

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Запевалин Павел Романович

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ КОСМИЧЕСКИХ
АППАРАТОВ ПО ДАННЫМ ГЛОБАЛЬНЫХ
НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ**

Специальность 1.3.1 —
Физика космоса, Астрономия

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Жаров Владимир Евгеньевич

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Модель движения	17
1.1 Уравнения движения КА	17
1.2 Координатно-временное обеспечение	18
1.2.1 Системы времени	18
1.2.2 Системы координат	20
1.3 Влияние сил гравитационной природы	21
1.3.1 Гравитационное поле Земли	21
1.3.2 Гравитационное влияние тел Солнечной системы	24
1.3.3 Твердые приливы	24
1.3.4 Океанические приливы	27
1.3.5 Полярные приливы	28
1.3.6 Общая теория относительности	30
1.4 Негравитационные возмущения	30
1.4.1 Атмосферное торможение	30
1.4.2 Давление солнечного излучения	31
Глава 2. Модель наблюдений	33
2.1 Основные типы траекторных измерений	33
2.2 Наблюдения ГНСС	34
2.2.1 Система GPS	35
2.2.2 Система ГЛОНАСС	36
2.2.3 Кодовые измерения	37
2.2.4 Фазовые измерения	40
2.2.5 Формат наблюдений ГНСС	42
2.2.6 Дифференциальные измерения	43
2.2.7 Комбинационные измерения	46
2.3 Моделирование измерений ГНСС	50
2.3.1 Полная модель наблюдений ГНСС	50

2.3.2	Решение светового уравнения	51
2.3.3	Ошибка бортовых часов	52
2.3.4	Смещение фазового центра антенны ГНСС спутника	54
2.3.5	Смещение фазового центра антенны низкоорбитального КА и эффекты многолучевости	56
2.3.6	Задержка распространения сигнала в ионосфере	57
2.3.7	Релятивистский эффект	60
2.3.8	Эффект набега фазы	61
2.3.9	Аппаратурные задержки	62
2.3.10	Межчастотное смещение	63
2.3.11	Межсистемное смещение	64
2.4	Основные принципы уточнения орбит	65
2.5	Обобщенный фильтр Калмана	67
2.6	Коэффициент потери точности	73

Глава 3. Высокоточное определение орбит искусственных спутников Земли

3.1	Практическая реализация	76
3.1.1	Программно-вычислительный комплекс	76
3.1.2	Алгоритм работы программы	79
3.1.3	Матрицы ковариаций	83
3.1.4	Метод сглаживания кодовых измерений	85
3.1.5	Метод поиска скачков фазы	86
3.1.6	Метод разрешения неоднозначностей фазовых измерений	88
3.2	Модельные измерения	92
3.3	Определение орбит спутников GRACE	108
3.3.1	Обработка данных	108
3.3.2	Полученные результаты	114
3.4	Определение других типов орбит с помощью ГНСС	123

Глава 4. Уточнение определения ориентации космических аппаратов

4.1	Подготовка данных	135
4.2	Обработка данных с помощью нейронной сети	136
4.3	Полученные результаты	141

4.4 Ограничения метода и дальнейшие исследования	143
Заключение	145
Список сокращений и условных обозначений	149
Словарь терминов	151
Список литературы	153
Список рисунков	171
Список таблиц	176
Приложение А. Матрицы Фильтра Калмана	177
А.1 Матрица перехода параметров движения КА	177
А.2 Матрица нормальных уравнений	178
А.3 Матрица шума модели движения	179

Введение

Определением орбиты космического аппарата (КА) называют процесс вычисления координат и компонентов вектора скорости КА на некотором временном интервале. Данная задача является важнейшей составляющей баллистико-навигационного обеспечения космических проектов. Для ее решения требуется некоторая измерительная информация о движении КА. А точность решения данной задачи зависит от состава, количества и качества этой измерительной информации. В качестве измерений обычно рассматриваются угловые координаты на небе и радиус-вектор (наклонная дальность) КА.

Для определения положения и скорости КА в космическом пространстве без какой-либо априорной информации существует целый ряд методов [1–3], основанных на измерении угловых координат и радиус-вектора КА в два независимых момента времени. К таким методам относятся метод Гаусса, метод Ламберта-Эйлера, метод Лапласа, их модификации и др. С появлением современных радиолокаторов и, соответственно, исключительно точных измерений длины вектора наклонной дальности и скорости его изменения главенствующую роль стали играть именно дальномерные траекторные измерения.

В современной постановке задача определения орбиты по сути является задачей уточнения орбиты, поскольку первоначальная (априорная) орбита обычно всегда известна еще до запуска КА. Такая орбита называется опорной орбитой, и относительно нее производится процесс уточнения. Данную задачу также можно отнести к более общей задаче небесной механики – *уточнение параметров движения небесных тел из наблюдений*. В качестве уточняемых параметров движения космического аппарата обычно выступают его координаты и компоненты скорости. Задача состоит в том, чтобы найти приближенную оценку этих параметров с помощью теоретических моделей и практических измерений. Для этого необходимо как можно сильнее уменьшить влияние ошибок теории и наблюдений путем привлечения дополнительной информации о системе КА-наблюдатель. Алгоритм решения такой задачи, называемый *алгоритмом фильтрации*, строится на вычислении невязки между моделью наблюдений и непосредственно самими наблюдениями. На основе этой разницы делается вывод о необходимости корректировки орбиты в ту или иную сторону. Методы,

позволяющие решить эту задачу, называются *методами дифференциального уточнения орбиты*.

На практике оказывается, что не существует универсального метода для определения орбиты с лучшей точностью. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо выбирать тот метод, который соответствует параметрам решаемой задачи. Вообще говоря, все методы дифференциального уточнения орбиты можно разделить на две большие категории.

Во-первых, можно выделить группу методов, основанную на технике обработки всех имеющихся наблюдений одновременно (методы пакетной обработки). К таким методам можно отнести, например, метод наименьших квадратов (МНК) [4], методы минимизаций нормы и вариации [5; 6], а также метод максимального правдоподобия [7; 8]. МНК является наиболее популярным, простым и эффективным методом из этой группы.

Во-вторых, существует альтернативная группа методов уточнения орбит, в которой наблюдения обрабатываются по мере их поступления. Такие способы обработки информации получили свою популярность благодаря работам Сверлинга [9] и, особенно, Калмана [10; 11]. А основной метод дифференциального уточнения орбит стал называться фильтром Калмана. Помимо обыкновенного фильтра Калмана [12–14], также выделяют обобщенный фильтр [15], фильтр «без запаха» [16; 17], фильтр разделенной разности [18], фильтр, основанный на уравнении Риккати [19], H_∞ фильтр [20].

Методы дифференциального уточнения орбиты находят свое применение во всех современных космических проектах. Однако особенно важной процедура определения орбиты становится в космо-геодезических научных миссиях [21–25]. Для достижения результата миссии здесь необходимы сверхвысокие точности определения абсолютных координат КА. Опыт работы проекта GRACE [26] показал, что для прецизионного определения параметров гравитационного поля Земли (ГПЗ) методом космической гравиметрии необходимо определять абсолютное местоположение космического аппарата на низкой околоземной орбите (НОО) с точностью до нескольких сантиметров. Такую точность можно обеспечить с помощью *глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС)*, к которым относят GPS [27], ГЛОНАСС [28], Galileo [29] и BeiDou [30]. Каждая из этих систем содержит несколько навигационных спутников, находящихся на орбитах, высотой порядка 22 000 км. С их помощью

можно с высокой точностью решать задачу навигации не только наземных приемников, но и космических аппаратов, орбита которых не превышает по высоте орбиты ГНСС. К таким орбитам относят низкую околоземную (до 2000 км) и среднюю околоземную орбиту (СОО). Существует множество работ, посвященных задаче определения орбит низкоорбитальных космических аппаратов (НКА) по данным ГНСС [31–40]. Однако и здесь нет универсального алгоритма в использовании ГНСС наблюдений. В зависимости от типа бортового приемника, особенностей орбиты НКА и задачи космического проекта можно варьировать используемые наблюдения и их алгоритмы обработки. В одних случаях достаточно использовать простые ГНСС наблюдения (нулевые разности) [41; 42], а в некоторых – привлекать дифференциальные наблюдения с наземных станций [43]. В крупных космических проектах, для достижения большей точности определения орбиты, используют ГНСС-приемники, позволяющие работать сразу с несколькими навигационными системами [44; 45]. В последнее время популярностью пользуются ГНСС-приемники, проводящие измерения сразу на трех частотах [46; 47].

При обработке ГНСС-измерений для достижения сверхвысоких точностей необходимо учитывать максимально возможное количество факторов, влияющих на процесс измерений. В первую очередь необходимо иметь высокоточную модель сил, оказывающих влияние на движение КА. Особое внимание стоит уделить негравитационным возмущениям орбиты, таким как давление солнечного излучения [48–50] и атмосферное торможение [51]. На распространение самого сигнала от ГНСС-спутника (НС) до НКА значительное влияние оказывает ионосфера [52–59], Общая и Специальная теории относительности [60–64], различные аппаратурные задержки [65–70] и эффекты многолучевости [71; 72].

Для высокоточного определения орбиты КА по данным ГНСС необходимо использовать фазовые измерения [27; 73]. Их ошибка составляет всего несколько мм. Однако при их использовании возникает сложность, связанная с разрешением фазовых неоднозначностей [74] и пропусками циклов [75]. Работ, посвященных методам разрешения фазовых неоднозначностей, в отечественной литературе не так много. А в зарубежной литературе подходы отличаются своим разнообразием и уникальностью [76–82]. Отдельное внимание заслуживают методы разрешения неоднозначностей с помощью нулевых разностей измерений [83–85]. Надо отметить, что универсального и достоверного метода, способного

зафиксировать абсолютно все фазовые неоднозначности не существует до сих пор, и работы в этой области продолжаются по сей день.

Помимо низкоорбитальных космических аппаратов, в высокоточном определении орбиты нуждаются также и другие научные космические проекты. Одним из приоритетных направлений развития космической деятельности России до 2030 года являются фундаментальные космические исследования. К таким исследованиям относятся внеатмосферные астрофизические обсерватории серии «Спектр». После запуска космической миссии «Радиоастрон» («Спектр-Р»¹ [86; 87]) в 2011 г. возникла необходимость в определении положения космического аппарата на высокоэллиптической орбите с высокой точностью. Такие требования предъявляются согласно условиям поиска корреляции наблюдений между космическим радиотелескопом и наземными телескопами в режиме интерферометра. Помимо этого, определение точного положения КА крайне важно для успешной работы космического аппарата нового поколения под названием «Миллиметрон» («Спектр-М»)² [88; 89]. Данный проект также предусматривает РСДБ-наблюдения (радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой) и находится в стадии разработки. Следующим этапом в проектах космической РСДБ должен стать проект типа *космос-космос* [90–92], т.е. когда радиоинтерферометр состоит не из одного КА и наземных станций, а из группировки КА и наземных станций, что позволяет увеличить итоговое угловое разрешение и качество восстановления изображения. Такие аппараты предполагается запускать на низкие, средние и геосинхронные орбиты, где возможно осуществлять позиционирование с помощью ГНСС [93–96].

Определение ориентации КА с высокой точностью – еще одна необходимость для современных научных космических миссий [26] наряду с определением положения и скорости КА. Усовершенствованные системы управления ориентацией могут существенно повлиять на результаты космических гравиметрических и геодезических экспериментов. В таких миссиях, как GRACE [23], GRAIL [24] и GRACE Follow On [25], точное знание ориентации космического аппарата играет чрезвычайно важную роль в измерениях расстояний между двумя КА с помощью лазерного интерферометра [97], так как требуется сверхточное наведение луча на второй КА. Помимо этого, точное знание ориентации напрямую влияет на точность определения орбит по данным ГНСС. Во-первых, для

¹Сайт космической миссии «Радиоастрон»: <http://www.asc.rssi.ru/radioastron/>

²Сайт космической миссии «Миллиметрон»: <https://millimatron.ru>

расчета возмущающих сил, действующих на КА со стороны давления солнечного излучения, необходимо знать ориентацию КА для расчета коэффициентов давления и площади, на которую падает солнечное излучение. Во-вторых, при составлении модели наблюдений ГНСС возникает необходимость знания смещения фазового центра антенны относительно центра масс КА [98; 99]. В-третьих, знание ориентации играет ключевую роль при построении карты вариации фазового центра антенны [100]. И наконец, для высокоточного позиционирования КА с помощью фазовых измерений ГНСС необходимо учитывать эффект набега фазы [101; 102], который проявляется из-за изменения ориентации КА и навигационного спутника (НС) относительно друг друга.

Для определения ориентации КА в пространстве необходимо иметь некоторые ориентиры на звездном небе. Таковыми могут быть, например, Солнце, Земля, Луна. Однако чаще всего эти объекты не находятся в поле зрения КА, и поэтому остается ориентироваться по звездам. На основе местоположения объекта, на который ориентируется КА, можно вычислить ориентацию в инерциальной системе отсчета. Для этого были разработаны специальные датчики: солнечный датчик [103], датчик Земли [104], звездный датчик [105]. Помимо них, еще одним прибором на борту для определения ориентации может быть магнетометр [106]. Он определяет ориентацию КА по линиям магнитного поля Земли. Однако наиболее популярным инструментом является именно звездный датчик [107–109]. Этот прибор использует фотокамеры для измерения местоположения звезд и их идентификации по звездному каталогу. После снимка звездного неба изображение со звёздного датчика обрабатывается вычислительным процессором для получения матрицы ориентации, т.е. матрицы перехода из локальной системы координат в инерциальную. На сегодня звездные датчики способны определять ориентацию космического аппарата с погрешностью $10''$ и более. Системы астроориентации будущего должны быть достаточно точными, чтобы определять ориентацию в пределах нескольких десятков миллисекунд дуги [110; 111]. Одним из способов достижения подобной точности является улучшение алгоритма поиска центра звезды на кадре звездного датчика, что является крайне важной процедурой в астрометрии [112; 113]. Этот алгоритм позволяет с высокой точностью определять координаты звезды на небе. Чем точнее алгоритм будет определять истинный центр звезды, тем быстрее и точнее будет определяться ориентация космического аппарата.

Существует стандартный алгоритм [114; 115], который обычно используется в качестве алгоритма вычислительного процессора звездного датчика. Он решает две основные задачи: поиск центра звезды [113; 116] и отождествление звезд [117; 118]. Один из методов вычисления центра звезды – это метод центра тяжести пятна звезды [119]. К сожалению, данный метод плохо работает в условиях с низким отношением сигнал/шум, так как на изображение неба влияют различные шумы, исходящие как от самого прибора, так и от окружающей среды [120]. Усовершенствованием данного метода является алгоритм с взвешенным по интенсивности центром тяжести [121]. Ошибка оценки центра звезды минимизируется путем взвешивания распределения интенсивности пикселей изображения. Однако и этот метод сильно зависит от свойств изображения, таких как разрешение или отношение сигнал/шум. Существует также субпиксельное усовершенствование методов, описанных выше [122], позволяющее определять центр звезды с ошибкой менее одного пикселя. Более того, в настоящее время разрабатываются и исследуются перспективные методы для достижения более высокой точности определения центра звезды [123–125]. По сути, они основаны на расчете модели шума изображения, детали которой неизвестны. Кроме того, они требуют настройки ряда различных гиперпараметров и пороговых значений. На практике оказывается, что эти параметры изменяются нелинейным образом и подвержены флуктуациям. Помимо этого, существует ряд работ, посвященных решению данной проблемы с помощью нейронных сетей [126; 127]. В них предлагается использовать нейронные сети для устранения влияния сложно моделируемых шумов и аберраций изображений, полученных со звездных датчиков. Например, в работе [128] предлагается заменить традиционный метод центра тяжести нейросетью, в которой веса нейронов будут соответствовать весам пикселей.

Целью данной работы является разработка и апробация алгоритмов определения орбит космических аппаратов по данным глобальных навигационных спутников систем.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать высокоточную модель движения космических аппаратов на низких околоземных орбитах и высокоточную модель наблюдений глобальных навигационных спутников систем с учетом всех возможных

- эффектов, влияющих на распространение сигнала от навигационного спутника к приемнику.
2. Исследовать существующие и разработать новые алгоритмы определения и фиксации целочисленных неоднозначностей фазовых измерений глобальных навигационных спутниковых систем; реализовать данные алгоритмы.
 3. Разработать программное обеспечение для реализации алгоритмов определения орбит космических аппаратов по данным ГНСС. Провести апробацию реализованных алгоритмов на синтетических и реальных наблюдениях ГНСС.
 4. Исследовать возможности использования глобальных навигационных спутниковых систем для различных типов орбит.
 5. Исследовать существующие и разработать новые алгоритмы определения ориентации космических аппаратов в целях улучшения точности определения орбиты и качества научных результатов космических миссий; реализовать данные алгоритмы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработанный программный комплекс для высокоточного определения орбит искусственных спутников Земли позволяет моделировать наблюдения всех, имеющихся на сегодня, глобальных навигационных спутниковых систем.
2. Разработанный метод предварительной обработки измерений позволяет оценивать степень шума, наличие скачков фазы и целочисленных фазовых неоднозначностей измерений глобальных навигационных спутниковых систем.
3. Для решения фундаментальных и прикладных научных задач возможно осуществлять высокоточное позиционирование космического аппарата с использованием систем GPS/ГЛОНАСС.
4. Обработка реальных измерений гравиметрической миссии GRACE в режиме нулевых и двойных разностей показала результаты, согласующиеся с модельными наблюдениями в пределах ошибки измерений. Среднее расхождение с орбитой, полученной центром обработки научных данных этой миссии, составило 72 мм в режиме нулевых разностей и 54 мм в режиме двойных разностей без фиксации параметров фазо-

- вой неоднозначности. Расхождение по радиальной компоненте невязки достигло 28 мм в режиме двойных разностей.
5. Разработанный метод определения и фиксации целочисленных параметров фазовой неоднозначности позволяет использовать фазовые измерения для уточнения орбиты, а также уменьшить среднее трехмерное отклонение местоположения космического аппарата. Метод позволил зафиксировать более 87% неоднозначностей за суточный временной интервал. Фиксация параметров фазовой неоднозначности позволила добиться расхождения трехмерного положения уточненной орбиты и орбиты Потсдамского центра имени Гельмгольца в 23 мм.
 6. Проведенная оценка высокоэллиптической орбиты космического аппарата «Спектр-Р» на основе реальных радиодальномерных и доплеровских измерений показала расхождение в 45 м (в пределах допустимой ошибки измерений) с орбитой, полученной Институтом прикладной математики имени М.В. Келдыша.
 7. Проведенная оценка видимости количества наблюдаемых навигационных спутников на высокоэллиптической орбите показала, что в среднем доступно 15 спутников на эпоху среди всех глобальных навигационных спутниковых систем.
 8. Проведенная оценка коэффициента потери точности по положению показала, что на протяжении 33% траектории космического аппарата «Спектр-Р» по орбите за один период значение коэффициента потери точности по положению позволяет проводить высокоточное определение орбиты, а на протяжении 44% – определение орбиты, достаточное для решения задач наземно-космического радиоинтерферометра со сверхдлинной базой.
 9. Существует возможность использования систем GPS/ГЛОНАСС для решения фундаментальных прикладных астрометрических задач нового поколения в проекте космического радиоинтерферометра, который использует космические аппараты на средней околоземной орбите. Среднее значение видимых спутников систем GPS/ГЛОНАСС на такой орбите составило 25, а среднее значение коэффициента потери точности по положению – 1.7.

10. В рамках улучшения методов определения ориентации космических аппаратов с целью повысить точность ориентации и, соответственно, результатов научно-прикладных космических миссий, разработан метод определения субпиксельных координат звезды на кадре звездного датчика. Собрана уникальная база данных изображений звезд и их субпиксельных координат, основанная на снимках реального неба и данных астрометрической миссии GAIA. Разработанный метод определения ориентации космических аппаратов с помощью собранной базы данных и методов машинного обучения, показал четырехкратное улучшение точности по средней невязке координат звезды по сравнению с традиционным (взвешенным) методом определения центра тяжести изображения.

Научная новизна:

1. Впервые был реализован программный комплекс, сочетающий в себе высокоточную модель движения КА и высокоточную модель наблюдений ГНСС. Данная разработка позволяет оперировать наблюдениями всех, доступных на сегодня, глобальных навигационных систем спутниковой навигации.
2. Впервые проведена оценка возможностей использования измерений глобальных навигационных спутниковых систем для высокоэллиптических и средних орбит космических радиотелескопов. Изучено распределение видимых спутников четырех, существующих на сегодня, глобальных навигационных систем по лепесткам диаграммы направленности антенн навигационных спутников.
3. Было выполнено оригинальное исследование по уточнению определения субпиксельных центров звезд на кадрах звездных датчиков с целью улучшения определения ориентации КА, а следовательно его орбиты и научных результатов.

Научная и практическая значимость данной работы заключается в создании отечественного унифицированного программного обеспечения, позволяющего работать с измерениями глобальных навигационных спутниковых систем с целью определения орбит искусственных спутников Земли для научных космических миссий, требующих высокоточного позиционирования данных спутников. В ходе разработки программного обеспечения были реализованы су-

ществующие и разработаны новые методы обработки измерений ГНСС. Данный программный комплекс позволяет осуществлять высокоточное моделирование орбит космических аппаратов, осуществлять обработку наблюдений ГНСС и определять орбиты реальных космических аппаратов по данным наблюдений с точностью до нескольких сантиметров. Создание такого комплекса в перспективе позволит решать широкий спектр научно-прикладных задач и задач двойного назначения.

Программный комплекс использует множество методов, в том числе разработанных лично автором, позволяющих работать со всеми современными форматами данных, используемых в баллистике и навигации, проводить численное интегрирование орбиты КА с учетом различных эффектов, проводить предварительную обработку измерений, проводить оценку степени шума измерений, учитывать или не учитывать различные эффекты модели наблюдений в зависимости от типа космического проекта, проводить восстановление орбит искусственных спутников Земли в режиме нулевых, одинарных и двойных разностей измерений, проводить оценку дополнительных параметров движения КА и параметров модели наблюдений; моделировать параметры фазовой неоднозначности для наблюдений КА, оценивать и фиксировать параметры неоднозначностей фазовых измерений. Такие возможности программного комплекса определяют практическую значимость работы.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается рядом обстоятельств. Во-первых, предварительная апробация разработанного программного обеспечения была проведена на синтетических модельных данных, полученных с использованием другого, проверенного, программного обеспечения. Во-вторых, в работе приведены многочисленные подтверждения известных характерных особенностей использованных методов. Так например, приведены статистические параметры обобщенного фильтра Калмана, разброс результата работы фильтра по компонентам вектора состояния, зависимость сходимости результата от начальной ошибки и т.д. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. Всероссийская Конференция «Навигация по гравитационному полю Земли и ее метрологическое обеспечение», Московская область, Солнечногорский район, р.п. Менделеево, 14 февраля 2017
2. Международная Конференция «Ломоносовские чтения – 2017», г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 20 апреля 2017
3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов – 2019», г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 11 апреля 2019
4. XVI Конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования», г. Москва, ИКИ РАН, 13 апреля 2019
5. Восьмая Всероссийская с международным участием Конференция «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение (КВНО-2019)», г. Санкт-Петербург, 19 апреля 2019
6. XVII Конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования», г. Москва, ИКИ РАН, 01 октября 2020
7. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов – 2020», г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 10-27 ноября 2020
8. XVIII Конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования», г. Москва, ИКИ РАН, 16 апреля 2021
9. Международная Конференция «Submillimeter and Millimeter Astronomy: Objectives and Instruments», г. Москва, АКЦ ФИАН, 13 апреля 2021

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных изданиях, в том числе в 3 научных статьях в рецензируемых научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus:

1. LOIS – программа для уточнения орбит искусственных спутников Земли по данным глобальных навигационных спутниковых систем / П. Р. Запевалин, В.Е. Жаров, А.С. Жамков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3 Физ. Астрон, 2022, стр. 73-79. WoS IF2022 = 0.3
2. Уточнение орбиты космического радиотелескопа в проекте «Миллиметр» («Спектр-М») / П. Р. Запевалин [и др.] // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3 Физ. Астрон, 2022, стр. 34-43. WoS IF2022 = 0.3

3. Artificial neural network for star tracker centroid computation / Zapevalin P.R, Zharov V.E., Novoselov A. // Advances in Space Research, Volume 71, Issue 9, 2023, Pages 3917-3925. WoS IF2022 = 2.2

Личный вклад. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с научным руководителем. В работе 1 автор самостоятельно разработал методики, алгоритмы и программно-вычислительный комплекс для обработки ГНСС наблюдений и уточнения орбит космических аппаратов. Вклад автора в работу составляет 95%. В работе 2 лично автором проанализированы возможности уточнения высокоэллиптической орбиты и гало-орбиты. Осуществлена программная реализация высокоточного численного моделирования движения КА, обработки траекторных измерений, методов уточнения орбиты. Вклад автора в эту работу составляет 90%. В работе 3 автором, разработан метод уточнения определения ориентации по звездным датчикам, а также создана база данных изображений звезд и их фотоцентров. Реализация алгоритмов искусственного интеллекта велась совместно с Новоселовым А. Вклад автора в эту работу составляет 80%. Помимо этого лично автором разработан метод фиксации фазовых неоднозначностей ГНСС измерений.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 180 страниц с 53 рисунками и 5 таблицами. Список литературы содержит 178 наименований.

Глава 1. Модель движения

1.1 Уравнения движения КА

Модель движения космического аппарата (КА) позволяет вычислять координаты и компоненты его скорости на любой заданный момент времени. Поскольку законы взаимодействия небесных тел выражаются в форме дифференциальных уравнений поступательного и вращательного движения, вычисление движения КА может осуществляться на основе аналитического решения данных уравнений, если такое решение имеется. Одной из механических моделей, для которых известно точное аналитическое решение, является задача Кеплера. Задача двух тел, известная также как задача Кеплера, описывает движение космического аппарата в сферически симметричном гравитационном поле. Впервые она была решена в 17-м веке Исааком Ньютоном. Данная задача дает приближенное представление о движении многих реальных небесных тел. В рамках данной задачи притягивающим центром является Земля, масса которой сосредоточена в ее центре. Притягиваемым телом является, например, КА, движущийся как материальная точка только под действием притяжения Земли. Уравнения движения в этой задаче записываются в виде:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.1)$$

где t – время, μ – гравитационный параметр, r – радиус-вектор КА. На практике оказывается, что реальное движение КА описывается уравнениями, решение которых неизвестно. В таких уравнениях правая часть выражения 1.1 (модель движения) оказывается довольно сложной, что затрудняет получение решения. В данной работе принята следующая модель движения КА:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}_{geo} + \ddot{\mathbf{r}}_{tide} + \ddot{\mathbf{r}}_{pl} + \ddot{\mathbf{r}}_{rel} + \ddot{\mathbf{r}}_{sol} + \ddot{\mathbf{r}}_{drag}, \quad (1.2)$$

где $\ddot{\mathbf{r}}_{geo}$ – возмущение из-за геопотенциала Земли, $\ddot{\mathbf{r}}_{tide}$ – возмущение из-за земных приливов, $\ddot{\mathbf{r}}_{pl}$ – возмущение из-за планет, Луны и Солнца, $\ddot{\mathbf{r}}_{rel}$ – возмущение

из-за общей теории относительности, $\ddot{\mathbf{r}}_{sol}$ – возмущение из-за давления солнечного излучения, $\ddot{\mathbf{r}}_{drag}$ – возмущение из-за торможения в атмосфере.

Для получения полного решения таких уравнений можно воспользоваться одним из методов численного интегрирования уравнений движения. Чтобы применить данные методы и с высокой точностью определить местоположение и скорость КА в любой момент времени необходимо как можно лучше знать правые части уравнений движения.

На текущий момент существует большое количество различных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Для интегрирования уравнений движения КА могут применяться как одношаговые так и многошаговые методы, с постоянным или переменным шагом. Они различны по своей эффективности и области приложений. В данной работе экстраполяция орбиты проводилась с помощью численного интегрирования уравнений движения одношаговым методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

1.2 Координатно-временное обеспечение

1.2.1 Системы времени

Для рассмотрения движения КА и расчета возмущающих ускорений необходимо обозначить системы координат и времени, а также связывающие их преобразования. На сегодня, для высокоточного моделирования движения искусственных спутников Земли требуется использовать следующие основные шкалы времени.

Земное время ТТ (Terrestrial Time) – равномерная шкала времени, измеряемая идеальными часами на поверхности геоида. Данное время служит независимым аргументом геоцентрических эфемерид.

Атомное время ТАИ (International Atomic Time) – представляет собой практическую реализацию равномерной шкалы времени, основанной на атомных часах. Отличается от земного времени на постоянное смещение в 32.184 с.

Всемирное время UTC (Coordinated Universal Time) – атомная равномерная шкала времени, отличающаяся от TAI на целое число секунд, называемых високосными секундами. Шкала UTC находится в близком соответствии (< 0.9 с) с неравномерным временем UT1 (Universal Time), которое представляет собой современную реализацию среднего солнечного времени. Актуальное число високосных секунд и разницу со шкалой UT1 на данную эпоху можно узнать из сообщений Международной службы вращения Земли (МСВЗ).

Система времени глобальной навигационной спутниковой системы GPS берет начало своего отсчета 6 января 1980 г. и является равномерной шкалой времени, т.е. не содержит скачков в виде високосных секунд. На рис. 1.1 и табл. 1 можно увидеть различия в ходе описанных выше шкал времени.

Российская глобальная навигационная система ГЛОНАСС, как и GPS, имеет свою собственную шкалу времени. В пределах 100 нс она привязана к московскому времени UTC+3 и поддерживает эту привязку с помощью водородных мазеров в центральном синхронизаторе ГЛОНАСС. В связи с этим, шкала подвержена влиянию високосных секунд.

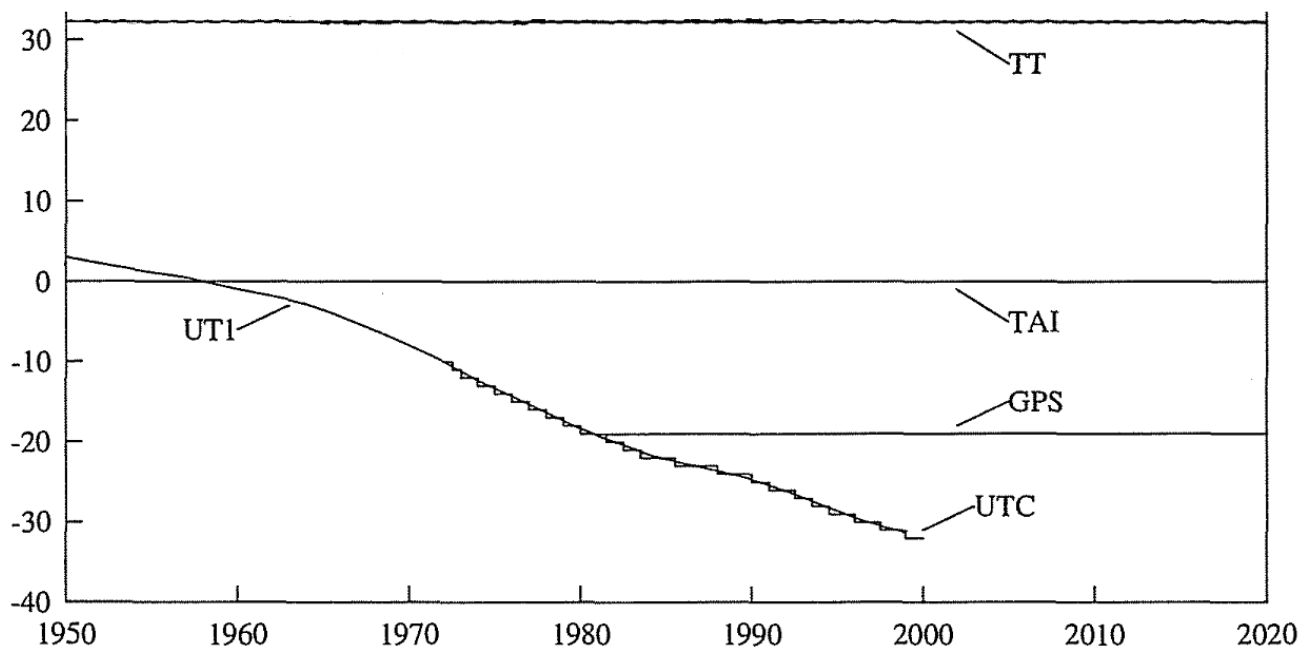


Рисунок 1.1 — Различия в ходе шкал времени со временем в секундах.

