет и больших полуосей орбит. Для этого варьированием указанных параметров была проведена оценка знаменателей в слагаемых разложения гамильтониана, и, в соответствии с выбранными критериями, сделаны выводы о наличии и границах резонансов средних движений.

Заключение

Основными целями данной работы являются: разработка нового численно-аналитического метода исследования орбитальной эволюции четырёхпланетных систем на космогонических интервалах времени, изучение орбитальной эволюции планет-гигантов Солнечной системы, а также трёхпланетных внесолнечных систем GJ 3138, HD 39194 и четырёхпланетных систем HD 141399, HD 160691.

На защиту выносятся следующие результаты.

1. Реализованный метод разложения гамильтониана четырёхпланетной задачи, записанного в системе координат Якоби, в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре позволяет построить это разложение до произвольной степени по эксцентрическим и облическим элементам орбит и до третьей степени по малому параметру.
2. Реализованный алгоритм метода Хори–Депри позволяет построить ряды, представляющие производящую функцию осредняющего преобразования и гамильтониан четырёхпланетной задачи в средних элементах второй системы Пуанкаре, а также получить на их основе правые части уравнений движения (до третьей степени по малому параметру) и функции замены переменных (до второй степени по малому параметру).
3. Использование современной высокопроизводительной системы компьютерной алгебры *Piranha*, представляющей собой эшелонированный пуассоновский процессор, позволяет строить разложения, в которых все элементы орбит, частоты движения и массовые параметры сохраняются в символьном виде. При этом коэффициенты в рядах сохраняются в виде дробно-рациональных чисел произвольной точности, что позволяет исключить ошибки округления.
4. Интегрирование построенных аналитически уравнений движения в средних элементах позволяет получить характеристики и параметры орбитальной эволюции четырёхпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун на космогонических интервалах времени для различных начальных условий.

5. Интегрирование построенных аналитически уравнений движения в средних элементах позволяет получить характеристики и параметры орбитальной эволюции планетных систем GJ 3138, HD 39194, HD 141399 и HD 160691 для набора различных начальных условий, а также определить условия устойчивости рассмотренных планетных систем на космогонических интервалах времени.

В диссертации даны общие представления об аналитических, численных и численно-аналитических теориях движения больших планет Солнечной системы в их историческом развитии. Рассмотрены методы малого параметра, методы осреднения, КАМ-теория и проблема устойчивости Солнечной системы на космогонических интервалах времени. Также проведён обзор современных теорий движения больших планет Солнечной системы. Рассматриваются высокоточные численные эфемериды DE, EPM и INPOP и современные теории движения больших планет Солнечной системы на космогонических интервалах времени.

Проведён краткий анализ характеристик и статистика известных к настоящему времени внесолнечных планетных систем. Описаны методы поиска внесолнечных планет. Приведены характеристики, исследуемых в настоящей диссертации трёхпланетных систем GJ 3138, HD 39193 и четырёхпланетных систем HD 141399, HD 160691.

В диссертации представлен метод разложения гамильтониана четырёхпланетной задачи в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре. Использование эшелонированного пуассоновского процессора Piranha позволяет получать разложения для произвольных степеней позиционных элементов орбит и кратностей угловых элементов. Задача разложения гамильтониана в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре решена полностью для случая четырёхпланетной системы. Построенный алгоритм позволяет получить разложение гамильтониана для планетных систем большей кратности.

Для построения разложения гамильтониана четырёхпланетной задачи в ряд Пуассона выбрана иерархическая система координат Якоби, наиболее удобная для рассмотрения планетной задачи. Вторая система элементов Пуанкаре выбрана по причине того, что в ней имеется только один угловой элемент — средняя долгота, что позволяет существенно упростить угловую часть разложения. С помощью системы компьютерной алгебры Piranha, представляющей собой эшелонированный пуассоновский процессор, получено разложение гамильтониана четырёхпланетной задачи в ряд Пуассона по элементам орбит до квадрата μ^2 и до куба малого параметра μ^3 . Роль малого параметра в задаче играет отношение суммы масс планет к массе звезды.

В разложении гамильтониана все элементы орбит и массовые параметры сохраняются в символьном виде. Для исключения ошибок округления числовые коэффициенты в рядах сохранены в виде рациональных дробей произвольной точности.

Всего построено три варианта разложения гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона по элементам орбит второй системы Пуанкаре и по степеням малого параметра.

Общее количество слагаемых в разложении гамильтониана планетной задачи, построенного до μ^3 , составляет 49185837. Относительная точность построения гамильтониана рассчитана для планет-гигантов Солнечной системы и составляет $1.7 \cdot 10^{-12}$. Количество слагаемых в разложении гамильтониана, построенного до μ^2 и до 4 степени по эксцентрическим и облическим элементам орбит Пуанкаре, составляет 1363330, а для разложения, построенного с точностью до 6 степени по элементам орбит, количество слагаемых составляет 16296620.

Оценка точности разложения в ряд функций Гамильтона, построенных с меньшей точностью (до μ^2), проведена для внесолнечных планетных систем GJ 3138, HD 39194, HD 141399 и HD 160691. Различие в оценках точности этих двух разложений (до 6 и до 4 степеней по элементам орбит) составляет от одного до двух порядков. Для разложения гамильтониана, построенного до 4 степени по эксцентрическим и облическим элементам орбит, относительная точность составляет от 10^{-6} до 10^{-8} . А для разложения, построенного до 6 степени по элементам орбит, относительная точность составляет от 10^{-7} до 10^{-10} .

Разложение гамильтониана, построенное до μ^3 используется для исследования орбитальной динамики планет-гигантов Солнечной системы. Разложение гамильтониана, построенное до μ^2 , используется для исследования орбитальной эволюции внесолнечных планетных систем GJ 3138, HD 39194, HD 141399 и HD 160691.

Алгоритм метода осреднения Хори–Депри также реализуется с помощью системы компьютерной алгебры *Riанha*. Получены ряды, представляющие гамильтониан задачи в средних элементах, производящую функцию преобразования от оскулирующих элементов к средним, функции замены переменных и правые части уравнений движения в средних элементах. Уравнения движения в средних элементах построены с точностью до куба по малому параметру, а функции замены переменных — до квадрата.

Также проведено осреднение двух вариантов разложения оскулирующего гамильтониана, построенных с меньшей точностью — до второго порядка по

малому параметру (соответственно до 4 и 6 степени по эксцентрическим и облическим элементам Пуанкаре).

Представлены свойства полученных рядов — количество слагаемых, максимальные степени элементов орбит, учитываемые в слагаемых построенных рядов, и др.

В ходе исследования орбитальной эволюции четырёхпланетной системы Солнце — Юпитер — Сатурн — Уран — Нептун на интервале времени 10 млрд лет получены следующие результаты:

- орбитальная эволюция имеет почти периодический характер;
- эксцентриситеты и наклоны орбит всех рассматриваемых планет остаются малыми;
- значения эксцентриситетов орбит Юпитера, Сатурна и Урана отделены от нуля;
- эксцентриситет орбиты Нептуна может обращаться в ноль;
- короткопериодические возмущения эксцентриситетов и наклонов орбит сохраняют малые значения на всём интервале моделирования.

Для планет-гигантов Солнечной системы в диссертации приведены значения периодов изменения кеплеровских элементов орбит и элементов орбит второй системы Пуанкаре, а также амплитуд их колебаний. Проведено сравнение результатов интегрирования уравнений движения в первом, втором и третьем порядках по малому параметру.

Численное интегрирование осреднённых уравнений движения четырёхпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун показало, что интеграл энергии сохранялся со значительно более высокой относительной точностью (около 10^{-11}), чем интеграл площадей. По причине того, что гамильтониан задачи в средних элементах представлен в виде отрезка разложения в ряд Пуассона, компоненты интеграла площадей σ_x и σ_y сохраняются со значительно меньшей точностью (порядка 10^{-1} , 10^{-2}), чем z -компонента (10^{-12}). По этой причине эволюция угловых элементов орбит описывается с меньшей точностью.

Моделирование эволюции планет-гигантов Солнечной системы проведено для различных начальных условий, соответствующих численным эфемеридам DE (на даты 31.01.2016, 29.02.2016, 31.01.2020 и 29.02.2020).

Периоды изменения элементов орбит, полученные в третьем приближении теории движения, наиболее близки к результатам численных теорий. Расхождения между периодами изменения наклонов орбит, полученными численными методами (Коуэлла–Штермера и Виздома–Хольмана) и по данным

численно-аналитической теории движения третьего порядка, не превосходят 0.1% – 0.2% для всех планет-гигантов Солнечной системы. Расхождения (относительная разность) между периодами изменения эксцентриситетов орбит Юпитера и Сатурна, полученными в рамках численно-аналитической теории движения и численным моделированием, лежат в диапазоне от 0.01% до 0.8% в зависимости от начальных условий интегрирования. Для Урана и Нептуна такие расхождения для эксцентриситетов орбит не превышают 0.3% – 1.1% и 0.6% – 0.7% соответственно, для различных начальных условий. Расхождения для эксцентриситетов орбит достигают 1% при сравнении с периодами, полученными на основе фундаментальных частот движения планет Солнечной системы, вычисленных Ж. Ласкаром.

Различия для минимальных и максимальных значений эксцентриситетов и наклонов орбит не превышают нескольких процентов, за исключением минимальных значений эксцентриситетов орбит Сатурна, Урана и Нептуна.

Проведено моделирование эволюции планет-гигантов Солнечной системы для набора близких начальных условий. Показано, что время Ляпунова для орбит планет-гигантов составляет около 10 – 30 млн лет. Найдены начальные условия, при которых значение показателя MEGNO, характеризующего степень расхождения изначально близких траекторий и наличие хаоса в системе, достигает значения около 100 на интервале времени 100 млн лет.

Построенная теория движения отлично согласуется с результатами численного интегрирования и позволяет с высокой точностью проводить моделирование орбитальной эволюции. Построенные аналитические ряды могут использоваться для исследования резонансных свойств, поиска трёхчастотных резонансов, влияющих на устойчивость и стохастические свойства орбитальной эволюции.

Изучен характер орбитальной эволюции трёхпланетных систем GJ 3138, HD 39194 и четырёхпланетных систем HD 141399, HD 160691 для различных начальных условий. Для моделирования орбитальной эволюции используются оба варианта осреднённого гамильтониана, построенного до квадрата малого параметра. Высокая точность разложения в данном случае не требуется, так как элементы орбит внесолнечных планетных систем известны с ошибками, а некоторые из них неизвестны вовсе. Построены уравнения движения в средних элементах и функции замены переменных.

Для рядов, представляющих уравнения движения в средних элементах для внесолнечных планетных систем, были вычислены значения радиусов сходимости рядов по эксцентриситетам и наклонам орбит, внутри которых разложения функций в ряды сохраняют свои аналитические свойства.

Следует отметить, что применяемая численно-аналитическая теория движения позволяет исследовать орбитальную эволюцию внесолнечных планетных систем с умеренными значениями наклонов и эксцентриситетов орбит. Поэтому, если в процессе моделирования орбитальной эволюции системы происходит существенный рост эксцентриситетов и наклонов, то точные значения элементов орбит не могут быть определены в рамках рассматриваемой теории движения. Можно говорить лишь о том, что качественное поведение эксцентриситетов и наклонов орбит соответствует росту вплоть до экстремальных значений. Но поведение системы после начала подобного роста элементов орбит невозможно исследовать количественно в рамках построенной теории движения.

Для внесолнечных планетных систем GJ 3138, HD 39194, HD 141399 и HD 160691 определены максимально достижимые на интервале моделирования значения средних эксцентриситетов и наклонов орбит. По итогам моделирования орбитальной эволюции выявлены начальные условия, приводящие к экстремальному росту эксцентриситетов и наклонов орбит, который может привести планетную систему к потере устойчивости и разрушению. В противном случае, если элементы орбит сохраняются малыми, то систему можно считать динамически устойчивой.

При анализе результатов моделирования орбитальной эволюции планетной системы GJ 3138, получено, что, если начальные наклоны орбит двух внутренних планет (первой и второй от звезды) $I_0 \leq 15^\circ$, то планетная система полностью устойчива на интервалах времени до 1 млн лет для всех начальных значений эксцентриситетов орбит, долгот восходящих узлов и аргументов перицентров. Комбинации начальных значений долгот восходящих узлов и аргументов перицентров, соответствующие максимальному росту среднего эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 с удовлетворяют условию $(\Omega_b - \Omega_c) + (\omega_b - \omega_c) = 180^\circ$. В тоже время, максимальный рост среднего эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 b реализуется в том случае, если $(\Omega_b - \Omega_c) + (\omega_b - \omega_c) = 0^\circ$. Если $I_0 = 20^\circ$, то максимальный рост средних эксцентриситетов орбит двух внутренних планет происходит если $(\Omega_b - \Omega_c) = 180^\circ$. В случае, если $I_0 > 20^\circ$, существуют начальные условия приводящие к существенному росту эксцентриситета орбиты планеты GJ 3138 c (до значений близких к 1), что подтверждается прямым численным интегрированием. При $I_0 \geq 30^\circ$ появляются начальные условия, приводящие к попаданию планетной системы в резонанс Лидова–Козаи.

Для трёхпланетной системы GJ 3138 также исследована точность интегрирования уравнений движения в средних элементах в зависимости от заданной точности интегратора. Проведено детальное сравнение результатов

численно-аналитической теории с данными численного моделирования методом Виздома–Хольмана. Изучены хаотические свойства системы для различных начальных условий моделирования — вычислены значения показателя MEGNO. Источник неустойчивости движения в данной планетной системе может быть связан с резонансом Лидова–Козаи и попаданием траекторий в области фазового пространства, в которых перекрываются резонансы.

При анализе результатов моделирования орбитальной эволюции планетной системы HD 39194 получено, что движение всех планет в системе полностью устойчиво и значения эксцентриситетов и наклонов орбит не превышают радиусы сходимости в том случае, если значения начальных эксцентриситетов орбит планет минимальны, а начальные значения наклона орбит двух внешних планет (второй и третьей) в системе $I_0 \leq 10^\circ$. Для значений $I_0 \geq 15^\circ$ области минимального роста эксцентриситетов и наклонов орбит лежат около близких друг к другу значений начальных долгот восходящих узлов орбит второй и третьей планет. При $I_0 \geq 30^\circ$ эти области полностью исчезают.