UTC	2023-04-10 19:26:23
UTC+3	2023-04-10 22:26:23
TAI	2023-04-10 19:27:00
GPS	2023-04-10 19:26:41

Таблица 1 — Пример отличий шкал времени.

1.2.2 Системы координат

Для определения местоположения КА в пространстве необходимо также задать систему координат, в которой он движется. На сегодня для приложений околоземной космонавтики используются две ключевые системы координат: *земная* и *небесная*.

Международная земная система отсчета (ITRS) – это геоцентрическая система координат с началом отсчета в центре масс Земли. Ось Z системы ITRS в пределах 30 мс дуги совпадает с условным международным началом (CIO), что является средним положением земного полюса по измерениям на интервале с 1900 г. по 1905 г [129]. Ось X лежит в плоскости Гринвичского меридиана и экватора, ось Y лежит в плоскости меридиана с долготой 90° и дополняет систему осей до правой тройки.

Также существует Международная небесная система отсчета (GCRS). Начало отсчета в системе координат GCRS находятся в центре масс Земли, однако ее оси не вращаются вместе с Землей. Они закреплены относительно удаленных радиоисточников (квазаров), а сама система отсчета движется вокруг барицентра Солнечной системы [130].

Преобразование вектора из земной системы координат в небесную, задаваемую средним экватором и равноденствием на эпоху $J2000.0$, описывается уравнением:

$$\mathbf{r}_{GCRS} = P(t)N(t)\Theta(t)\Pi(t)\mathbf{r}_{ITRS}, \quad (1.3)$$

где матрицы $P(t)N(t)\Theta(t)\Pi(t)$ описывают влияние прецессии, нутации, вращения Земли и движения полюсов соответственно. Для облегчения вычислений данных матриц можно воспользоваться астрометрической программной библио-

текой SOFA [131], рекомендованной Международным астрономическим союзом. Для вычисления матрицы перехода из земной системы координат в небесную потребуется знать только координаты небесного эфемеридного полюса и расхождение шкал времени UTC и UT1. В библиотеке SOFA для вычисления матрицы перехода из небесной системы координат в земную можно воспользоваться функцией *C2T00B*. Помимо этого, с помощью функции *C2I00B* можно найти переход из небесной системы координат в промежуточную, не включающую в себя вращение Земли. Это необходимо, для вычисления производной матрицы Θ , которая участвует в преобразовании вектора скорости КА.

1.3 Влияние сил гравитационной природы

1.3.1 Гравитационное поле Земли

В невозмущенной задаче Кеплера предполагается, что вся масса Земли сосредоточена в центре системы координат, и ускорение КА описывается следующим законом:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}\mathbf{r}. \quad (1.4)$$

В более реалистичной модели гравитационного поля Земли удобнее перейти к эквивалентной записи данной формулы через градиент соответствующего гравитационного потенциала:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U, \quad (1.5)$$

где $U = GM_{\oplus}\frac{1}{r}$.

Данное выражение можно переписать для произвольного распределения элементов массы тела:

$$U = G \int \frac{\rho(\mathbf{s})d^3\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}, \quad (1.6)$$

где $\rho(\mathbf{s})$ означает плотность тела в точке с радиус-вектором \mathbf{s} . Далее можно применить разложение в ряд полиномов Лежандра:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n P_n\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{rs}\right) \quad (1.7)$$

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n,$$

где P_n – полином Лежандра порядка n . Переходя к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda \\ y &= r \cos \phi \sin \lambda \\ z &= r \sin \phi, \end{aligned} \quad (1.8)$$

и соответствующим координатам (r', ϕ', λ') для вектора \mathbf{s} , выражение для геопотенциала можно переписать в следующем виде:

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_{\oplus}^n}{r^n} P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)), \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \frac{2 - \delta_{0m}}{M_{\oplus}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \frac{s^n}{R_{\oplus}^n} P_{nm}(\sin \phi') \cos(m\lambda') \rho(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} \\ S_{nm} &= \frac{2 - \delta_{0m}}{M_{\oplus}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \frac{s^n}{R_{\oplus}^n} P_{nm}(\sin \phi') \sin(m\lambda') \rho(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$P_{nm}(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u).$$

Коэффициенты разложения геопотенциала C_{nm} и S_{nm} называются коэффициентами Стокса, а P_{nm} есть присоединенный полином Лежандра. Существует несколько моделей для определения коэффициентов Стокса. Глобальные модели, описывающие глобальное гравитационное поле Земли (ГПЗ), основаны на принципах космической геодезии, в которых решение ГПЗ получается за счет высокоточного позиционирования КА. EGM2008 является наиболее популярной моделью на сегодня и включает в себя коэффициенты сферических гармоник вплоть до 2190 степени и 2159 порядка.

Для того чтобы вычислить итоговую возмущающую силу, действующую на КА со стороны гравитационного поля Земли, необходимо вычислить градиент геопотенциала из формулы 1.9. Существует ряд рекурсивных алгоритмов, позволяющих сделать это оперативно с точностью до определенной гармоники разложения n [132; 133]. В данной работе применяется алгоритм Беликова и Тайбаторова [134]. Основным преимуществом этого алгоритма является специфическая нормировка полиномов Лежандра и коэффициентов Стокса. Поскольку коэффициенты разложения геопотенциала могут отличаться в пределах десятка порядков, то для сохранения точности вычислений используют определенные нормировки. Модель EGM2008 имеет следующий нормировочный коэффициент:

$$N = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}}, \quad (1.11)$$

а в алгоритме Беликова нормировочный коэффициент выглядит так:

$$N = \frac{(n+m)!}{2^m n!}. \quad (1.12)$$

Таким образом, для вычислений по алгоритму Беликова необходимо перенормировать коэффициенты модели EGM2008 согласно выражению:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{nm} &= N \bar{C}_{nm} \\ \hat{S}_{nm} &= N \bar{S}_{nm} \\ N &= \frac{1}{2^m n!} \sqrt{2(2n+1)(n+m)!(n-m)!}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где \hat{C}_{nm} и \hat{S}_{nm} – коэффициенты для алгоритма Беликова, а \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} – коэффициенты модели EGM2008. Чтобы избежать процедуры вычисления факториалов больших чисел и сохранить точность вычислений при расчете больших степеней гармоник, в данной работе была выведена следующая практическая формула для нормировочного коэффициента:

$$N = \sqrt{2(2n+1) \prod_{i=0}^{m-1} \frac{n+m-i}{4(n-i)}}. \quad (1.14)$$

С рекуррентными формулами алгоритма Беликова и нахождения возмущающего ускорения можно ознакомиться в работе [134]. Надо отметить, что расчет возмущающего ускорения происходит в неинерциальной системе координат ITRF.

1.3.2 Гравитационное влияние тел Солнечной системы

Движение космических аппаратов подвержено гравитационному влиянию не только Земли, но и других небесных тел. В большей степени на его движение оказывают влияние Луна и Солнце, и в меньшей степени – остальные тела Солнечной системы. Данное возмущение принято называть эффектом третьего тела или эффектом N-тел. В системе GCRF формула возмущающего ускорения будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{r}} = GM \left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3} \right), \quad (1.15)$$

где GM – гравитационный параметр возмущающего тела, а \mathbf{s} – его геоцентрический радиус-вектор. Для того чтобы найти координаты небесного тела, можно воспользоваться эфемеридами DE403 [135]. На практике удобнее всего воспользоваться астрометрической библиотекой NAIF SPICE¹. С помощью функции *utc2et* или *str2et* из этой библиотеки можно автоматически перевести время из Всемирной шкалы UTC в шкалу эфемеридного времени [136]. А с помощью функции *spkpos* можно узнать координаты небесного тела в нужной системе координат.

1.3.3 Твердые приливы

Чтобы в полной мере учесть гравитационное влияние Земли на движение КА необходимо также учесть приливные возмущения. Гравитационный по-

¹<https://naif.jpl.nasa.gov/naif/toolkit.html>

тенциал в окрестностях Земли представляет собой комбинацию приливного потенциала внешних тел (Луны, Солнца, планет) и собственно геопотенциала, возмущенного приливным потенциалом. Внешний приливной потенциал можно разделить на постоянную часть и переменную, т.е. зависящую от времени. Если из наблюдаемого гравитационного потенциала вычесть переменную часть, то останется так называемый *потенциал среднего прилива*. А если убрать и постоянную часть внешнего потенциала из потенциала среднего прилива, то получится *потенциал нулевого прилива*, который строго равен геопотенциалу. В таком случае все еще остается постоянная часть возмущений геопотенциала из-за приливных взаимодействий. И наконец, если убрать и эту составляющую, то геопотенциал будет называться *свободным от приливов*.

Истинную величину свободного от приливов потенциала узнать не представляется возможным из-за постоянного наличия внешних возмущающих тел. Поэтому разрабатываются приливные модели, основанные на числах Лява. Поскольку Земля не является абсолютно твердым и упругим телом, для описания ее упругих деформаций английский геофизик Ляв ввел безразмерные параметры, названные числами Лява. Эти числа зависят от частоты воздействующей на Землю приливной силы, и для низких частот числа Лява известны с большими ошибками. Геопотенциал, полученный путем исключения приливных вкладов согласно модели с числами Лява, называется *условно свободным от приливов* и т.е., строго говоря, не соответствует истинно свободному от приливов потенциалу.

В 1984 году резолюция 18-ой Генеральной ассамблеи Международной ассоциации геодезии рекомендовала использовать значения нулевого прилива для вычисления геопотенциала. Однако на практике получилось, что большинство ученых при составлении алгоритмов для моделирования приливов для анализа данных в космической геодезии не придерживались данной рекомендации и поэтому их модели являются условно свободными от приливов. Наглядным примером является упомянутая выше модель EGM2008.

В численной модели эффект от влияния твердых приливов может быть учтен с помощью поправок к коэффициентам Стокса, зависящих от чисел Лява. Подробное изложение теории расчета данных поправок можно найти в [137]. Здесь приведем лишь практически значимые формулы для вычисления приливных поправок к коэффициентам Стокса. Надо отметить, что все поправки

приводятся в нормированном виде, для удобства сложения их с коэффициентами в модели EGM2008. На первом этапе вычисляются частотно независимые поправки для $n = 2, 3$:

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{pmatrix} = \sum_{\zeta \odot} B_n k_{nm} P_{nm}(\sin \phi) \begin{pmatrix} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

где сумма состоит из двух слагаемых: вклада Луны и Солнца соответственно. ϕ и λ – геоцентрические широта и долгота Луны или Солнца в системе координат ITRF. Долгота отсчитывается от Гринвича. P_{nm} – нормированный присоединенный полином Лежандра. k_{nm} – числа Лява, которые можно узнать из таблицы 2. А множитель B_n выражается следующим образом:

$$B_n = \frac{1}{2n+1} \frac{GM_{body}}{GM_{\oplus}} \left(\frac{R_{\oplus}}{r_{body}} \right)^{n+1}, \quad (1.17)$$

где r_{body} – расстояние от геоцентра до Луны или Солнца, а M_{body} – масса Луны или Солнца.

Для ($n = 4$) и ($m = 0,1,2$) формула несколько другая:

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{C}_{4m} \\ \Delta \bar{S}_{4m} \end{pmatrix} = \sum_{\zeta \odot} B_2 k_{2m}^+ P_{2m}(\sin \phi) \begin{pmatrix} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Данное выражение отличается от выражения для гармоники $n = 2$ только заменой числа Лява на k_{2m}^+ . Значения этих чисел приводятся в таблице 2.

Число Лява	Значение
k_{20}	0.29525
k_{21}	0.2947
k_{22}	0.29801
k_{30}	0.093
k_{31}	0.093
k_{32}	0.093
k_{33}	0.094
k_{20}^+	-0.00087
k_{21}^+	-0.00079
k_{22}^+	-0.00057

Таблица 2 – Значения чисел Лява

Далее рассчитываются частотно зависимые поправки, которые суммируются с уже полученными поправками к коэффициентам Стокса. Поправка от долгопериодической приливной составляющей к коэффициенту C_{20} вычисляется следующим образом:

$$\Delta\bar{C}_{20} = Re \sum_{f_0} A_{f_0} \exp i\theta_f, \quad (1.19)$$

где значения амплитуд A_{f_0} частотно зависимых поправок можно найти в [137], а расчет аргумента θ_f описан в следующем разделе.

Поправки для других гармоник, от суточных и полусуточных составляющих приливных волн, выглядит так:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m} &= \eta_m \sum_{f_m} A_{f_m} \exp i\theta_f, \quad (m = 1,2), \\ \eta_1 &= -i, \eta_2 = 1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.3.4 Океанические приливы

Воздействие океанических приливов так же учитывается посредством поправок к коэффициентам Стокса. Их расчет можно представить следующей формулой:

$$[\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm}](t) = \sum_f \sum_{\pm} (\bar{C}_{f,nm}^{\pm} \mp i\bar{S}_{f,nm}^{\pm}) e^{\pm i\theta_f(t)}, \quad (1.21)$$

где $\bar{C}_{f,nm}^{\pm}$ и $\bar{S}_{f,nm}^{\pm}$ гармонические амплитуды геопотенциала для приливной составляющей на частоте f . Расчет данных амплитуд ведется в соответствии с моделью океанических приливов FES2004. В данной модели учитываются степени и порядки вплоть до 100 для всех приливных волн, кроме длиннопериодических, для которых учет степеней и порядков ведется до 50 включительно [138].

Как и в случае учета частотно зависимых поправок в расчете твердых приливов необходимо определять аргумент θ_f , являющийся функцией, так на-

зываемых, аргументов Дудсона:

$$\theta_f = \bar{n}\bar{\beta} = \sum_{i=1}^6 n_i\beta_i, \quad (1.22)$$

где \bar{n} – множители аргументов Дудсона, $\bar{\beta}$ – аргументы Дудсона:

1. $\tau = \theta_m + \pi - s$ – среднее лунное время, часовой угол средней Луны для нулевого меридиана плюс 12 часов;
2. $p = s - l$ – долгота среднего перигея Луны;
3. $N' = -\Omega$ – взятая с противоположным знаком долгота среднего восходящего узла Луны на эклиптике;
4. $h = s - D$ – средняя долгота Солнца;
5. $s = F + \Omega$ – средняя долгота Луны;
6. $p_s = s - D - l'$ – долгота среднего перигея Солнца.

Здесь используются следующие обозначения (переменные Делоне):

1. F – средний аргумент долготы Луны (угловое расстояние в радианах от ее узла);
2. l' – средняя аномалия Солнца (угловое расстояние в радианах от его перигея);
3. l – средняя аномалия Луны (угловое расстояние в радианах от ее перигея);
4. D – средняя элонгация Луны (угловое расстояние в радианах от Солнца).

Аргументы Дудсона представляются в радианной мере и пересчитываются на заданный момент времени.

1.3.5 Полярные приливы

Твердый полярный прилив является следствием центробежной силы вследствие движения полюса Земли. Этот эффект может быть учтен с помо-

щью поправок к коэффициентам геопотенциала C_{21} и S_{21} :

$$\begin{aligned}\Delta\bar{C}_{21} &= -1.333 \times 10^{-9}(m_1 + 0.0115m_2), \\ \Delta\bar{S}_{21} &= -1.333 \times 10^{-9}(m_2 - 0.0115m_1),\end{aligned}\tag{1.23}$$

где m_1 и m_2 описывают отклонение мгновенного полюса Земли от среднего и выражены в секундах дуги. Процедура расчета переменных m_1 и m_2 описана в стандартах IERS.

Океанический полярный прилив является следствием центробежного эффекта движения полюса Земли на океаны. Для учета этого эффекта была использована модель Desai, в которой содержится равновесная модель океанического полярного прилива [130]. Выражение для расчета поправок к коэффициентам Стокса согласно этой модели выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = R_n \left\{ \begin{bmatrix} \bar{A}_{nm}^R \\ \bar{B}_{nm}^R \end{bmatrix} (m_1\gamma_2^R + m_2\gamma_2^I) + \begin{bmatrix} \bar{A}_{nm}^I \\ \bar{B}_{nm}^I \end{bmatrix} (m_2\gamma_2^R - m_1\gamma_2^I) \right\}, \tag{1.24}$$

где

$$\begin{aligned}R_n &= \frac{\Omega^2 a_E^4}{GM} \frac{4\pi G \rho_w}{g_e} \left(\frac{1 + k'_n}{2n + 1} \right), \\ \gamma &= \gamma_2^R + i\gamma_2^I = (1 + k_2 - h_2) = 0.6870 + i0.0036,\end{aligned}\tag{1.25}$$

и m_1 и m_2 описывают отклонение мгновенного полюса Земли от среднего и выражены в радианах. Коэффициенты $\bar{A}_{nm} = \bar{A}_{nm}^R + \bar{A}_{nm}^I$ и $\bar{B}_{nm} = \bar{B}_{nm}^R + \bar{B}_{nm}^I$ доступны на ftp сервере IERS.

1.3.6 Общая теория относительности

Релятивистские возмущения на низкой околоземной орбите могут быть описаны следующей формулой:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{Rel} = & \frac{\mu_{\oplus}}{c^2 r^3} \left\{ \left[\frac{4\mu_{\oplus}}{r} - v^2 \right] \mathbf{r} + 4(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \right\} + \\ & + \frac{2\mu_{\oplus}}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{r^2} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}](\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) + [\mathbf{v} \times \mathbf{J}] \right] + \\ & + \left[3 \left[\mathbf{V} \times \left(\frac{-\mu_{\odot} \mathbf{R}}{c^2 R^3} \right) \right] \times \mathbf{v} \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

где \mathbf{R} , \mathbf{V} – вектора положения и скорости Земли относительно Солнца, \mathbf{r} , \mathbf{v} – вектора положения и скорости космического аппарата в инерциальной геоцентрической системе координат, μ_{\oplus} , μ_{\odot} – гравитационный параметры Земли и Солнца, \mathbf{J} – вектор момента импульса Земли для единичной массы. Первый член формулы описывает метрику Шварцшильда, второй – эффект Лензе-Тирринга, третий – прецессию де Ситтера.

1.4 Негравитационные возмущения

1.4.1 Атмосферное торможение

Космический аппарат при движении на низкой околоземной орбите испытывает соударения с частицами атмосферы. Возникающая тормозящая сила зависит от относительной скорости спутника и плотности атмосферы. Она может быть вычислена по формуле:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} C_D A \rho v_r^2 \mathbf{e}_v, \quad (1.27)$$

где C_D – коэффициент пропорциональности, величина которого соответствует тому, насколько сильно данный спутник тормозится атмосферой при заданных

относительной скорости v_r и плотности атмосферы ρ . Величина коэффициента определяется эмпирически и зависит в основном от формы спутника и материалов его поверхности; характерные значения 1.5–3.0. A – площадь поперечного сечения спутника в направлении движения; $\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}_r}{|\mathbf{v}_r|}$ – единичный вектор направления движения спутника.

Для расчета плотности атмосферы в данной точке пространства можно использовать модель NRLMSISE-00. Это стандартная международная модель атмосферы для космических исследований. Для расчета плотности в данной модели используются данные о солнечной активности и активности магнитосферы Земли.

1.4.2 Давление солнечного излучения

Солнечное излучение оказывает возмущающий эффект на движение космических аппаратов. Для оценки давления солнечного излучения, действующего на поверхность космического аппарата необходимо учитывать качество поверхности спутника и его ориентацию относительно Солнца. Оценка давления солнечного излучения производится путем разбиения поверхности космического аппарата (КА) на фрагменты. Каждый из фрагментов имеет заданную ориентацию в системе координат КА и параметры качества поверхности. Таким образом составляется модель поверхности КА, которая поступает на вход методу расчета давления солнечного излучения. Общее выражение для оценки возмущающего ускорения от солнечного давления можно записать следующим образом:

$$\mathbf{a}_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \eta_i \mathbf{F}_i (A_i, \theta_i, \alpha_i, \mu_i), \quad (1.28)$$

где m – масса аппарата, η_i – функция освещенности элемента с номером i , A_i – площадь i -го элемента, θ_i – угол падения солнечного излучения, отсчитываемый от нормали к поверхности, α_i – коэффициент отражения элемента, μ_i – коэффициент зеркальности элемента. Часть α от всего света отражается от поверхности, а остальная часть поглощается. Часть μ отраженного света

отражается зеркально, а остальная часть отражается по закону косинусов Ламберта (диффузное отражение) (рис. 1.2). Основную возмущающую функцию

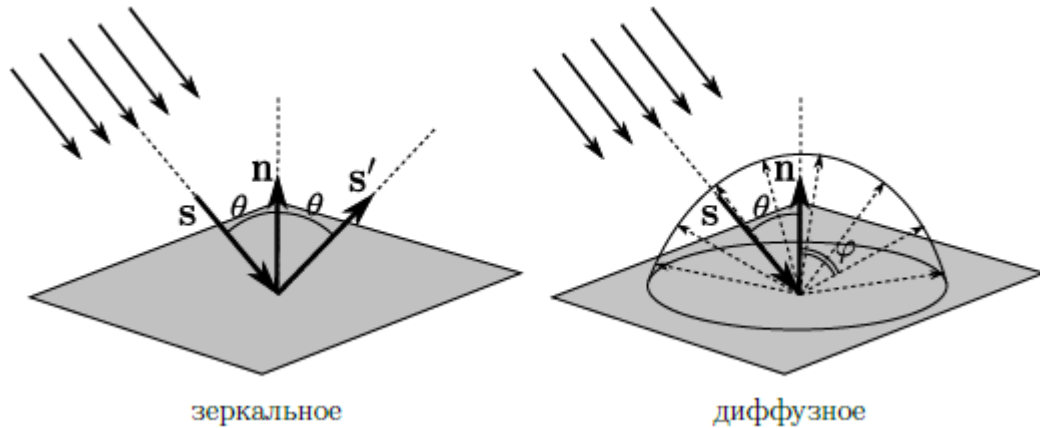


Рисунок 1.2 — Схема падения и отражения солнечного излучения на поверхность КА.

F_i можно расписать отдельно для поглощенного, зеркального отраженного и диффузного отраженного света:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{\text{погл}} &= \Phi_0 A (1 - \alpha) \cos \theta \cdot \mathbf{s} \\
 \mathbf{F}_{\text{зерк}} &= \Phi_0 A 2\alpha\mu \cos^2 \theta \cdot (-\mathbf{n}) \\
 \mathbf{F}_{\text{дифф}} &= \Phi_0 A \alpha (1 - \mu) \cos \theta \cdot \left(\mathbf{s} - \frac{2}{3} \mathbf{n} \right)
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

где $\Phi_0 = \frac{S_0}{c} \left(\frac{AU}{r} \right)^2$, S_0 – солнечная постоянная, AU – астрономическая единица, \mathbf{s} , \mathbf{n} – единичные вектора падения света и нормали к поверхности соответственно. Функция освещенности элемента равна нулю, если элемент находится в тени, единице – при полном освещении Солнцем и промежуточной величине – при нахождении в полутени. Подробные формулы для ее вычисления можно найти в [139].

Глава 2. Модель наблюдений

2.1 Основные типы траекторных измерений

В настоящее время для определения орбит искусственных спутников Земли используется множество различных типов наблюдений. Условно их можно разделить на три группы: измерения угловых координат, дальномерные измерения, измерения скорости КА. Для каждого типа наблюдений можно составить математическую модель, приближенно описывающую данное измерение с помощью аналитических выражений. Эта модель наблюдений, как и сами наблюдения, поступают на вход алгоритму фильтрации, речь о котором пойдет в разделе 2.4.

Самым распространенным видом траекторных измерений при определении орбиты КА является измерение дальности:

$$\rho = [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)]^{1/2}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{r}_o – геоцентрические вектора КА и наблюдателя на Земле соответственно. Такие измерения можно проводить как в радио диапазоне, так и в оптическом. В последнем случае речь идет о лазерных измерениях. Несмотря на то, что данные измерения имеют чрезвычайно высокую точность, их получение сопряжено с рядом трудностей. Так как панель угловых отражателей зафиксирована относительно корпуса КА, проведение измерений требует определенной ориентации КА в пространстве. Помимо этого, для лазерных измерений предъявляются особые требования по высоте КА и погодным условиям в момент проведения измерений.

Вторым источником измерений являются измерения радиальной скорости КА:

$$\dot{\rho} = \frac{(x - x_o)(\dot{x} - \dot{x}_o) + (y - y_o)(\dot{y} - \dot{y}_o) + (z - z_o)(\dot{z} - \dot{z}_o)}{\rho}. \quad (2.2)$$

Формулы 2.1 и 2.2 представляют собой математические модели наблюдений. Само же получение наблюдений основано на задержке распространения сигнала

от излучателя до приемника для измерений дальности и на эффекте Доплера – для измерений радиальной скорости. Поэтому на практике оказывается, что в выражения 2.1 и 2.2 необходимо вносить учет дополнительных эффектов, чтобы добиться точного совпадения с реальными наблюдениями. Речь об этих эффектах пойдет в разделе 2.3.

В третьем типе траекторных измерений определяются угловые координаты КА на небе. Такие измерения можно проводить стандартными оптическими средствами или с помощью технологии РСДБ [140]. В первом случае точность оптических измерений не позволяет проводить высокоточное позиционирование КА. А в режиме РСДБ возникают сложности с построением высокоточной модели задержки, учитывающей эффекты ближнего поля, эффекты теории относительности, геофизические и инструментальные эффекты [141]. Несмотря на это, угловые измерения предоставляют крайне важную информацию о координатах КА в картинной плоскости, что, в совокупности с дальномерными измерениями, может значительно повысить точность позиционирования.

2.2 Наблюдения ГНСС

Среди радиодальномерных измерений особую роль играют ГНСС измерения. Космические системы позиционирования разрабатывались в мире начиная с 1960-х годов. Принцип их работы основан на измерении расстояния от навигационных спутников (НС) до антенны КА, координаты которого необходимо получить. Координаты положений НС известны с хорошей точностью. Таблица положений всех НС называется *альманахом*. Альманах хранится в памяти приемника объекта и периодически обновляется. Таким образом, зная точные координаты НС, объект может вычислить свое местоположение в пространстве. Для осуществления возможности измерения времени распространяемого радиосигнала НС передает также сигналы точного времени, используя при этом синхронизованные с системным временем бортовые атомные часы. После синхронизации вычисляется задержка между временем излучения сигнала и временем приема. ГНСС состоят из орбитальной группировки спутников, наземной системы управления и контроля и аппаратуры потребителей ГНСС. Обычно ГНСС

применяются для КА на низких околоземных орбитах (НОО), поскольку в этом случае уровень отношения сигнал/шум и количество доступных НС достигают своего максимума по сравнению с другими видами орбит. Низкой орбитой считается орбита с высотой до 2000 км. В данной работе для определения орбит низкоорбитальных космических аппаратов (НКА) используются две основные и самые точные на сегодня системы: GPS и ГЛОНАСС.

2.2.1 Система GPS

Система GPS (Global Positioning System) разработана министерством обороны США и представляет собой группировку космических аппаратов на высоте порядка 20 000 км. Так как эти КА используются для навигации их также называют навигационными спутниками (НС). Каждый такой аппарат позволяет осуществлять траекторные измерения дальности на радиочастоте и несет на борту радиопередатчик, вычислительный компьютер, стандарт частоты, передающую антенну и источник питания. Период орбит спутников GPS равен 11 ч 58 мин. Орбита для всех спутников имеет единое наклонение в $i = 55^\circ$. Однако долгота восходящего узла некоторых спутников отличается кратно 60° , поэтому КА GPS обращаются вокруг Земли в шести различных плоскостях. В каждой плоскости находится 4-5 навигационных спутников.

Спутники излучают открытые для использования сигналы в диапазонах частот L1 (1575.42 МГц), L2 (1227.60 МГц), L5 (1176.45 МГц). Третья частота доступна только для спутников поколения старше ИФ. При этом бортовая частота атомных часов немного сдвинута, чтобы компенсировать релятивистский эффект, обусловленный движением спутника относительно наблюдателя на Земле и разностью гравитационных потенциалов спутника и наблюдателя. Сигналы спутников GPS построены на основе технологии множественного доступа с кодовым разделением CDMA (Code Division Multiple Access). Это значит, что разные каналы передачи (разные спутники группировки) имеют общую полосу частот, но разные кодирующие последовательности.

2.2.2 Система ГЛОНАСС

Российская спутниковая система навигации ГЛОНАСС изначально имела военное назначение и была запущена в 1982 году. В систему входит 24 спутника, которые движутся в трех различных орбитальных плоскостях с наклоном в 64.8° и высотой орбит 19 100 км. Орбиты спутников ГЛОНАСС имеют большую стабильность по сравнению со спутниками GPS, поскольку они не имеют резонанса с вращением Земли. Период орбит составляет 11 ч 15 мин. Группировка спутников ГЛОНАСС оптимальна для использования в высоких широтах. Так же как и сигналы GPS сигналы ГЛОНАСС передаются с использованием правой круговой поляризации и имеют два типа: открытые с обычной точностью и защищенные с повышенной точностью. В отличие от спутников GPS спутники ГЛОНАСС имеют одну и ту же псевдослучайную кодовую последовательность для передачи сигнала, однако каждый спутник при этом передает сигнал на разной частоте. Такая технология получила название FDMA (Frequency Division Multiple Access). Центральной частотой ГЛОНАСС является частота 1602 МГц, а частота отдельных спутников в МГц определяется по формуле:

$$f_1 = 1602 + 0.5625n, \quad (2.3)$$

где $n = -7, -6, \dots, 0, \dots, 6$ – это номер частотного канала. Аналогично, сигнал частоты L2 определяется как

$$f_2 = 1246 + 0.4375n. \quad (2.4)$$

15 радиоканалов оказывается достаточно для 24 спутников, поскольку противоположно расположенные на орбиты НС не могут быть одновременно видны с поверхности Земли. На рис. 2.1 показана схема расположения спутников ГЛОНАСС на орбитах.

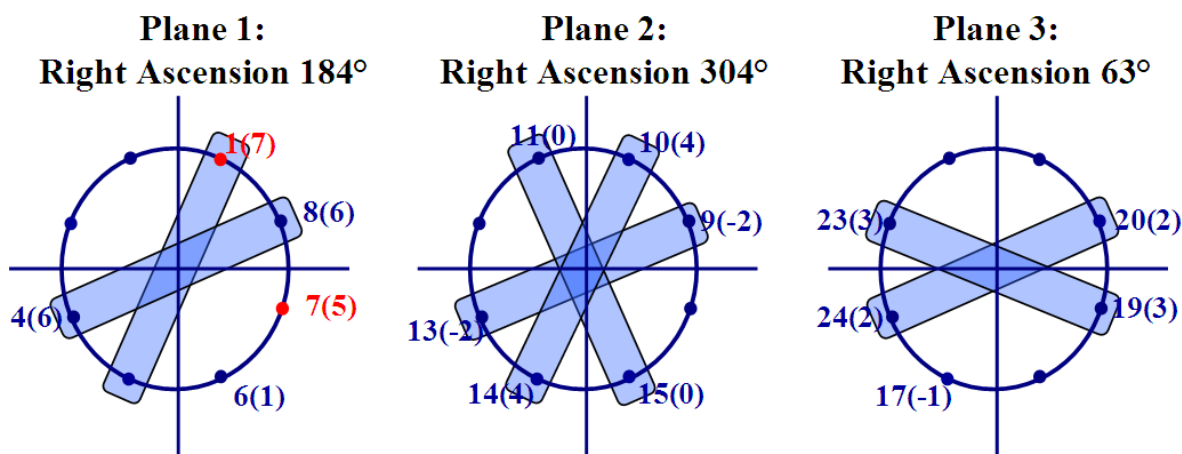


Рисунок 2.1 — Схема расположения спутников ГЛОНАСС в трех различных плоскостях.

2.2.3 Кодовые измерения

В настоящий момент существует два основных типа наблюдений с навигационных спутников: кодовые и фазовые. Эти измерения производятся приемником на борту низкоорбитального КА, а затем сохраняются и передаются в наземный центр обработки и анализа наблюдений. Данные спутниковых навигационных приемников имеют свой формат обмена, имеющий обозначение RINEX¹ (Receiver Independent Exchange Format). Последняя версия формата позволяет поддерживать работу со всеми современными спутниковыми навигационными системами: GPS², ГЛОНАСС³, Galileo⁴, BeiDou⁵, QZSS⁶, IRNSS⁷.

Дальномерные коды представляют собой импульсы, чередующиеся в определенной последовательности. По факту коды имеют псевдслучайное распределение нулей и единиц. На спутнике и в приемнике синхронно генерируются одинаковые коды, при этом код в приемнике представляет собой копию кода спутника. Два идентичных кода коррелируют лишь тогда, когда при совмещении они полностью совпадают друг с другом. Однако принятый в приемнике код спутника запаздывает по отношению к местному на время, пропорциональное

¹https://cdis.nasa.gov/Data_and_Derived_Products/GNSS/RINEX_Version_3.html

²<https://www.gps.gov>

³<https://www.glonass-iac.ru/guide/gnss/glonass.php>

⁴<https://galileognss.eu>

⁵<http://en.beidou.gov.cn>

⁶<https://qzss.go.jp/en/>

⁷<https://www.isro.gov.in/irnss-programme>

пройденному им расстоянию, поэтому пришедший и местный коды не коррелируют (рис. 2.2). Время распространения сигнала, следовательно, и дальность от приемника до спутника определяют задержкой местного кода до обнаружения сильной его корреляции с кодом, принятым со спутника. Практически измеряют не дальности, а их искаженные значения — псевдодальности.

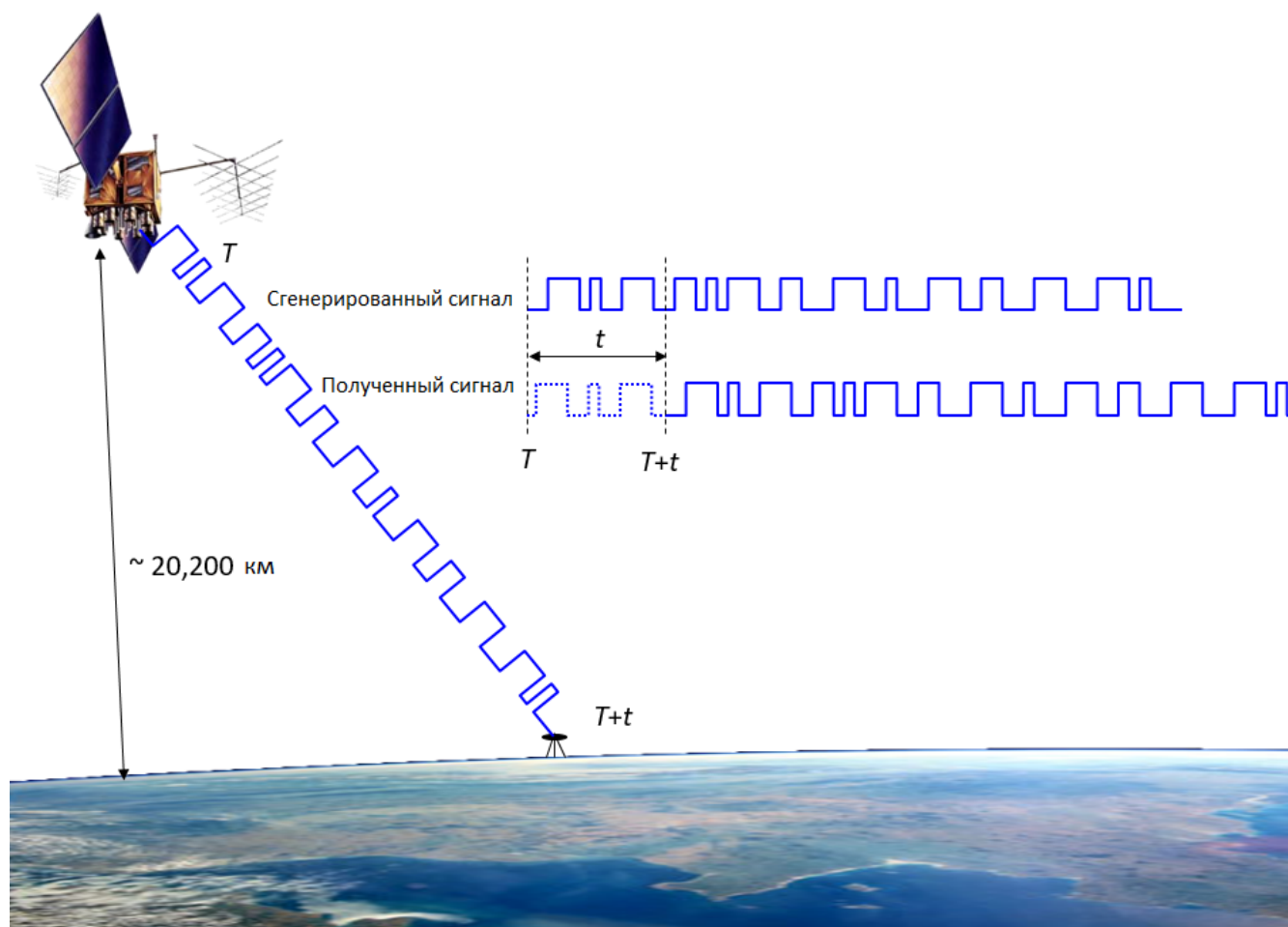


Рисунок 2.2 — Схема кодовых измерений ГНСС.

Без ограничений на использование распространяется сигнал L1C/L2C – сигнал с кодом C/A стандартной точности. Для военных пользователей дополнительно доступны сигналы в диапазонах L1/L2, модулированные помехоустойчивым и криптоустойчивым P(Y) кодом. Этот код также является псевдослучайной последовательностью, но если в случае C/A кода период повторения последовательности равен 1023 цикла, то в случае защищенного кода P – $2 \cdot 10^{14}$ циклов. Сам по себе код P разрабатывался доступным для всех пользователей, однако в целях безопасности он был заблокирован большинству гражданских приемников. Вместо этого был разработан код P(Y) или просто код Y, который получался путем приложения операции логического ИЛИ (XOR) к

коду P и специальному коду W , являющимся специальной секретной криптографической последовательностью. Данная процедура шифрования получила название *антиспуфинг*. Ее предназначение – это защита от подмены сигнала и помехоустойчивость. Чтобы приемник мог напрямую работать с кодом Y в нем необходимо установить специальный модуль SAASM (Selective Availability Anti-Spoofing Module), который способен генерировать ключ шифрования.

Для работы с такими зашифрованными кодами было разработано несколько методов [142; 143]: метод квадратурования, метод кросскорреляции, метод корреляции по кодам с методом квадратурования [144; 145], метод Z -слежения [146]. Первые два из этих методов принято называть *безкодовыми*, а вторые два – *полукодовыми* или *квазибезкодовыми*. Технические подробности получения измерений с помощью этих методов остаются за рамками данной работы. Однако можно вкратце описать самый популярный из них – метод Z -слежения. В этом методе Y код на частотах $L1$ и $L2$ отдельно коррелируется с созданной в приемнике репликой P кода. Поскольку корреляция производится отдельно, то W код (секретная последовательность) получается на каждой частоте отдельно и затем удаляется из сигнала. Удаление кода шифрования по сути приводит к тем же результатам, что и обработка сигнала без режима антиспуфинга. Надо отметить, что все методы восстановления длинного кода P при наличии режима антиспуфинг подвержены уменьшению отношения сигнал/шум.

Для последнего на сегодня поколения GPS спутников класса Block III разработан еще один специальный защищенный код M [147]. В то время как приемнику с кодом $P(Y)$ для начала работы необходимо иметь привязку по коду C/A , код M может использоваться автономно, без привязки. Код M разработан для военных целей, чтобы усилить устойчивость к помехам и подмене кода.

Обозначим время передачи сигнала с GPS-спутника t_{sat} , а время приема сигнала t_{rec} . Ошибки часов приемника и спутника обозначим как δ_s, δ_r . Умножая разницу $t_{sat} - t_{rec} = [t_r + \delta_r] - [t_s + \delta_s] = \Delta t + \Delta\delta$, где t_r и t_s времена в некоторой общей системе времени, на скорость света c , получаем выражение для кодовой псевдодальности:

$$P = c\Delta t + c\Delta\delta = \rho + c\Delta\delta, \quad (2.5)$$

где ρ есть расстояние между спутником в момент времени t_s и антенной приемника в t_r , а c – скорость света в вакууме.

2.2.4 Фазовые измерения

Другой тип наблюдений – измерения фазы несущей. Фазовым методом выполняют наиболее точные измерения, так как их инструментальная погрешность не превышает 1–2 мм. Метод основан на том, что фаза синусоидального колебания изменяется пропорционально времени. По истечении каждого периода фаза колебаний меняется на один цикл. В приемнике фаза принятой со спутника волны отличается от фазы местных колебаний на величину, пропорциональную расстоянию от спутника до приемника. Однако при фазовом методе измерений возникает сложная проблема разрешения целочисленной неоднозначности. На пути от спутника к приемнику изменению расстояния в одну длину волны соответствует изменение фазы волны в один цикл (период). Поэтому результат измерения разности фаз пришедшего и местного колебаний должен состоять из некоторого целого числа циклов и дробной их части. В действительности измерениями фиксируется только дробная часть. Это означает, что при длине волны 19 см расстояние, каким бы оно не было большим, фиксируется только в пределах этого отрезка. Иными словами, неоднозначность фазовых измерений обусловлена тем, что отсутствует возможность счета целого числа уложений длины волны в измеряемом расстоянии, и поэтому нужны дополнительные усилия, чтобы получить истинные значения дальностей.

Помимо целочисленных неоднозначностей, фазовые измерения подвержены еще одному вредному эффекту – *проскальзыванию циклов*. При данном эффекте сигнал спонтанно меняется на неопределенное целое число циклов по сравнению с предыдущим наблюдением и возникает необходимость дополнительно уточнять эту неоднозначность. Даже если нам удастся разрешить неоднозначности, из-за проскальзывания циклов они могут появиться снова. Есть несколько возможных причин для возникновения проскальзывания циклов:

- эффекты многолучевости;
- малое отношение сигнал/шум;
- ошибки в приемной аппаратуре;
- ошибки в опорном генераторе частоты навигационного спутника.

Пусть $\varphi_s(t)$ полученная приемником фаза на частоте f_s , а $\varphi_r(t)$ опорная фаза приемника на частоте f_r . Параметр t здесь отвечает за эпоху в общей

системе времени. Выражения для этих фаз имеют следующий вид [74]:

$$\begin{aligned}\varphi_s(t) &= f_s t - f_s \frac{\varrho}{c} - \varphi_s^0, \\ \varphi_r(t) &= f_r t - \varphi_r^0,\end{aligned}\tag{2.6}$$

где начальные фазы φ_s^0, φ_r^0 возникают из-за наличия ошибок часов:

$$\begin{aligned}\varphi_s^0 &= -f_s \delta_s, \\ \varphi_r^0 &= -f_r \delta_r.\end{aligned}\tag{2.7}$$

На практике, отличие частот f_s, f_r от номинальной f достаточно мало. Поэтому им можно пренебречь, и разница фаз запишется как:

$$\varphi_s^r(t) = \varphi_s(t) - \varphi_r(t) = -f \frac{\varrho}{c} - f \Delta \delta.\tag{2.8}$$

Целое число циклов N в момент включения приемника t_0 заранее неизвестно. Для разницы фаз можно записать:

$$\varphi_s^r(t) = \Delta \varphi_s^r(t)|_{t_0}^t + N,\tag{2.9}$$

где $\Delta \varphi_s^r(t)$ отвечает за дробную (измеряемую) часть фазы, увеличенную на целое число циклов, прошедших с момента t_0 . Принимая обозначение $F = -\Delta \varphi_s^r(t)$ и подставляя уравнение 2.9 в 2.8, получаем выражение для фазовой псевдодальности:

$$F = \frac{\varrho}{\lambda} + \frac{c \Delta \delta}{\lambda} + N.\tag{2.10}$$

Умножая это выражение на длину волны λ , получаем псевдодальность, измеряемую не в циклах, а единицах измерения длины:

$$L = \lambda F = \varrho + c \Delta \delta + \lambda N.\tag{2.11}$$

Это выражение отличается от 2.5 только наличием члена, содержащего неоднозначность.

2.2.5 Формат наблюдений ГНСС

Практически все наблюдения глобальных навигационных спутниковых систем приводятся к стандартному формату RINEX (Receiver Independent Exchange Format), который был разработан Астрономическим институтом в Берне. Данный формат позволяет обмениваться исходными данными спутниковых навигационных приемников и проводить постобработку полученных данных. Формат RINEX спроектирован так, чтобы его можно было дополнять, адаптировать под новые типы измерений и новые ГНСС. На текущий момент данный формат позволяет хранить кодовые и фазовые измерения, измерения радиальной скорости (доплеровские измерения), отношения сигнал/шум измерений и время наблюдений.

Для идентификации различных навигационных систем вводятся следующие буквенные обозначения:

G: GPS;

R: ГЛОНАСС;

E: Galileo;

C: BeiDou.

После обозначения навигационной системы идет номер навигационного спутника, который обозначается числом в диапазоне от 1 до 32. Надо отметить, что не всегда спутник с одним и тем же номером является именно одним и тем же космическим аппаратом, поскольку навигационные спутники иногда заменяют на новые или выводят из строя и перенумеровывают.

Для типов наблюдений также используются буквенные обозначения:

C/P: Кодовые;

L: Фазовые;

D: Доплеровские;

S: Сигнал/шум.

После обозначения типа идет номер частоты сигнала. В последних версиях формата RINEX за номером частоты также ставится атрибут измерения (пояснения в разделе [2.2.3](#)):

C: Короткий код C/A;

P: Длинный код P без антиспуфинга;

Y: Защищенный код $P(Y)$ с антиспуфингом;

M: Военный код M;

N: Безкодовые наблюдения N;

D: Квазибезкодовые наблюдения для кода C/A;

W: Квазибезкодовые наблюдения для кода $P(Y)$ (метод Z-слежения и др.).

Далее в работе будут использоваться только фазовые и кодовые измерения защищенного типа ($P(Y)$), которые соответственно будут обозначаться как L и P .

2.2.6 Дифференциальные измерения

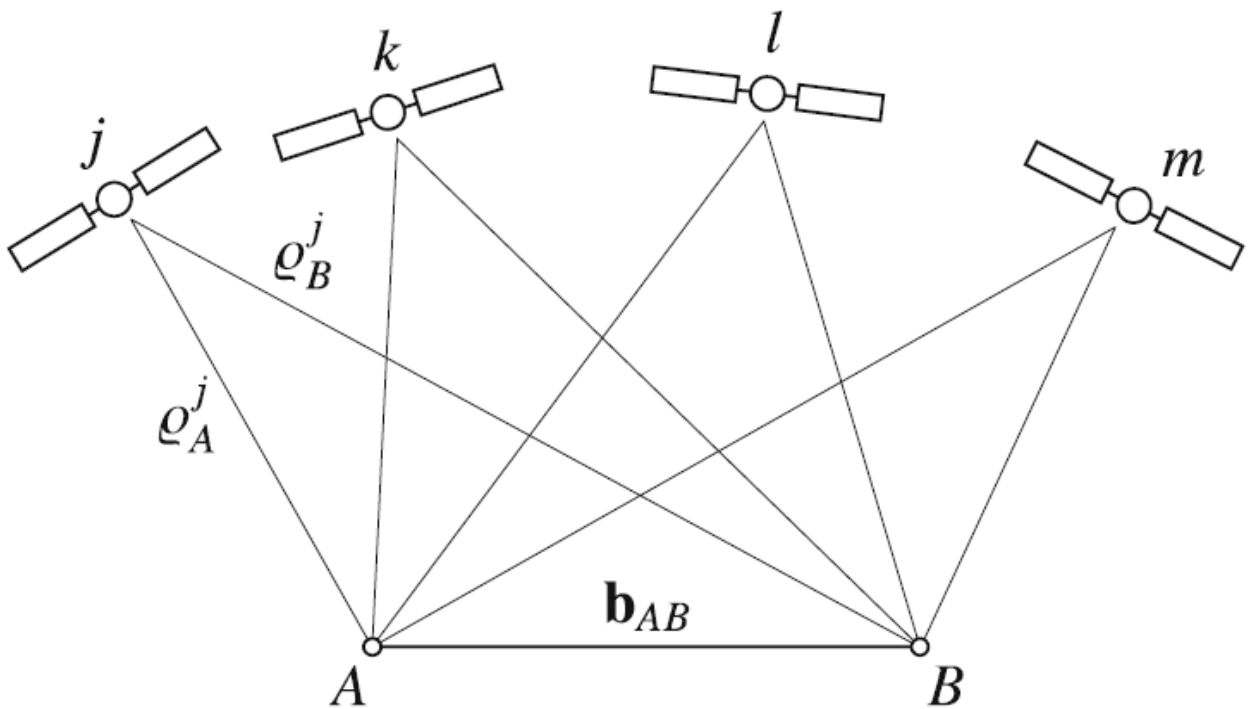


Рисунок 2.3 — Схема дифференциальных измерений

Принцип дифференциальных измерений заключается в том, чтобы определить координаты приемника по отношению к другому приемнику с известными координатами. Такие измерения можно формировать как с помощью кодовых, так и фазовых наблюдений. Дифференциальный режим требует одновременных измерений на двух приемниках, один из которых имеет известные координаты и считается опорным. Рассматривая такие измерения, полученные от

одних и тех же навигационных спутников, можно сформировать линейные комбинации измерений, известные как одинарные, двойные и тройные разности. Преимущества этого режима очевидны: при составлении таких разностей исключаются многие ошибки, свойственные стандартным одиночным измерениям приемника (нулевым разностям). Рассмотрим подробнее составление дифференциальных измерений на примере фазовых наблюдений.

Используются два приемника A и B и один навигационный спутник j . Модели фазовых измерений для них:

$$\begin{aligned}\Phi_A^j(t) + f^j \delta t^j(t) &= \frac{1}{\lambda^j} \rho_A^j(t) + N_A^j + f^j \delta t_A(t), \\ \Phi_B^j(t) + f^j \delta t^j(t) &= \frac{1}{\lambda^j} \rho_B^j(t) + N_B^j + f^j \delta t_B(t).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Составляется одинарная разность:

$$\Phi_B^j(t) - \Phi_A^j(t) = \frac{1}{\lambda^j} (\rho_B^j(t) - \rho_A^j(t)) + N_B^j - N_A^j + f^j (\delta t_B(t) - \delta t_A(t)).\tag{2.13}$$

В этом выражении исключается ошибка часов навигационного спутника δ^j . Выражение 2.13 можно переписать, вводя новые обозначения:

$$\Phi_{AB}^j(t) = \frac{1}{\lambda^j} \rho_{AB}^j(t) + N_{AB}^j + f^j \delta t_{AB}(t).\tag{2.14}$$

Если добавить к группировке еще один навигационный спутник, можно составить две одинарные разности:

$$\begin{aligned}\Phi_{AB}^j(t) &= \frac{1}{\lambda^j} \rho_{AB}^j(t) + N_{AB}^j + f^j \delta t_{AB}(t), \\ \Phi_{AB}^k(t) &= \frac{1}{\lambda^k} \rho_{AB}^k(t) + N_{AB}^k + f^k \delta t_{AB}(t).\end{aligned}\tag{2.15}$$

В таком случае двойная разность наблюдений:

$$\Phi_{AB}^k(t) - \Phi_{AB}^j(t) = \frac{1}{\lambda} (\rho_{AB}^k(t) - \rho_{AB}^j(t)) + N_{AB}^k - N_{AB}^j,\tag{2.16}$$

где $\lambda = \lambda^j = \lambda^k$. В этом выражении исключаются ошибки часов приемников. Его можно переписать:

$$\Phi_{AB}^{jk}(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^{jk}(t) + N_{AB}^{jk},\tag{2.17}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}\Phi_{AB}^{jk}(t) &= \Phi_B^k(t) - \Phi_B^j(t) - \Phi_A^k(t) + \Phi_A^j(t), \\ \rho_{AB}^{jk}(t) &= \rho_B^k(t) - \rho_B^j(t) - \rho_A^k(t) + \rho_A^j(t), \\ N_{AB}^{jk} &= N_B^k - N_B^j - N_A^k + N_A^j.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Для составления двойных разностей требуется брать два навигационных спутника, поэтому количество разностей будет на 1 меньше, чем количество спутников. Для составления двойных разностей выбирается один опорный спутник, с которым вычисляются разности для всех остальных.

Рассматривая двойные разности на два последовательных момента времени, можно исключить влияние неоднозначностей, поскольку предполагается, что они постоянны во времени для одной и той же группировки спутников. На практике, тройные разности не применяются для уточнения орбиты непосредственно, поскольку в них затухает сигнал рассогласования по положению КА, однако их можно применять для оценки скачков фазовых измерений. Модель наблюдений для тройной разности записывается следующим образом:

$$\Phi_{AB}^{jk}(t_2) - \Phi_{AB}^{jk}(t_1) = \frac{1}{\lambda}(\rho_{AB}^{jk}(t_2) - \rho_{AB}^{jk}(t_1)).\tag{2.19}$$

В данной работе дифференциальный режим измерений был реализован с помощью двух приемников на НКА проекта GRACE. Это позволило увеличить временной интервал одновременных наблюдений одинаковой группировки НС, отработать методику уточнения орбиты и определения параметров неоднозначностей фазовых измерений. В реальности в качестве базового приемника необходимо выбирать наземную станцию, поскольку ее координаты хорошо известны уже на момент проведения наблюдений. В данной работе режимы нулевых, одинарных, двойных и тройных разностей обозначаются, соответственно, как PPP (Precision Point Positioning), SD (Single Difference), DD (Double Difference), TD (Triple Difference). Режим нулевых разностей иногда принято обозначать как ZD (Zero Difference).

2.2.7 Комбинационные измерения

Одним из способов разрешения неоднозначностей в фазовых измерениях является комбинирование кодовых и фазовых измерений, полученных на двух частотах. Если оставить в модели наблюдений только члены, связанные с геометрическим расстоянием, ионосферой и целочисленными неоднозначностями, то модели кодовых и фазовых измерений могут быть представлены в следующем виде [43]:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \rho + I, \\
 P_2 &= \rho + \frac{f_1^2}{f_2^2} I, \\
 L_1 &= \rho - I + \lambda_1 n_1, \\
 L_2 &= \rho - \frac{f_1^2}{f_2^2} I + \lambda_2 n_2,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

где ρ – геометрическое расстояние между НС в момент излучения сигнала и НКА в момент приема, I – ионосферный член, λn – целочисленная неоднозначность, помноженная на длину волны сигнала, f_1, f_2 – частоты сигнала. Надо отметить, что все рассмотренные в этой главе комбинации измерений также применимы и для разностных измерений. В этом случае, к величинам L, P, ρ, I, n добавляются индексы соответствующих разностей между приемниками и НС.

Одной из важнейших комбинаций измерений является комбинация, свободная от ионосферы – безионосферная комбинация. В данной работе она обозначается как CIF и PIF (Code Ionosphere Free, Phase Ionosphere Free) для кодовых и фазовых измерений соответственно. В некоторых других работах ее обозначают как P_3, L_3 . Составить ее можно следующим образом:

$$\begin{aligned}
 CIF &= \frac{2}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 P_1 - f_2^2 P_2) = \rho, \\
 PIF &= \frac{2}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 L_1 - f_2^2 L_2) = \rho + B,
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

где B – член, связанный с влиянием целочисленных неоднозначностей. Данная комбинация позволяет избавиться от влияния ионосферного члена в первом по-

рядке. Остаются лишь члены более высокого порядка, максимальная величина которых может составлять до 1-2 см. Если считать дисперсии погрешностей одиночных измерений на обеих частотах равными, то среднее квадратическое отклонение (СКО) погрешности безионосферной комбинации будет в 3 раза больше СКО погрешности исходных измерений. С учетом малого шума фазовых измерений данное увеличение погрешности комбинации PIF не играет существенной роли. Именно поэтому эту комбинацию чаще всего используют для устранения влияния ионосферы. Однако при использовании PIF возникает проблема с разрешением целочисленных неоднозначностей, представленных слагаемым B в формуле 2.21. Данный член является нецелочисленным значением, и его можно расписать следующим образом:

$$B = \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 \lambda_1 n_1 - f_2^2 \lambda_2 n_2). \quad (2.22)$$

В процессе уточнения орбиты возможны ситуации, при которых несколько найденных пар неоднозначностей n_1, n_2 будут соответствовать одному и тому же значению B , поэтому следует внимательно проверять каждую пару кандидатов в неоднозначности и по другим критериям, речь о которых пойдет в разделе 3.1.6.

Значение члена B обычно оценивается в процессе уточнения орбиты. Однако можно получить еще одну независимую оценку этой величины. Для этого используется следующая комбинация:

$$CPIF = PIF - CIF. \quad (2.23)$$

С помощью комбинации $CPIF$ можно получить грубую оценку величины B , поскольку кодовые измерения подвержены значительному шуму. Однако в случае сглаженных значений кодовых измерений такая оценка оказывается полезной.

Довольно полезной комбинацией оказывается так называемая безгеометрическая комбинация, или CGF/PGF (Code/Phase Geometry Free). Иногда обозначается как P_4, L_4 . Составить ее можно следующим образом:

$$\begin{aligned} CGF &= P1 - P2 = I \left(1 - \frac{f_1^2}{f_2^2} \right), \\ PGF &= L1 - L2 = I \left(\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1 \right) + \lambda_1 n_1 - \lambda_2 n_2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Данная комбинация исключает влияние геометрического расстояния НС-НКА и ошибок часов НС и НКА. При этом в фазовых измерениях, помимо ионосферного члена, содержатся целочисленные неоднозначности. Если они остаются постоянными на протяжении некоторого интервала времени (не происходит пропусков циклов фазы), то по этой комбинации можно судить о вкладе ионосферы в измерения. СКО погрешности безгеометрической комбинации возрастает в 1.4 раза по сравнению с СКО погрешности одиночных измерений.

Также можно составить так называемые *узкие* и *широкие* комбинации измерений. В данной работе они будут обозначаться как CNL, PNL, CWL, PWL (Code/Phase Narrow/Wide Lane). Называются они так, потому что для фазовых измерений целочисленные неоднозначности имеют эффективную длину волны в 86 см для широкой комбинации и в 11 см – для узкой. Широкие комбинации в некоторых работах обозначаются как P_5, L_5 . Формулы для их составления следующие:

$$\begin{aligned}
 CNL &= \frac{1}{f_1 + f_2}(f_1 P_1 + f_2 P_2), \\
 PNL &= \frac{1}{f_1 + f_2}(f_1 L_1 + f_2 L_2), \\
 CWL &= \frac{1}{f_1 - f_2}(f_1 P_1 - f_2 P_2), \\
 PWL &= \frac{1}{f_1 - f_2}(f_1 L_1 - f_2 L_2).
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Эти комбинации в конечном итоге приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
 CNL &= \rho + I \frac{f_1}{f_2}, \\
 PNL &= \rho - I \frac{f_1}{f_2} + \lambda_3 n_3, \\
 CWL &= \rho - I \frac{f_1}{f_2}, \\
 PWL &= \rho + I \frac{f_1}{f_2} + \lambda_5 n_5,
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

где узкая и широкая длины волн представляются выражениями:

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{c}{f_1 + f_2}, \\ \lambda_5 &= \frac{c}{f_1 - f_2},\end{aligned}\tag{2.27}$$

а соответствующие целочисленные неоднозначности:

$$\begin{aligned}n_3 &= n_1 + n_2, \\ n_5 &= n_1 - n_2.\end{aligned}\tag{2.28}$$

СКО погрешности узкой комбинации в 0.7 раз меньше СКО погрешности одиночных измерений, а для широкой комбинации СКО оказывается больше в 5.7 раз.

И наконец, с помощью комбинаций *PWL* и *CNL* можно составить еще одну важнейшую комбинацию измерений – комбинацию Мельбурна–Вуббена, *MW* (Melbourne-Wübbena):

$$MW = PWL - CNL = \lambda_5 n_5.\tag{2.29}$$

Именно эта комбинация чаще всего используется для разрешения неоднозначностей, поскольку с помощью неё достаточно надежно можно определить разницу между неоднозначностями на разных частотах. Это позволяет сделать эффективная длина волны в 86 см. СКО погрешности данной комбинации определяется кодовыми измерениями, поскольку ошибка фазовых измерений несущественна по сравнению с ошибкой кодовых. Таким образом оказывается, что СКО погрешности комбинации *MW* в 0.7 раз меньше погрешности одиночных измерений.

2.3 Моделирование измерений ГНСС

2.3.1 Полная модель наблюдений ГНСС

Модель наблюдений для кодовых и фазовых измерений, соответственно, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P_l^h &= \varrho_l^h + c \cdot \delta t_l - c \cdot \delta t^h + a^h + a_l + I + c \cdot \delta t_{rel} + HCD_l + HCD^h + \\
 &\quad + IFB^h + ISB + \epsilon_P, \\
 L_l^h &= \varrho_l^h + c \cdot \delta t_l - c \cdot \delta t^h + a^h + a_l - I + c \cdot \delta t_{rel} + HPD_l + HPD^h + \\
 &\quad + IFB^h + ISB + \lambda N + \delta \varrho_{wind-up} + \epsilon_L,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

где P_l^h – кодовое измерение (псевдодалность); L_l^h – фазовое измерение (псевдофаза); ϱ_l^h – геометрическое расстояние между высоким НС (h - high) в момент передачи сигнала и НКА (l - low) в момент приема; a^h – смещение фазового центра антенны НС; a_l – смещение фазового центра антенны НКА; I – влияние ионосферы; c – скорость света в вакууме; δt_l – влияние ошибки часов НКА; δt^h – влияние ошибки часов НС; δt_{rel} – влияние релятивизма; HCD_l – аппаратурная кодовая задержка НКА (Hardware Code Delay); HCD^h – аппаратурная кодовая задержка НС; HPD_l – аппаратурная фазовая задержка НКА (Hardware Phase Delay); HPD^h – аппаратурная фазовая задержка НС; IFB^h – смещение из-за расхождения частот различных НС (Inter-Frequency Bias); ISB – смещение из-за расхождения шкал времени различных ГНСС (Inter-System Bias); N – целочисленная неоднозначность псевдофазы; λ – длина волны несущей сигнала; $\delta \varrho_{wind-up}$ – поправка, связанная со взаимной ориентацией антенн НС и НКА (эффект набега фазы); ϵ – прочие немоделируемые ошибки, включая эффект многолучевости.