Для системы HD 141399 найдено, что, если значения начальных наклонов орбит второй, третьей и четвёртой планеты от звезды $I_0 \leq 10^\circ$, то для минимальных начальных значений эксцентриситетов орбит движение планет полностью устойчиво, а значения эксцентриситетов и наклонов орбит лежат в пределах радиусов сходимости. Для планет HD 141399 b, c и d области начальных данных, при которых значения наклонов и эксцентриситетов их орбит лежат в пределах радиусов сходимости, сохраняются вплоть до значений $I_0 \leq 20^\circ$ (кроме планеты HD 141399 d и максимальных начальных значений эксцентриситетов орбит). Для планеты HD 141399 e такие начальные условия сохраняются вплоть до значений $I_0 = 45^\circ$.

Для системы HD 160691 получены следующие результаты. Эксцентриситет самой внутренней (первой) планеты системы HD 160691 с сохраняет умеренные значения при $I_0 \leq 10^\circ$ для всех начальных значений эксцентриситетов орбит. При $I_0 \geq 15^\circ$ для трёх внешних планет системы существуют комбинации начальных значений долгот восходящих узлов и аргументов перицентров при которых эксцентриситеты орбит сохраняют свои малые и умеренные значения на всем интервале численного интегрирования. Также в случае $I_0 \geq 15^\circ$ существуют начальные условия, приводящие к значительному росту эксцентриситета и наклона орбиты ближайшей к звезде планеты (в том числе к возможным флипам орбит).

Для систем HD 141399 и HD 160691 также определены комбинации масс планет и значений больших полуосей их орбит, соответствующие областям резонансов средних движений. Для системы HD 160691 проведено сравнение результатов моделирования для различных значений масс планет.

Показанный в настоящей диссертации способ позволяет определить наиболее вероятные значения неизвестных из наблюдений долгот восходящих узлов и аргументов перицентров, а также сузить диапазон возможных значений наклонов и эксцентриситетов орбит.

Всё вышеперечисленное делает предложенные и реализованные в настоящей диссертации методы универсальным инструментом для исследования орбитальной эволюции планетных систем.

В дальнейшем автором планируется реализация резонансной численно-аналитической теории движения для исследования орбитальной эволюции четырёхпланетных систем с резонансами средних движений.

Планируется построение численно-аналитической теории движения для восьмипланетной задачи, что позволит проводить моделирование орбитальной эволюции как Солнечной системы в целом, так и внесолнечных планетных систем с бóльшим числом планет.

Благодарности

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., доценту Э.Д. Кузнецову, под руководством которого работал со студенческих лет.

Автор благодарен Ф. Бискани — разработчику системы компьютерной алгебры *Piranha* — за консультации по основам работы и эффективному применению этой системы.

Автор благодарен коллегам по кафедре астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды и Коуровской астрономической обсерватории Уральского федерального университета.

Автор благодарит за поддержку работы Российский фонд фундаментальных исследований: грант 18-32-00283 мол_а.

Автор благодарит за поддержку работы Министерство науки и высшего образования Российской Федерации: грант 075-15-2020-780 (№ 13.1902.21.0039), тема FEUZ-2020-0038 и тема FEUZ-2020-0030.

Список литературы

- Авдюшев В.А.* Численное моделирование орбит небесных тел. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. 336 с.
- Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике // Успехи матем. наук. – 1963. – Т. 18. – № 6. – С. 91–192.
- Колмогоров А.Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом возмущении гамильтониана // Докл. Акад. Наук СССР. – 1954. – Т. 98. – № 4. – С. 527–530.
- Красинский Г.А., Питьева Е.В., Свешников М.А. и др.* Аналитическая теория движения внутренних планет АТ-1 и ее использование для решения задач эфемеридной астрономии // Тр. ИТА АН СССР. – 1978. – Т. 17. – С. 46–53.
- Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В.* Динамическая эволюция слабозмущенной двухпланетной системы на космогоническом интервале времени: система Солнце – Юпитер – Сатурн // Астрон. вестн. – 2006. – Т. 40. – №3. – С. 263–275.
- Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В.* Запас устойчивости двухпланетных систем по массам планет // Астрон. вестн. – 2009. – Т. 43. – № 3. – С. 230–239.
- Кузнецов Э.Д.* К вопросу о сохранении интегралов площадей при осредняющих преобразованиях // Астрон. Журн. – 2010. – Т. 54. – С. 562–569.
- Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 588 с.
- Нехорошев Н.Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // Успехи Мат. Наук. – 1977. – Т. 32. – № 6. – С. 5–66.
- Перминов А.С., Кузнецов Э.Д.* Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре // Астрон. вестн. – 2015. – Т. 49, № 6. – С. 469–480.

- Перминов А.С., Кузнецов Э.Д.* Построение осредненных уравнений движения планетной задачи методом Хори–Депри в элементах второй системы Пуанкаре // *Астрон. вестн.* – 2016. – Т. 50, № 6. – С. 450–461.
- Перминов А.С., Кузнецов Э.Д.* Орбитальная эволюция четырехпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран – Нептун на космогонических интервалах времени // *Астрон. вестн.* – 2018. – Т. 52, № 3. – С. 239–259.
- Перминов А.С., Кузнецов Э.Д.* Орбитальная эволюция внесолнечных планетных систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691 // *Астрон. журн.* – 2019. – Т. 96, № 10. – С. 795–814.
- Питьева Е.В., Павлов Д.А., Питьев Н.П.* Динамическая модель Солнечной системы в эфемеридах планет ЕРМ // *Труды ИПА РАН.* – 2019. – Т. 51. – С. 82–92.
- Соколов Л.Л.* Условно-периодические решения и резонансы в задачах небесной механики. Диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук. Л.: Ленинградский государственный университет, 1980. 88 с.
- Соколов Л.Л., Холшевников К.В.* О применимости выводов КАМ-теории в небесной механике // *Труды V научных чтений по космонавтике. Секция «Прикладная небесная механика и управление движением».* М., 1981. С. 33–42.
- Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
- Холшевников К.В.* Асимптотические методы небесной механики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 208 с.
- Холшевников К.В.* Сохранение формы интеграла площадей при осредняющих преобразованиях // *Астрон. журн.* – 1991. – Т. 68. – С. 660–663.
- Холшевников К.В.* Гамильтониан планетной и спутниковой задачи как даламберовская функция // *Астрон. журн.* – 2001. – Т. 78. – № 7. – С. 669–672.
- Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д.* Разложение гамильтониана в ряд Пуассона по всем элементам (теория) // *Астрон. вестн.* – 2001. – Т. 35. – № 3. – С. 267–272.
- Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д.* Разложение гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: оценка и прямое

- вычисление коэффициентов // Астрон. вестн. – 2002. – Т. 36. – № 1. – С. 75–87.
- Холшевников К.В., Кузнецов Э.Д.* Обзор работ по орбитальной эволюции больших планет Солнечной системы // Астрон. вестн. – 2007. – Т. 41. – № 4. – С. 291–329.
- Шарлье К.* Небесная механика. М.: Наука, 1966. 628 с.
- Anglada-Escude G., Tuomi M.* A planetary system with gas giants and super-Earths around the nearby M dwarf GJ 676A. Optimizing data analysis techniques for the detection of multi-planetary systems // Astron. Astrophys. – 2012. – V. 548. – id. A58. – 12 pp.
- Antoniadou K.I., Voyatzis G.* Resonant periodic orbits in the exoplanetary systems // Astrophys. Space Sci. – 2014. – V. 349. – Iss. 2. – P. 657–676.
- Applegate J.H., Douglas M.R., Gursel Y., et al.* The outer Solar System for 200 million years // Astron. J. – 1986. – V. 92. – P. 176–194.
- Astudillo-Defru N., Forveille T., Bonfils X. et al.* The HARPS search for southern extra-solar planets XLI. A dozen planets around the M dwarfs GJ 3138, GJ 3323, GJ 273, GJ 628, and GJ 3293 // Astron. Astrophys. – 2017. – V. 602. – id. A88. – 21 pp.
- Batygin K., Laughlin G.* On the dynamical stability of the Solar system // Astrophys. J. – 2008. – V. 683. – P. 1207–1216.
- Batygin K., Morbidelli A.* Dissipative divergence of resonant orbits // Astrophys. J. – 2012. – V. 145. – Iss. 1. – id. 1. – 10 pp.
- Batygin K.* Capture of planets into mean motion resonances and the origins of extrasolar orbital architectures // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2015. – V. 451. – Iss. 3. – P. 2589–2609.
- Benettin G., Giorgilli A.* On the Hamiltonian interpolation of near-to-the identity symplectic mappings with application to symplectic integration algorithms // J. Stat. Phys. – 1994. – V. 74. – P.1117–1143.
- Biscani F.* The Piranha computer algebra system // <https://github.com/bluescarni/piranha>. – 2019.
- Bogoliubov N., Mitropolsky, Y.A.* Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. Paris: Gordon & Breach, 1961. 548 pp.

- Bonfils X., Lo Curto G., Correia A.C.M. et al.* The HARPS search for southern extra-solar planets. XXXIV. A planetary system around the nearby M dwarf GJ 163, with a super-Earth possibly in the habitable zone // *Astron. Astrophys.* – 2013. – V. 556. – id. A110. – 16 pp.
- Butler P., Tinney C., Marcy G., et al. Two New Planets from the Anglo-Australian Planet Search // *Astrophys. J.* – 2001. – V. 555. – P. 410–417.
- Cincotta P.M., Giordano C.M., Simo C.* Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits // *Physica D.* – 2003. – V. 182. – P. 151–178.
- Davies M.B., Adams F.C., Armitage P. et al.* The long-term dynamical evolution of planetary systems. // *Protostars and Planets VI.* Tucson: University of Arizona Press, 2013. P. 787–808.
- Deprit A.* Canonical transformations depending on a small parameter // *Celest. Mech.* – 1969. – V. 1. – P. 2–30.
- Euler L.* *Theoria motuum planetarum et cometarum.* Ambrosius Haude, 1744.
- Everhart E.* Implicit single-sequence methods for integrating orbits // *Celest. Mech.* – 1974. – V. 10. – P. 35–55.
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T.A., Beauge C. Regular motions in extrasolar planetary systems // *Chaotic Worlds: From Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems.* Dordrecht: Springer. 2006. P. 255–288.
- Fienga A., Deram P., Viswanathan V., et al.* INPOP19a planetary ephemerides, 2019.
- Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H., et al.* The planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431 // *IPN Progress Report.* – 2014. – V. 42. – №. 196. – P. 1–81.
- Fulton B. J., Petigura E. A., Howard A. W., Isaacson H.* The California-Kepler Survey. III. A Gap in the Radius Distribution of Small Planets // *Astron. J.* – 2017. – V. 154. Iss. 3. – id. 109. – 19 pp.
- Gallardo T., Beauge C., Giuppone C.A.* Semianalytical model for planetary resonances. Application to planets around single and binary stars // *Astron. Astrophys.* – 2021. – V. 646. – id. A148. – 14 pp.

- Giorgilli A., Locatelli U., Sansottera M.* Kolmogorov and Nekhoroshev theory for the problem of three bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* – 2009. – V. 104. – P. 159-173.
- Giorgilli A., Locatelli U., Sansottera M.* Secular dynamics of a planar model of the Sun – Jupiter – Saturn – Uranus system; effective stability into the light of Kolmogorov and Nekhoroshev theories // *Regul. Chaot. Dyn.* – 2017. – V. 22. – Iss. 1. – P. 54-77.
- Goldstein D.* The near-optimality of Stormer methods for long time integrations of $y''=g(y)$ // Ph.D. Dissertation, Univ. of California, Los Angeles, Dept. of Mathematics, 1996.
- Goździewski K., Bois E., Maciejewski A. J., et al.* Global dynamics of planetary systems with the MEGNO criterion // *Astron. Astrophys.* – 2001. – V. 378. – P. 569–586.
- Goździewski K., Maciejewski A., Migaszewski C.* On the Extrasolar Multiplanet System around HD 160691 // *Astrophys. J.* – 2007. – 2007. – V. 657. – P. 546–558.
- Goździewski K., Breiter S., Borczyk W.* The long-term stability of extrasolar system HD37124. Numerical study of resonance effects // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2008. – V. 383. – Iss. 3. – P. 989-999.
- Guzzo M.* The web of three-planet resonances in the outer Solar System // *Icarus.* – 2005. – V. 174. – P. 273–284.
- Guzzo M.* The web of three-planet resonances in the outer Solar System. II. A source of orbital instability for Uranus and Neptune // *Icarus.* – 2006. – V. 181. – P. 475–485.
- Haret S.C.* Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires // *Ann. Obs. Paris.* – 1885. – V. XVIII. – P. I1–I39.
- Hayes W.B.* Is the outer Solar system chaotic? // *Nature Phys.* – 2007. – V. 3. – P. 689–691.
- Hori G.-I.* Theory of general perturbations with unspecified canonical variables // *Publ. Astron. Soc. Jpn.* – 1966. – V. 18. – № 4. – P. 287–296.
- Howard A.W.* Observed properties of extrasolar planets // *Science.* – 2013. – V. 340. – P. 572–576.