2.3.2 Решение светового уравнения

Величина ρ_i^h в уравнении 2.30 представляет собой геометрическое расстояние между НС в момент времени передачи сигнала и НКА в момент времени приема сигнала. На практике известен только момент времени приема, а момент передачи сигнала необходимо вычислять. Эта процедура, называемая определением световой задержки сигнала, позволяет определить момент времени передачи сигнала с НС и его координаты в этот момент. Решение осуществляется с помощью итеративного алгоритма, блок-схема которого приведена на рис. 2.4. Пояснения к этому алгоритму проиллюстрированы на рис. 2.5.

На вход алгоритма подается измерение псевдодальности. Рассчитывается задержка сигнала по формуле:

$$\delta t_{delay} = R_{start}/c, \quad (2.31)$$

где R_{start} – наблюдение, c — скорость света в вакууме.

Задержка сигнала вычитается из времени приема сигнала, которое совпадает с эпохой наблюдения. На полученный момент времени находятся координаты НС. Для этого включается численное интегрирование уравнений движения, на вход которого подается вектор состояния НС, взятый из каталога эфемерид ГНСС. С помощью найденных координат НС на момент передачи сигнала и НКА на момент приема сигнала можно вычислить модельную псевдодальность. Затем эта модельная величина сравнивается с измерением, поступившем на вход итеративного алгоритма. Если эти величины совпали до достаточно малой величины, то алгоритм завершается. Если нет, то найденная модельная псевдодальность поступает на вход алгоритма и процедура повторяется до тех пор, пока начальная и конечная величины алгоритма не будут совпадать в пределах достаточно малой величины. В процессе вычисления модельной псевдодальности необходимо также учесть различные поправки, которые отражены в формуле 2.30.

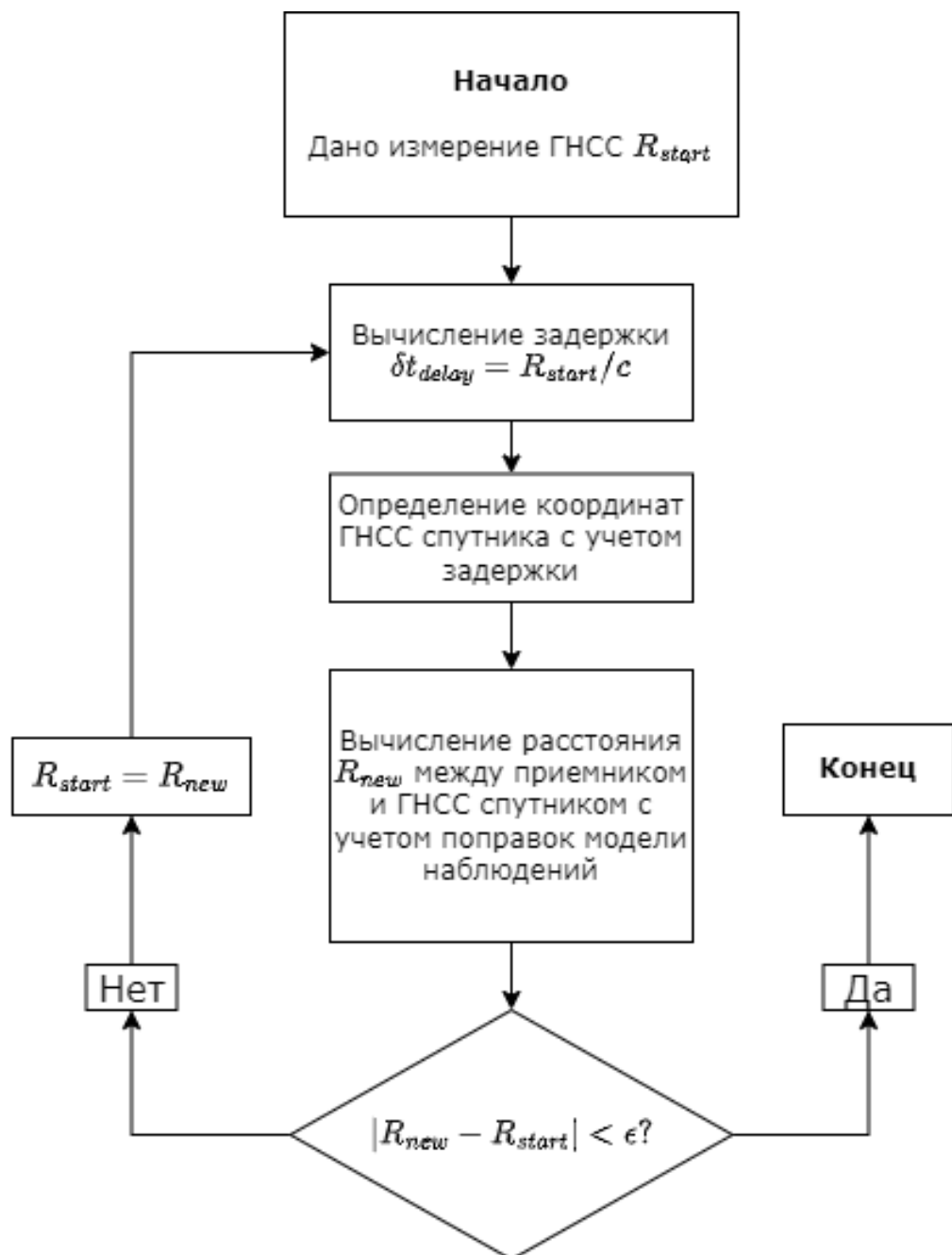


Рисунок 2.4 — Алгоритм вычисления момента передачи сигнала с ГНСС-спутника. ϵ — достаточно малая величина. См. пояснения в тексте.

2.3.3 Ошибка бортовых часов

После вычисления световой задержки необходимо произвести учет ошибок часов НКА и НС. Ошибки часов НКА обычно оцениваются заранее и приводятся вместе с каталогом наблюдений. Если этого не сделано, то ошибку следует включить в число уточняемые параметров, наряду с вектором состояния НКА. Моделирование распространения этой ошибки во времени осуществляется по

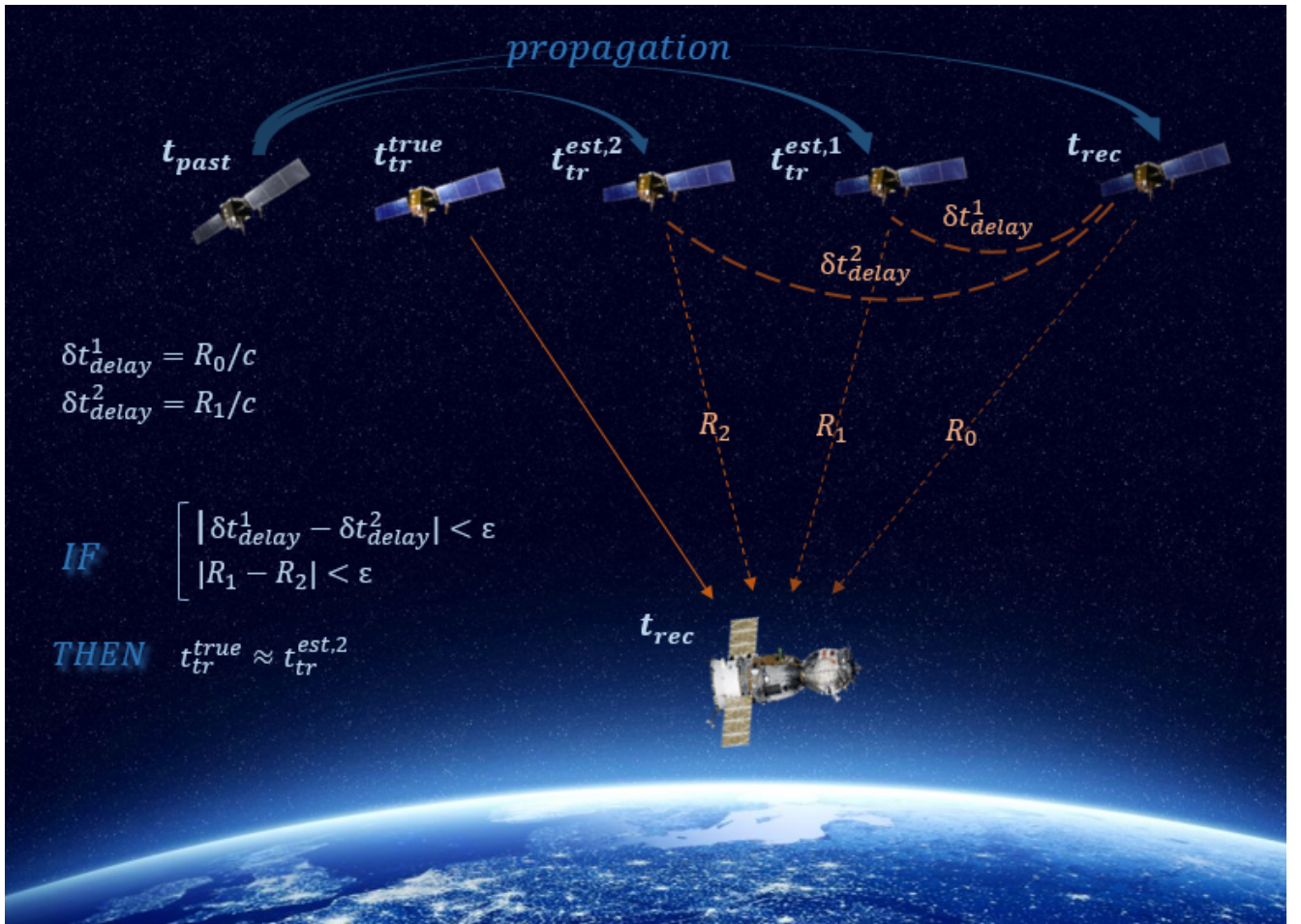


Рисунок 2.5 — Процедура вычисления световой задержки ГНСС сигнала для НКА. В верхней части рисунка изображен ГНСС-спутник в разные моменты времени. Положение НС определяется либо путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения (*propagation*) с известными начальными условиями в некоторый момент времени t_{past} , либо путем интерполирования эфемерид. В нижней части рисунка изображен низкоорбитальный космический аппарат в момент времени t_{rec} , где t_{rec} — время приема сигнала. Вычисляется расстояние R_0 , задержка сигнала δt_{delay}^1 и определяется положение НС на момент времени $t_{tr}^{est,1} = (t_{rec} - \delta t_{delay}^1)$, где $t_{tr}^{est,1}$ — потенциальное время отправки сигнала. Данная процедура повторяется итеративно, пока не будет соблюдено одно из условий. Либо две последние вычисленные задержки, либо два последних расстояния должны совпадать в пределах малой величины ϵ . После этого можно считать, что последний вычисленный момент времени t_{tr}^{est} есть оценка истинного момента времени отправки сигнала t_{tr}^{true} .

формуле [13]:

$$\delta t_{l,i} = a_0 + a_1(t_i - t_0) + \dots + a_m(t_i - t_0)^m, \quad (2.32)$$

где t_i – эпоха, на которую вычисляется поправка часов относительно эпохи t_0 , a – полиномиальные коэффициенты. В данном выражении не учитывается периодическое изменение ошибки часов, вызванное Общей теорией относительности. Коэффициенты a_0 и a_1 называются отклонением фазы и частоты часов, соответственно. Именно эти коэффициенты чаще всего принято уточнять, пренебрегая остальными порядками в выражении 2.32. Моделирование прогнозирования этих коэффициентов осуществляется с помощью белого гауссовского шума.

Ошибки часов НС содержатся в специальных каталогах, предоставляемых международной службой ГНСС (IGS)⁸ и российским информационно-аналитическим центром ГЛОНАСС⁹ в формате SP3 и CLK. Получение ошибки часов из каталога может осуществляться путем интерполирования. Для получения высокоточных результатов следует брать каталоги ошибок часов с наименьшим шагом по времени.

2.3.4 Смещение фазового центра антенны ГНСС спутника

Поскольку центр масс навигационного спутника отстоит от фазового центра антенны на несколько десятков см, необходимо учитывать этот эффект в модели наблюдений. Смещение фазового центра антенны из уравнения 2.30 вычисляется по следующей формуле:

$$a^h = |\mathbf{PCO}_{GCRF} + \mathbf{PCV}_{GCRF}(\theta)|. \quad (2.33)$$

Вектор PCO (phase center offset) обозначает смещение номинального центра антенны относительно центра масс космического аппарата. Вектор PCV (phase center variation) представляет собой смещение фактического фазового центра антенны относительно номинального в зависимости от угла θ – угла между вектором НС-НКА и надиром (рис. 2.6).

Вектора PCO для НС предоставляются Международной службой ГНСС (IGS) в виде файла формата ANTEX с расширением «.atx». Вектор PCO приведен для каждого существовавшего когда-либо НС и находится в системе коор-

⁸<https://igs.org>

⁹<https://glonass-iac.ru>

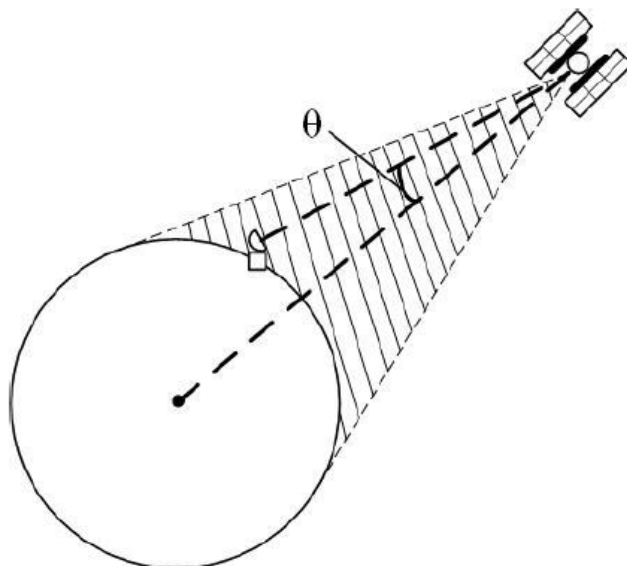


Рисунок 2.6 — Угол для вычисления вектора PCV

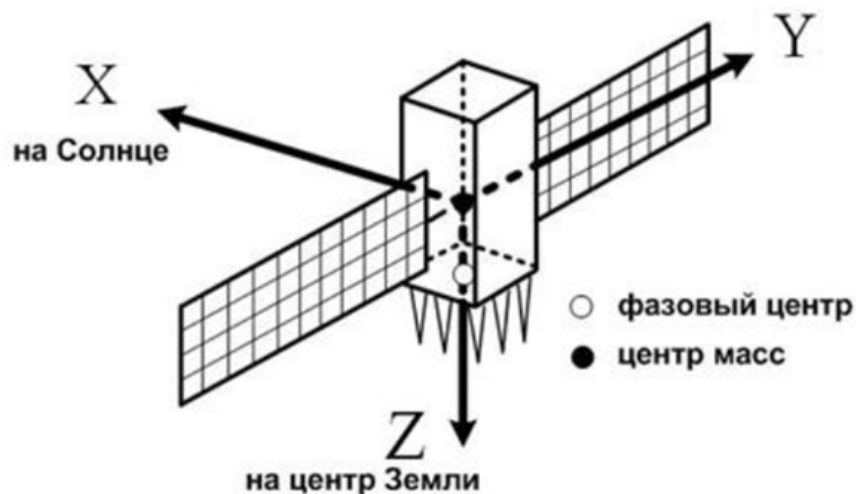


Рисунок 2.7 — Система координат навигационного спутника.

динат, жестко связанной со спутником (рис. 2.7). В этой системе координат ось Z направлена в центр Земли, ось X находится в плоскости, проходящей через ось Z и Солнце, а ось Y дополняет правую тройку векторов. В этом же файле находятся параметры для расчета вектора PCV. Направление вектора PCV совпадает с направлением вектора НС-НКА, а длина вектора рассчитывается в зависимости от угла отклонения от надира.

Поскольку вектора PCO и PCV изначально предоставляются в системе координат спутника SRF (Satellite Reference Frame) и зависят от его ориентации, необходимо преобразовать их в инерциальную систему координат GCRF. Сделать это не составляет труда, поскольку ориентация НС относительно стабильна. Преобразования производятся согласно следующим выражениям.

Вначале вычисляются единичные векторы системы координат спутника в системе GCRF:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_z &= -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \\
 \mathbf{s} &= \frac{\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}|}, \\
 \mathbf{e}_y &= \frac{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{s}]}{||[\mathbf{e}_z \times \mathbf{s}]||}, \\
 \mathbf{e}_x &= [\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z],
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

где \mathbf{r} – вектор положения НС в системе GCRF, \mathbf{r}_{\odot} – вектор положения Солнца в системе GCRF. Затем из них составляется матрица поворота из системы SRF в систему GCRF:

$$M = \begin{pmatrix} e_x^1 & e_y^1 & e_z^1 \\ e_x^2 & e_y^2 & e_z^2 \\ e_x^3 & e_y^3 & e_z^3 \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

$$\mathbf{PCO}_{GCRF} = M \cdot \mathbf{PCO}_{SRF}.$$

2.3.5 Смещение фазового центра антенны низкоорбитального КА и эффекты многолучевости

Смещение фазового центра антенны НКА находится схожим образом, путем добавления векторов PCO и PCV. Однако в случае с НКА ориентация может изменяться непредсказуемым образом. Поэтому при обработке измерений ГНСС необходимо также иметь файлы ориентации НКА. Чаще всего они представляются таблицей по времени кватернионов поворота локальной системы координат НКА относительно системы GCRF. В случае спутников проекта GRACE система SRF определяется следующим образом. Ось X направлена на спутник-компаньон, ось Z направлена в надир, ось Y дополняет систему до правой тройки векторов.

Преобразование из системы координат спутника SRF в систему координат GCRF происходит с помощью файлов ориентации НКА. Перевод в инерциаль-

ную систему координат вектора PCO осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{PCO}_{GCRF} = Q \otimes \mathbf{PCO}_{SRF} = \mathbf{PCO}_{SRF} + 2Q_0[\mathbf{Q}_{123} \times \mathbf{PCO}_{SRF}] + \\ + 2[\mathbf{Q}_{123} \times [\mathbf{Q}_{123} \times \mathbf{PCO}_{SRF}]], \end{aligned} \quad (2.36)$$

Где $Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\} = \{Q_0, \mathbf{Q}_{123}\}$ – кватернион ориентации, \otimes – кватернионное умножение.

Данные о вариации фазового центра антенны НКА недоступны для спутников проекта GRACE. Существует ряд работ, где эта величина оценивается [148; 149]. Для этого требуется проведение наземных предполетных технических испытаний, в ходе которых оценивается форма и структура бортовой антенны и априорная величина PCV. Реальная величина PCV на орбите может отличаться из-за специфических космических условий. Ее оценка может быть осуществлена только с помощью метода остаточных невязок, т.е. когда все другие эффекты модели наблюдений максимально учтены. В данной работе не ставилась задача по оценке таких немоделируемых эффектов, поэтому величина PCV для НКА, равная примерно 2-3 мм, относилась к шуму измерений.

Также к шуму измерений можно отнести эффект многолучевости. Данный эффект вызван непрямым распространением сигнала между НС и НКА. Это может происходить из-за переотражения сигнала от солнечных панелей КА. В работе [72] был проведен анализ данного эффекта для спутников проекта GRACE. Было показано, что данный эффект может достигать 40 и 80 см на частоте L1 и L2 соответственно.

2.3.6 Задержка распространения сигнала в ионосфере

Ионосферу образуют верхние слои земной атмосферы, в которой газы частично ионизованы под влиянием ультрафиолетового и рентгеновского солнечного излучения. При высоких частотах основную роль на распространение радиоволн играют свободные электроны. Число электронов в кубическом метре (т.е. плотность электронов) меняется по высоте сложным образом, достигая максимума на высоте от 250 до 400 км от поверхности Земли. Распределение

плотности электронов зависит от времени суток, времени года, уровня солнечной активности [129].

Ионосферной рефракцией называется разница между измеряемым и истинным расстоянием. Рефракция в ионосфере сводится к изменению длины пути луча в атмосфере. Незнание количества свободных электронов на пути волны в ионосфере и содержания водяного пара в нижних слоях атмосферы определяет ошибки вычисления задержки сигнала. Для случая орбит низких ИСЗ особенно важно учитывать ионосферную поправку.

Для определения целочисленных неоднозначностей фазовых измерений зачастую используется безионосферная комбинация. В этой комбинации исключается поправка за ионосферу в первом порядке. Однако для работы в режиме одиночных измерений, а также для алгоритмов определения фазовых скачков может потребоваться вычисление ионосферной поправки. В данной работе она считалась согласно ионосферным картам, полученным центром анализа Международной службы ГНСС. Данные карты содержат общее содержание электронов в ионосфере (TEC – Total Electron Content) для сигнала, испускаемого в зенит из точки на поверхности Земли (ZTEC – Zenith TEC). Данный формат имеет название Ionosphere map Exchange format (IONEX). Описание данного формата позволяет интерполировать значения TEC по сетке карты и по времени для нахождения наиболее близкого значения ZTEC. Однако в реальности необходимо находить общее содержание электронов на пути НС-НКА (STEC – Slant TEC). Для этого применяется следующая формула:

$$STEC = M(z) \times ZTEC, \quad (2.37)$$

где $M(z)$ есть картирующая функция, зависящая от зенитного угла z .

В работе [55] предлагается следующая схема по расчету картирующей функции для случая, при котором приемник находится на низкоорбитальном космическом аппарате. В ней используются две модели картирующих функций для $z < 45$ и $z \geq 45$. Модель тонкого ионосферного слоя, которая подходит для $z \geq 45$, описывается формулой:

$$M_1(z) = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{R_l \sin z}{R_{I,1}} \right)^2} \right)^{-1}, \quad (2.38)$$

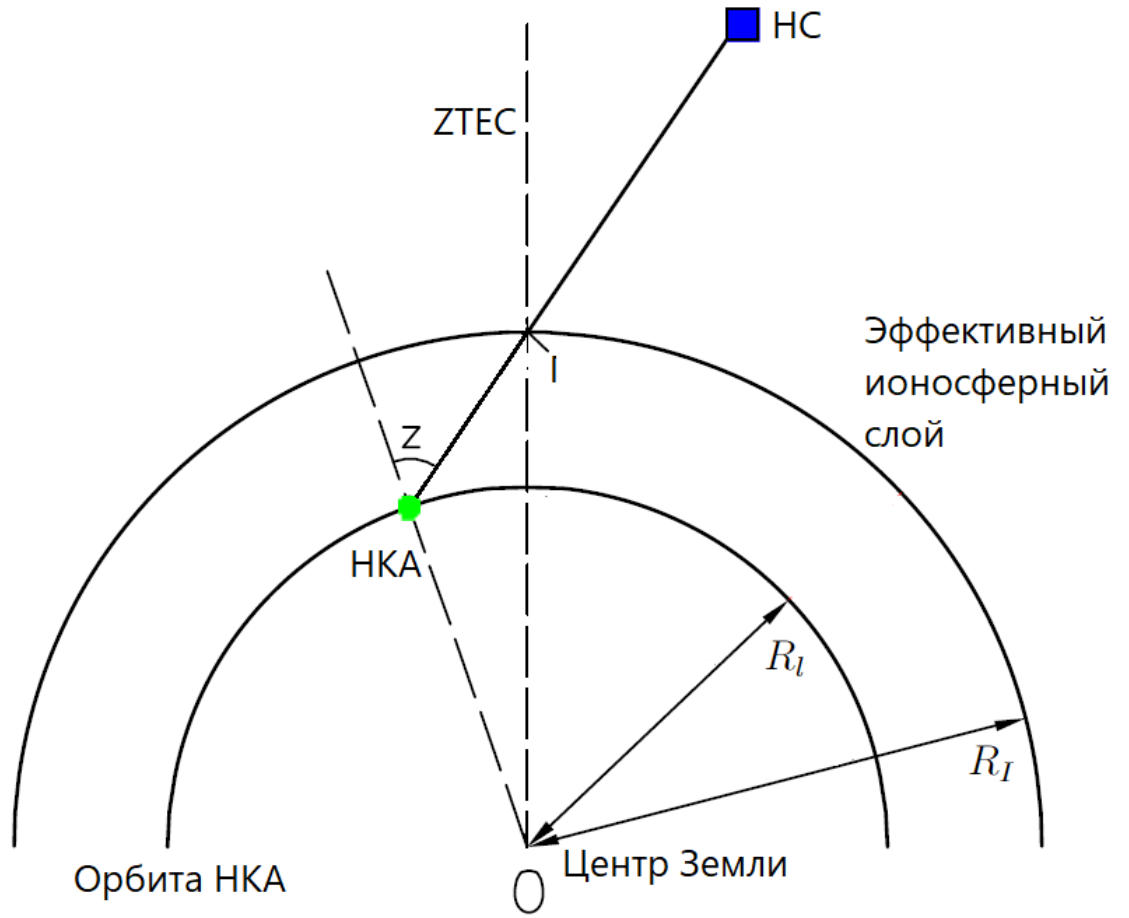


Рисунок 2.8 — Схема учета ионосферной задержки для системы НКА-НС.

где R_l – расстояние от центра Земли до НКА, R_I – расстояние от центра Земли до эффективной высоты ионосферы. В случае $z < 45$ картирующая функция выглядит так:

$$M_2(z) = \left(1 + \frac{R_{I,2}}{R_l}\right) \left(\cos z + \sqrt{\left(\frac{R_{I,2}}{R_l}\right)^2 - (\sin z)^2}\right)^{-1}. \quad (2.39)$$

Эффективная высота ионосферы в свою очередь рассчитывается так:

$$\begin{aligned} R_I &= R_{\oplus} + h_I, \\ h_{I,1}[\text{км}] &= (0.0005F_{107} + 1.73)h_l[\text{км}] - 3.16F_{107} + 458, \\ h_{I,2}[\text{км}] &= (0.0027F_{107} + 1.79)h_l[\text{км}] - 5.52F_{107} + 1350, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где R_{\oplus} – средний радиус Земли, h_l – высота орбиты НКА, F_{107} – индекс солнечной активности, который находится, например, из глобальной эмпирической модели атмосферы Земли NRLMSISE-00 [150].

Величина $ZTEC$ определяется с помощью ионосферных карт IONEX. Для ее расчета находятся сферические координаты точки I , т.е. точки пересечения эффективного ионосферного слоя и линии НКА-НС. Стоит также учесть, что с помощью ионосферных карт можно найти общее содержание электронов для эффективной высоты ионосферы в 450 км. Однако на практике оказывается, что орбита НКА зачастую находится выше высоты пика ионосферной концентрации. Чтобы учесть данный эффект, необходимо оценить поправочный коэффициент α , который является отношением вертикального содержания электронов начиная с высоты эффективного ионосферного слоя к общему вертикальному содержанию электронов, начиная с поверхности Земли. Такой коэффициент можно вычислить следующим образом:

$$\alpha = \frac{e - \exp(1 - \exp(-(h_I - h_0)/H))}{e - \exp(1 - \exp(h_0/H))}, \quad (2.41)$$

где h_0 – высота пика ионосферной концентрации электронов, H – масштабный фактор, характеризующий кривую зависимости концентрации от высоты. Данные величины можно определять из различных атмосферных моделей, например из модели ионосферы IRI2016 [151]. Однако эти данные не обладают достаточно высокой точностью и чаще, на практике, коэффициент α просто оценивается в процессе уточнения орбиты наряду с другими параметрами.

2.3.7 Релятивистский эффект

Релятивистские эффекты можно разделить на слагаемые:

$$cdt_{rel} = \delta\rho_{l,clock} - \delta\rho_{h,clock} + \delta\rho_{grav}. \quad (2.42)$$

Первое и второе слагаемое здесь описывают релятивистские эффекты изменения бортовых часов на НКА и НС соответственно. Общая теория относительности приводит к тому, что часы на высоты орбит ГНСС ускоряются, а специаль-

ная теория относительности – к тому, что часы замедляются. Этот эффект уже учтен для часов ГНСС путем смещения частоты часов. Однако из-за эллиптичности орбит НС необходимо вводить дополнительные поправки. Эта поправка может быть описана следующей формулой:

$$\delta\rho_{clock} = \frac{2}{c}(\vec{r}, \vec{v}), \quad (2.43)$$

где \vec{r} – радиус-вектор спутника, \vec{v} – вектор скорости спутника, c – скорость света в вакууме. Здесь стоит отметить, что данная формула справедлива только для Кеплеровской модели сил. Поскольку на НКА оказывает существенное влияние гармоника J_2 ГПЗ, эта формула несколько видоизменяется, о чем подробно написано в работах [62; 63]. Для результатов данной работы достаточно учесть релятивизм по формуле 2.43.

Из-за эффекта замедления скорости света при прохождении вблизи массивного тела, известного также как эффект Шапиро [152; 153], возникает третье слагаемое в формуле 2.42:

$$\delta\rho_{grav} = \frac{2\mu_{\oplus}}{c^2} \ln\left(\frac{r_h + r_l + \rho}{r_h + r_l - \rho}\right), \quad (2.44)$$

где μ_{\oplus} – гравитационный параметр Земли, $\frac{2\mu_{\oplus}}{c^2}$ – гравитационный радиус Шварцшильда, r_h – геоцентрическое расстояние до НС, r_l – геоцентрическое расстояние до НКА, ρ – расстояние между НКА и НС.

2.3.8 Эффект набега фазы

Фазовые измерения зависят от взаимной ориентации антенн приемника и навигационного спутника и от положения в пространстве их линии видимости. Суть эффекта можно описать следующим образом. Если представить, что расстояние между КА и НС зафиксировано, а НС поворачивается вокруг своей оси Z на 360° , то измерение фазы при этом изменится на один цикл, соответствующий 19 см для частоты L1. Это происходит из-за правосторонней поляризации сигнала, который излучают НС. Данный эффект принято называть *wind-up*

эффектом в иностранной литературе. Его можно рассчитать по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\delta\rho &= \delta\phi + 2\pi N, \\
\delta\phi &= \frac{1}{2\pi}\phi\lambda, \\
N &= \text{rint}\left(\frac{\delta\rho_{prev} - \delta\phi}{2\pi}\right), \\
\phi &= \text{sign}(\zeta) \arccos\left(\frac{(\mathbf{D}_h \cdot \mathbf{D}_l)}{|\mathbf{D}_h||\mathbf{D}_l|}\right), \\
\zeta &= \mathbf{k}[\mathbf{D}_h \times \mathbf{D}_l] \\
\mathbf{D}_h &= \mathbf{x}_h - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_h) - [\mathbf{k} \times \mathbf{y}_h], \\
\mathbf{D}_l &= \mathbf{x}_l - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_l) + [\mathbf{k} \times \mathbf{y}_l], \\
\mathbf{k} &= \frac{\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_h}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_h|},
\end{aligned} \tag{2.45}$$

где \mathbf{r}_l и \mathbf{r}_h – радиус-векторы НКА и НС соответственно, $(\mathbf{x}_l, \mathbf{y}_l, \mathbf{z}_l)$ и $(\mathbf{x}_h, \mathbf{y}_h, \mathbf{z}_h)$ – единичные вектора локальных систем координат НКА и НС соответственно, λ – длина волны несущего сигнала, $\delta\rho_{prev}$ – поправка на предыдущий момент времени. На первую эпоху N полагается равным нулю. Локальная система координат НС определяется согласно рис. 2.7.