- Ito T., Tanikawa K.* Long-term integrations and stability of planetary orbits in our Solar System // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2002. – V. 336. – P. 483–500.
- Juric M., Tremaine S.* Dynamical origin of extrasolar planet eccentricity distribution // *Astrophys. J.* – 2008. – V. 686. – Iss. 1. – P. 603–620.
- Kholshevnikov K.V., Kokhirova G.I., Babadzhanov P.B., et al.* Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2016. – V. 462. – P. 2275–2283.
- Lagrange J.L.* Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Première partie contenant les principes et les formules générales pour déterminer ces variations. Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1781.
- Lagrange J.L.* Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Seconde partie contenant la détermination de ces variations pour chacune des planètes principales. Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1782.
- la Place P.S.* Mécanique céleste. Hillard, Gray, Little and Wilkins, 1829.
- Laskar J.* Secular evolution of the solar system over 10 million years // *Astron. Astrophys.* – 1988. – V. 198. – P. 341–362.
- Laskar J.* A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System // *Nature.* – 1989. – V. 338. – P. 237–238.
- Laskar J.* The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones // *Icarus.* – 1990. – V. 88. – Iss. 2. – P. 266–291.
- Laskar J.* Large-scale chaos in the Solar system // *Astron. Astrophys.* – 1994. – V. 287. – P. L9–L12 .
- Laskar J.* Large scale chaos and marginal stability in the Solar System // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* – 1996. – V. 64. – P. 115–162.
- Laskar J.* Chaotic diffusion in the Solar System // *Icarus.* – 2008. – V. 196. – Iss. 1. – P. 1–15.
- Laskar J., Gastineau M.* Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth // *Nature Lett.* – 2009. – V. 459. – P. 817–819.
- Lichtenberg A.J., Lieberman M.A.* Regular and chaotic dynamics. New York: Springer-Verlag, 1992.

- Lissauer J.J., Gavino S.* Orbital stability of compact three-planet systems, I: Dependence of system lifetimes on initial orbital separations and longitudes // *Icarus*. – 2021. – V. 364. – id. 114470. – 16 pp.
- Locatelli U., Giorgilli A.* Invariant tori in the secular motions of the three-body planetary systems // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* – 2000. – V. 78. – P. 47–74.
- Marois C., Macintosh B., Barman T., et al.* Direct imaging of multiple planets orbiting the star HR 8799 // *Science*. – 2008. – V. 322. P. 1348–1352.
- Mayor M., Queloz D.* A Jupiter-mass companion to a solar-type star // *Nature*. – 1995. – V. 378. – Iss. 6555. – P. 355–359.
- McCarthy C., Butler P., Tinney C.* Multiple Companions to HD 154857 and HD 160691 // *Astrophys. J.* – 2004. V. 617. – P. 575–579.
- Mogavero F., Laskar J.* The origin of chaos in the Solar System through computer algebra // *Astron. Astrophys.* – 2022. – V. 662. – P. L3–L18.
- Morbidelli A., Giorgilli A.* Superexponential stability of KAM tori // *J. Stat. Phys.* – 1995. – V. 78. – P. 1607–1617.
- Moser J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // *Nachr. Akad. Wiss. Gtt., II. Math.-Phys. Kl.* – 1962. – P. 1–20.
- Murray N., Holman M.* The origin of chaos in the outer Solar System // *Science*. – 1999. – V. 283. – P. 1877–1881.
- Murray N., Holman M.* The role of chaotic resonances in the Solar System // *Nature*. – 2001. – V. 410. – P. 773–779.
- Mustill A.J., Veras D., Villaver E.* Long-term evolution of three-planet systems to the post-main sequence and beyond // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2013. – V. 437, Iss. 2. – P. 1404–1419.
- Park R.S., Folkner, W.M., Williams J.G., et al.* The JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE440 and DE441 // *Astron. J.* – 2021. – V. 161. – Iss. 3 – id. 105. – 15 pp.
- Pepe F., Correia A.C.M., Mayor M., et al.* Couetdic The HARPS search for southern extra-solar planets VIII. μ Arae, a system with four planets // *Astron. Astrophys.* – 2007. – V. 462. – P. 769–776.
- Perminov, A.S., Kuznetsov, E.D.* The implementation of Hori–Deprit method to the construction averaged planetary motion theory by means of computer

- algebra system Piranha // *Math. Comput. Sci.* – 2020a. – V. 14. – № 2. – P. 305–316.
- Perminov A., Kuznetsov E.* The orbital evolution of the Sun – Jupiter – Saturn – Uranus – Neptune system on long time scales // *Astrophys. Space Sci.* – 2020b. – V. 365. – № 8. – id. 144.
- Perminov A., Kuznetsov E.* The investigation of the dynamical evolution of extrasolar three-planetary system GJ 3138 // *Res. Astron. Astrophys.* – 2022a. – V. 22. – № 1. – id. 015007.
- Perminov A., Kuznetsov E.* The semi-analytical motion theory of the third order in planetary masses for the Sun – Jupiter – Saturn – Uranus – Neptune’s system // *International Astronomical Union Proceedings Series. Proceedings IAU Symposium № 364 / Eds. Sterken C., Hearnshaw J., Valls-Gabaud D.* – 2022b. – V. 15. – Iss. S364. – P. 211–213.
- Pitjeva E.V.* EPM2011 – updated planetary ephemerides of IAA RAS and their using for scientific reserches // *Sol. Syst. Res.* – 2013. – V. 47. – Iss. 4. – P. 386–402.
- Pitjeva E.V., Pavlov D.A., Aksim D., et al.* Planetary and lunar ephemeris EPM2021 and its significance for Solar system research // *Proceedings of the International Astronomical Union, Symposium S364.* – 2022. – V. 15. – P. 220–225.
- Poisson S.D.* Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes // *Journal de l’Ecole Polytechnique.* – 1809. – V. VIII. – P. 266–344.
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., et al.* Numerical recipes. The art of scientific computing. New York: Cambridge University Press, 2007.
- Rein H., Tamayo D.* WHFast: A fast and unbiased implementation of a symplectic Wisdom-Holman integrator for long term gravitational simulations // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2015. – V. 452. – Iss. 1. – P. 376–388.
- Saffe C., Gomez M., Chavero C.* On the ages of exoplanet host stars // *Astron. Astrophys.* – 2005. – V. 443. – Iss. 2. – P. 609–626.
- Sansottera M., Locatelli U., Giorgilli A.* A semi-analytic algorithm for constructing lower dimensional elliptic tori in planetary systems // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* – 2011. – V. 111. P. 337–361.

- Sansottera M., Locatelli U., Giorgilli A.* On the stability of the secular evolution of the planar Sun-Jupiter–Saturn–Uranus system // *Math. Comput. Simul.* – 2013. – V. 88. – P. 1-14.
- Santos N., Bouchy F., Mayor M., et al. The HARPS survey for southern extrasolar planets. II A 14 Earth-masses exoplanet around μ Arae // *Astron. Astrophys.* – 2004. – V. 426. – P. L19–L23.
- Schneider J.* The extrasolar planets encyclopaedia. <http://exoplanet.eu>. – 2010.
- Shevchenko I.I.* The Lidov–Kozai effect – applications in exoplanet research and dynamical astronomy. Switzerland: Springer International Publishing, 2017.
- Simon J.-L., Francou G., Fienga A., et al.* New analytical planetary theories VSOP2013 and TOP201 // *Astron. Astrophys.* – 2013. – V. 557. – id. A49. – 12 pp.
- Standish E.M.* JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE405/LE405 // JPL IOM. – 1998. – id. 312.F-98-048.
- Sussman G.J., Wisdom J.* Chaotic evolution of the Solar system // *Science.* – 1992. – V. 257. – P. 56–62.
- Teske J.K., Shectman S.A., Vogt S.S., et al.* The magellan PFS planet search program: radial velocity and stellar abundance analyses of the 360 au, metal-poor binary «twins» HD 133131 A&B // *Astron. J.* – 2016. – V. 152. Iss. 6. – id. 167. – 12 pp.
- Tremaine S., Zakamska N.L.* Extrasolar planet orbits and eccentricities // AIP Conference Proceedings. – 2004. – V. 713. – P. 243–252.
- Tsiganis K., Gomes R., Morbidelli A. et al.* Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System // *Nature Lett.* – 2005. – V. 435. – P. 459–461.
- Unger N., Segransan D., Queloz D. et al.* The HARPS search for southern extrasolar planets. XLVI. 12 super-Earths around the solar type stars HD 39194, HD 93385, HD 96700, HD 154088, and HD 189567 // *Astron. Astrophys.* – 2021. – V. 654. – P. A104–A122.
- Varadi F. NBI. A set of numerical integrators for the gravitational N-body problem. <http://www.atmos.ucla.edu>. – 1999.
- Vogt S., Butler P., Rivera E., et al.* A four-planet system orbiting the K0V star HD 141399 // *Astrophys J.* – 2014. – V. 787. – id. 97. – 10 pp.

- Volpi M., Roisin A., Libert A.-S.* The 3D secular dynamics of radial-velocity-detected planetary systems // *Astron. Astrophys.* – 2019. – V. 626. – id. A74. – 10 pp.
- Winn J.N., Fabrycky D.C. The occurrence and architecture of exoplanetary systems // *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* – 2015. V. 53. – P. 409–447.
- Wolszczan A., Frail D.* A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257+12 // *Nature.* – 1992. – V. 355. – P. 145–147.
- Zeebe R.E.* Dynamic stability of the Solar system: inconclusive results from ensemble integrators // *Astrophys. J.* – 2015. – V. 798. – id. 8. – 13 pp.

Приложение А

Программная реализация скриптов, используемых для построения разложения гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона

Здесь представлены скрипты на языке программирования Python, с помощью которых построено разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона.

В начале необходимо из библиотеки, представляющей собой систему компьютерной алгебры `pyranha`, импортировать функции для чтения/записи файлов с рядами, а также типы данных, используемые в этой системе.

```
from pyranha import data_format as df, compression as cf
from pyranha import save_file as sf, load_file as lf
from pyranha.types import divisor, divisor_series, monomial,\
    polynomial, poisson_series, int16, rational
```

Далее необходимо сконструировать следующие типы данных: полиномиальные ряды `pt` с рациональными коэффициентами и степенями переменных, ряды Пуассона `pst` с аналогичными коэффициентами и степенями переменных и эшелонированные ряды Пуассона `epst` в которых коэффициенты при переменных в знаменателях целочисленные.

```
pt = polynomial[rational, monomial[rational]]()
pst = poisson_series[polynomial[rational, monomial[rational]]]()
epst = poisson_series[divisor_series[polynomial[rational, \
    monomial[rational]], divisor[int16]]]()
```

Скрипт `besselJ(n, x, order)` реализует алгоритм построения ряда для функции Бесселя порядка `n` с аргументом `x` с точностью до слагаемых со степенью `order`.

```

def besselJ(n, x, order):
    from pyranha.math import factorial
    from fractions import Fraction as F
    temp = 0
    for m in range(0, int((order-n)/2) + 1):
        temp = temp + F((-1)**m, factorial(m)*factorial(m+n))*\
            (x/2)**(2*m+n)
    return temp

```

Скрипт `binomial_exp(x, y, r, order)` реализует биномиальное разложение в ряд выражения $(x + y)**r$ с точностью до слагаемых степени `order`.

```

def binomial_exp(x, y, r, order):
    from pyranha.math import binomial
    temp = 0
    for k in range(0, order + 1):
        temp = temp + binomial(r, k) * x**(r-k) * y**k
    return temp

```

Скрипт `r_a(e, M, order)` реализует функцию для построения классического разложения небесной механики r/a по степеням эксцентриситета e и кратным средней аномалии M с точностью до слагаемых степени `order`.

```

def r_a(e, M, order):
    from pyranha.math import cos
    from fractions import Fraction as F
    temp = 1 + F(1, 2) * e**2
    for k in range(1, order + 1):
        temp = temp - e * F(1, k) * (besselJ(k-1, k*e, order-1) -\
            besselJ(k+1, k*e, order-1)) * cos(k*M)
    return temp

```

Скрипт `a_r(e, M, order)` реализует функцию для построения классического разложения небесной механики a/r по степеням эксцентриситета e и кратным средней аномалии M с точностью до слагаемых степени `order`.

```

def a_r(e, M, order):
    from pyranha.math import cos
    from fractions import Fraction as F
    temp = 1
    for k in range(1, order + 1):
        temp = temp + F(2, 1) * besselJ(k, k*e, order) * \ cos(k*M)
    return temp

```

Скрипт `cos_E(e, M, order)` реализует функцию для построения классического разложения небесной механики $\cos E$ по степеням эксцентриситета e и кратным средней аномалии M с точностью до слагаемых степени `order`.

```

def cos_E(e, M, order):
    from pyranha.math import cos
    from fractions import Fraction as F
    temp = F(-1, 2) * e
    for k in range(1, order + 2):
        temp = temp + F(1, k) * (besselJ(k-1, k*e, order) -\
                                besselJ(k+1, k*e, order)) * cos(k*M)
    return temp

```

Скрипт `sin_E(e, M, order)` реализует функцию для построения классического разложения небесной механики $\sin E$ по степеням эксцентриситета e и кратным средней аномалии M с точностью до слагаемых степени `order`.

```

def sin_E(e, M, order):
    from pyranha.math import sin
    from fractions import Fraction as F
    temp = 0
    for k in range(1, order + 2):
        temp = temp + F(1, k) * (besselJ(k-1, k*e, order) +\
                                besselJ(k+1, k*e, order)) * sin(k*M)
    return temp

```

Функции выше можно поместить в отдельный модуль `eps.keproc` (назовём его кеплеровский процессор).