2.3.9 Аппаратурные задержки

Поскольку передача и прием сигнала ГНСС ведутся на двух, трех частотах одновременно аппаратура передающего и принимающего спутников должна обеспечивать абсолютную синхронизацию в обработке этих сигналов. Однако на практике добиться такой синхронности очень сложно. Отсюда возникают аппаратурные задержки HCD (Hardware Code Delay), также именуемые DCB (Differential Code Bias) в иностранной литературе. Эти задержки могут оцениваться при уточнении параметров орбиты. Тем не менее существует ряд методов по их определению [65], не включая в уточняемые параметры. Для нахождения поправок для навигационных спутников наиболее удобным представляется

использование модели ионосферы в формате IONEX, предоставляемой Международной службой ГНСС. Величины DCB поправок определяются вместе с величинами TEC ионосферы и предоставляются для каждого НС в наносекундах. Учет данной поправки происходит по формулам:

$$\begin{aligned} DCB^h(L1) = HCD^h(L1) &= \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2} c\Delta b, \\ DCB^h(L2) = HCD^h(L2) &= \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2} c\Delta b, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где $L1 = \nu_1$ и $L2 = \nu_2$ – две разные частоты измерений, Δb – величина поправки из файла IONEX в наносекундах. Аналогичные задержки возникают и для фазовых измерений, в этом случае они именуется как HPD (Hardware Phase Delay). В последнее время для обозначения всех видов задержек для всех различных типов наблюдений (см. раздел 2.2.5) используется термин OSB (Observed Specific Bias), а служба IGS предоставляет специальные файлы для учета OSB задержек. Оценить аппаратную задержку приемника можно также по формулам из работы [66].

2.3.10 Межчастотное смещение

Сигналы GPS основаны на методе множественного доступа с кодовым разделением (CDMA-сигналы). Каналы передачи в таком случае имеют общую полосу частот, но разные кодирующие последовательности. Однако наблюдения несущей фазы и псевдодальности ГЛОНАСС основаны на методе множественного доступа с разделением каналов по частоте (FDMA-сигналы). Каждый спутник ГЛОНАСС имеет одинаковые кодирующие последовательности, но передает на разных частотах, соответствующих своему частотному каналу. Причем канал может быть одинаковым у двух НС, находящихся с противоположных сторон Земли. Частоты несущих для конкретного спутника определяются сле-

дующими выражениями:

$$\begin{aligned} G1[\text{МГц}] &= 1602 + 0.5625n, \\ G2[\text{МГц}] &= 1246 + 0.4375n, \\ n &\in [-7,6], n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

где $G1$ и $G2$ – две основные частоты ГЛОНАСС, на которых излучает каждый спутник, n – номер частотного канала. Каналы с номерами -5, -6 и, в некоторых случаях, 7 используются для НС, проходящих тестирование и отладку. На практике между спутниками с разделением каналов по частоте возникают смещения ИФВ, связанные с аппаратными задержками при обработке различных частот. Поэтому правильное моделирование поправок ИФВ является критически важным этапом при обработке ГЛОНАСС измерений. В работе [67] был проведен анализ методов оценки поправки ИФВ. Среди методов предлагалось:

- пренебрежение поправкой ИФВ и включение ее в оценку ошибки часов приемника;
- оценка ИФВ для спутников с одинаковым частотным каналом;
- оценка ИФВ для каждого спутника ГЛОНАСС.

Анализ показал, что поправки ИФВ могут не строго совпадать для одного и того же частотного канала. Поэтому предпочтительным оказывается последний метод, в котором выбирается опорный спутник (желательно с нулевым частотным каналом) и в список уточняемых параметров дополнительно вводится $n - 1$ (где n число наблюдаемых ГЛОНАСС спутников) число параметров ΔIFB , описывающих смещение сигнала во времени относительно опорного спутника. Моделирование распространения данных поправок во времени происходит с помощью белого гауссовского шума.

2.3.11 Межсистемное смещение

При обработке данных, полученных с помощью разных глобальных навигационных спутниковых систем, возникает необходимость в учете параметра межсистемного смещения (ISB). Это смещение связано с особенностями приемников различных типов навигационных систем. Но и для одного и того же

типа приемника ISB может незначительно отличаться из-за задержек, вызванных антенной, кабелем или тепловыми эффектами в бортовой аппаратуре. В настоящее время в большинстве ГНСС приложений поправка ISB оценивается либо как постоянная величина, либо как кусочно-непрерывная на интервале в 30 мин. Также можно моделировать данное смещение белым гауссовским шумом [68]. Поправка ISB для каждой пары спутниковых систем вносится в число уточняемых параметров и оценивается вместе с вектором состояния НКА.

2.4 Основные принципы уточнения орбит

Задача уточнения орбиты состоит в том, чтобы найти приближенную оценку параметров орбиты с помощью теоретических моделей и практических измерений. Для этого необходимо как можно сильнее уменьшить влияние ошибок теории и наблюдений. Методы, позволяющие решить эту задачу, называются *методами дифференциального уточнения орбиты*. А сам алгоритм решения такой задачи называется *алгоритмом фильтрации*.

Предположим, что имеется некоторая система, состояние которой непрерывно меняется со временем. Вектор, содержащий полную информацию о состоянии системы называется вектором состояния. Вектор состояния содержит переменные или постоянные параметры, требующиеся для определения состояния динамической системы во времени. Допустим, что вектор состояния это неизвестный m -мерный случайный вектор:

$$\vec{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T. \quad (2.48)$$

Допустим также, что уравнение состояния динамической системы может быть представлено в виде обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\dot{\vec{X}}(t) = \vec{F}(\vec{X}, t), \quad (2.49)$$

с начальными условиями:

$$\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0. \quad (2.50)$$

Выходной сигнал системы, n -мерный вектор $\vec{Y}(t)$, (его также называют вектором наблюдений) известен и несет информацию о состоянии системы. Его можно представить в виде:

$$\vec{Y}(t) = \vec{G}(\vec{X}, t) + \varepsilon, \quad (2.51)$$

где предполагается, что $\vec{G}(\vec{X}, t)$ нелинейная функция наблюдений, а ε случайный шум измерений.

Раскладывая $\vec{F}(\vec{X}, t)$ и $\vec{G}(\vec{X}, t)$ в ряд Тейлора до 1-го порядка относительно некоторой опорной орбиты, с опорными вектором состояния \vec{X}^* и вектором наблюдения \vec{Y}^* , производим линеаризацию уравнений 2.49 и 2.51:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A(t)\vec{x}(t), \\ \vec{x}(t) &= \vec{X}(t) - \vec{X}^*(t), \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= H(t)\vec{x}(t) + \varepsilon, \\ \vec{y}(t) &= \vec{Y}(t) - \vec{Y}^*(t), \end{aligned} \quad (2.53)$$

где

$$A(t) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}^*, t), \quad (2.54)$$

$$H(t) = \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}^*, t). \quad (2.55)$$

Общее решение уравнения 2.52 имеет вид:

$$\vec{x}(t) = F(t, t_0)\vec{x}_0. \quad (2.56)$$

Матрица $F(t, t_0)$ называется матрицей перехода, а \vec{X}_0 имеет тот же смысл, что и в 2.50. Можно показать, что матрица перехода удовлетворяет следующему

дифференциальному уравнению [154]:

$$\dot{F}(t, t_0) = A(t)F(t, t_0), \quad (2.57)$$

с начальными условиями:

$$F(t_0, t_0) = I. \quad (2.58)$$

Численно интегрируя 2.57 можно получить матрицу перехода на любой момент времени t .

Подставляя 2.56 в 2.53, получим:

$$\vec{y}(t) = H(t)F(t, t_0)\vec{x}_0 + \varepsilon, \quad (2.59)$$

или, вводя новые обозначения $\tilde{H}(t) = H(t)F(t, t_0)$:

$$\vec{y} = \tilde{H}\vec{x}_0 + \varepsilon. \quad (2.60)$$

Таким образом, имея вектор наблюдений, можно найти оценку вектора состояния системы. Уравнение 2.60 можно решать множеством способов, например методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов. В данной работе поставленная задача решалась с помощью фильтрации Калмана. Матрица H называется матрицей нормальных уравнений или матрицей плана в зарубежной литературе.

2.5 Обобщенный фильтр Калмана

Пусть вектор состояния меняется в соответствии с уравнением состояния, записанном в дискретном виде [155]:

$$\vec{X}_{k+1} = F_k\vec{X}_k + \vec{v}_k, \quad (2.61)$$

где \vec{v} это вектор возмущений, или вектор ошибок априорной оценки, а индекс k обозначает момент времени наблюдения. Тогда задача фильтрации ставится следующим образом.

Рассматривается динамическая система:

$$\begin{aligned} \vec{Y}_k &= H_k \vec{X}_k + \vec{\varepsilon}_k, \\ \vec{X}_{k+1} &= F_k \vec{X}_k + \vec{v}_k, \end{aligned} \quad (2.62)$$

где матрицы перехода F_k размерности $m \times m$ и наблюдений H_k размерности $n \times m$ предполагаются известными. Вектор невязок $\vec{\varepsilon}_k$ размерности n и вектор возмущений \vec{v}_k размерности m представляют собой дискретные векторные случайные процессы типа белого шума с нулевым средним и известными автоковариациями:

$$\begin{aligned} E[\vec{\varepsilon}_k] &= 0, \\ E[\vec{\varepsilon}_k \vec{\varepsilon}_j^T] &= Q_k \delta_{kj}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} E[\vec{v}_k] &= 0, \\ E[\vec{v}_k \vec{v}_j^T] &= V_k \delta_{kj}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Также предполагается, что ошибки измерений и вектор возмущений взаимно не коррелированы:

$$E[\vec{v}_k \vec{\varepsilon}_k^T] = 0. \quad (2.65)$$

Требуется на основе имеющихся данных \vec{Y}_k построить такую линейную несмещенную оценку вектора состояния $\hat{\vec{X}}_k$, чтобы дисперсии ошибок, то есть диагональные элементы матрицы апостериорных автоковариаций

$$P_k = E[\tilde{\vec{X}}_k \tilde{\vec{X}}_k^T], \quad (2.66)$$

где

$$\tilde{\vec{X}}_k = \vec{X}_k - \hat{\vec{X}}_k, \quad (2.67)$$

были минимальны. Рассмотрим систему 2.62, которую перепишем относительно опорной орбиты:

$$\begin{aligned}\vec{y}_k &= H_k \vec{x}_k + \vec{\varepsilon}_k, \\ \vec{\bar{x}}_k &= \vec{x}_k + \vec{v}_k,\end{aligned}\tag{2.68}$$

где \vec{x} и \vec{y} — разности между истинным и опорным векторами состояния и наблюдения. Теперь, если ввести обозначения:

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \begin{pmatrix} \vec{y}_k \\ \vec{\bar{x}}_k \end{pmatrix}, & H &= \begin{pmatrix} H_k \\ I \end{pmatrix}, \\ \vec{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \vec{\varepsilon}_k \\ \vec{v}_k \end{pmatrix}, & Q &= \begin{pmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & V_k \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.69}$$

то получим, уже известное нам, уравнение 2.60. Решение этого уравнения для несмещенной оценки $\hat{\vec{x}}$ можно найти вариационным методом [154]:

$$\hat{\vec{x}} = (H^T Q^{-1} H)^{-1} H^T Q^{-1} \vec{y}.\tag{2.70}$$

где $(H^T Q^{-1} H)^{-1}$ является ковариационной матрицей. Используя введенные обозначения 2.69, уравнение 2.70 можно переписать в виде:

$$\hat{\vec{x}}_k = (H_k^T Q_k^{-1} H_k + V_k^{-1})^{-1} (H_k^T Q_k^{-1} \vec{y}_k + V_k^{-1} \vec{\bar{x}}_k),\tag{2.71}$$

где

$$P_k = (H_k^T Q_k^{-1} H_k + V_k^{-1})^{-1}\tag{2.72}$$

все также матрица ковариации. Основная вычислительная проблема в уравнении 2.71 связана с тем, что необходимо вычислять обратную матрицу $P_k = \Lambda_k^{-1}$ размерности $m \times m$. Преимущество рассматриваемого метода состоит в том, что можно перейти к вычислению обратной матрицы размерности $n \times n$.

Из уравнения 2.72 имеем:

$$P_k^{-1} = H_k^T Q_k^{-1} H_k + V_k^{-1}.\tag{2.73}$$

Умножим уравнение 2.73 слева на P_k и справа на V_k :

$$V_k = P_k H_k^T Q_k^{-1} H_k V_k + P_k, \quad (2.74)$$

или

$$P_k = V_k - P_k H_k^T Q_k^{-1} H_k V_k. \quad (2.75)$$

Теперь, если уравнение 2.74 умножить справа на $H_k^T Q_k^{-1}$ и выразить величину $P_k H_k^T Q_k^{-1}$, то получим:

$$P_k H_k^T Q_k^{-1} = V_k H_k^T [H_k V_k H_k^T + Q_k]^{-1}. \quad (2.76)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение 2.75, имеем:

$$P_k = V_k - V_k H_k^T [H_k V_k H_k^T + Q_k]^{-1} H_k V_k. \quad (2.77)$$

Таким образом, матрица, требующая инверсии, теперь той же размерности, что и ковариационная матрица ошибок наблюдений, и если наблюдения представлены скалярной величиной (одно наблюдение за один момент времени), то требуется только скалярная операция инверсии.

Вводя матрицу усиления K_k :

$$K_k = V_k H_k^T [H_k V_k H_k^T + Q_k]^{-1}, \quad (2.78)$$

уравнение 2.77 можно записать в компактной форме:

$$P_k = [I - K_k H_k] V_k, \quad (2.79)$$

Подставляя сначала 2.72, а затем 2.79 в 2.71, окончательно получаем:

$$\hat{\vec{x}}_k = \bar{\vec{x}}_k + K_k [\vec{y}_k - H_k \bar{\vec{x}}_k]. \quad (2.80)$$

Уравнение 2.80, совместно с выражениями 2.78 и 2.79, а также с $\bar{\vec{x}}_k = F(t_k, t_j) \hat{\vec{x}}_j$, можно использовать в рекурсивном подходе для нахождения оценки $\hat{\vec{x}}_k$, включающую наблюдения \vec{y}_k .

Обыкновенный фильтр Калмана вычисляет поправки к вектору состояния, который на каждый момент вычислен теоретическим образом. То есть для всего интервала наблюдений сначала рассчитывается приближительная орбита спутника, а затем алгоритм с учетом наблюдений выдает поправки к вектору состояния, и тем самым получается орбита, близкая к реальной. Основным отличием обобщенного фильтра Калмана от обычного является тот факт, что для его работы необходимо только начальное значение вектора состояния и ковариационная матрица ошибок уточняемых параметров. На следующий момент наблюдения уточненный вектор состояния поступает на вход фильтра и так продолжается, пока не закончатся наблюдения. После обработки наблюдений на момент времени t_k , оценка вектора состояния на этот момент используется в качестве нового опорного вектора состояния:

$$(\vec{X}_k^*)_{new} = \hat{\vec{X}}_k = \vec{X}_k^* + \hat{\vec{x}}_k, \quad (2.81)$$

где $\hat{\vec{x}}$ – вычисленные поправки к вектору состояния, \vec{X}^* – вектор состояния опорной орбиты, $\hat{\vec{X}}$ – оценка вектора состояния.

Использование оценки вектора состояния $\hat{\vec{X}}_k$ в качестве опорного вектора состояния даст нам $\hat{\vec{x}}_k = 0$, откуда следует, что априорные поправки на следующую эпоху $\vec{x}_{k+1}^* = 0$. Оценка $\hat{\vec{x}}_{k+1}$ будет вычисляться по формуле:

$$\hat{\vec{x}}_k = K_{k+1} \vec{y}_{k+1}, \quad (2.82)$$

где K – так называемая матрица усиления, а \vec{y} – вектор невязок между наблюдениями и моделью наблюдений, также называемый величиной (О-С) (О – observatum, С – calculatum).

Вследствие монотонного расхождения опорной и истинной орбит обычный фильтр Калмана не может обеспечить сходимость процесса на длительных интервалах времени. Преимущество обобщенного фильтра Калмана состоит в том, что сходимость к наилучшей оценке вектора состояния будет гораздо быстрее, чем в обычном, поскольку в качестве опорной орбиты используется результат предыдущего вычисления.

Рассмотрим алгоритм работы обобщенного фильтра Калмана:

- экстраполяция вектора состояния на следующий момент времени с помощью переходной матрицы F :

$$\bar{\vec{X}}_{k+1} = F_k \hat{\vec{X}}_k, \quad \hat{\vec{X}}_0 = \bar{\vec{X}}_0, \quad (2.83)$$

- вычисление матрицы ковариации:

$$\bar{P}_{k+1} = F_k P_k F_k^T + V_k, \quad (2.84)$$

где V – матрица ковариации ошибок модели движения (*матрица шума модели движения*),

- вычисление матрицы усиления:

$$K_{k+1} = \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T [H_{k+1} \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T + Q_{k+1}]^{-1}, \quad (2.85)$$

где H – матрица нормальных уравнений (*матрица плана*), а Q – матрица ковариации ошибок наблюдений,

- вычисление уточненной оценки вектора состояния с учетом новых наблюдений

$$\hat{\vec{X}}_{k+1} = \bar{\vec{X}}_{k+1} + K_{k+1} [\vec{Y}_{k+1} - G(\bar{\vec{X}}_{k+1}^*, t_{k+1})], \quad (2.86)$$

где \vec{Y} – вектор наблюдений, $G(\bar{\vec{X}}^*, t)$ – модель наблюдений,

- вычисление матрицы ковариации уточненной оценки вектора состояния:

$$P_{k+1} = \bar{P}_{k+1} - K_{k+1} H_{k+1} \bar{P}_{k+1}. \quad (2.87)$$

Затем индекс k заменяется на $k+1$, и алгоритм начинается заново. Выражения для матриц перехода, нормальных уравнений и шума модели движения можно найти в приложении **A**.

2.6 Коэффициент потери точности

В области систем глобального позиционирования часто используется термин DOP (Dilution of Precision), который характеризует снижение точности позиционирования в зависимости от геометрического взаиморасположения группировки НС относительно антенны приемника. Если спутники ГНСС расположены слишком близко друг к другу при взгляде с борта НКА, то такая геометрия называется *слабой*, что соответствует высокому значению DOP (рис. 2.9). Если спутники достаточно удалены друг от друга, то геометрию называют сильной, а значение DOP мало.

Идеальная точность получается при значении $DOP \leq 1$, а при значении $DOP > 6$ могут начаться проблемы с высокоточным позиционированием. При $DOP > 9$ измерения могут использоваться только для грубой оценки местоположения.

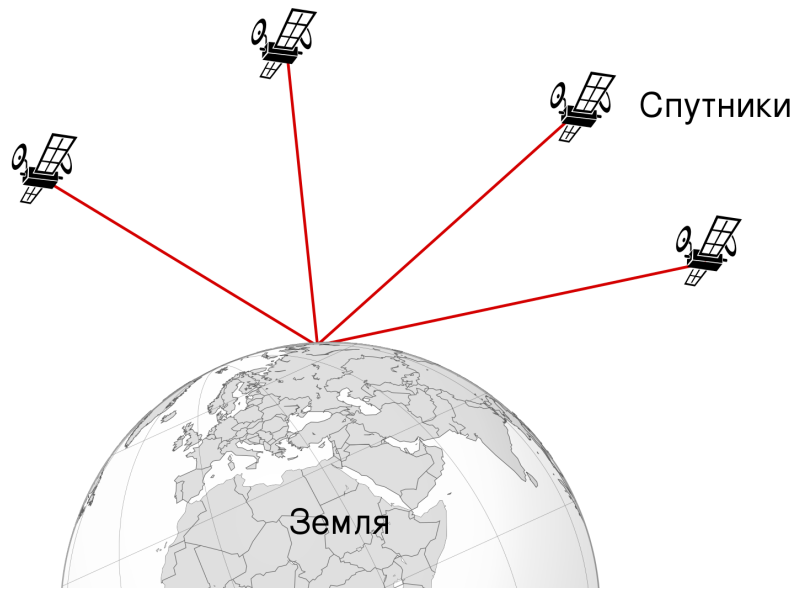
В данной работе коэффициент потери точности оценивался по положению, в этом случае он называется PDOP (Position Dilution of Precision). Также существуют коэффициенты GDOP (Geometric Dilution of Precision) – потеря точности по положению и времени, и TDOP (Time Dilution of Precision) – потеря точности по времени. Чтобы вычислить коэффициент PDOP, необходимо составить специальную ковариационную матрицу:

$$Q_{DOP} = (H^T H)^{-1}, \quad (2.88)$$

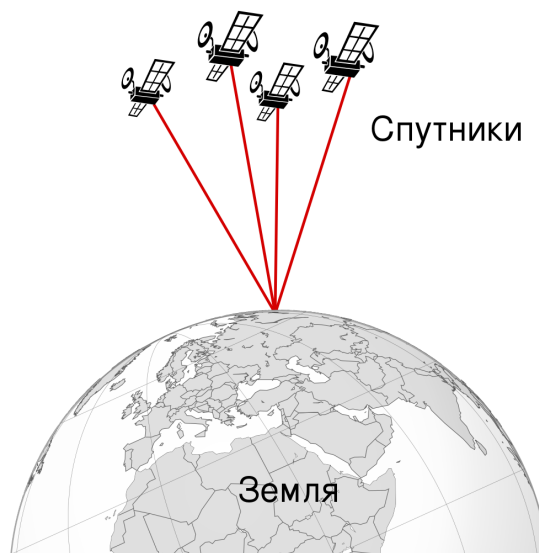
где H – матрица нормальных уравнений, в которой оставлены только 4 первых колонки, соответствующие производным по трем координатам и ошибке часов приемника (см. приложение A.2). Тогда коэффициент потери точности положения оказывается равным:

$$PDOP = \sqrt{Q_{DOP}^{11} + Q_{DOP}^{22} + Q_{DOP}^{33}}, \quad (2.89)$$

где $Q_{DOP}^{11} + Q_{DOP}^{22} + Q_{DOP}^{33}$ – сумма первых трех диагональных элементов матрицы Q_{DOP} .



а)



б)

Рисунок 2.9 — Сильная (а)) и слабая (б)) геометрия навигационных спутников.

Помимо инструментальных погрешностей измерений и слабой геометрии НС существует еще ряд источников ошибок, которые влияют на точность определения абсолютных координат приемника:

- нестабильность работы генератора;
- задержка в бортовой аппаратуре;
- неопределенность пространственного положения спутника;
- другие погрешности космического сегмента;
- неточность эфемерид;

- другие погрешности наземного сегмента;
- ионосферная задержка;
- тропосферная задержка;
- шумовая ошибка приемника;
- наличие объектов помех;
- влияние атмосферы;
- многолучевость;
- другие ошибки сегмента пользователя.

В среднем суммарная погрешность от всех этих источников может составлять ≈ 13 м.

Глава 3. Высокоточное определение орбит искусственных спутников Земли

3.1 Практическая реализация

3.1.1 Программно-вычислительный комплекс

Для того чтобы объединить алгоритм фильтрации, данные наблюдений и эфемериды спутников в рамках данной работы был разработан программно-вычислительный комплекс LOIS (Low Orbit Improvement Software) [156]. Данная программа реализована на языке C++/CLI и имеет графический интерфейс для удобной работы. Язык C++/CLI позволяет использовать преимущества управляемого и нативного кода одновременно. В программе LOIS созданы управляемые обертки для существующих программных астрометрических библиотек написанных на языке C++, а именно IAU SOFA Release 14 [131] и NAIF SPICE V0066 [157]. Наиболее критические по производительности алгоритмы при этом написаны на языке C++. Управляемая часть языка C++/CLI позволяет удобно хранить каталоги данных, работать с объектами, а также создавать графический интерфейс. Помимо классов интерфейса, LOIS содержит отдельные классы для работы с данными, классы математических и физических объектов. При координатно-временных преобразованиях все величины представляются в системе СИ и приводятся к системе координат GCRF (Geocentric Celestial Reference Frame) и времени UTC (Coordinated Universal Time).

Объектно-ориентированный подход позволяет моделировать сложные процессы с помощью более понятной человеку логике. Реальные физические и математические объекты записываются в программу в виде программных классов, которые имеют свои поля и методы. В программе LOIS реализованы следующие классы математических и физических объектов:

1. Класс целочисленных неоднозначностей
2. Класс модели поверхности НКА
3. Класс коэффициентов Стокса

4. Класс матриц
5. Класс наблюдений
6. Класс модели наблюдений
7. Класс параметров смещения фазового центра антенны
8. Класс параметров программы
9. Класс вектора положения
10. Класс вектора состояния
11. Класс кватерниона
12. Класс космического аппарата
13. Класс времени
14. Класс антенны

Хранение и использование каталогов данных в программе LOIS также реализуется с помощью классов:

1. Каталог смещений фазовых центров антенн ГНСС
2. Каталог ошибок часов ГНСС
3. Каталог параметров вращения Земли
4. Каталог эфемерид НКА
5. Каталог наблюдений ГНСС
6. Каталог параметров ориентации НКА
7. Каталог эфемерид ГНСС
8. Каталог фиксированных целочисленных неоднозначностей

Помимо этого, в программе есть несколько статических классов, которые реализуют основной каркас программы, позволяют взаимодействовать между вычислительной и графической частью программы, объединяют различные алгоритмы.

В программе используются несколько астрометрических библиотек. Библиотека SOFA используется для расчета матрицы перехода из земной в небесную систему координат. Библиотека SPICE используется для вычислений эфемерид тел Солнечной системы. Также присутствует библиотека *Tides*, написанная лично автором и отвечающая за вычисление возмущений траектории движения космического аппарата из-за земных приливов.

LOIS имеет окно ввода и вывода данных. В окне ввода пользователь может задавать такие параметры моделирования как: интервал времени уточнения орбиты, шаг по времени, начальное приближение вектора состояния (координаты

и компоненты скоростей) КА, число гармоник в разложении гравитационного потенциала Земли, а также различные статистические параметры вроде ошибок наблюдений и автоковариаций ошибок уточняемых параметров. Помимо этого пользователь может самостоятельно выбрать файлы наблюдений, опорных орбит, эфемерид ГНСС-спутников, а также выбрать тип используемых наблюдений. Окно вывода отображает информацию о результатах работы программы в виде таблицы выходных данных и сообщений в окне лога. Таблица содержит информацию о невязках между наблюдениями и моделью наблюдений, количестве ГНСС-спутников и о расхождениях уточненной орбиты с некоторой опорной орбитой.

LOIS имеет отдельный поток для вычислений, независимый от графического интерфейса, это позволяет продолжать работать с программой даже при запущенных вычислениях. Благодаря этому, пользователь может настроить параметры следующего эксперимента и поставить его в очередь на выполнение. Такой подход представляется удобным, когда необходимо подобрать априори неизвестные значения автоковариаций уточняемых параметров и наблюдений.

Программа LOIS способна считывать данные формата RINEX и выделять нужные типы измерений. Поскольку в некоторых случаях, например, для разрешения проблемы неоднозначностей или для оценки влияния ионосферы, необходимо составлять линейные комбинации измерений, программа делает это автоматически на этапе чтения каталога с наблюдениями. После загрузки каталогов пользователю предоставляется выбор, с помощью каких измерений или их комбинаций производить уточнение орбиты. Помимо этого, существует возможность отсеивания наблюдений по уровню отношения сигнал/шум, чтобы для уточнения орбиты выбирать только достоверные данные. При этом значение сигнал/шум считывается из файла наблюдений RINEX.

Для уточнения орбит существует 4 режима работы программы. Первый – это режим моделирования наблюдений, используется для тестирования алгоритмов, а также для моделирования процесса уточнения орбиты в будущих космических миссиях. Остальные три режима относятся к обработке реальных ГНСС-данных для уточнения орбиты. В них составляются нулевые, одинарные и двойные разности измерений соответственно.

3.1.2 Алгоритм работы программы

Алгоритм определения орбит с помощью данных ГНСС можно описать следующими пунктами:

1. Сбор наблюдений ГНСС
2. Расшифровка и предобработка наблюдений ГНСС
3. Составление дифференциальных уравнений движения НКА и НС
4. Работа алгоритма фильтра Калмана
5. Постобработка данных и оценка результатов

Алгоритм программы LOIS можно разделить на следующие последовательные операции:

1. Загрузка основного окна программы
2. Выбор и загрузка каталогов
3. Выбор параметров эксперимента
4. Подготовка к вычислениям
5. Интегрирование дифференциальных уравнений движения НКА
6. Поиск наблюдений
7. Составление модели наблюдений
8. Составление матрицы наблюдений
9. Решение уравнения фильтрации Калмана
10. Вывод результатов

После запуска программы LOIS, начинается загрузка основного окна программы (рис.3.1). На этом этапе программа автоматически подгружает вспомогательные каталоги:

1. Параметры вращения Земли
2. Коэффициенты гравитационного потенциала
3. Космическая погода
4. Смещения фазовых центров антенн ГНСС

LOIS v2.2

Start Epoch: 07/26/2010 00:00:10

End Epoch: 07/26/2010 00:10:30

Step: 10

Improver's type: Kalman

Improver Parameters...

Model Zero-D

Single-D Double-D

GNV Rover: GNV\GNV1B_2010-07-26_A_02.gn

GNV Base: GNV\GNV1B_2010-07-26_A_02.gn

ATT Rover: ATT\GRCA102070.ATT

ATT Base: ATT\GRCA102070.ATT

GNSS Ephemeris: SP3\GPS102070_2h.sp3

GNSS Clocks: SP3\COD15941.CLK

IONEX Map: codg2070.inx

GLONASS: brdc2070.10g.glo

RNX Rover: RNX\GRCA102070.10O_hoi_5mm.

RNX Base: RNX\GRCA102070.10O_hoi_0_25n

Observation Type: P1

Load Catalogs

Experiment: Start Stop

Reset

Experiments in Line: 0

Рисунок 3.1 — Основное окно программы LOIS.

Далее пользователь выбирает параметры эксперимента согласно руководству оператора. Значения выбранных параметров отображаются на управляющем окне программы LOIS (рис. 3.2). Эти значения будут сохранены и записаны в оперативную память компьютера после запуска эксперимента. При этом, в окне лога отображаются входные параметры эксперимента и время его начала. В программе LOIS присутствует возможность поставить эксперимент в очередь на вычисление согласно руководству оператора. В таком случае вход-

ные параметры следующего в очереди эксперимента отобразятся одновременно с его стартом, сразу после завершения предыдущего эксперимента.

Value	Covariance	Model Cov.	Propagation STD	
<input type="checkbox"/> Clock Rover	0	10	10	0.1
<input type="checkbox"/> DCB Rover	0	10	10	0.1
<input type="checkbox"/> IFB	0	10	10	0.1
<input type="checkbox"/> ISB	0	10	10	0.1
<input checked="" type="checkbox"/> AMB	0	1000000	0	0
<input type="checkbox"/> TEC	0.26	10	10	0.01

L4_Error	B3_Error	Range	Min_Ratio	Max_Error
0.7	0.1	1000	2.	0.2

Рисунок 3.2 — Окно выбора параметров программного комплекса LOIS.

Уравнения движения решаются путем численного интегрирования методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом интегрирования. Все параметры модели движения рассчитываются последовательно на каждой итерации метода численного интегрирования. Интегрирование происходит на интервале, равном интервалу между наблюдениями. После интегрирования программа выдает предсказанное значение вектора состояния на эпоху наблюдений.

Затем программа находит наблюдения (или комбинации наблюдений) на нужный момент времени. В зависимости от режима работы, заданного пользователем, программа составляет нулевые, одинарные или двойные разности наблюдений. Перед утверждением списка, имеющихся в данную эпоху наблюдений, программа проверяет уровень отношения сигнал/шум для каждого НС и наличие его эфемерид в каталоге.

После выполнения алгоритма ОФК, описанного в разделе 2.5, программа вычисляет оценку вектора состояния на эпоху наблюдений и матрицу ковари-

аций ошибок уточняемых параметров. Программа сохраняет все параметры, соответствующие текущей итерации алгоритма, которые в конце работы выведет на экран или в текстовый файл. После сохранения, программа переходит на следующую итерацию: вновь интегрирует уточненный вектор состояния и находит его оценку на следующую эпоху с помощью фильтра Калмана.

Во время всего цикла вычислений программа сохраняет и накапливает массив выходных данных, которые выведет на монитор или в текстовый файл:

1. Номер итерации
2. Дата и время обрабатываемой эпохи наблюдений
3. Средняя по НС О-С невязка на итерации
4. СКО О-С невязок на итерации
5. Количество доступных НС
6. Первый элемент матрицы ковариации ошибок уточняемых параметров
7. Невязки эталонной и опорной орбиты по компонентам вектора состояния и радиус-вектору

По мере выполнения программы, некоторые результаты также сохраняются в текстовых файлах:

1. Уточненная орбита в системе GCRF
2. Уточненная орбита в системе BCRF
3. Уточненная орбита в системе ITRF
4. Расшифровка вычислений каждой итерации: решение уравнений движения НКА и НС, вектор О-С и др.
5. Оцениваемые дополнительные уточняемые параметры
6. Таблица результата эксперимента, которая выводилась на монитор
7. Лог
8. В случае включения режима моделирования или оценивания целочисленных неоднозначностей могут выводиться файлы с комбинациями измерений ГНСС, модельными наблюдениями или результатом фиксации неоднозначностей

3.1.3 Матрицы ковариаций

Ключевую роль в реализации фильтра Калмана играют матрицы ковариаций различных параметров фильтра. От способа их инициализации зависит скорость схождения фильтра и точность определения орбиты. К таким матрицам относят матрицу ковариации ошибок уточняемых параметров, матрицу ковариации ошибок наблюдений и матрицу шума состояния, которая ассоциируется с матрицей ковариаций ошибок модели движения. На практике оказывается, что не существует заведомо достоверной информации о том, как следует инициализировать данные матрицы. Поэтому обычно их задают в диагональном виде, а значения диагоналей (автоковариаций) подбирают во время эксперимента.

Матрица ковариаций ошибок уточняемых параметров характеризует то, насколько сильно априорные значения уточняемых параметров отличаются от истины на начальный момент времени. Чем больше ошибка – тем больше должно быть значение в матрице. Размер данной квадратной матрицы, $n \times n$, соответствует размеру вектора уточняемых параметров. Таким образом, если уточняется вектор состояния КА, ошибка часов приемника, два коэффициента солнечного давления и целочисленные неоднозначности фазовых измерений ГНСС спутников, то размер ковариационной матрицы будет следующим:

$$n = 6 + 1 + 2 + m, \quad (3.1)$$

где m – количество НС, соответствующее количеству целочисленных неоднозначностей. В случае, если в качестве измерений используется комбинация двух-частотных измерений, то неоднозначности можно определять для каждой частоты отдельно, а соответственно последнее слагаемое в формуле 3.1 будет равно $2m$.

При обработке измерений, не содержащих фазовых неоднозначностей, выбор автоковариаций вектора состояния КА относительно произволен, поскольку отвечает лишь за скорость сходимости решения. Однако не следует задавать ковариации слишком маленькими или слишком большими значениями, иначе фильтр не сможет найти нужное решение, либо, соответственно, будет искать его очень долго. Если при уточнении параметров орбиты определяются некоторые иные параметры, помимо координат и скоростей КА, то следует

с осторожностью инициализировать автоковариации уточняемых параметров так, чтобы они находились в соответствии с величиной их влияния на орбиту. Особенно важным это обстоятельство оказывается при определении целочисленных неоднозначностей, ведь фильтр Калмана должен правильно соотносить влияние ошибки геометрии и фазовых неоднозначностей, иначе решение будет расходиться.

Матрица ковариаций ошибок измерений задается аналогично диагональными элементами. Значения диагональных элементов можно варьировать в зависимости от параметров эксперимента и используемых наблюдений. Таким образом матрицу ковариаций ошибок измерений можно описать следующей формулой:

$$Q = \sigma^2 I, \quad (3.2)$$

где σ^2 – автоковариация ошибок измерений, I – единичная матрица размера $m \times m$. При этом стоит учесть, что для случая одиночных и двойных разностей формула несколько видоизменяется:

$$\begin{aligned} Q_{SD} &= 2\sigma^2 I, \\ Q_{DD} &= 2\sigma^2 (J + I), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где J – матрица единиц (все элементы равны 1) размера $m \times m$.

Расчет матрицы шума состояния завязан на матрице перехода F и диагональной матрице спектральной плотности шума модели движения Φ . Ее размер соответствует размеру матрицы ковариаций ошибок уточняемых параметров, а на месте диагональных элементов стоят автоковариации ошибок модели движения по каждому из параметров. Данные значения также подлежат экспериментальному определению. Выражение для данной матрицы можно записать следующим образом:

$$V(T) = \int_0^T F(t) \Phi F^T(t) dt, \quad (3.4)$$

где T – шаг измерений по времени. На практике, в случае дискретных измерений, данная матрица находится согласно выражению, приведенному в приложении [А.3](#).

В данной работе экспериментально были подобраны следующие значения автоковариаций:

Таблица 3

Автоковариация ошибки	Значение
координат	0.001
скоростей	0.00001
неоднозначностей	1000000
других уточняемых параметров	10
измерений	1
модели движения по координатам	0.001
модели движения по скоростям	0.001

3.1.4 Метод сглаживания кодовых измерений

Начиная с 1995 года, все НС GPS шифруют свои кодовые измерения для всех гражданских приемников (см. раздел 2.2.3). Из-за этого значительно возрастает шум кодовых измерений, что в свою очередь значительно ухудшает точность определения местоположения. Для того чтобы эффективно использовать кодовые измерения при определении орбиты бывает необходимо сгладить этот шум. Данная процедура, известная как сглаживание кодовых измерений проводится по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_1(t) &= L_1(t) + \bar{P}_1 - \bar{L}_1 + 2 \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (L_1(t) - \bar{L}_1 - L_2(t) + \bar{L}_2), \\
 \tilde{P}_2(t) &= L_2(t) + \bar{P}_2 - \bar{L}_2 + 2 \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} (L_1(t) - \bar{L}_1 - L_2(t) + \bar{L}_2),
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

где \tilde{P} – сглаженное кодовое измерение, \bar{P} , \bar{L} – средние значения кодовых и фазовых измерений на дуге видимости НС.

3.1.5 Метод поиска скачков фазы

Эффект скачка фазы (проскальзывания циклов), речь о котором шла в разделе 2.2.4, добавляет к наблюдению целое неопределенное число циклов. Поэтому возникает необходимость бороться с этим эффектом перед основной обработкой измерений. В данной работе для поиска таких скачков была использована фазовая безгеометрическая комбинация PGF. Скачки фазовых измерений детектировались путем составления разницы измерений на последовательные моменты времени. Как показано на рис. 3.3, в этом случае фазовый скачок становится пиком, который легко детектировать с помощью подсчета отклонения от среднего значения таких дифференциальных измерений. Экспериментально было установлено, что таким образом можно детектировать скачки, в которых комбинация $(\lambda_1 n_1 - \lambda_2 n_2)$ не превышает 20 см. С помощью комбинации MW вероятность обнаружения скачка значительно повышается, поскольку используется уже два независимых набора наблюдений. Однако стоит отметить, что данная комбинация позволит обнаружить только то проскальзывание циклов, в котором скачок был осуществлен на разное количество циклов по двум частотам измерений.

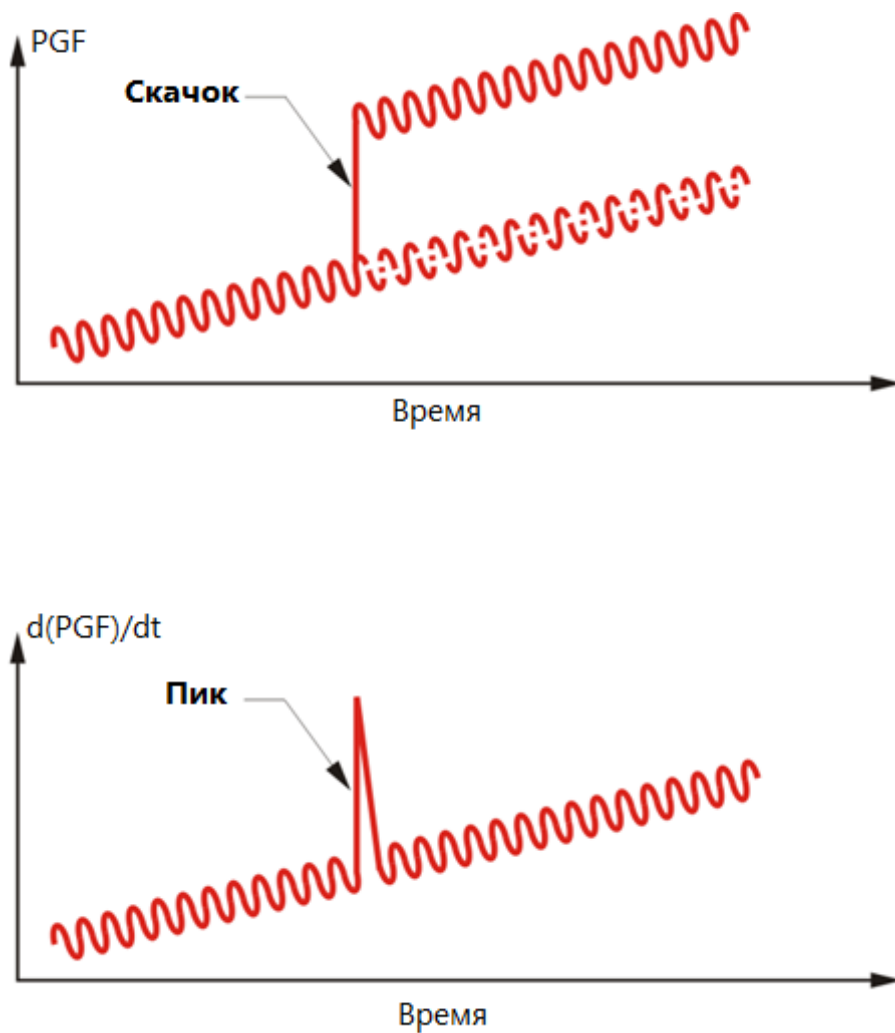


Рисунок 3.3 — Метод поиска скачков фазы через составление временной разности безгеометрической комбинации PGF.

После детектирования скачка фазы, программа запоминает его временную отметку и использует эту информацию при определении орбиты. Когда программа переходит к обработке измерения на данной временной отметке, она снимает фиксацию целочисленной неоднозначности и приводит соответствующие ей значения ковариационной матрицы к начальным параметрам. Таким образом, программа начинает уточнять скачок фазы, а вместе с ним и целочисленную неоднозначность, заново в совокупности. Это позволяет избежать процедуры определения величины скачка фазы отдельными алгоритмами.

3.1.6 Метод разрешения неоднозначностей фазовых измерений

При определении орбиты с помощью фазовых измерений возникает достаточно сложная проблема разрешения целочисленных неоднозначностей. Длина волны несущих колебаний на частоте L_1 составляет всего 19 см, а определяемые дальности оцениваются величинами около 20 000 км. Поэтому прежде, чем использовать фазовые измерения для уточнения орбиты, необходимо добиться грубой оценки этой орбиты, например, с помощью кодовых измерений. После этого можно начинать поиск неоднозначностей различными методами.

Существует большое количество методов для поиска и разрешения целочисленных неоднозначностей фазовых измерений и все они были изучены при подготовке данной работы [76–82]. В большинстве своем они основываются на включении целочисленных неоднозначностей в число уточняемых параметров. В таком случае неоднозначности оцениваются как числа с плавающей точкой. Однако для получения высокоточного результата необходимо зафиксировать данные числа как целочисленные значения. Стратегии по фиксации неоднозначностей обычно основаны на переборе целых чисел определенного двумерного пространства в соответствии с оценкой ковариационной матрицы уточняемых параметров и оценкой влияния среды на распространение сигнала. Для получения наиболее надежной фиксации и соответственно высокоточного решения навигации обычно используют двойные разности ГНСС-измерений. Причем, чем меньше база измерений, тем меньше время требуется для определения неоднозначностей и их фиксации. Сложность задачи определения орбиты НКА по фазовым наблюдениям ГНСС заключается в том, что в отличие от наземного приемника НКА движется по орбите со скоростью примерно 7 км/с. Из-за этого наблюдаемая группировка ГНСС спутников меняется примерно каждые 1-3 мин, а видимость одного спутника составляет примерно 10 мин, вследствие чего приходится заново искать и фиксировать целочисленные неоднозначности на столь коротких дугах видимости. Это повышает риск неправильной фиксации неоднозначностей и требует крайне аккуратного и внимательного подхода для обработки фазовых измерений. Область разработки таких методов продолжает активно развиваться и по сей день.

Перед началом процедуры определения неоднозначностей необходимо исключить все основные источники систематических ошибок, т.е. составить наиболее полную модель наблюдений. Здесь возникает еще одна сложность, связанная с ионосферой. Ионосферная поправка в значительной мере мешает определению неоднозначностей в случае одиночных измерений. Для ее учета, помимо использования ионосферных карт, необходимо вычислять параметр α из выражения 2.41, что не всегда представляется удобным и возможным. Поэтому на практике чаще стараются использовать безионосферную комбинацию фазовых измерений. Однако и в этом случае, несмотря на то, что член B комбинации PIF оценивается достаточно точно, отдельные величины целочисленных неоднозначностей невозможно зафиксировать. В идеальном случае, перед процедурой определения неоднозначностей необходимо добиться точности предварительного определения орбиты на уровне половины длины волны, но на практике, точность кодовых измерений для предварительной обработки гораздо меньше. Также необходимо учесть, что алгоритм определения неоднозначностей должен работать как с одночастотными приемниками, так и с двухчастотными, поскольку не все приемники способны принимать сигналы с двух частот.

К сожалению, не существует универсального метода для определения целочисленных неоднозначностей со 100% точностью. В каждом конкретном случае исследователи применяют некоторые из существующих алгоритмов или разрабатывают собственные методы. При этом разработка такого метода должна учитывать тот факт, что в идеальном случае определение и фиксация неоднозначности должны происходить только при 100% уверенности в значении этой самой неоднозначности, поскольку при неправильной фиксации ошибка определения орбиты будет только нарастать со временем, что может вылиться в расхождение всего решения.

Ввиду сложностей при использовании ионосферных карт и динамики геометрии системы было принято решение попытаться разработать метод определения фазовых неоднозначностей, основываясь только на различных комбинациях наблюдений. Так как в дифференциальном режиме многие эффекты модели наблюдений нивелируются, то большинство методов использует именно двойные разности для определения фазовых неоднозначностей. При этом все методы зависят от двух ключевых величин: размера базы дифференциального режима и величины временного интервала накопления сигнала. В случае

НКА этот временной интервал совсем невелик из-за быстроменяющейся динамики системы, а в качестве базы дифференциального режима можно взять два приемника спутников проекта GRACE [26]. При разработке метода за основу был взят метод QIF (Quasi-Ionosphere-Free Strategy) [43]. Его суть заключается в оценке величины B безионосферной комбинации фазовых измерений в процессе уточнения орбиты, с последующим ее разбиением на две отдельные целочисленные переменные, соответствующие двум частотам сигнала. При этом учитывается условие медленно меняющейся ионосферной поправки со временем. Решение ищется в определенном двумерном целочисленном пространстве по минимуму специальной ковариационной функции с учетом ограничений, вводимых пользователем.

В данной работе предлагается метод, в котором решение ищется в двумерном целочисленном пространстве с учетом ошибок не только самой величины B , но и других комбинаций измерений. Алгоритм данного метода выглядит следующим образом:

1. Получение величин B , PGF , MW , PWL , CWL , CNL с учетом текущих координат приемника
2. Составление набора целочисленных кандидатов на каждую эпоху согласно полученным комбинациям измерений и ограничениям, вводимым пользователем
3. Вычисление комбинаций измерений по целочисленным отобраным кандидатам
4. Вычисление невязок между наблюдаемыми комбинациями и вычисленными
5. Нормировка невязок по каждой комбинации
6. Вычисление средней ошибки
7. Фиксация неоднозначностей в зависимости от двух тестов: максимальная допустимая ошибка и минимальное допустимое отношение второго минимума ошибки (в зарубежной литературе – ratio test)
8. Загрузка зафиксированных неоднозначностей в программу определения орбиты и итеративное повторение алгоритма, начиная с первого пункта

Пользователь задает следующие входные параметры для данного алгоритма:

1. Допустимая ошибка B
2. Допустимая ошибка PGF
3. Допустимая ошибка MW
4. Допустимая средняя нормированная ошибка
5. Допустимое отношение второго минимума ошибки к главному

Ключевым моментом данного метода является то, что он использует сразу несколько комбинаций измерений в совокупности для определения правильного целочисленного кандидата. Метод применяется к уже определенной орбите, т.к. если фиксировать неоднозначности в режиме онлайн обработки, то возрастает вероятность расхождения решения. На первых итерациях метода параметры ограничений следует задавать *жесткими*. После первой итерации программа выводит процент фиксации неоднозначностей, на который следует ориентироваться. Как правило, для наиболее хорошего результата следует ограничивать данный процент до 5 за одну итерацию.

К сожалению, попытка применения данного метода к определению орбиты в режиме нулевых разностей (PPP) не увенчалась успехом. Причиной этому может быть неточность составленной модели наблюдений. Например, в данной работе не учитывалось влияние ионосферных эффектов второго порядка, от которых не избавляет безионосферная комбинация фазовых измерений. В то время как в дифференциальном режиме многие эффекты модели наблюдений если не исчезают, то значительно уменьшают свой вклад.

Разработанный метод фиксации неоднозначностей был несколько усовершенствован в данной работе с помощью технологии машинного обучения. Основными недостатками данного метода являлись необходимость подбора пользователем нужных параметров и итеративный подход, занимающий долгое время. Вместо этого был разработан нейросетевой классификатор, позволяющий выбрать нужного кандидата из набора или оставить неоднозначность незафиксированной. Подробности использования технологии машинного обучения и нейросетей можно найти в главе 4.

Классификатор обучался специальной на базе данных, называемой датасетом (см. Словарь терминов), которая была специально собрана для данной работы. Для ее формирования были использованы модельные синтетические измерения, не содержащие неоднозначностей, но обладающие шумом, ионосферным влиянием и всеми остальными эффектами из модели наблюдений. К таким

измерениям псевдослучайным образом добавлялись целочисленные неоднозначности. После использования этих измерений в процессе уточнения орбиты, все измерения разбивались на непрерывные по спутникам дуги, и для каждой дуги находился набор возможных целочисленных кандидатов. Таким образом, в качестве обучающих данных выступали наборы кандидатов, а в качестве меток данных – известные псевдослучайные неоднозначности.

Надо отметить, что не для всех дуг набор кандидатов содержал правильную пару неоднозначностей. Такое могло происходить из-за повышенного шума при определении орбиты. Поэтому датасет был разделен на две части: содержащий и не содержащий правильные пары. Для определения наборов, не содержащих правильной неоднозначности был реализован бинарный нейросетевой классификатор. А для определения номера правильного кандидата (там где он есть) был реализован мульти-классификатор. Обе нейросети в конце своего обучения показали точность равную примерно 95%. А протестировав их на реальных измерениях ГНСС, была получена сравнимая с оригинальным методом точность определения орбиты. Таким образом, была устранена необходимость итеративной обработки измерений и подбора гиперпараметров разработанного метода определения и фиксации фазовых целочисленных неоднозначностей.

3.2 Модельные измерения

Тестирование алгоритмов уточнения орбит НКА по данным ГНСС было решено проводить на спутниках проекта GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment). Данная космическая миссия – результат совместного сотрудничества США и Германии, NASA и DLR соответственно – предназначалась для высокоточного картографирования вариаций ГПЗ. Данная работа осуществлялась с помощью микроволновых измерений межспутникового расстояния и скорости между двумя НКА на околополярной низкой орбите. Каждый из спутников имеет на борту приемник GPS для высокоточного позиционирования на орбите. Большая полуось орбиты GRACE составляет 6878 км (500 км высота), эксцентриситет орбиты 0.005 и наклонение 89°.

Для отработки методики уточнения орбиты было решено использовать модельные ГНСС измерения. Измерения и сопутствующие им данные моделировались в программном комплексе Bernese [43]. Высокоточное программное обеспечение Bernese GNSS было разработано в Астрономическом институте Бернского университета для постобработки наблюдений ГНСС в научных исследованиях. Данное программное обеспечение используется Европейским центром определения параметров орбит CODE (Center for Orbit Determination in Europe) для поддержки международной (IGS) и европейской (EUREF/EPN) сетей глобальной спутниковой навигации. Программное обеспечение Bernese GNSS постоянно совершенствуется.

Для моделирования наблюдений в программном обеспечении Bernese разработан модуль Data Simulation Tool, который предназначен для генерации синтетических кодовых и фазовых наблюдений как для наземных станций, так и для низкоорбитальных спутников. Присутствует возможность добавлять в синтетические наблюдения влияние различных факторов: ионосферные и тропосферные задержки по различным моделям, поправки часов и OSB задержки, вариации фазового центра и поворот антенн, релятивистские поправки, имитировать скачки в фазовых измерениях; при моделировании можно использовать различные модели ГПЗ, нутации/прецессии, движения полюса и т.д. Для оценки ошибок решений с синтетическими наблюдениями можно вводить случайный шум в кодовые и фазовые наблюдения на обеих частотах с независимо заданными априорными сигмами. При генерации синтетических наблюдений для низкоорбитальных спутников используются динамические орбиты НС, поправки часов спутников ГНСС, кинематические координаты и скорости НС, информация об ориентации низкоорбитального спутника (кватернионы поворота). В данной работе были использованы динамические орбиты, полученные из финальных эфемерид, и 5 секундные поправки часов спутников ГНСС, предоставляемые центром CODE (Center for Orbit Determination in Europe).

В качестве результатов определения орбит приводятся графики, построенные на основе выходных данных программного обеспечения LOIS. Стоит отметить, что величина невязки между наблюдениями и моделью наблюдений (O-C) не всегда отражает истинную картину результата работы алгоритма фильтрации, поскольку алгоритм стремится уменьшить величину (O-C), основываясь только на наблюдениях, представляющие собой по сути радиодальномерные

измерения. Из-за этого могут возникать ситуации, например при слабой геометрии группировки НС или недостаточности числа НС, когда модуль радиус-вектора положения НКА будет совпадать с истинным значением с высокой точностью, но при этом его компоненты, координаты НКА, будут значительно отличаться от истинных значений. В связи с этим, по крайней мере для отработки алгоритма фильтрации, необходимо проводить анализ не только величины (О-С), но и реального совпадения трехмерного положения НКА с истинным значением. К счастью, в случае модельных наблюдений, такое истинное значение положения НКА известно. В данных уровня 1В содержатся файлы уточненной орбиты спутников GRACE, которые получал центр обработки проекта GRACE. Эти эфемериды служат опорой для генерации синтетических данных, поэтому их можно взять в качестве истинной орбиты.

Синтетические данные спутников GRACE возможно воссоздать в программном обеспечении Bernese без шума, учитывая только эффект световой задержки. Однако на практике оказалось, что теоретическая модель наблюдений не в полной мере совпадает с реальной, заложенной в обработку измерений уровня 1В авторами проекта GRACE. Учет некоторых эффектов не описан в документации наблюдений уровня 1В, поэтому в данной работе модель наблюдений проекта GRACE воссоздавалась поэтапно, включением или исключением различных эффектов. Так, например, оказалось, что релятивистская задержка часов приемника и эффект Шапиро из-за влияния Солнца уже включены в измерения и не требуют повторного учета. На рис. 3.4 приведен результат определения орбиты спутника GRACE A по синтетическим данным, не содержащим эффекта ионосферы, целочисленных неоднозначностей и шума измерений. На данном графике отображена радиальная ошибка радиус-векторов истинной и оцениваемой орбит. Для удобства анализа работы алгоритма фильтрации ось абсцисс графика отображает количество итераций алгоритма фильтрации. В данном случае одна итерация соответствует временному интервалу в 10 секунд, поскольку измерения в приемнике проводились с шагом в 10 секунд. Весь временной интервал графика при этом соответствует 2 ч. Здесь также можно увидеть максимально возможную точность, с которой программное обеспечение LOIS смогло определить орбиту спутника GRACE. Несмотря на то, что в данном случае у синтетических данных отсутствует шум, расхождение орбит достигает 4 см по модулю радиус-вектора. Это может говорить о неполном со-

ответствии между моделями наблюдений LOIS и Bernese. Реальная истинность оцениваемой орбиты остается неизвестной. При этом интегрирование орбиты с помощью модели движения LOIS дает совпадение с опорной орбитой спутников GRACE на субмиллиметровом уровне на временном интервале в 10 сек.

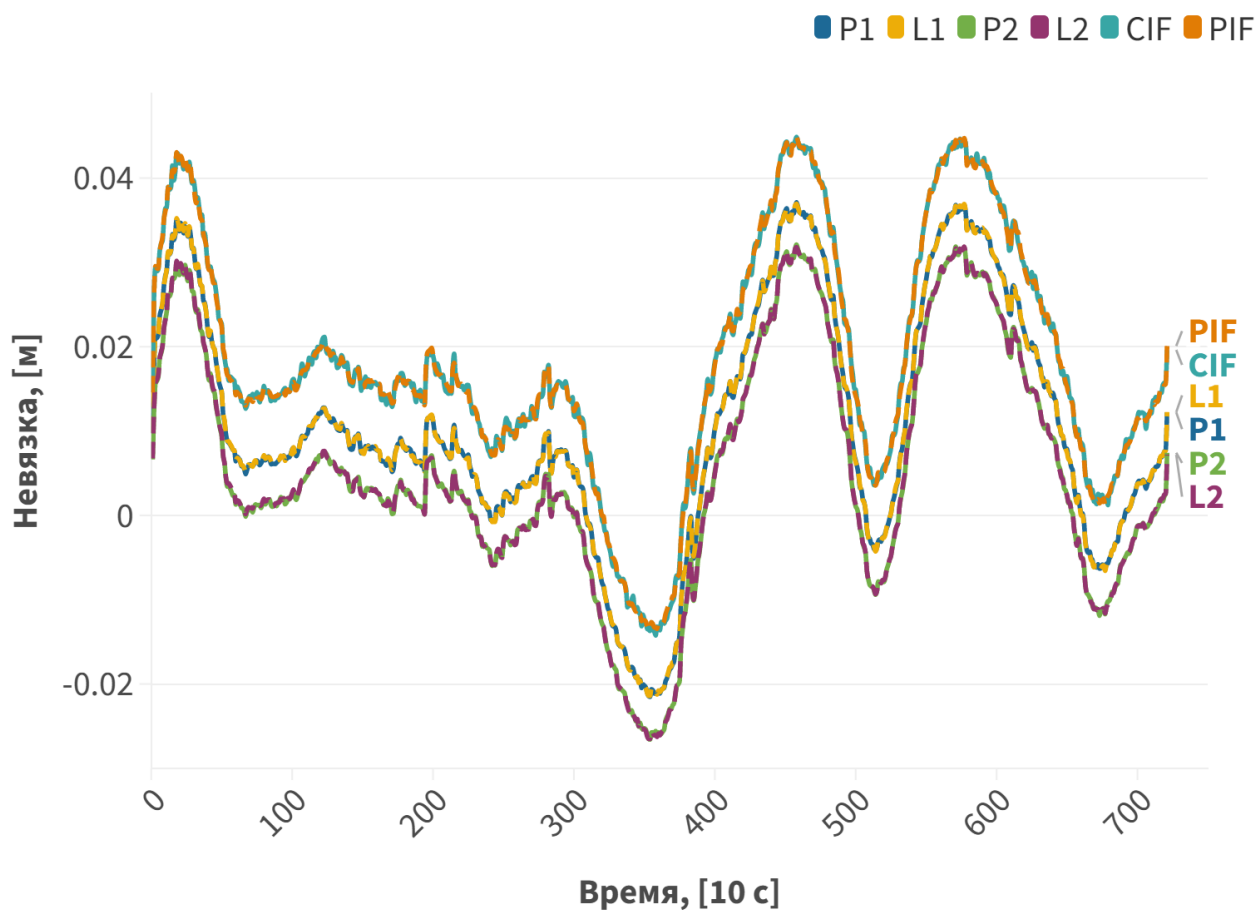


Рисунок 3.4 — Невязка положения спутника GRACE A по безшумовым и безионосферным синтетическим измерениям.

Далее были созданы синтетические данные ГНСС с шумом кодовых измерений 0.5 м и шумом фазовых измерений 5 мм. Аналогичный результат определения орбиты на основе таких измерений приведен на рис. 3.5. В этом эксперименте учитывалось влияние ионосферы на распространение сигнала, поэтому при обработке измерений типов P_1 и L_1 можно заметить характерный ионосферный горб в районе 350-й итерации. Причем на этом графике видно отличие знаков ионосферного члена кодовых измерений и фазовых. На рис. 3.6 можно отметить, что основная составляющая невязки находится в радиальной компоненте из-за влияния ионосферы.