Скрипт `kepler_trig_expand(s)` реализует функцию, преобразующую синусы и косинусы кратных средней аномалии в ряде s в степени синусов и косинусов средней аномалии.

```

def kepler_trig_expand(s):
    from math import ceil
    from pyranha.math import binomial, cos, sin, degree
    temp, e, M, ecosM, esinM = 0, epst('e'), epst('M'), epst('ecosM'), epst('esinM')
    n = degree(s).numerator
    s_list = s.list
    for i in range(len(s_list)):
        for j in range(n+1):
            trig_cos, trig_sin = 0, 0
            # вычисление cos(nM):
            if s_list[i][1] == cos(j*M):
                for k in range(int(ceil(j/2))+1):
                    trig_cos = trig_cos + (-1)**k * binomial(j, 2*k) * \
                                ecosM**(j-2*k) * esinM**(2*k) * e**(-j)
                    temp = temp + s_list[i][0] * trig_cos
            # вычисление sin(nM):
            if s_list[i][1] == sin(j*M):
                for k in range(int(ceil((j-1)/2))+1):
                    trig_sin = trig_sin + (-1)**k * binomial(j, 2*k+1) * \
                                ecosM**(j-2*k-1) * esinM**(2*k+1) * e**(-j)
                    temp = temp + s_list[i][0] * trig_sin
    if type(temp) != type(1): temp = temp.trim()
    return temp

```

Скрипт `xyz(p, n)` реализует функцию для построения рядов, представляющих разложения декартовых координат x , y и z по элементам второй системы Пуанкаре. Здесь p — индекс элемента, соответствующий порядковому номеру планеты, n — максимальная степень эксцентрических и облических элементов Пуанкаре.

```
def xyz(p, n):
    from pyranha.math import cos, sin
    from eps.keproc import binomial_exp, cos_E, sin_E
    deg_max, e_max = n/2 + 1, n
    MM, LL, xx, yy, uu, vv, qq = [epst(i+str(p)) for i in \
        ('m', 'L', 'x', 'y', 'u', 'v', 'q')]
    K0, ee, MA, = epst('K0'), epst('e'), epst('M')
    ecosM, esinM = epst('ecosM'), epst('esinM')
    S1 = epst('s'+str(p-1)) if p != 1 else F(1, 1)
    S2 = epst('s'+str(p))

    temp1 = binomial_exp(epst(1), -epst('eps'), -1, deg_max)
    temp2 = binomial_exp(epst(1), -epst('eps'), F(1,2), deg_max)
    temp3 = F(1,4)*LL**-1 * temp1.subs('eps', F(1,2)*LL**-1 * (xx**2 + yy**2))
    temp5 = LL**F(-1,2) * temp2.subs('eps', F(1,4)*LL**-1 * (xx**2 + yy**2))
    temp4 = LL**F(-1,2) * temp1.subs('eps', F(1,2)*LL**-1 * \
        (xx**2 + yy**2)) * temp2.subs('eps', F(1,4)*LL**-1 * \
        (2*(xx**2 + yy**2) + (uu**2 + vv**2)))
    cos2I = 1 - (uu**2 + vv**2) * temp3
    sin2Icos2Om = (uu**2 - vv**2) * temp3
    sin2Isin2Om = -2*(uu * vv) * temp3
    sinIsin0m = -vv * temp4
    sinIcos0m = uu * temp4
    ecospi = xx * temp5
    esinpi = -yy * temp5

    temp = binomial_exp(epst(1), -ee**2, F(1,2), e_max)
    sqrt1 = F(1,2)*(1 + temp)
    sqrt2 = F(1,2)*(1 - temp)
    cosEM1 = cos_E(ee, MA, e_max) * cos(MA) + sin_E(ee, MA, e_max) * sin(MA)
    cosEM2 = cos_E(ee, MA, e_max) * cos(MA) - sin_E(ee, MA, e_max) * sin(MA)
    sinEM1 = sin_E(ee, MA, e_max) * cos(MA) - cos_E(ee, MA, e_max) * sin(MA)
    sinEM2 = sin_E(ee, MA, e_max) * cos(MA) + cos_E(ee, MA, e_max) * sin(MA)
    cosEM1 = (sqrt1 * cosEM1).truncate_degree(e_max, ['e'])
    cosEM2 = (sqrt2 * cosEM2).truncate_degree(e_max, ['e'])
    sinEM1 = (sqrt1 * sinEM1).truncate_degree(e_max, ['e'])
    sinEM2 = (sqrt2 * sinEM2).truncate_degree(e_max, ['e'])
    cosEM1 = kepler_trig_expand(cosEM1)
    cosEM2 = kepler_trig_expand(cosEM2)
    sinEM1 = kepler_trig_expand(sinEM1)
    sinEM2 = kepler_trig_expand(sinEM2)
    X_a = -ecosM + cosEM1 + cosEM2
    Y_a = esinM + sinEM1 - sinEM2
    X_a = X_a.subs('e', ee**F(1,2))
    Y_a = Y_a.subs('e', ee**F(1,2))
```

```

subs1 = ecospi * cos(qq) + esinpi * sin(qq)
subs2 = ecospi * sin(qq) - esinpi * cos(qq)
subs3 = LL**(-1) * (xx**2 + yy**2) * (1 - F(1,4)*LL**(-1) * (xx**2 + yy**2))

pt.set_auto_truncate_degree(F(n),\
['x'+str(p), 'y'+str(p), 'u'+str(p), 'v'+str(p)])
X_a = X_a.subs('ecosM', subs1)
X_a = X_a.subs('esinM', subs2)
X_a = X_a.subs('e', subs3)
Y_a = Y_a.subs('ecosM', subs1)
Y_a = Y_a.subs('esinM', subs2)
Y_a = Y_a.subs('e', subs3)
aa = (K0*MM**2*S1)**(-1)*S2*LL**2
xa = aa *\
(X_a * (cos2I * cos(qq) + sin2Icos20m * cos(qq) + sin2Isin20m * sin(qq)) -\
Y_a * (cos2I * sin(qq) + sin2Icos20m * sin(qq) - sin2Isin20m * cos(qq)))
ya = aa *\
(X_a * (cos2I * sin(qq) - sin2Icos20m * sin(qq) + sin2Isin20m * cos(qq)) +\
Y_a * (cos2I * cos(qq) - sin2Icos20m * cos(qq) - sin2Isin20m * sin(qq)))
za = aa *\
(X_a * (sinIcos0m * sin(qq) - sinIsin0m * cos(qq)) +\
Y_a * (sinIcos0m * cos(qq) + sinIsin0m * sin(qq)))
pt.unset_auto_truncate_degree()
return [xa.trim(), ya.trim(), za.trim()]

```

Скрипт `one_r(p, n, deg)` реализует функцию для построения ряда, представляющего разложение величины $1/r$ в степени `deg` по элементам второй системы Пуанкаре. Здесь `p` — индекс элемента, соответствующий порядковому номеру планеты, `n` — максимальная степень эксцентрических и облических элементов Пуанкаре.

```

def one_r(p, n, deg):
    from pyranha.math import cos, sin
    from eps.keproc import binomial_exp, a_r
    deg_max, e_max = n/2 + 1, n
    MM, LL, xx, yy, uu, vv, qq =\
    [epst(i+str(p)) for i in ('m', 'L', 'x', 'y', 'u', 'v', 'q')]
    K0, ee, MA = epst('K0'), epst('e'), epst('M')
    S1 = epst('s'+str(p-1)) if p != 1 else F(1, 1)
    S2 = epst('s'+str(p))

    temp2 = binomial_exp(epst(1), -epst('eps'), F(1,2), deg_max)
    temp5 = LL**F(-1,2) * temp2.subs('eps', F(1,4)*LL**(-1) * (xx**2 + yy**2))
    ecospi = xx * temp5
    esinpi = -yy * temp5

    ar = a_r(ee, MA, e_max)
    ar = kepler_trig_expand(ar)
    ar = ar.subs('e', ee**F(1,2))
    subs1 = ecospi * cos(qq) + esinpi * sin(qq)
    subs2 = ecospi * sin(qq) - esinpi * cos(qq)

```

```

subs3 = LL**-1 * (xx**2 + yy**2) * (1 - F(1,4)*LL**-1 * (xx**2 + yy**2))

pt.set_auto_truncate_degree(F(n), ['x'+str(p), 'y'+str(p)])
ar = ar.subs('ecosM', subs1)
ar = ar.subs('esinM', subs2)
ar = ar.subs('e', subs3)
ar = ar.trim()
aa = (K0*MM**2*S1)**-1*S2*LL**2
ar_deg = (ar*aa**-1)**deg
pt.unset_auto_truncate_degree()
return ar_deg.trim()

```

Скрипт `rrr(p, n, deg)` реализует функцию для построения ряда, представляющего разложение величины r в степени `deg` по элементам второй системы Пуанкаре. Здесь p — индекс элемента, соответствующий порядковому номеру планеты, n — максимальная степень эксцентрических и облических элементов Пуанкаре.

```

def rrr(q, n, deg):
    from pyranha.math import cos, sin
    from eps.keproc import binomial_exp, r_a
    deg_max, e_max = n/2 + 1, n
    MM, LL, xx, yy, uu, vv, qq = \
    [epst(i+str(q)) for i in ('m', 'L', 'x', 'y', 'u', 'v', 'q')]
    K0, ee, MA = epst('K0'), epst('e'), epst('M')
    S1 = epst('s'+str(q-1)) if q != 1 else F(1, 1)
    S2 = epst('s'+str(q))

    temp2 = binomial_exp(epst(1), -epst('eps'), F(1,2), deg_max)
    temp5 = LL**F(-1,2) * temp2.subs('eps', F(1,4)*LL**-1 * (xx**2 + yy**2))
    ecospi = xx * temp5
    esinpi = -yy * temp5

    ra = r_a(ee, MA, e_max)
    ra = kepler_trig_expand(ra)
    ra = ra.subs('e', ee**F(1,2))
    subs1 = ecospi * cos(qq) + esinpi * sin(qq)
    subs2 = ecospi * sin(qq) - esinpi * cos(qq)
    subs3 = LL**-1 * (xx**2 + yy**2) * (1 - F(1,4)*LL**-1 * (xx**2 + yy**2))

    pt.set_auto_truncate_degree(F(n), ['x'+str(q), 'y'+str(q)])
    ra = ra.subs('ecosM', subs1)
    ra = ra.subs('esinM', subs2)
    ra = ra.subs('e', subs3)
    ra = ra.trim()
    aa = (K0*MM**2*S1)**-1*S2*LL**2
    ra_deg = (ra*aa)**deg
    pt.unset_auto_truncate_degree()
    return ra_deg.trim()

```

Скрипт `cosine(p, q, n, deg)` реализует функцию для построения ряда, представляющего разложение косинуса угла между радиус-векторами двух

планет в степени `deg` по элементам второй системы Пуанкаре. Здесь `p` и `q` — индексы элементов, соответствующие порядковым номерам планет, `n` — максимальная степень эксцентрических и облических элементов Пуанкаре.

```
def cosine(p, q, n, deg):
    one_ra = one_r(p, n, deg)
    one_rb = one_r(q, n, deg)
    xa, ya, za = xyz(p, n)
    xb, yb, zb = xyz(q, n)
    pt.set_auto_truncate_degree(F(n), ['x'+str(p), 'y'+str(p), 'u'+str(p), 'v'+str(p),\
    'x'+str(q), 'y'+str(q), 'u'+str(q), 'v'+str(q)])
    cosine = (xa*xb + ya*yb + za*zb)**deg * one_ra*one_rb
    pt.unset_auto_truncate_degree()
    return cosine
```

Скрипт `one_delta(p, q, n, c_max, deg)` реализует функцию для построения ряда, представляющего разложение величины $1/\Delta_{pq}$ в степени `deg` по элементам второй системы Пуанкаре. Здесь `p` и `q` — индексы элементов, соответствующие порядковым номерам планет, `n` — максимальная степень эксцентрических и облических элементов Пуанкаре, `c_max` — максимальное число полиномов Лежандра, учитываемых в разложении.

```
def one_delta(p, q, n, c_max, deg):
    from pyranha.math import factorial
    ra = rrr(p, n, 1)
    br = one_r(q, n, 1)
    delta = br
    for i in range(1, c_max+1):
        cos_deg.append(cosine(p, q, n, i))

    pt.set_auto_truncate_degree(F(n),\
    ['x'+str(p), 'y'+str(p), 'u'+str(p), 'v'+str(p),\
    'x'+str(q), 'y'+str(q), 'u'+str(q), 'v'+str(q)])
    rr = ra * br
    for c in range(1, c_max+1):
        legPn = 0
        for k in range(0, int(c/2) + 1):
            legPn = legPn + (-1)**k * F(factorial(2*(c - k)), 2**c * factorial(k) *\
            factorial(c - k) * factorial(c - 2*k)) * cos_deg[c - 2*k]
        rr_n = br * rr**c
        temp = rr_n * legPn
        delta = delta + temp
    if deg > 1: delta = delta**deg
    pt.unset_auto_truncate_degree()
    return delta
```

Приложение Б

Отрезки рядов, представляющие осреднённый гамильтониан четырёхпланетной задачи

Ниже приведён отрезок ряда, представляющий осреднённый гамильтониан H_1 .

$$\begin{aligned}
 H_1 = & -\frac{\varkappa_0^2 m_1 m_2^3 \bar{m}_1}{\mathcal{L}_2^2 \bar{m}_2} - \frac{1}{4} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^4 m_2^7 \bar{m}_1^5}{\mathcal{L}_2^6 m_1^3 \bar{m}_2^3} - \frac{9}{64} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^8 m_2^{11} \bar{m}_1^9}{\mathcal{L}_2^{10} m_1^7 \bar{m}_2^5} - \\
 & - \frac{25}{256} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{15} \bar{m}_1^{13}}{\mathcal{L}_2^{14} m_1^{11} \bar{m}_2^7} - \frac{1225}{16384} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{16} m_2^{19} \bar{m}_1^{17}}{\mathcal{L}_2^{18} m_1^{15} \bar{m}_2^9} - \frac{3}{4} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{7/2} m_2^7 \bar{m}_1^5}{\mathcal{L}_2^{13/2} m_1^3 \bar{m}_2^3} (\Xi_{2,1} \Xi_{2,2} + H_{2,1} H_{2,2}) + \\
 & + \frac{15}{16} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{11/2} m_2^9 \bar{m}_1^7}{\mathcal{L}_2^{17/2} m_1^5 \bar{m}_2^4} (\Xi_{1,1} \Xi_{1,2} + H_{1,1} H_{1,2}) - \frac{45}{32} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{15/2} m_2^{11} \bar{m}_1^9}{\mathcal{L}_2^{21/2} m_1^7 \bar{m}_2^5} (\Xi_{2,1} \Xi_{2,2} + H_{2,1} H_{2,2}) + \\
 & + \frac{105}{64} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{19/2} m_2^{13} \bar{m}_1^{11}}{\mathcal{L}_2^{25/2} m_1^9 \bar{m}_2^6} (\Xi_{1,1} \Xi_{1,2} + H_{1,1} H_{1,2}) - \frac{525}{256} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{23/2} m_2^{15} \bar{m}_1^{13}}{\mathcal{L}_2^{29/2} m_1^{11} \bar{m}_2^7} (\Xi_{2,1} \Xi_{2,2} + H_{2,1} H_{2,2}) - \\
 & - \frac{4725}{2048} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{27/2} m_2^{17} \bar{m}_1^{15}}{\mathcal{L}_2^{33/2} m_1^{13} \bar{m}_2^8} (\Xi_{1,1} \Xi_{1,2} + H_{1,1} H_{1,2}) - \frac{11025}{4096} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{31/2} m_2^{19} \bar{m}_1^{17}}{\mathcal{L}_2^{37/2} m_1^{15} \bar{m}_2^9} (\Xi_{2,1} \Xi_{2,2} + H_{2,1} H_{2,2}) - \\
 & - \frac{3}{8} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^3 m_2^7 \bar{m}_1^5}{\mathcal{L}_2^6 m_1^3 \bar{m}_2^3} (\Xi_{1,1}^2 + H_{1,1}^2 - \Xi_{2,1}^2 - H_{2,1}^2) - \frac{3}{8} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^4 m_2^7 \bar{m}_1^5}{\mathcal{L}_2^7 m_1^3 \bar{m}_2^3} (\Xi_{1,2}^2 + H_{1,2}^2 - \Xi_{2,2}^2 - H_{2,2}^2) + \\
 & - \frac{45}{64} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^7 m_2^{11} \bar{m}_1^9}{\mathcal{L}_2^{10} m_1^7 \bar{m}_2^5} (\Xi_{1,1}^2 + H_{1,1}^2 - \Xi_{2,1}^2 - H_{2,1}^2) - \frac{45}{64} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^8 m_2^{11} \bar{m}_1^9}{\mathcal{L}_2^{11} m_1^7 \bar{m}_2^5} (\Xi_{1,2}^2 + H_{1,2}^2 - \Xi_{2,2}^2 - H_{2,2}^2) - \\
 & - \frac{525}{512} \frac{\varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{15} \bar{m}_1^{13}}{\mathcal{L}_2^{14} m_1^{11} \bar{m}_2^7} (\Xi_{1,1}^2 + H_{1,1}^2 - \Xi_{2,1}^2 - H_{2,1}^2) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{525 \varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{15} \bar{m}_1^{13}}{512 \mathcal{L}_2^{15} m_1^{11} \bar{m}_2^7} (\Xi_{1,2}^2 + H_{1,2}^2 - \Xi_{2,2}^2 - H_{2,2}^2) - \\
& - \frac{11025 \varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{15} m_2^{19} \bar{m}_1^{17}}{8192 \mathcal{L}_2^{18} m_1^{15} \bar{m}_2^9} (\Xi_{1,1}^2 + H_{1,1}^2 - \Xi_{2,1}^2 - H_{2,1}^2) - \\
& - \frac{11025 \varkappa_0^2 \mathcal{L}_1^{16} m_2^{19} \bar{m}_1^{17}}{8192 \mathcal{L}_2^{19} m_1^{15} \bar{m}_2^9} (\Xi_{1,2}^2 + H_{1,2}^2 - \Xi_{2,2}^2 - H_{2,2}^2) + \dots
\end{aligned}$$

Ниже приведён отрезок ряда, представляющий осреднённый гамильтониан H_2 (а именно, числитель слагаемого, содержащего знаменатель $(2\nu_1 - 5\nu_2)$).

$$\begin{aligned}
H_2 = & \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,1} H_{2,1} \Xi_{1,2} H_{1,2}}{2048 \mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,2} H_{2,2} \Xi_{1,2} H_{1,2}}{2048 \mathcal{L}_2^{19} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \\
& - \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{23/2} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,1} H_{2,2} \Xi_{1,2} H_{1,2}}{2048 \mathcal{L}_2^{37/2} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{23/2} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,2} H_{2,1} \Xi_{1,2} H_{1,2}}{2048 \mathcal{L}_2^{37/2} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \\
& + \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{23/2} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} H_{2,1} H_{2,2} \Xi_{1,2}^2}{4096 \mathcal{L}_2^{37/2} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{23/2} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,1} \Xi_{2,2} H_{1,2}^2}{4096 \mathcal{L}_2^{37/2} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \\
& - \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{23/2} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} H_{2,1} H_{2,2} H_{1,2}^2}{4096 \mathcal{L}_2^{37/2} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{23/2} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,1} \Xi_{2,2} \Xi_{1,2}^2}{4096 \mathcal{L}_2^{37/2} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \\
& - \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,1}^2 H_{1,2}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} H_{2,1}^2 H_{1,2}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \\
& + \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,1}^2 \Xi_{1,2}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} H_{2,1}^2 \Xi_{1,2}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \\
& - \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,2}^2 H_{1,2}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{19} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} H_{2,2}^2 H_{1,2}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{19} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \\
& + \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{2,2}^2 \Xi_{1,2}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{19} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \frac{1153425 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} H_{2,2}^2 \Xi_{1,2}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{19} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \\
& - \frac{14487525 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{19/2} m_2^{16} \bar{m}_1^{12} \Xi_{1,1} \Xi_{1,2}^3}{4096 \mathcal{L}_2^{33/2} m_1^8 \bar{m}_2^7} - \frac{14487525 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{19/2} m_2^{16} \bar{m}_1^{12} \Xi_{1,2}^2 H_{1,1} H_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{33/2} m_1^8 \bar{m}_2^7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{14487525 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{19/2} m_2^{16} \bar{m}_1^{12} H_{1,1} H_{1,2}^3}{4096 \mathcal{L}_2^{33/2} m_1^8 \bar{m}_2^7} - \frac{14487525 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{19/2} m_2^{16} \bar{m}_1^{12} \Xi_{1,1} \Xi_{1,2} H_{1,2}^2}{4096 \mathcal{L}_2^{33/2} m_1^8 \bar{m}_2^7} + \\
& + \frac{16513275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{1,2}^2 H_{1,1}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \frac{16513275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{1,1}^2 H_{1,2}^2}{8192 \mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} - \\
& - \frac{18202275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} H_{1,1}^3 H_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \frac{18202275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{1,2}^2 H_{1,1} H_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \\
& - \frac{18202275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{1,1} \Xi_{1,2}^3}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \frac{18202275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} H_{1,1} H_{1,2}^3}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \\
& - \frac{18202275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{1,1}^2 H_{1,1} H_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \frac{18202275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{1,1}^3 \Xi_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \\
& - \frac{18202275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{1,1} \Xi_{1,2} H_{1,2}^2}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \frac{18202275 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{1,1} \Xi_{1,2} H_{1,1}^2}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} + \\
& + \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{13} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,2} H_{2,1} \Xi_{1,2} H_{1,1}}{4096 \mathcal{L}_2^{20} m_1^{12} \bar{m}_2^9} + \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{13} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,1} H_{2,2} \Xi_{1,2} H_{1,1}}{4096 \mathcal{L}_2^{20} m_1^{12} \bar{m}_2^9} + \\
& + \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{13} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,1} \Xi_{2,2} \Xi_{1,1} \Xi_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{20} m_1^{12} \bar{m}_2^9} + \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{13} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,1} H_{2,2} \Xi_{1,1} H_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{20} m_1^{12} \bar{m}_2^9} + \\
& + \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{13} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,2} H_{2,1} \Xi_{1,1} H_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{20} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{13} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,1} \Xi_{2,2} H_{1,1} H_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{20} m_1^{12} \bar{m}_2^9} + \\
& + \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{13} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} H_{2,1} H_{2,2} H_{1,1} H_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{20} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{13} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} H_{2,1} H_{2,2} \Xi_{1,1} \Xi_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{20} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \\
& - \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,1} H_{2,1} \Xi_{1,1} H_{1,2}}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,1} H_{2,1} \Xi_{1,2} H_{1,1}}{4096 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \\
& - \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,1}^2 \Xi_{1,1} \Xi_{1,2}}{8192 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} + \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} H_{2,1}^2 \Xi_{1,1} \Xi_{1,2}}{8192 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} - \\
& - \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} H_{2,1}^2 H_{1,1} H_{1,2}}{8192 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} + \frac{2600325 \varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{25/2} m_2^{20} \bar{m}_1^{16} \Xi_{2,1}^2 H_{1,1} H_{1,2}}{8192 \mathcal{L}_2^{39/2} m_1^{12} \bar{m}_2^9} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6426225}{4096} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^8 m_2^{14} \bar{m}_1^{10} \Xi_{1,2}^2 \mathbf{H}_{1,2}^2}{\mathcal{L}_2^{15} m_1^6 \bar{m}_2^6} + \frac{6426225}{8192} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^8 m_2^{14} \bar{m}_1^{10} \mathbf{H}_{1,2}^4}{\mathcal{L}_2^{15} m_1^6 \bar{m}_2^6} + \\
& + \frac{6426225}{8192} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^8 m_2^{14} \bar{m}_1^{10} \Xi_{1,2}^4}{\mathcal{L}_2^{15} m_1^6 \bar{m}_2^6} + \frac{8073975}{1024} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{1,1} \Xi_{1,2} \mathbf{H}_{1,1} \mathbf{H}_{1,2}}{\mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \\
& + \frac{19532175}{8192} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{1,2}^2 \mathbf{H}_{1,2}^2}{\mathcal{L}_2^{19} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \frac{19532175}{16384} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \mathbf{H}_{1,2}^4}{\mathcal{L}_2^{19} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \\
& + \frac{19532175}{16384} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{12} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{1,2}^4}{\mathcal{L}_2^{19} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \frac{32661225}{32768} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{1,2}^4}{\mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \\
& + \frac{32661225}{32768} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \mathbf{H}_{1,2}^4}{\mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \frac{32661225}{16384} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{1,2}^2 \mathbf{H}_{1,2}^2}{\mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \\
& + \frac{48809175}{8192} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \mathbf{H}_{1,1}^2 \mathbf{H}_{1,2}^2}{\mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \frac{48809175}{8192} \frac{\varkappa_0^4 \mathcal{L}_1^{11} m_2^{18} \bar{m}_1^{14} \Xi_{1,1}^2 \Xi_{1,2}^2}{\mathcal{L}_2^{18} m_1^{10} \bar{m}_2^8} + \dots
\end{aligned}$$

Приложение В

Численная оценка значений некоторых знаменателей, входящих в слагаемые осреднённого гамильтониана

В таблице В.1 приведены значения d_2 некоторых знаменателей, входящих в слагаемые осреднённого гамильтониана, значения d_1 соответствующих им числителей и отношение d_1/d_2 . Численная оценка проведена для средних элементов орбит и масс планет-гигантов Солнечной системы, приведённых в таблице 4.1.

Таблица В.1. Численная оценка значений некоторых знаменателей, входящих в слагаемые осреднённого гамильтониана

Знаменатель	d_2	d_1	d_1/d_2
$(\nu_1 - \nu_2)$	$8.67712945 \cdot 10^{-4}$	$-1.95492564 \cdot 10^{-15}$	$-2.25296357 \cdot 10^{-12}$
$(\nu_1 - \nu_2)^2$	$7.52925751 \cdot 10^{-7}$	$-3.60763931 \cdot 10^{-19}$	$-4.79149413 \cdot 10^{-13}$
$(\nu_1 - \nu_3)$	$1.24619775 \cdot 10^{-3}$	$-1.39088330 \cdot 10^{-18}$	$-1.11610160 \cdot 10^{-15}$
$(\nu_1 - \nu_3)^2$	$1.55300882 \cdot 10^{-6}$	$-1.04435351 \cdot 10^{-22}$	$-6.72471073 \cdot 10^{-17}$
$(\nu_1 - \nu_4)$	$1.34629460 \cdot 10^{-3}$	$-8.32665459 \cdot 10^{-20}$	$-6.18486814 \cdot 10^{-17}$
$(\nu_1 - \nu_4)^2$	$1.81250916 \cdot 10^{-6}$	$-5.50388018 \cdot 10^{-24}$	$-3.03660820 \cdot 10^{-18}$
$(\nu_1 - 2\nu_2)$	$2.85053592 \cdot 10^{-4}$	$8.15187739 \cdot 10^{-16}$	$2.85977010 \cdot 10^{-12}$
$(\nu_1 - 2\nu_2)^2$	$8.12555504 \cdot 10^{-8}$	$-1.65060032 \cdot 10^{-20}$	$-2.03136932 \cdot 10^{-13}$
$(\nu_1 - 2\nu_3)$	$1.04202320 \cdot 10^{-3}$	$2.26361542 \cdot 10^{-19}$	$2.17232728 \cdot 10^{-16}$
$(\nu_1 - 2\nu_3)^2$	$1.08581235 \cdot 10^{-6}$	$-8.04790368 \cdot 10^{-24}$	$-7.41187339 \cdot 10^{-18}$
$(\nu_1 - 2\nu_4)$	$1.24221691 \cdot 10^{-3}$	$1.22421903 \cdot 10^{-20}$	$9.85511481 \cdot 10^{-18}$
$(\nu_1 - 2\nu_4)^2$	$1.54310286 \cdot 10^{-6}$	$-2.31887735 \cdot 10^{-25}$	$-1.50273673 \cdot 10^{-19}$
$(\nu_1 - 3\nu_2)$	$-2.97605757 \cdot 10^{-4}$	$7.94016247 \cdot 10^{-17}$	$-2.66801373 \cdot 10^{-13}$
$(\nu_1 - 3\nu_2)^2$	$8.85691864 \cdot 10^{-8}$	$-1.22838028 \cdot 10^{-21}$	$-1.38691606 \cdot 10^{-14}$
$(\nu_1 - 3\nu_3)$	$8.37848653 \cdot 10^{-4}$	$7.59259821 \cdot 10^{-20}$	$9.06201634 \cdot 10^{-17}$
$(\nu_1 - 3\nu_3)^2$	$7.01990373 \cdot 10^{-7}$	$-5.21681613 \cdot 10^{-25}$	$-7.43146394 \cdot 10^{-19}$
$(\nu_1 - 3\nu_4)$	$1.13813923 \cdot 10^{-3}$	$3.14236967 \cdot 10^{-21}$	$2.76097124 \cdot 10^{-18}$
$(\nu_1 - 4\nu_2)$	$-8.80265108 \cdot 10^{-4}$	$4.49621196 \cdot 10^{-18}$	$-5.10779301 \cdot 10^{-15}$
$(\nu_1 - 4\nu_3)$	$6.33674111 \cdot 10^{-4}$	$4.58383865 \cdot 10^{-21}$	$7.23374770 \cdot 10^{-18}$