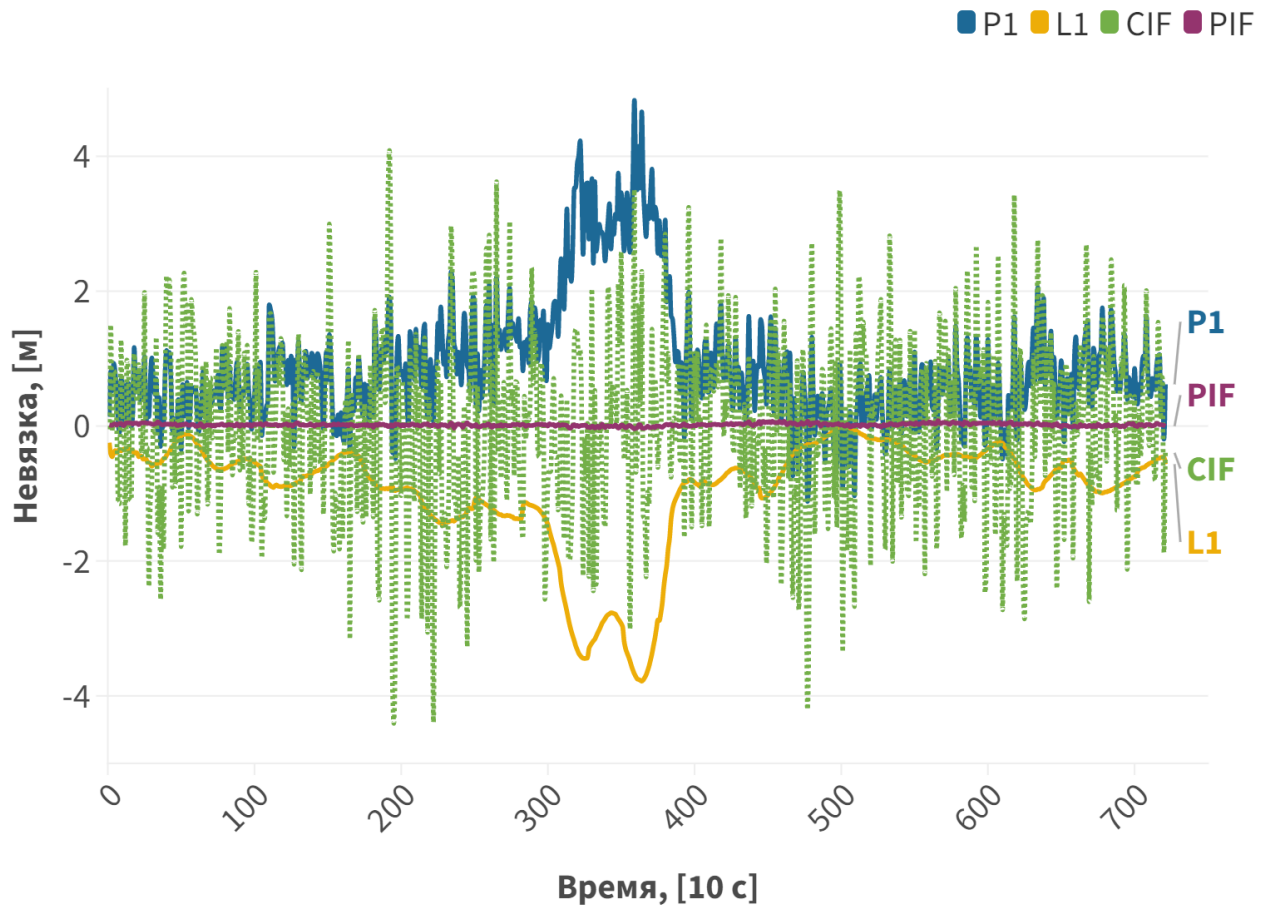


Рисунок 3.5 — Невязка положения спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодовых измерений 0.5 м и шумом фазовых измерений 5 мм.

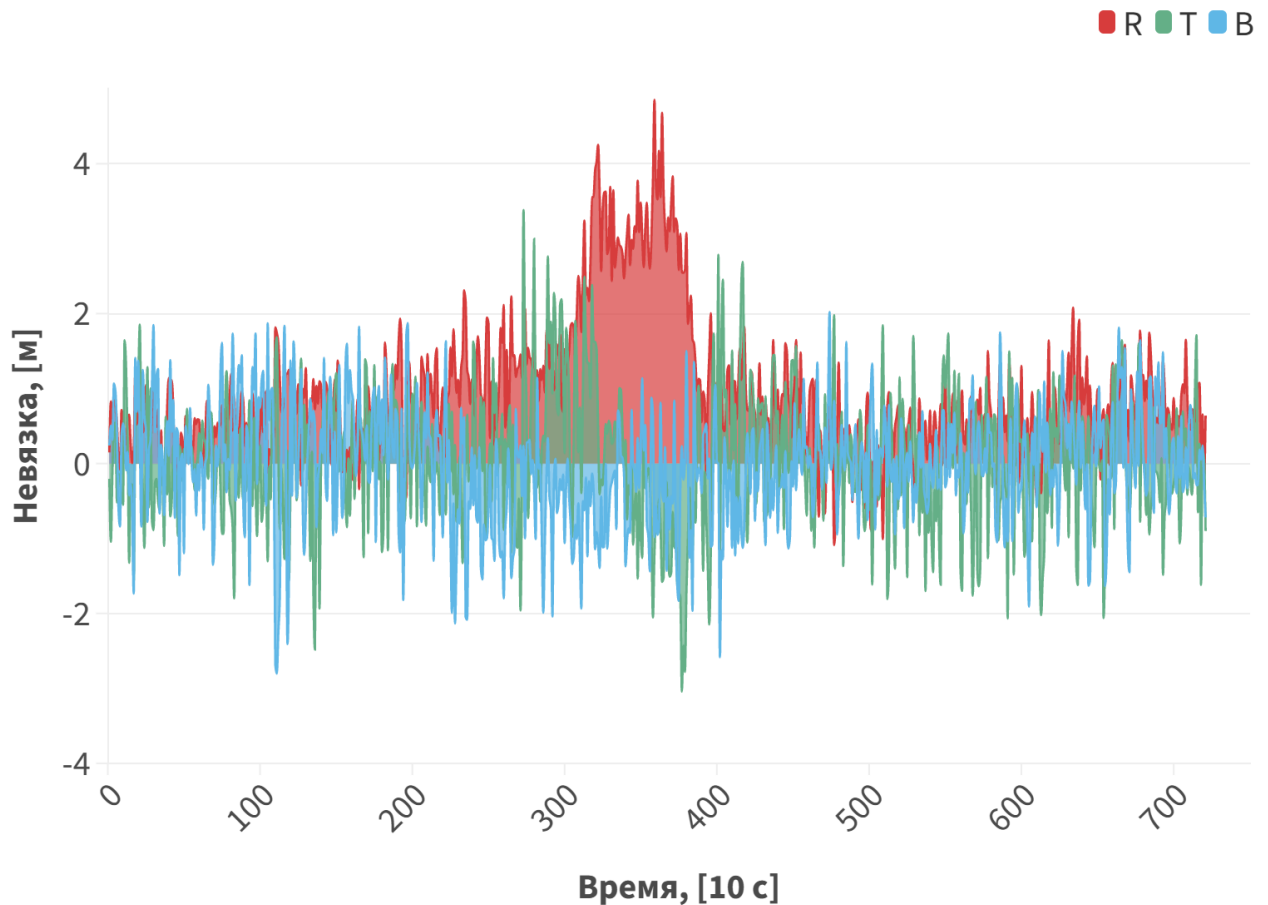


Рисунок 3.6 — Невязка по радиальной (R), трансверсальной (T) и бинормальной компоненте (B) положения спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодовых измерений 0.5 м. Измерение P_1 .

Также на рис. 3.5 можно наблюдать результат определения орбиты на основе безионосферных комбинаций PIF и CIF . Заметно отличие уровня шума кодовых (P_1 , CIF) и фазовых (L_1 , PIF) наблюдений. Программа LOIS также позволяет выводить покомпонентные невязки между опорно-истинной орбитой и оцененной (рис. 3.7, 3.8). На примере данного эксперимента на рис. 3.9 продемонстрирована схема сглаживания кодовых измерений.

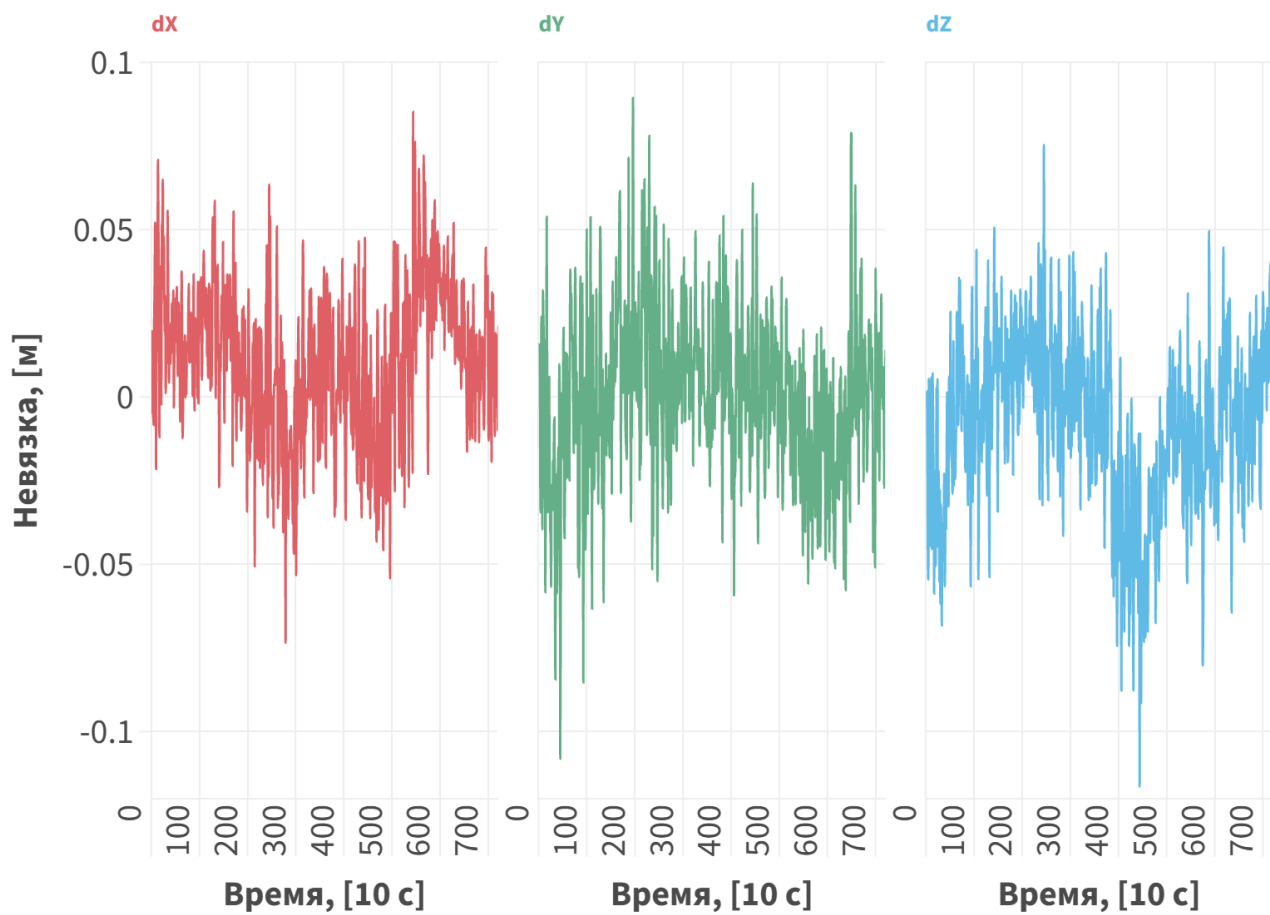


Рисунок 3.7 — Невязки компонент радиус-вектора положения спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом фазового измерения 5 мм. Комбинация PIF.

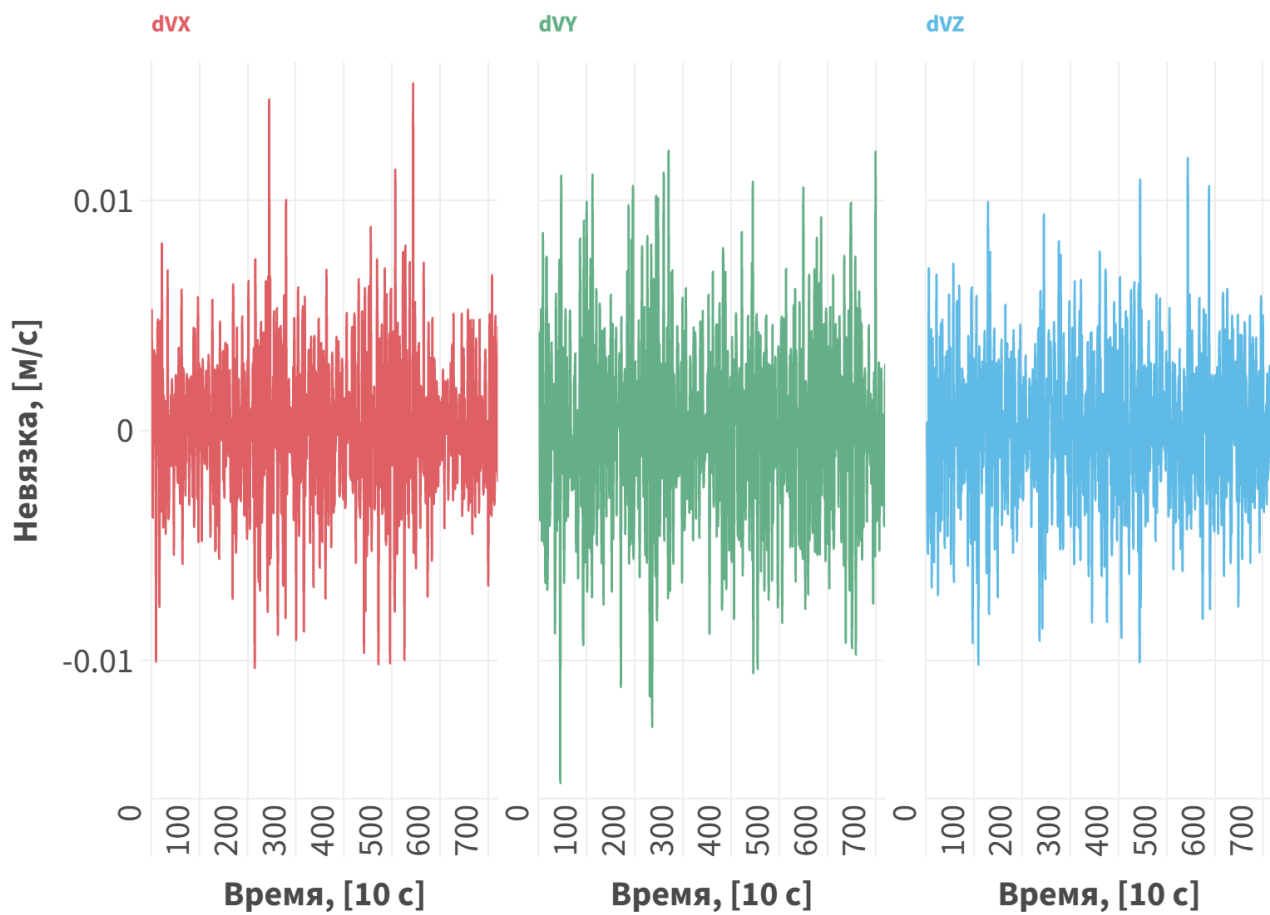


Рисунок 3.8 — Невязки компонент вектора скорости спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодового измерения 5 мм. Комбинация PIF.

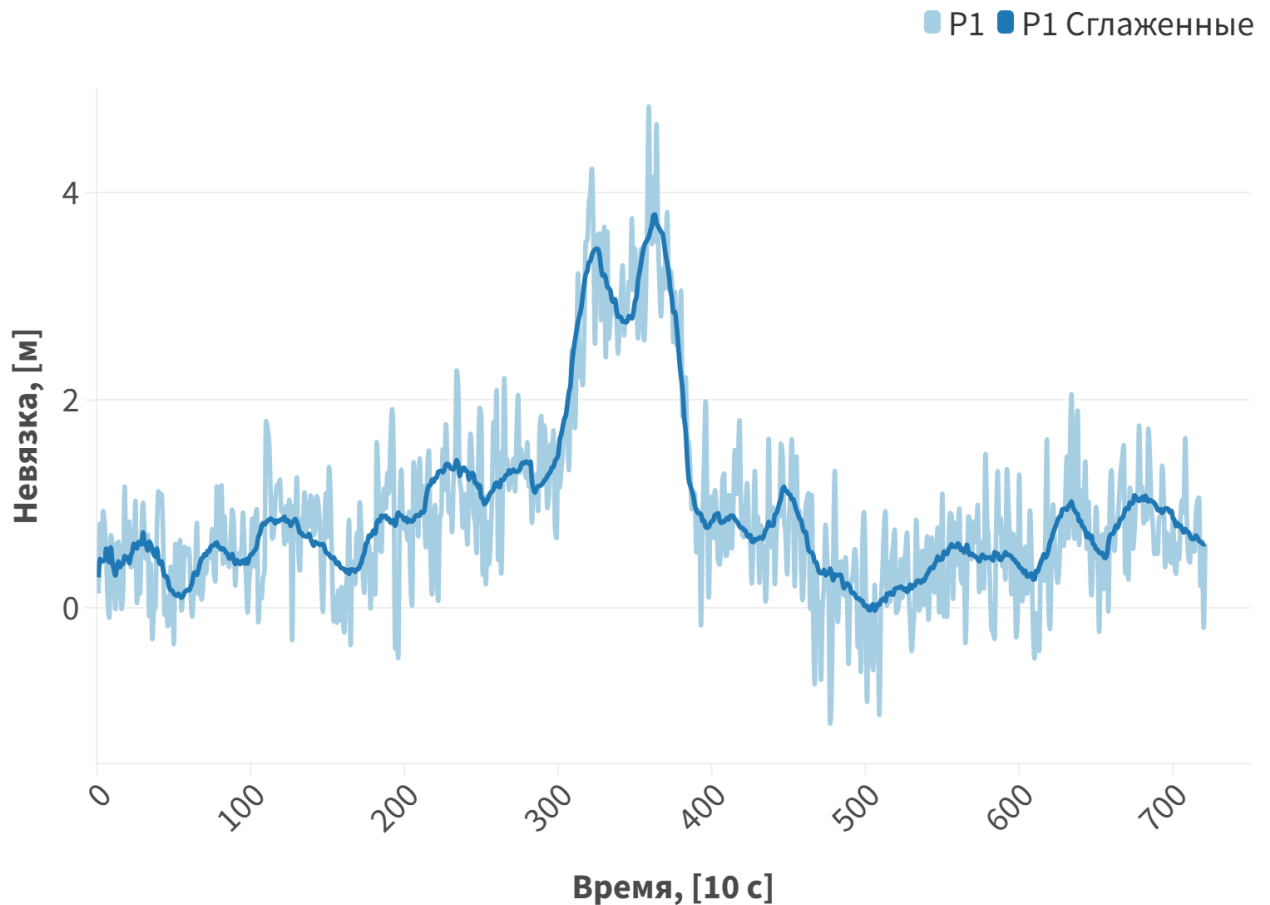


Рисунок 3.9 — Демонстрация алгоритма сглаживания кодовых измерений при определении орбиты спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодовых измерений 0.5 м. Измерение P_1 .

На рис. 3.10 отображены невязки между наблюдениями и моделью наблюдений для этого эксперимента. В качестве величины (O-C) берется средняя невязка по всем навигационным спутникам, доступным на момент измерения. Помимо средней величины необходимо следить за среднеквадратическим отклонением невязок, поскольку среднее по спутникам может быть близко к нулю, несмотря на то, что отдельные невязки (O-C) велики.

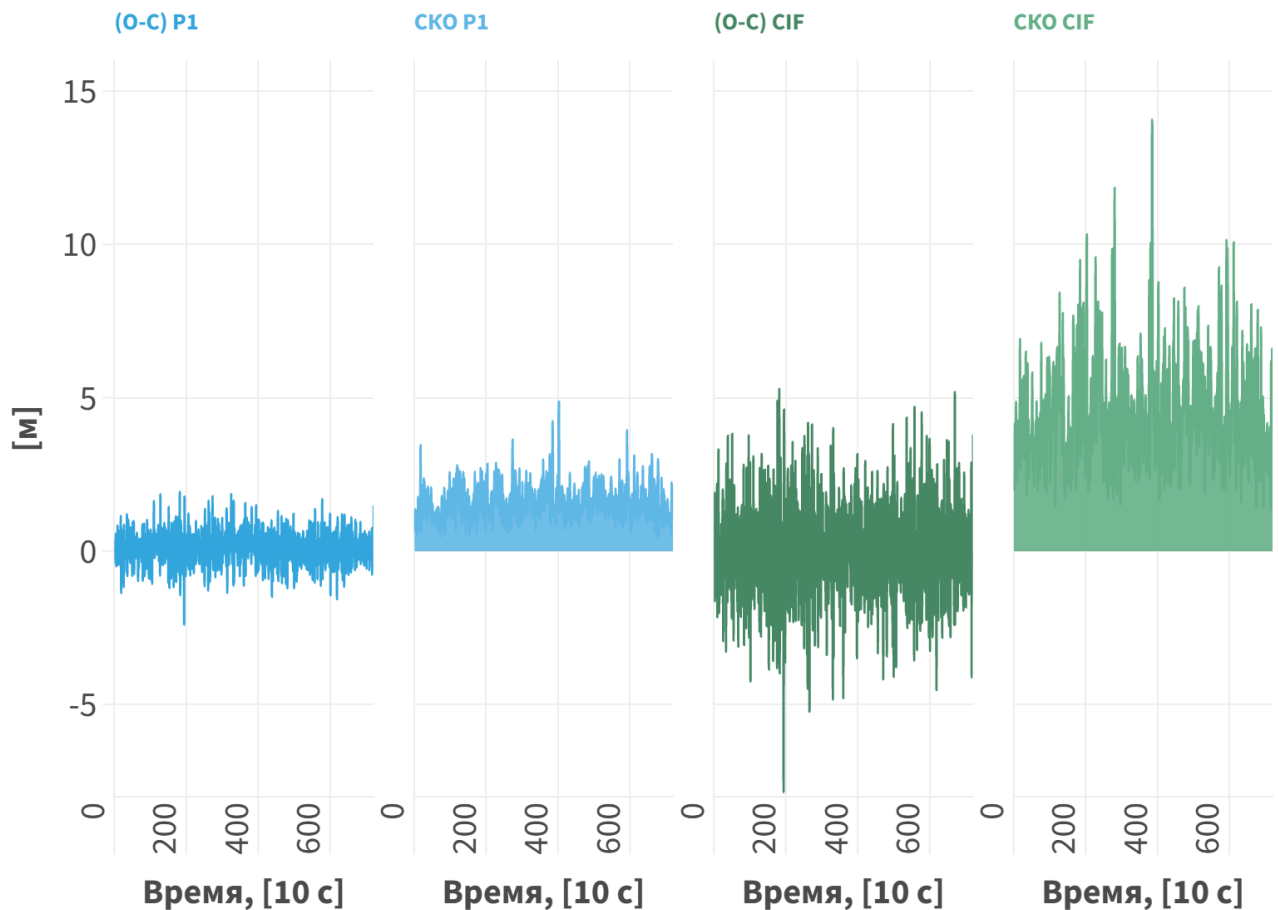


Рисунок 3.10 — Среднее и СКО невязок (O-C) эксперимента по определению орбиты GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодового измерения 0.5 м. Комбинация CIF.

Помимо основных выходных параметров, программное обеспечение LOIS способно выводить дополнительные статистические величины. На рис. 3.11 представлены зависимости количества спутников, PDOP и средней по положению автоковариации матрицы ошибок уточняемых параметров от времени. Эти зависимости подтверждают правильность работы алгоритма ОФК, т.к. чем меньше доступных НС, тем больше значение PDOP и больше значение ковариационной матрицы ошибок уточняемых параметров. Из данного графика можно видеть, что значение PDOP близко к единице, а значит группировка спутников близка к идеальной (сильной).

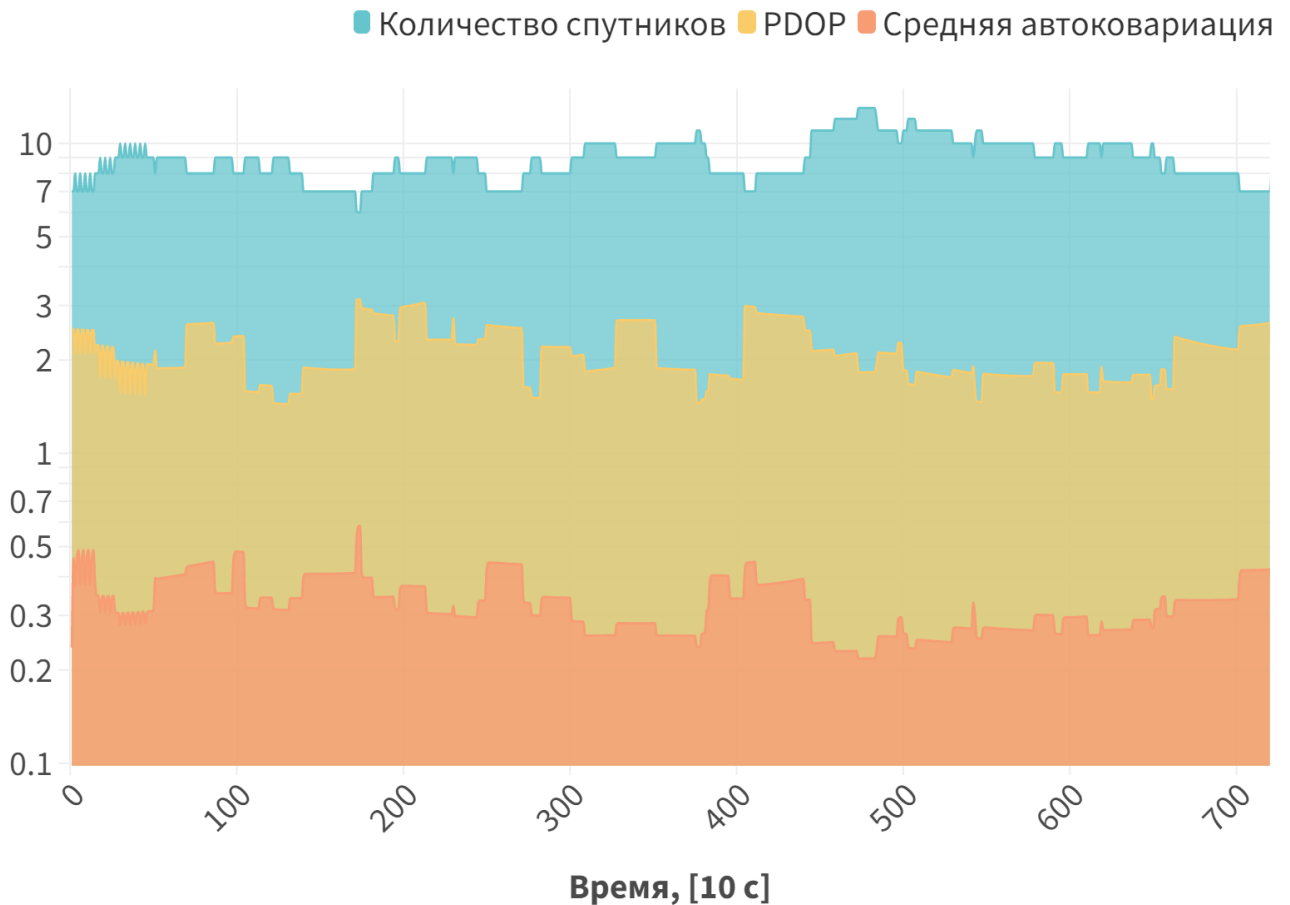


Рисунок 3.11 — Системные статистические параметры эксперимента определения орбиты GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодовых измерений 0.5 м и шумом фазовых измерений 5 мм.

Далее был проведен эксперимент с теми же синтетическими данными, но в режиме двойных разностей (DD). Данный дифференциальный режим был организован между двумя спутниками GRACE. Такая геометрия эксперимента в дифференциальном режиме позволяет устранить влияние тропосферы, уменьшить базу приемников до минимальной и увеличить число одновременно наблюдаемых спутников до максимального значения. База спутников GRACE составляет 220 км, за счет чего оба КА способны наблюдать примерно одну и ту же группировку НС. Орбита спутника GRACE A уточнялась, а орбита спутника GRACE B считалось точной, взятой из данных уровня 1В. На рис. 3.12 представлена зависимость модуля разницы радиус-векторов опорной орбиты и уточняемой. Из данного графика видно, что ионосферное влияние на распространение сигнала в таком режиме нивелируется, поскольку большая часть ионосферы сосредоточена на высотах спутников GRACE и слабо меняется на

протяжении базы в 220 км. При этом эта часть вычитается при составлении одинарных разностей. Помимо этого, из графика видно, что так же как и в эксперименте на рис. 3.5 результат с использованием безионосферной комбинации содержит больший шум, чем простые измерения из-за сложения шумов при составлении комбинации измерений.

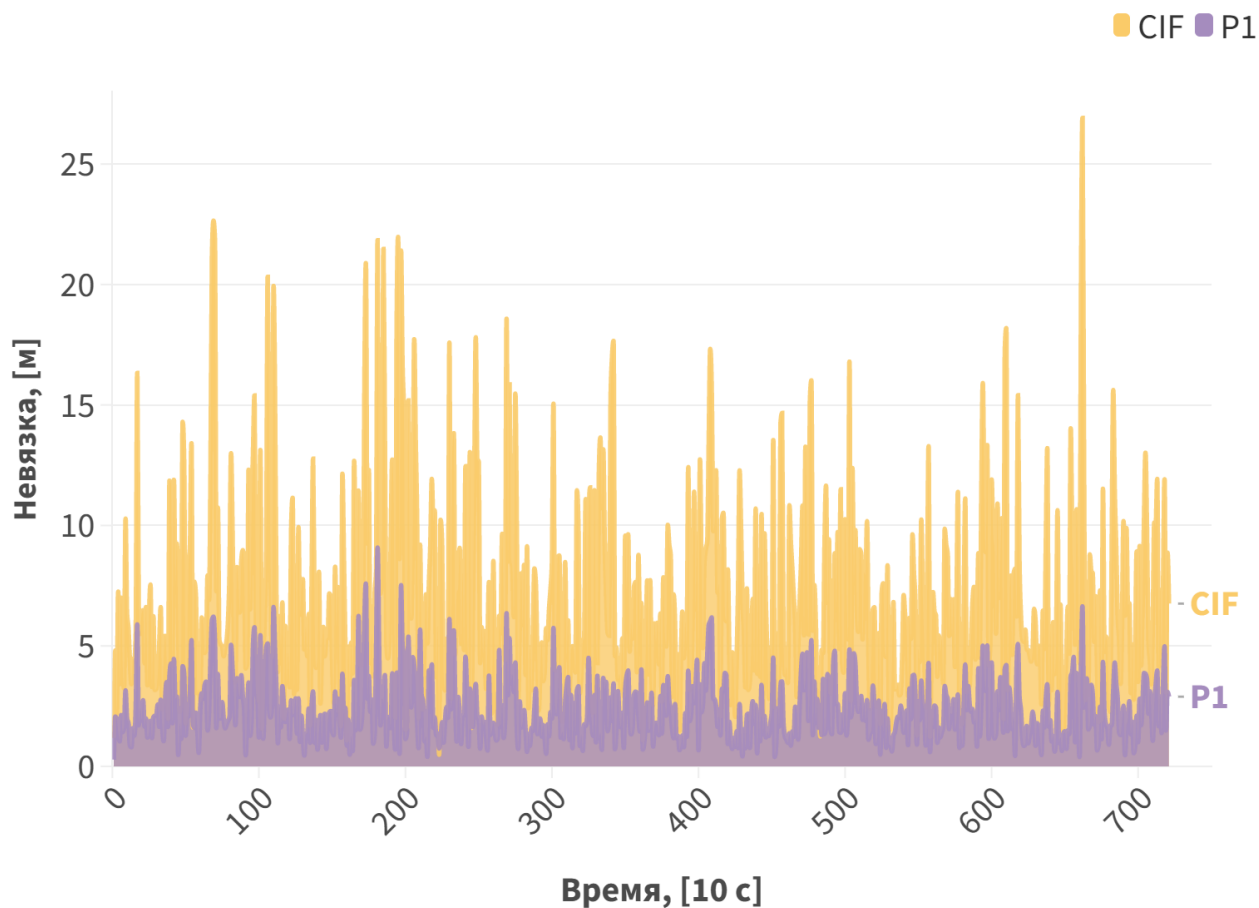


Рисунок 3.12 — Модуль разницы радиус-векторов опорной и уточняемой орбиты спутника GRACE A в дифференциальном режиме двойных разностей с базой GRACE A – GRACE B по синтетическим измерениям с шумом одиночного кодового измерения 0.5 м.