Продолжение таблицы В.1

Знаменатель	d_2	d_1	d_1/d_2
(ν_1)	$1.45037229 \cdot 10^{-3}$	$-7.12859965 \cdot 10^{-17}$	$-4.91501368 \cdot 10^{-14}$
$(\nu_1)^2$	$2.10357978 \cdot 10^{-6}$	$-2.65316451 \cdot 10^{-22}$	$-1.26126165 \cdot 10^{-16}$
$(\nu_1 + \nu_2)$	$2.03303164 \cdot 10^{-3}$	$-2.27098290 \cdot 10^{-18}$	$-1.11704258 \cdot 10^{-15}$
$(\nu_1 + \nu_2)^2$	$4.13321766 \cdot 10^{-6}$	$-5.15917688 \cdot 10^{-24}$	$-1.24822289 \cdot 10^{-18}$
$(\nu_1 + \nu_3)$	$1.65454684 \cdot 10^{-3}$	$-1.15028233 \cdot 10^{-21}$	$-6.95225002 \cdot 10^{-19}$
$(\nu_1 + \nu_4)$	$1.55444998 \cdot 10^{-3}$	$-2.97852320 \cdot 10^{-23}$	$-1.91612676 \cdot 10^{-20}$
$(\nu_1 + 2\nu_2)$	$2.61569099 \cdot 10^{-3}$	$-5.87328445 \cdot 10^{-20}$	$-2.24540455 \cdot 10^{-17}$
$(\nu_1 + 2\nu_3)$	$1.85872138 \cdot 10^{-3}$	$-2.64151671 \cdot 10^{-23}$	$-1.42114721 \cdot 10^{-20}$
$(\nu_2 - \nu_3)$	$3.78484804 \cdot 10^{-4}$	$-2.48146132 \cdot 10^{-18}$	$-6.55630369 \cdot 10^{-15}$
$(\nu_2 - \nu_3)^2$	$1.43250747 \cdot 10^{-7}$	$-1.50826469 \cdot 10^{-22}$	$-1.05288434 \cdot 10^{-15}$
$(\nu_2 - \nu_4)$	$4.78581662 \cdot 10^{-4}$	$-1.13113356 \cdot 10^{-19}$	$-2.36351211 \cdot 10^{-16}$
$(\nu_2 - \nu_4)^2$	$2.29040407 \cdot 10^{-7}$	$-6.33518161 \cdot 10^{-24}$	$-2.76596680 \cdot 10^{-17}$
$(\nu_2 - 2\nu_3)$	$1.74310260 \cdot 10^{-4}$	$6.89685453 \cdot 10^{-19}$	$3.95665438 \cdot 10^{-15}$
$(\nu_2 - 2\nu_3)^2$	$3.03840667 \cdot 10^{-8}$	$-1.06020651 \cdot 10^{-23}$	$-3.48935025 \cdot 10^{-16}$
$(\nu_2 - 2\nu_4)$	$3.74503975 \cdot 10^{-4}$	$3.81512022 \cdot 10^{-20}$	$1.01871288 \cdot 10^{-16}$
$(\nu_2 - 2\nu_4)^2$	$1.40253227 \cdot 10^{-7}$	$-3.48325818 \cdot 10^{-25}$	$-2.48354941 \cdot 10^{-18}$
$(\nu_2 - 3\nu_3)$	$-2.98642849 \cdot 10^{-5}$	$1.14398300 \cdot 10^{-19}$	$-3.83060572 \cdot 10^{-15}$
$(\nu_2 - 3\nu_3)^2$	$8.91875506 \cdot 10^{-10}$	$-5.55881424 \cdot 10^{-25}$	$-6.23272439 \cdot 10^{-16}$
$(\nu_2 - 3\nu_4)$	$2.70426287 \cdot 10^{-4}$	$4.95972039 \cdot 10^{-21}$	$1.83403783 \cdot 10^{-17}$
$(\nu_2 - 4\nu_3)$	$-2.34038830 \cdot 10^{-4}$	$5.15376918 \cdot 10^{-21}$	$-2.20210005 \cdot 10^{-17}$
$(\nu_2 - 4\nu_4)$	$1.66348599 \cdot 10^{-4}$	$7.66480407 \cdot 10^{-24}$	$4.60767576 \cdot 10^{-20}$
(ν_2)	$5.82659350 \cdot 10^{-4}$	$-4.05280811 \cdot 10^{-15}$	$-6.95570767 \cdot 10^{-12}$
$(\nu_2)^2$	$3.39491917 \cdot 10^{-7}$	$-1.10262667 \cdot 10^{-20}$	$-3.24787311 \cdot 10^{-14}$
$(\nu_2 + \nu_3)$	$7.86833896 \cdot 10^{-4}$	$-2.71145749 \cdot 10^{-21}$	$-3.44603545 \cdot 10^{-18}$
$(\nu_2 + \nu_4)$	$6.86737037 \cdot 10^{-4}$	$-5.73899102 \cdot 10^{-23}$	$-8.35689749 \cdot 10^{-20}$
$(\nu_2 + 2\nu_3)$	$9.91008442 \cdot 10^{-4}$	$-4.22563108 \cdot 10^{-23}$	$-4.26397083 \cdot 10^{-20}$
$(\nu_3 - \nu_4)$	$1.00096857 \cdot 10^{-4}$	$-1.87388807 \cdot 10^{-19}$	$-1.87207484 \cdot 10^{-15}$
$(\nu_3 - \nu_4)^2$	$1.00193808 \cdot 10^{-8}$	$-6.65320701 \cdot 10^{-24}$	$-6.64033750 \cdot 10^{-16}$
$(\nu_3 - 2\nu_4)$	$-3.98083047 \cdot 10^{-6}$	$1.22475027 \cdot 10^{-19}$	$-3.07662000 \cdot 10^{-14}$
$(\nu_3 - 2\nu_4)^2$	$1.58470113 \cdot 10^{-11}$	$-1.93065120 \cdot 10^{-25}$	$-1.21830620 \cdot 10^{-14}$
$(\nu_3 - 3\nu_4)$	$-1.08058518 \cdot 10^{-4}$	$5.36604093 \cdot 10^{-21}$	$-4.96586574 \cdot 10^{-17}$
$(\nu_3 - 3\nu_4)^2$	$1.16766433 \cdot 10^{-8}$	$-2.59697536 \cdot 10^{-27}$	$-2.22407698 \cdot 10^{-19}$
$(\nu_3 - 4\nu_4)$	$-2.12136206 \cdot 10^{-4}$	$7.75034511 \cdot 10^{-23}$	$-3.65347588 \cdot 10^{-19}$
(ν_3)	$2.04174545 \cdot 10^{-4}$	$-1.25634472 \cdot 10^{-16}$	$-6.15328772 \cdot 10^{-13}$
$(\nu_3)^2$	$4.16872447 \cdot 10^{-8}$	$-8.36794496 \cdot 10^{-23}$	$-2.00731543 \cdot 10^{-15}$
$(\nu_3 + \nu_4)$	$3.08252232 \cdot 10^{-4}$	$-2.21448755 \cdot 10^{-22}$	$-7.18401138 \cdot 10^{-19}$
(ν_4)	$1.04077688 \cdot 10^{-4}$	$-4.81446766 \cdot 10^{-17}$	$-4.62584034 \cdot 10^{-13}$
$(\nu_4)^2$	$1.08321650 \cdot 10^{-8}$	$-6.13930704 \cdot 10^{-25}$	$-5.66766386 \cdot 10^{-17}$
$(2\nu_1 - \nu_2)$	$2.31808523 \cdot 10^{-3}$	$-2.03254683 \cdot 10^{-17}$	$-8.76821441 \cdot 10^{-15}$
$(2\nu_1 - \nu_2)^2$	$5.37351915 \cdot 10^{-6}$	$-3.61988658 \cdot 10^{-22}$	$-6.73652867 \cdot 10^{-17}$
$(2\nu_1 - \nu_3)$	$2.69657004 \cdot 10^{-3}$	$-4.37079286 \cdot 10^{-20}$	$-1.62087125 \cdot 10^{-17}$
$(2\nu_1 - \nu_3)^2$	$7.27148996 \cdot 10^{-6}$	$-7.30186536 \cdot 10^{-26}$	$-1.00417733 \cdot 10^{-20}$
$(2\nu_1 - \nu_4)$	$2.79666689 \cdot 10^{-3}$	$-2.90512573 \cdot 10^{-21}$	$-1.03878146 \cdot 10^{-18}$

Продолжение таблицы В.1

Знаменатель	d_2	d_1	d_1/d_2
$(2\nu_1 - 3\nu_2)$	$1.15276653 \cdot 10^{-3}$	$2.14749239 \cdot 10^{-15}$	$1.86290314 \cdot 10^{-12}$
$(2\nu_1 - 3\nu_2)^2$	$1.32887068 \cdot 10^{-6}$	$-8.10582381 \cdot 10^{-20}$	$-6.09978377 \cdot 10^{-14}$
$(2\nu_1 - 3\nu_3)$	$2.28822095 \cdot 10^{-3}$	$2.25026540 \cdot 10^{-18}$	$9.83412637 \cdot 10^{-16}$
$(2\nu_1 - 3\nu_3)^2$	$5.23595510 \cdot 10^{-6}$	$-3.06419819 \cdot 10^{-23}$	$-5.85222397 \cdot 10^{-18}$
$(2\nu_1 - 3\nu_4)$	$2.58851152 \cdot 10^{-3}$	$1.50846207 \cdot 10^{-19}$	$5.82752698 \cdot 10^{-17}$
$(2\nu_1 - 5\nu_2)$	$-1.25521652 \cdot 10^{-5}$	$8.23540627 \cdot 10^{-18}$	$-6.56094479 \cdot 10^{-13}$
$(2\nu_1 - 5\nu_3)$	$1.87987186 \cdot 10^{-3}$	$7.86970829 \cdot 10^{-21}$	$4.18630039 \cdot 10^{-18}$
$(2\nu_1 + \nu_2)$	$3.48340392 \cdot 10^{-3}$	$-9.14677562 \cdot 10^{-21}$	$-2.62581538 \cdot 10^{-18}$
$(2\nu_2 - \nu_3)$	$9.61144152 \cdot 10^{-4}$	$-3.48710855 \cdot 10^{-20}$	$-3.62808069 \cdot 10^{-17}$
$(2\nu_2 - \nu_3)^2$	$9.23798085 \cdot 10^{-7}$	$-1.18948706 \cdot 10^{-25}$	$-1.28760503 \cdot 10^{-19}$
$(2\nu_2 - \nu_4)$	$1.06124101 \cdot 10^{-3}$	$-2.77950130 \cdot 10^{-21}$	$-2.61910468 \cdot 10^{-18}$
$(2\nu_2 - 3\nu_3)$	$5.52795066 \cdot 10^{-4}$	$3.13178197 \cdot 10^{-18}$	$5.66535806 \cdot 10^{-15}$
$(2\nu_2 - 3\nu_3)^2$	$3.05582384 \cdot 10^{-7}$	$-2.81781964 \cdot 10^{-23}$	$-9.22114556 \cdot 10^{-17}$
$(2\nu_2 - 3\nu_4)$	$8.53085635 \cdot 10^{-4}$	$1.70768013 \cdot 10^{-19}$	$2.00176870 \cdot 10^{-16}$
$(2\nu_2 - 3\nu_4)^2$	$7.27755105 \cdot 10^{-7}$	$-9.06562387 \cdot 10^{-26}$	$-1.24569705 \cdot 10^{-19}$
$(2\nu_2 - 5\nu_3)$	$1.44445975 \cdot 10^{-4}$	$6.04672128 \cdot 10^{-21}$	$4.18614730 \cdot 10^{-17}$
$(2\nu_3 - \nu_4)$	$3.04271402 \cdot 10^{-4}$	$-1.50714035 \cdot 10^{-21}$	$-4.95327640 \cdot 10^{-18}$
$(2\nu_3 - \nu_4)^2$	$9.25810860 \cdot 10^{-8}$	$-2.61541407 \cdot 10^{-27}$	$-2.82499827 \cdot 10^{-20}$
$(2\nu_3 - 3\nu_4)$	$9.61160263 \cdot 10^{-5}$	$1.65116655 \cdot 10^{-19}$	$1.71788890 \cdot 10^{-15}$
$(2\nu_3 - 3\nu_4)^2$	$9.23829056 \cdot 10^{-9}$	$-4.62801514 \cdot 10^{-25}$	$-5.00960118 \cdot 10^{-17}$
$(2\nu_3 - 5\nu_4)$	$-1.12039349 \cdot 10^{-4}$	$1.31501914 \cdot 10^{-22}$	$-1.17371188 \cdot 10^{-18}$
$(3\nu_1 - \nu_2)$	$3.76845753 \cdot 10^{-3}$	$-2.93747606 \cdot 10^{-19}$	$-7.79490294 \cdot 10^{-17}$
$(3\nu_1 - \nu_2)^2$	$1.42012721 \cdot 10^{-5}$	$-4.00210960 \cdot 10^{-24}$	$-2.81813458 \cdot 10^{-19}$
$(3\nu_1 - \nu_3)$	$4.14694232 \cdot 10^{-3}$	$-1.49092450 \cdot 10^{-22}$	$-3.59523810 \cdot 10^{-20}$
$(3\nu_1 - 2\nu_2)$	$3.18579817 \cdot 10^{-3}$	$-6.69724250 \cdot 10^{-17}$	$-2.10221807 \cdot 10^{-14}$
$(3\nu_1 - 2\nu_2)^2$	$1.01493100 \cdot 10^{-5}$	$-3.04724737 \cdot 10^{-21}$	$-3.00241827 \cdot 10^{-16}$
$(3\nu_1 - 2\nu_3)$	$3.94276778 \cdot 10^{-3}$	$-3.33014622 \cdot 10^{-20}$	$-8.44621444 \cdot 10^{-18}$
$(3\nu_1 - 2\nu_3)^2$	$1.55454178 \cdot 10^{-5}$	$-1.84886551 \cdot 10^{-24}$	$-1.18933150 \cdot 10^{-19}$
$(3\nu_1 - 2\nu_4)$	$4.14296150 \cdot 10^{-3}$	$-2.12218449 \cdot 10^{-21}$	$-5.12238527 \cdot 10^{-19}$
$(3\nu_1 - 4\nu_2)$	$2.02047947 \cdot 10^{-3}$	$7.92892581 \cdot 10^{-16}$	$3.92427932 \cdot 10^{-13}$
$(3\nu_1 - 4\nu_2)^2$	$4.08233731 \cdot 10^{-6}$	$-6.32964285 \cdot 10^{-20}$	$-1.55049482 \cdot 10^{-14}$
$(3\nu_1 - 4\nu_3)$	$3.53441869 \cdot 10^{-3}$	$1.94911341 \cdot 10^{-19}$	$5.51466472 \cdot 10^{-17}$
$(3\nu_1 - 4\nu_3)^2$	$1.24921155 \cdot 10^{-5}$	$-5.60953675 \cdot 10^{-24}$	$-4.49046181 \cdot 10^{-19}$
$(3\nu_1 - 4\nu_4)$	$3.93480612 \cdot 10^{-3}$	$6.37598502 \cdot 10^{-21}$	$1.62040640 \cdot 10^{-18}$
$(3\nu_1 - 5\nu_2)$	$1.43782013 \cdot 10^{-3}$	$1.33885389 \cdot 10^{-16}$	$9.31169254 \cdot 10^{-14}$
$(3\nu_1 - 5\nu_2)^2$	$2.06732671 \cdot 10^{-6}$	$-3.36729727 \cdot 10^{-21}$	$-1.62881718 \cdot 10^{-15}$
$(3\nu_1 - 5\nu_3)$	$3.33024414 \cdot 10^{-3}$	$3.31458810 \cdot 10^{-20}$	$9.95298829 \cdot 10^{-18}$
$(3\nu_1 - 5\nu_3)^2$	$1.10905261 \cdot 10^{-5}$	$-3.14846785 \cdot 10^{-25}$	$-2.83888052 \cdot 10^{-20}$
$(3\nu_2 - \nu_3)$	$1.54380350 \cdot 10^{-3}$	$-5.01605858 \cdot 10^{-22}$	$-3.24915610 \cdot 10^{-19}$
$(3\nu_2 - 2\nu_3)$	$1.33962896 \cdot 10^{-3}$	$-7.58633536 \cdot 10^{-20}$	$-5.66301237 \cdot 10^{-17}$
$(3\nu_2 - 2\nu_3)^2$	$1.79460575 \cdot 10^{-6}$	$-1.67841577 \cdot 10^{-24}$	$-9.35255986 \cdot 10^{-19}$
$(3\nu_2 - 2\nu_4)$	$1.53982267 \cdot 10^{-3}$	$-5.14806290 \cdot 10^{-21}$	$-3.34328296 \cdot 10^{-18}$
$(3\nu_2 - 2\nu_4)^2$	$2.37105386 \cdot 10^{-6}$	$-1.14819736 \cdot 10^{-25}$	$-4.84256126 \cdot 10^{-20}$
$(3\nu_2 - 4\nu_3)$	$9.31279871 \cdot 10^{-4}$	$9.97640272 \cdot 10^{-19}$	$1.07125721 \cdot 10^{-15}$
$(3\nu_2 - 4\nu_3)^2$	$8.67282191 \cdot 10^{-7}$	$-1.79127554 \cdot 10^{-23}$	$-2.06538951 \cdot 10^{-17}$

Продолжение таблицы В.1

Знаменатель	d_2	d_1	d_1/d_2
$(3\nu_2 - 4\nu_4)$	$1.33166730 \cdot 10^{-3}$	$2.38372132 \cdot 10^{-20}$	$1.79002768 \cdot 10^{-17}$
$(3\nu_2 - 4\nu_4)^2$	$1.77333779 \cdot 10^{-6}$	$-2.42179358 \cdot 10^{-26}$	$-1.36566964 \cdot 10^{-20}$
$(3\nu_2 - 5\nu_3)$	$7.27105324 \cdot 10^{-4}$	$1.18603449 \cdot 10^{-19}$	$1.63117289 \cdot 10^{-16}$
$(3\nu_2 - 5\nu_3)^2$	$5.28682151 \cdot 10^{-7}$	$-7.11946848 \cdot 10^{-25}$	$-1.34664438 \cdot 10^{-18}$
$(3\nu_2 - 5\nu_4)$	$1.22758961 \cdot 10^{-3}$	$2.16219579 \cdot 10^{-22}$	$1.76133438 \cdot 10^{-19}$
$(3\nu_3 - \nu_4)$	$5.08445946 \cdot 10^{-4}$	$-3.95385644 \cdot 10^{-23}$	$-7.77635551 \cdot 10^{-20}$
$(3\nu_3 - 2\nu_4)$	$4.04368259 \cdot 10^{-4}$	$-6.72188829 \cdot 10^{-21}$	$-1.66231848 \cdot 10^{-17}$
$(3\nu_3 - 2\nu_4)^2$	$1.63513689 \cdot 10^{-7}$	$-4.26853255 \cdot 10^{-26}$	$-2.61050471 \cdot 10^{-19}$
$(3\nu_3 - 4\nu_4)$	$1.96212884 \cdot 10^{-4}$	$8.75003504 \cdot 10^{-20}$	$4.45945998 \cdot 10^{-16}$
$(3\nu_3 - 4\nu_4)^2$	$3.84994957 \cdot 10^{-8}$	$-5.14583643 \cdot 10^{-25}$	$-1.33659840 \cdot 10^{-17}$
$(3\nu_3 - 5\nu_4)$	$9.21351959 \cdot 10^{-5}$	$5.98390615 \cdot 10^{-21}$	$6.49470170 \cdot 10^{-17}$
$(3\nu_3 - 5\nu_4)^2$	$8.48889437 \cdot 10^{-9}$	$-1.07439003 \cdot 10^{-26}$	$-1.26564188 \cdot 10^{-18}$
$(4\nu_1 - \nu_2)$	$5.21882981 \cdot 10^{-3}$	$-1.22549677 \cdot 10^{-21}$	$-2.34822137 \cdot 10^{-19}$
$(4\nu_1 - 3\nu_2)$	$4.05351111 \cdot 10^{-3}$	$-3.82208228 \cdot 10^{-17}$	$-9.42906575 \cdot 10^{-15}$
$(4\nu_1 - 3\nu_2)^2$	$1.64309524 \cdot 10^{-5}$	$-3.11835210 \cdot 10^{-21}$	$-1.89785232 \cdot 10^{-16}$
$(4\nu_1 - 3\nu_3)$	$5.18896552 \cdot 10^{-3}$	$-4.53986651 \cdot 10^{-21}$	$-8.74907819 \cdot 10^{-19}$
$(4\nu_1 - 3\nu_3)^2$	$2.69253633 \cdot 10^{-5}$	$-4.07458663 \cdot 10^{-25}$	$-1.51328938 \cdot 10^{-20}$
$(4\nu_1 - 3\nu_4)$	$5.48925611 \cdot 10^{-3}$	$-1.17203846 \cdot 10^{-22}$	$-2.13514989 \cdot 10^{-20}$
$(4\nu_1 - 5\nu_2)$	$2.88819242 \cdot 10^{-3}$	$2.56569512 \cdot 10^{-16}$	$8.88339401 \cdot 10^{-14}$
$(4\nu_1 - 5\nu_2)^2$	$8.34165546 \cdot 10^{-6}$	$-3.83653254 \cdot 10^{-20}$	$-4.59924600 \cdot 10^{-15}$
$(4\nu_1 - 5\nu_3)$	$4.78061644 \cdot 10^{-3}$	$1.44241463 \cdot 10^{-20}$	$3.01721472 \cdot 10^{-18}$
$(4\nu_1 - 5\nu_3)^2$	$2.28542935 \cdot 10^{-5}$	$-7.97687203 \cdot 10^{-25}$	$-3.49031661 \cdot 10^{-20}$
$(4\nu_1 - 5\nu_4)$	$5.28110071 \cdot 10^{-3}$	$2.44626393 \cdot 10^{-22}$	$4.63210998 \cdot 10^{-20}$
$(4\nu_1 - 7\nu_2)$	$1.72287372 \cdot 10^{-3}$	$6.61331396 \cdot 10^{-18}$	$3.83853668 \cdot 10^{-15}$
$(4\nu_1 - 7\nu_3)$	$4.37226735 \cdot 10^{-3}$	$4.17224818 \cdot 10^{-22}$	$9.54252758 \cdot 10^{-20}$
$(4\nu_2 - 3\nu_3)$	$1.71811376 \cdot 10^{-3}$	$-3.64327828 \cdot 10^{-20}$	$-2.12051050 \cdot 10^{-17}$
$(4\nu_2 - 3\nu_3)^2$	$2.95191490 \cdot 10^{-6}$	$-1.40500127 \cdot 10^{-24}$	$-4.75962659 \cdot 10^{-19}$
$(4\nu_2 - 3\nu_4)$	$2.01840434 \cdot 10^{-3}$	$-9.26358136 \cdot 10^{-22}$	$-4.58955681 \cdot 10^{-19}$
$(4\nu_2 - 5\nu_3)$	$1.30976467 \cdot 10^{-3}$	$2.82060502 \cdot 10^{-19}$	$2.15352046 \cdot 10^{-16}$
$(4\nu_2 - 5\nu_3)^2$	$1.71548350 \cdot 10^{-6}$	$-8.93124334 \cdot 10^{-24}$	$-5.20625429 \cdot 10^{-18}$
$(4\nu_2 - 5\nu_4)$	$1.81024896 \cdot 10^{-3}$	$3.01239417 \cdot 10^{-21}$	$1.66407728 \cdot 10^{-18}$
$(4\nu_2 - 7\nu_3)$	$9.01415585 \cdot 10^{-4}$	$3.44299055 \cdot 10^{-21}$	$3.81953741 \cdot 10^{-18}$
$(4\nu_3 - 3\nu_4)$	$5.04465117 \cdot 10^{-4}$	$-5.58600588 \cdot 10^{-21}$	$-1.10731262 \cdot 10^{-17}$
$(4\nu_3 - 3\nu_4)^2$	$2.54485053 \cdot 10^{-7}$	$-6.24492899 \cdot 10^{-26}$	$-2.45394726 \cdot 10^{-19}$
$(4\nu_3 - 5\nu_4)$	$2.96309741 \cdot 10^{-4}$	$4.20737707 \cdot 10^{-20}$	$1.41992533 \cdot 10^{-16}$
$(4\nu_3 - 5\nu_4)^2$	$8.77994622 \cdot 10^{-8}$	$-4.40454058 \cdot 10^{-25}$	$-5.01659173 \cdot 10^{-18}$
$(4\nu_3 - 7\nu_4)$	$8.81543656 \cdot 10^{-5}$	$1.65503214 \cdot 10^{-22}$	$1.87742505 \cdot 10^{-18}$
$(5\nu_1 - 2\nu_2)$	$6.08654274 \cdot 10^{-3}$	$-3.09908717 \cdot 10^{-21}$	$-5.09170361 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_1 - 3\nu_2)$	$5.50388342 \cdot 10^{-3}$	$-4.79362695 \cdot 10^{-19}$	$-8.70953579 \cdot 10^{-17}$
$(5\nu_1 - 3\nu_2)^2$	$3.02927325 \cdot 10^{-5}$	$-1.56942959 \cdot 10^{-23}$	$-5.18087823 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_1 - 4\nu_2)$	$4.92122405 \cdot 10^{-3}$	$-1.75498454 \cdot 10^{-17}$	$-3.56615452 \cdot 10^{-15}$
$(5\nu_1 - 4\nu_2)^2$	$2.42184462 \cdot 10^{-5}$	$-2.17808606 \cdot 10^{-21}$	$-8.99350042 \cdot 10^{-17}$
$(5\nu_1 - 4\nu_3)$	$6.43516326 \cdot 10^{-3}$	$-5.23912110 \cdot 10^{-22}$	$-8.14139576 \cdot 10^{-20}$
$(5\nu_1 - 6\nu_2)$	$3.75590536 \cdot 10^{-3}$	$7.40966302 \cdot 10^{-17}$	$1.97280344 \cdot 10^{-14}$
$(5\nu_1 - 6\nu_2)^2$	$1.41068251 \cdot 10^{-5}$	$-1.99261281 \cdot 10^{-20}$	$-1.41251685 \cdot 10^{-15}$

Продолжение таблицы В.1

Знаменатель	d_2	d_1	d_1/d_2
$(5\nu_1 - 6\nu_3)$	$6.02681419 \cdot 10^{-3}$	$8.85805481 \cdot 10^{-22}$	$1.46977400 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_1 - 7\nu_2)$	$3.17324601 \cdot 10^{-3}$	$3.39359314 \cdot 10^{-17}$	$1.06943903 \cdot 10^{-14}$
$(5\nu_1 - 7\nu_2)^2$	$1.00694902 \cdot 10^{-5}$	$-2.10958397 \cdot 10^{-21}$	$-2.09502559 \cdot 10^{-16}$
$(5\nu_1 - 7\nu_3)$	$5.82263965 \cdot 10^{-3}$	$4.68287023 \cdot 10^{-22}$	$8.04252112 \cdot 10^{-20}$
$(5\nu_1 - 8\nu_2)$	$2.59058666 \cdot 10^{-3}$	$4.46169170 \cdot 10^{-18}$	$1.72227078 \cdot 10^{-15}$
$(5\nu_1 - 8\nu_3)$	$5.61846510 \cdot 10^{-3}$	$7.08578585 \cdot 10^{-23}$	$1.26116043 \cdot 10^{-20}$
$(5\nu_2 - 3\nu_3)$	$2.30077311 \cdot 10^{-3}$	$-5.37902994 \cdot 10^{-22}$	$-2.33792281 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_2 - 4\nu_3)$	$2.09659857 \cdot 10^{-3}$	$-1.43135033 \cdot 10^{-20}$	$-6.82701189 \cdot 10^{-18}$
$(5\nu_2 - 4\nu_3)^2$	$4.39572556 \cdot 10^{-6}$	$-8.11724450 \cdot 10^{-25}$	$-1.84662222 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_2 - 4\nu_4)$	$2.49698599 \cdot 10^{-3}$	$-1.43295546 \cdot 10^{-22}$	$-5.73874047 \cdot 10^{-20}$
$(5\nu_2 - 6\nu_3)$	$1.68824948 \cdot 10^{-3}$	$7.28848094 \cdot 10^{-20}$	$4.31718241 \cdot 10^{-17}$
$(5\nu_2 - 6\nu_3)^2$	$2.85018630 \cdot 10^{-6}$	$-3.83557529 \cdot 10^{-24}$	$-1.34572792 \cdot 10^{-18}$
$(5\nu_2 - 6\nu_4)$	$2.28883062 \cdot 10^{-3}$	$3.58443073 \cdot 10^{-22}$	$1.56605329 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_2 - 7\nu_3)$	$1.48407493 \cdot 10^{-3}$	$2.15038275 \cdot 10^{-20}$	$1.44897182 \cdot 10^{-17}$
$(5\nu_2 - 7\nu_3)^2$	$2.20247841 \cdot 10^{-6}$	$-3.01281061 \cdot 10^{-25}$	$-1.36791834 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_2 - 8\nu_3)$	$1.27990039 \cdot 10^{-3}$	$1.94507811 \cdot 10^{-21}$	$1.51971054 \cdot 10^{-18}$
$(5\nu_3 - 3\nu_4)$	$7.08639663 \cdot 10^{-4}$	$-8.37253141 \cdot 10^{-23}$	$-1.18149348 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_3 - 4\nu_4)$	$6.04561974 \cdot 10^{-4}$	$-3.59172087 \cdot 10^{-21}$	$-5.94103008 \cdot 10^{-18}$
$(5\nu_3 - 4\nu_4)^2$	$3.65495179 \cdot 10^{-7}$	$-6.12708878 \cdot 10^{-26}$	$-1.67638019 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_3 - 6\nu_4)$	$3.96406598 \cdot 10^{-4}$	$1.88830812 \cdot 10^{-20}$	$4.76356381 \cdot 10^{-17}$
$(5\nu_3 - 6\nu_4)^2$	$1.57138191 \cdot 10^{-7}$	$-3.21966750 \cdot 10^{-25}$	$-2.04894016 \cdot 10^{-18}$
$(5\nu_3 - 7\nu_4)$	$2.92328911 \cdot 10^{-4}$	$2.87484552 \cdot 10^{-21}$	$9.83428397 \cdot 10^{-18}$
$(5\nu_3 - 7\nu_4)^2$	$8.54561919 \cdot 10^{-8}$	$-1.27680398 \cdot 10^{-26}$	$-1.49410353 \cdot 10^{-19}$
$(5\nu_3 - 8\nu_4)$	$1.88251223 \cdot 10^{-4}$	$1.45911846 \cdot 10^{-22}$	$7.75091091 \cdot 10^{-19}$
$(6\nu_1 - 5\nu_2)$	$5.78893700 \cdot 10^{-3}$	$-7.24592084 \cdot 10^{-18}$	$-1.25168418 \cdot 10^{-15}$
$(6\nu_1 - 5\nu_2)^2$	$3.35117916 \cdot 10^{-5}$	$-1.23562699 \cdot 10^{-21}$	$-3.68714095 \cdot 10^{-17}$
$(6\nu_1 - 7\nu_2)$	$4.62361831 \cdot 10^{-3}$	$1.86976839 \cdot 10^{-17}$	$4.04395058 \cdot 10^{-15}$
$(6\nu_1 - 7\nu_2)^2$	$2.13778462 \cdot 10^{-5}$	$-9.29890925 \cdot 10^{-21}$	$-4.34978771 \cdot 10^{-16}$
$(6\nu_2 - 5\nu_3)$	$2.47508337 \cdot 10^{-3}$	$-5.08576723 \cdot 10^{-21}$	$-2.05478623 \cdot 10^{-18}$
$(6\nu_2 - 5\nu_3)^2$	$6.12603771 \cdot 10^{-6}$	$-3.82344020 \cdot 10^{-25}$	$-6.24129395 \cdot 10^{-20}$
$(6\nu_2 - 7\nu_3)$	$2.06673428 \cdot 10^{-3}$	$1.72892693 \cdot 10^{-20}$	$8.36550175 \cdot 10^{-18}$
$(6\nu_2 - 7\nu_3)^2$	$4.27139059 \cdot 10^{-6}$	$-1.48450736 \cdot 10^{-24}$	$-3.47546619 \cdot 10^{-19}$
$(6\nu_2 - 7\nu_4)$	$2.76741228 \cdot 10^{-3}$	$4.08676587 \cdot 10^{-23}$	$1.47674631 \cdot 10^{-20}$
$(6\nu_3 - 5\nu_4)$	$7.04658831 \cdot 10^{-4}$	$-2.04698832 \cdot 10^{-21}$	$-2.90493532 \cdot 10^{-18}$
$(6\nu_3 - 5\nu_4)^2$	$4.96544068 \cdot 10^{-7}$	$-4.86021115 \cdot 10^{-26}$	$-9.78807617 \cdot 10^{-20}$
$(6\nu_3 - 7\nu_4)$	$4.96503456 \cdot 10^{-4}$	$7.99740031 \cdot 10^{-21}$	$1.61074414 \cdot 10^{-17}$
$(6\nu_3 - 7\nu_4)^2$	$2.46515681 \cdot 10^{-7}$	$-2.11585844 \cdot 10^{-25}$	$-8.58305822 \cdot 10^{-19}$
$(7\nu_1 - 4\nu_2)$	$7.82196862 \cdot 10^{-3}$	$-2.67812692 \cdot 10^{-21}$	$-3.42385280 \cdot 10^{-19}$
$(7\nu_1 - 5\nu_2)$	$7.23930930 \cdot 10^{-3}$	$-1.64680475 \cdot 10^{-19}$	$-2.27480922 \cdot 10^{-17}$
$(7\nu_1 - 5\nu_2)^2$	$5.24075991 \cdot 10^{-5}$	$-1.16690460 \cdot 10^{-23}$	$-2.22659427 \cdot 10^{-19}$
$(7\nu_1 - 6\nu_2)$	$6.65664992 \cdot 10^{-3}$	$-2.80266786 \cdot 10^{-18}$	$-4.21032784 \cdot 10^{-16}$
$(7\nu_1 - 6\nu_2)^2$	$4.43109884 \cdot 10^{-5}$	$-6.12467344 \cdot 10^{-22}$	$-1.38220195 \cdot 10^{-17}$
$(7\nu_1 - 8\nu_2)$	$5.49133123 \cdot 10^{-3}$	$3.77033680 \cdot 10^{-18}$	$6.86597954 \cdot 10^{-16}$
$(7\nu_1 - 8\nu_2)^2$	$3.01547188 \cdot 10^{-5}$	$-4.00392534 \cdot 10^{-21}$	$-1.32779396 \cdot 10^{-16}$

Продолжение таблицы В.1

Знаменатель	d_2	d_1	d_1/d_2
$(7\nu_1 - 9\nu_2)$	$4.90867190 \cdot 10^{-3}$	$5.61653788 \cdot 10^{-18}$	$1.14420723 \cdot 10^{-15}$
$(7\nu_1 - 9\nu_2)^2$	$2.40950597 \cdot 10^{-5}$	$-7.60803489 \cdot 10^{-22}$	$-3.15750821 \cdot 10^{-17}$
$(7\nu_2 - 5\nu_3)$	$3.05774272 \cdot 10^{-3}$	$-1.29868040 \cdot 10^{-22}$	$-4.24718662 \cdot 10^{-20}$
$(7\nu_2 - 6\nu_3)$	$2.85356818 \cdot 10^{-3}$	$-1.69502023 \cdot 10^{-21}$	$-5.94000258 \cdot 10^{-19}$
$(7\nu_2 - 6\nu_3)^2$	$8.14285134 \cdot 10^{-6}$	$-1.57695351 \cdot 10^{-25}$	$-1.93661095 \cdot 10^{-20}$
$(7\nu_2 - 8\nu_3)$	$2.44521908 \cdot 10^{-3}$	$3.71792112 \cdot 10^{-21}$	$1.52048589 \cdot 10^{-18}$
$(7\nu_2 - 8\nu_3)^2$	$5.97909637 \cdot 10^{-6}$	$-5.31269089 \cdot 10^{-25}$	$-8.88544113 \cdot 10^{-20}$
$(7\nu_2 - 9\nu_3)$	$2.24104454 \cdot 10^{-3}$	$2.59664533 \cdot 10^{-21}$	$1.15867636 \cdot 10^{-18}$
$(7\nu_2 - 9\nu_3)^2$	$5.02228064 \cdot 10^{-6}$	$-7.42885698 \cdot 10^{-26}$	$-1.47917998 \cdot 10^{-20}$
$(7\nu_3 - 5\nu_4)$	$9.08833379 \cdot 10^{-4}$	$-5.03619405 \cdot 10^{-23}$	$-5.54138326 \cdot 10^{-20}$
$(7\nu_3 - 6\nu_4)$	$8.04755688 \cdot 10^{-4}$	$-1.08773562 \cdot 10^{-21}$	$-1.35163458 \cdot 10^{-18}$
$(7\nu_3 - 6\nu_4)^2$	$6.47631717 \cdot 10^{-7}$	$-3.37128286 \cdot 10^{-26}$	$-5.20555552 \cdot 10^{-20}$
$(7\nu_3 - 8\nu_4)$	$5.96600311 \cdot 10^{-4}$	$3.20086712 \cdot 10^{-21}$	$5.36517842 \cdot 10^{-18}$
$(7\nu_3 - 8\nu_4)^2$	$3.55931932 \cdot 10^{-7}$	$-1.28666985 \cdot 10^{-25}$	$-3.61493232 \cdot 10^{-19}$
$(7\nu_3 - 9\nu_4)$	$4.92522625 \cdot 10^{-4}$	$9.79375989 \cdot 10^{-22}$	$1.98848934 \cdot 10^{-18}$
$(7\nu_3 - 9\nu_4)^2$	$2.42578536 \cdot 10^{-7}$	$-8.69936597 \cdot 10^{-27}$	$-3.58620599 \cdot 10^{-20}$
$(8\nu_1 - 5\nu_2)$	$8.68968161 \cdot 10^{-3}$	$-1.86202857 \cdot 10^{-21}$	$-2.14280415 \cdot 10^{-19}$
$(8\nu_1 - 7\nu_2)$	$7.52436287 \cdot 10^{-3}$	$-1.03472828 \cdot 10^{-18}$	$-1.37517062 \cdot 10^{-16}$
$(8\nu_1 - 7\nu_2)^2$	$5.66160368 \cdot 10^{-5}$	$-2.75556215 \cdot 10^{-22}$	$-4.86710535 \cdot 10^{-18}$
$(8\nu_1 - 9\nu_2)$	$6.35904417 \cdot 10^{-3}$	$3.73048295 \cdot 10^{-19}$	$5.86642087 \cdot 10^{-17}$
$(8\nu_1 - 9\nu_2)^2$	$4.04374429 \cdot 10^{-5}$	$-1.61602504 \cdot 10^{-21}$	$-3.99635813 \cdot 10^{-17}$
$(8\nu_2 - 7\nu_3)$	$3.23205298 \cdot 10^{-3}$	$-5.38567645 \cdot 10^{-22}$	$-1.66633297 \cdot 10^{-19}$
$(8\nu_2 - 9\nu_3)$	$2.82370389 \cdot 10^{-3}$	$6.96207431 \cdot 10^{-22}$	$2.46558229 \cdot 10^{-19}$
$(8\nu_2 - 9\nu_3)^2$	$7.97330366 \cdot 10^{-6}$	$-1.78543950 \cdot 10^{-25}$	$-2.23927192 \cdot 10^{-20}$
$(8\nu_3 - 7\nu_4)$	$9.04852547 \cdot 10^{-4}$	$-5.51660751 \cdot 10^{-22}$	$-6.09669227 \cdot 10^{-19}$
$(8\nu_3 - 7\nu_4)^2$	$8.18758129 \cdot 10^{-7}$	$-2.12933030 \cdot 10^{-26}$	$-2.60068294 \cdot 10^{-20}$
$(8\nu_3 - 9\nu_4)$	$6.96697171 \cdot 10^{-4}$	$1.20262481 \cdot 10^{-21}$	$1.72618013 \cdot 10^{-18}$
$(8\nu_3 - 9\nu_4)^2$	$4.85386945 \cdot 10^{-7}$	$-7.36937995 \cdot 10^{-26}$	$-1.51824848 \cdot 10^{-19}$
$(9\nu_1 - 7\nu_2)$	$8.97473514 \cdot 10^{-3}$	$-3.73200941 \cdot 10^{-20}$	$-4.15835046 \cdot 10^{-18}$
$(9\nu_1 - 7\nu_2)^2$	$8.05458716 \cdot 10^{-5}$	$-4.60597449 \cdot 10^{-24}$	$-5.71844890 \cdot 10^{-20}$
$(9\nu_1 - 8\nu_2)$	$8.39207584 \cdot 10^{-3}$	$-3.67968984 \cdot 10^{-19}$	$-4.38471949 \cdot 10^{-17}$
$(9\nu_1 - 8\nu_2)^2$	$7.04269364 \cdot 10^{-5}$	$-1.15010721 \cdot 10^{-22}$	$-1.63305018 \cdot 10^{-18}$
$(9\nu_2 - 8\nu_3)$	$3.61053779 \cdot 10^{-3}$	$-1.64383462 \cdot 10^{-22}$	$-4.55288024 \cdot 10^{-20}$
$(9\nu_3 - 7\nu_4)$	$1.10902709 \cdot 10^{-3}$	$-2.09719560 \cdot 10^{-23}$	$-1.89102288 \cdot 10^{-20}$
$(9\nu_3 - 8\nu_4)$	$1.00494940 \cdot 10^{-3}$	$-2.70284609 \cdot 10^{-22}$	$-2.68953450 \cdot 10^{-19}$
$(9\nu_3 - 8\nu_4)^2$	$1.00992330 \cdot 10^{-6}$	$-1.25371917 \cdot 10^{-26}$	$-1.24140038 \cdot 10^{-20}$