При этом, если сравнить результаты эксперимента для режима нулевых разностей (PPP) и дифференциального режима (DD) (рис. 3.13), то также оказывается, что уровень шума в дифференциальном режиме поднимается согласно теории раздела 2.2.7.

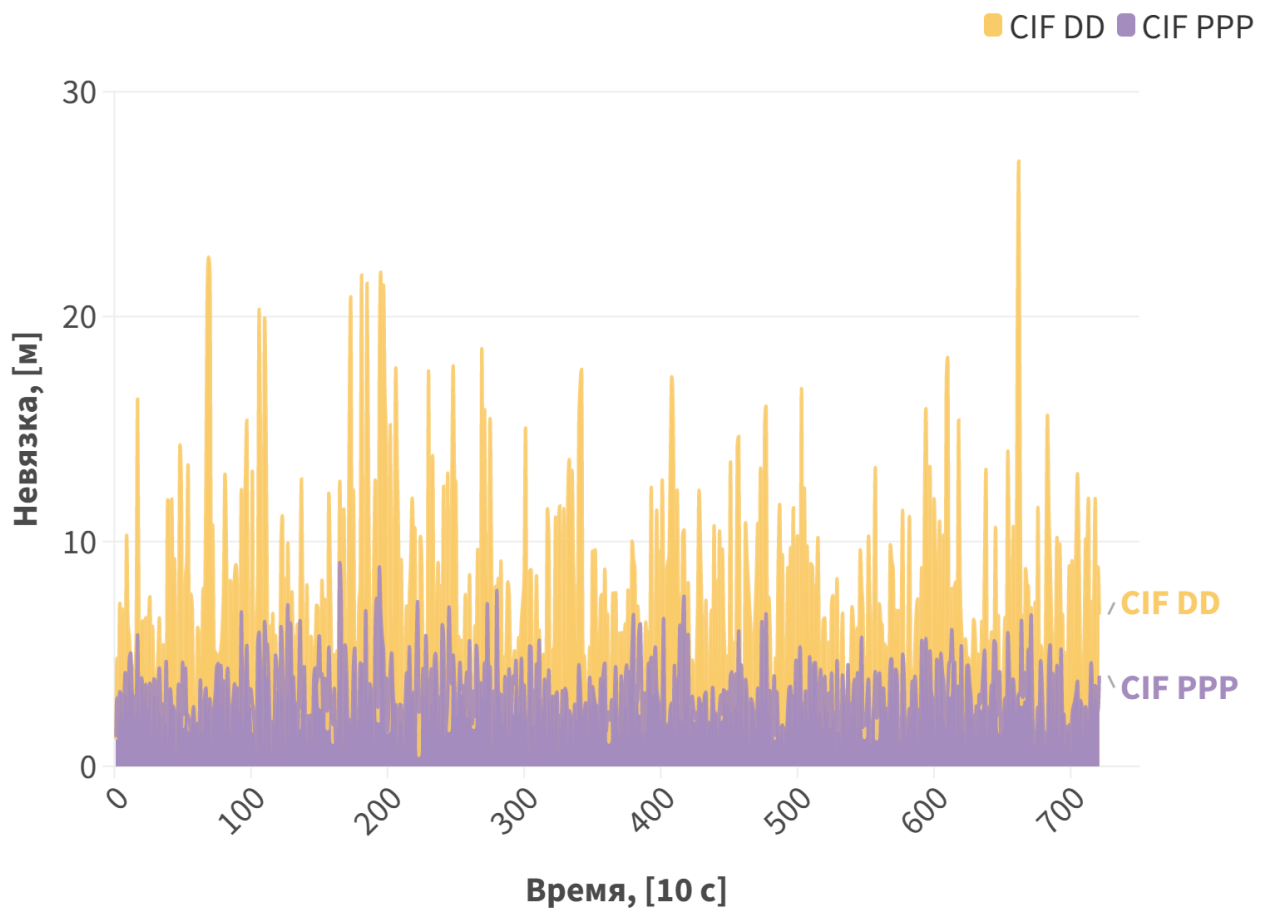


Рисунок 3.13 — Модуль разницы радиус-векторов опорной и уточняемой орбиты спутника GRACE A в режиме нулевых (PPP) и двойных разностей (DD) по синтетическим безионосферным кодовым измерениям с шумом одиночного измерения 0.5 м.

Еще одной наглядной демонстрацией является рис. 3.14, из которого становится ясно, что большая часть ионосферного влияния устраняется в режиме двойных разностей с достаточно короткой базой. Однако остаточное влияние ионосферы все еще остается, в районе 300-400-й итерации виден остаточный ионосферный горб, величиной порядка 20 см. Поэтому для надежного устранения целочисленных неоднозначностей в реальных измерениях все-таки следует использовать безионосферную комбинацию. Ее увеличение шума при составлении двойной разности незначительно из-за малости шума фазовых измерений по сравнению с остаточным влиянием ионосферы.

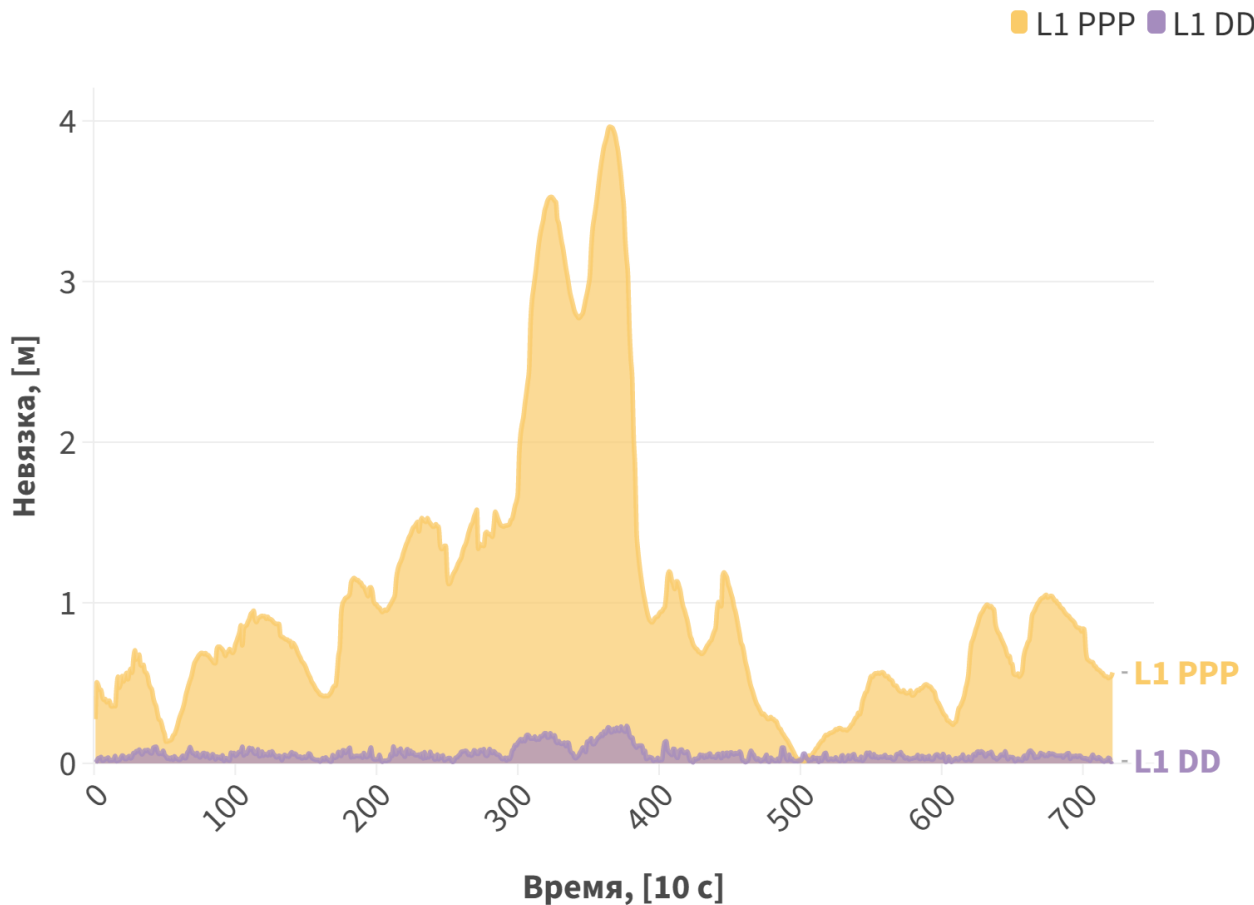


Рисунок 3.14 — Модуль разницы радиус-векторов опорной и уточняемой орбиты спутника GRACE A в режиме нулевых (PPP) и двойных разностей (DD) по синтетическим фазовым измерениям с шумом 5 мм.

Программное обеспечение LOIS было разработано с учётом возможности работать не только с системой GPS, но и в режиме мульти-ГНСС, т.е. использовать спутники систем ГЛОНАСС, Galileo и BeiDou. Для обработки измерений ГЛОНАСС необходимо учитывать частотную модуляцию сигналов разных спутников. Для этого, помимо самих наблюдений в программу необходимо загружать файл навигационного сообщения, в котором приведено соответствие спутников и частотных каналов. Помимо этого, в число уточняемых параметров нужно включать межчастотное и межсистемное смещение. В этом разделе приводятся результаты эксперимента определения орбиты по совместным модельным наблюдениям GPS/ГЛОНАСС.

На рис. 3.15 изображены графики средних невязок (O-C) и их стандартных отклонений при определении орбиты только с помощью системы ГЛОНАСС. Поскольку количество спутников данной системы уступает системе

GPS, на графике можно увидеть пропуски значений, после которых невязки на короткое время возрастают. Эти пропуски свидетельствуют, что на данную эпоху приемник наблюдал меньше 4 спутников ГЛОНАСС, минимально необходимых для получения решения навигации. В подтверждение этому приведен рис. 3.16 на котором отображается количество спутников и значение коэффициента PDOP для группировки ГЛОНАСС.

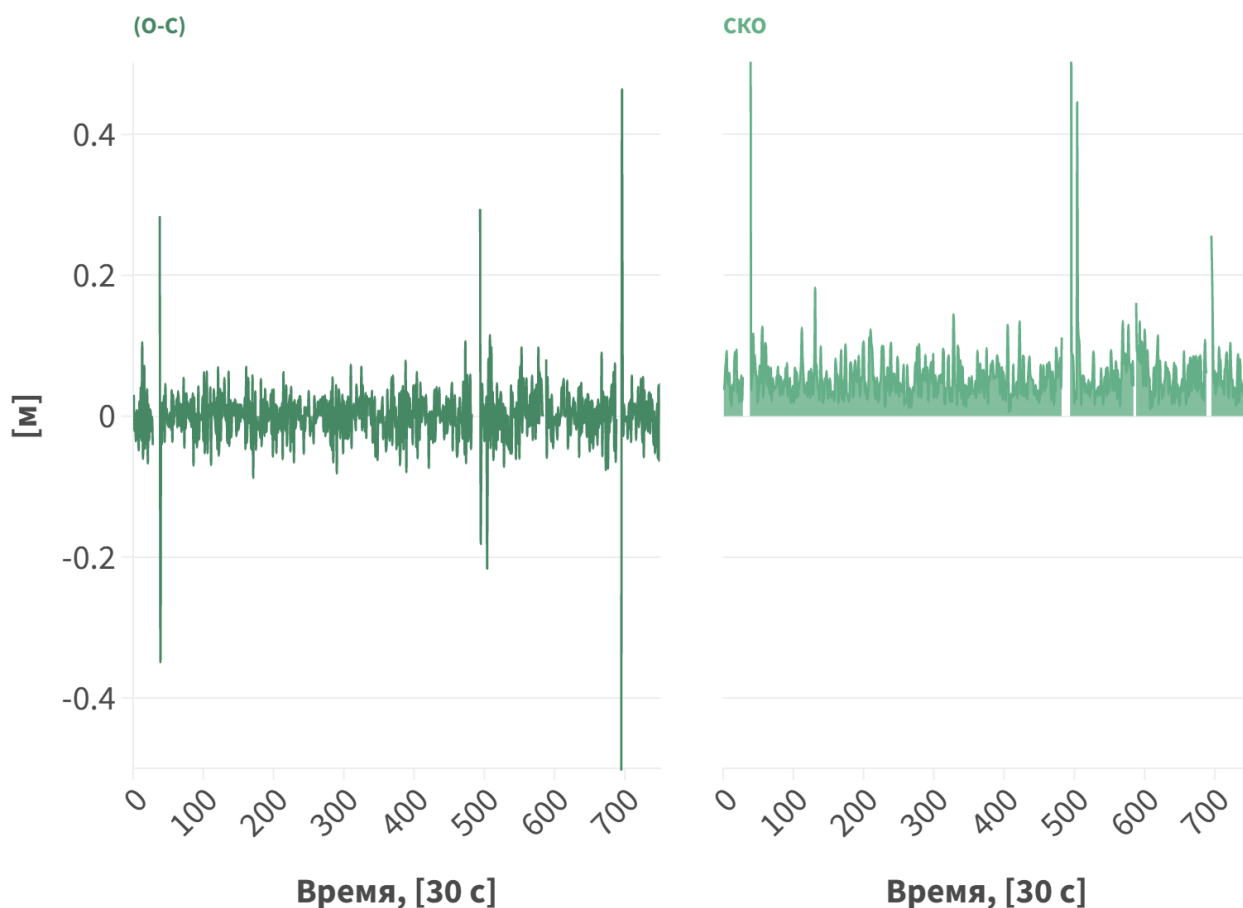


Рисунок 3.15 — Среднее и СКО невязок (O-C) эксперимента по определению орбиты GRACE A по синтетическим измерениям системы ГЛОНАСС с шумом фазового измерения 5 мм. Комбинация PIF.

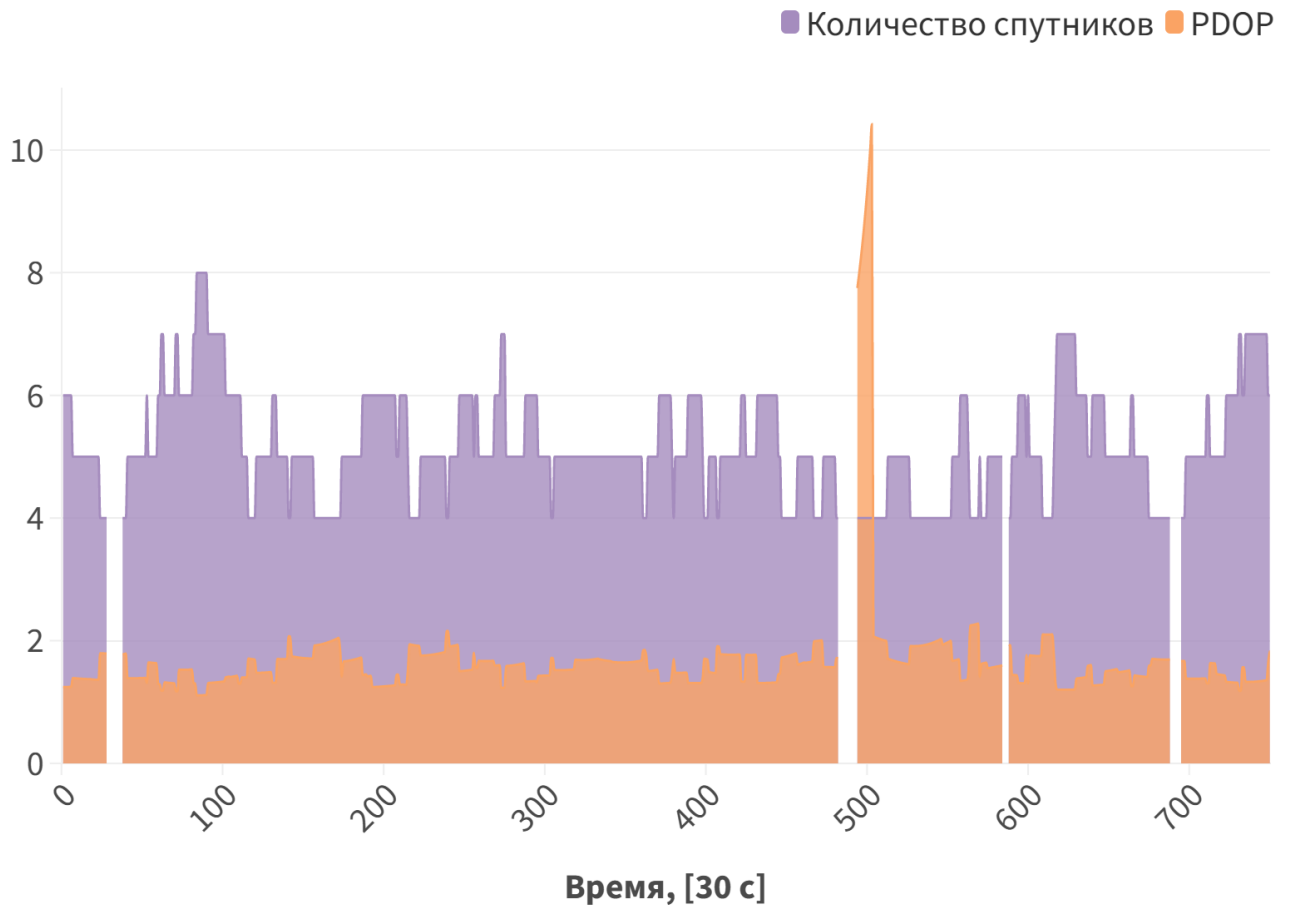


Рисунок 3.16 — Системные статистические параметры эксперимента определения орбиты GRACE A по синтетическим измерениям ГЛОНАСС с шумом фазового измерения 5 мм. Комбинация PIF.

Итоговый результат определения орбиты в данном эксперименте можно увидеть на рис. 3.17. На данном графике показано, что при использовании систем GPS и ГЛОНАСС совместно ошибка трехмерного положения НКА уменьшается по сравнению со случаем использования только спутников GPS.

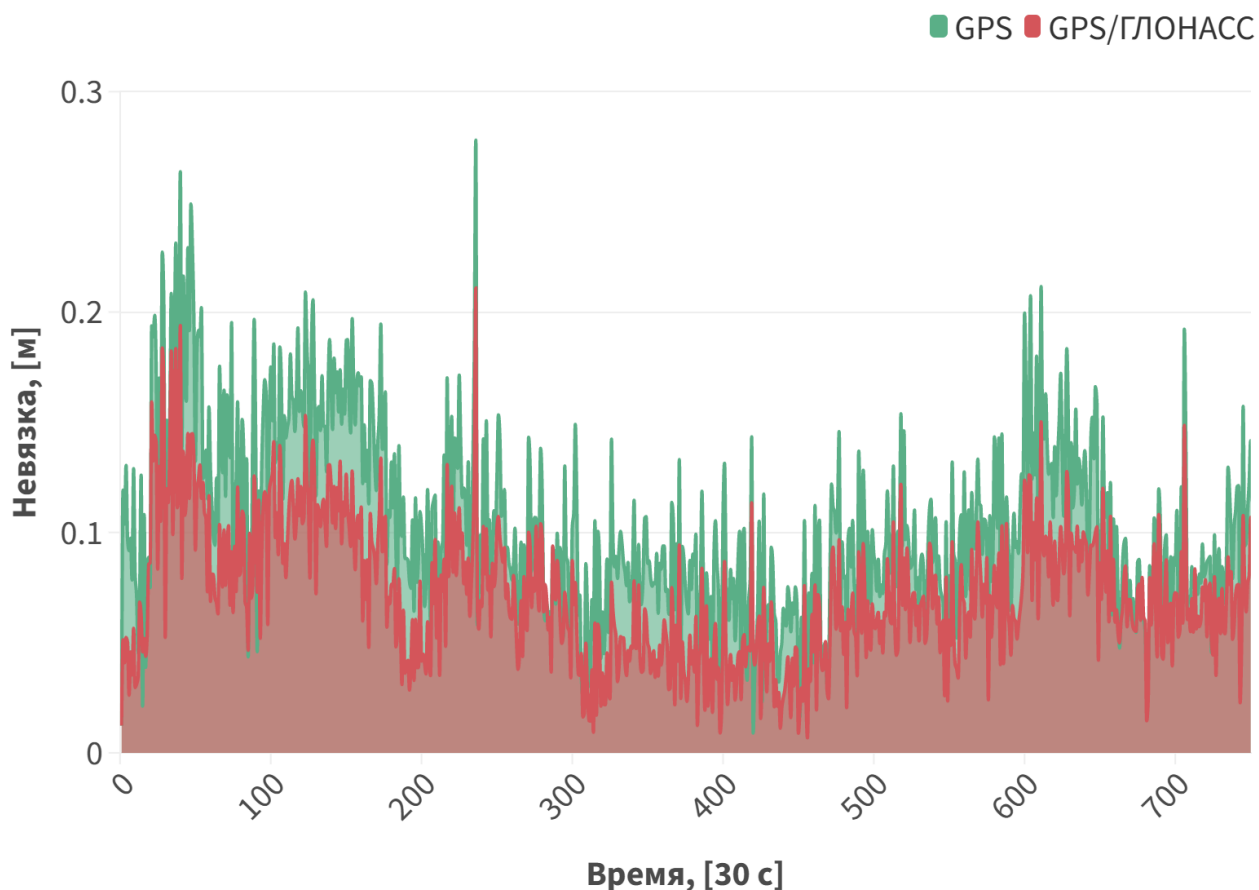


Рисунок 3.17 — Невязки трехмерного положения спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом фазового измерения 5 мм. Комбинация PIF.

3.3 Определение орбит спутников GRACE

3.3.1 Обработка данных

В качестве реальных измерений были взяты данные проекта GRACE уровня 1В. Данный уровень предусматривает, что измерения прошли первичную обработку. Для траекторных измерений GRACE это означает, что в измерениях уже учтена поправка часов приемника. Также, хоть этот момент и не освещается в описании данных GRACE, экспериментальным путем было установлено, что релятивистская поправка часов уже учтена в данных уровня 1В. Для луч-

шего понимая, что из себя представляют измерения, удобно провести их преобработку и вывести три ключевые комбинации измерений: MW, PGF, CRIF. Для этого необходимо разбить весь интервал наблюдений на так называемые *дуги*, где группировка НС остается более или менее постоянной. Обычно считается, что должно быть минимум 10 точек наблюдений на временном интервале, чтобы он мог считаться дугой. На рис. 3.18 изображена комбинация измерений CRIF для реальных данных. Разными цветами обозначаются кривые комбинаций измерений разных НС. Кривые приведены для определенного участка временного интервала и определенных НС для наглядности. Сперва стоит заметить, что среднее значение каждой кривой находится на разном уровне. Это говорит о том, что в фазовых измерениях присутствуют целочисленные неоднозначности, а среднее кривых отличается ровно на величину B из формулы 2.22. Во-вторых, нужно отметить схожесть структуры всех кривых: увеличенный уровень шума в начале дуги и в конце. Это говорит о малом отношении сигнал/шум при больших зенитных углах НС. Таким образом, *хорошее* отношение сигнал/шум длится порядка 10 мин для каждого навигационного спутника при *хорошем* прохождении его по небесной полусфере приемника. Однако если НС проходит достаточно низко, то приемник получает только слабый сигнал с высоким уровнем шума. На рис. 3.18 таковым спутником является спутник G30.

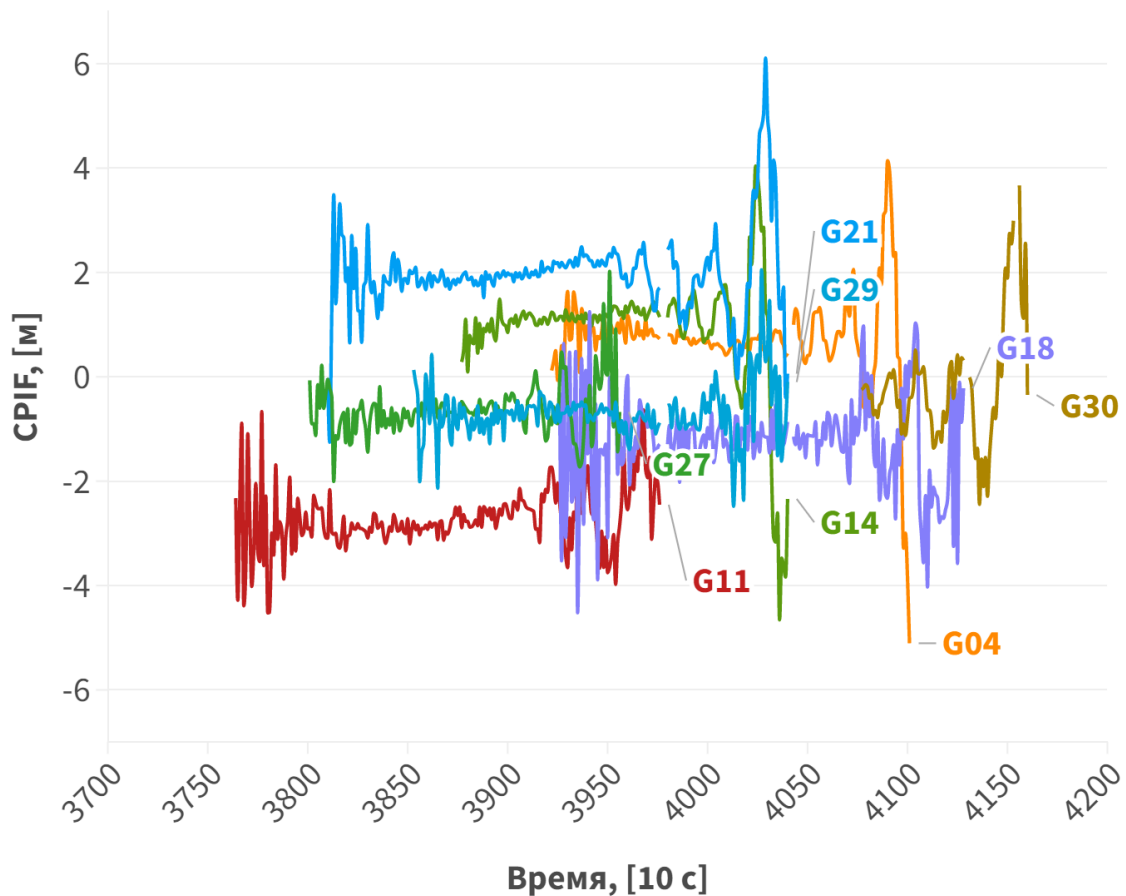


Рисунок 3.18 — Комбинация CIPF реальных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.

На практике оказывается, что исключать участки измерений с высоким уровнем шума невыгодно, так как в этом случае одновременно наблюдаемых НС становится очень мало, что затрудняет определение орбиты. Поэтому применяют технологию сглаживания кодовых измерений, которая описана в разделе 3.1.4. На рис. 3.19 представлен результат такого сглаживания. Из-за сильного шума данная процедура не может полноценно заменить кодовые измерения, однако она значительно помогает при разрешении фазовых неоднозначностей.

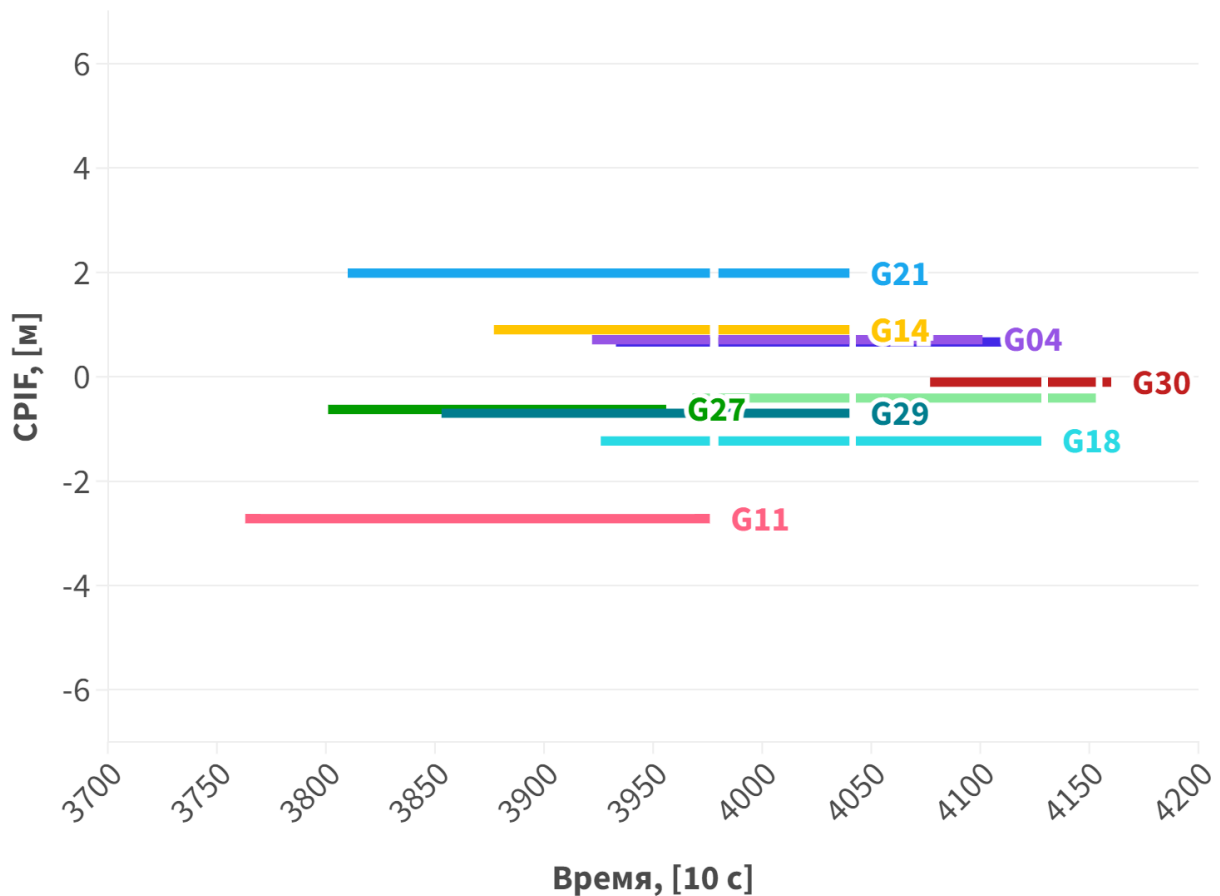


Рисунок 3.19 — Комбинация CIPF реальных сглаженных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.

Еще одной важнейшей комбинацией для разрешения фазовых неоднозначностей является комбинация MW. По сути она равняется числу широких циклов помноженному на широкую длину волны 86 см. На рис. 3.20 представлены такие комбинации измерений для всех дуг суточного временного интервала. По оси ординат они отличаются на целое число широких циклов, и, если бы не было неоднозначностей, то все бы они находились на уровне нуля. На рис. 3.21 изображен результат сглаживания комбинации MW.

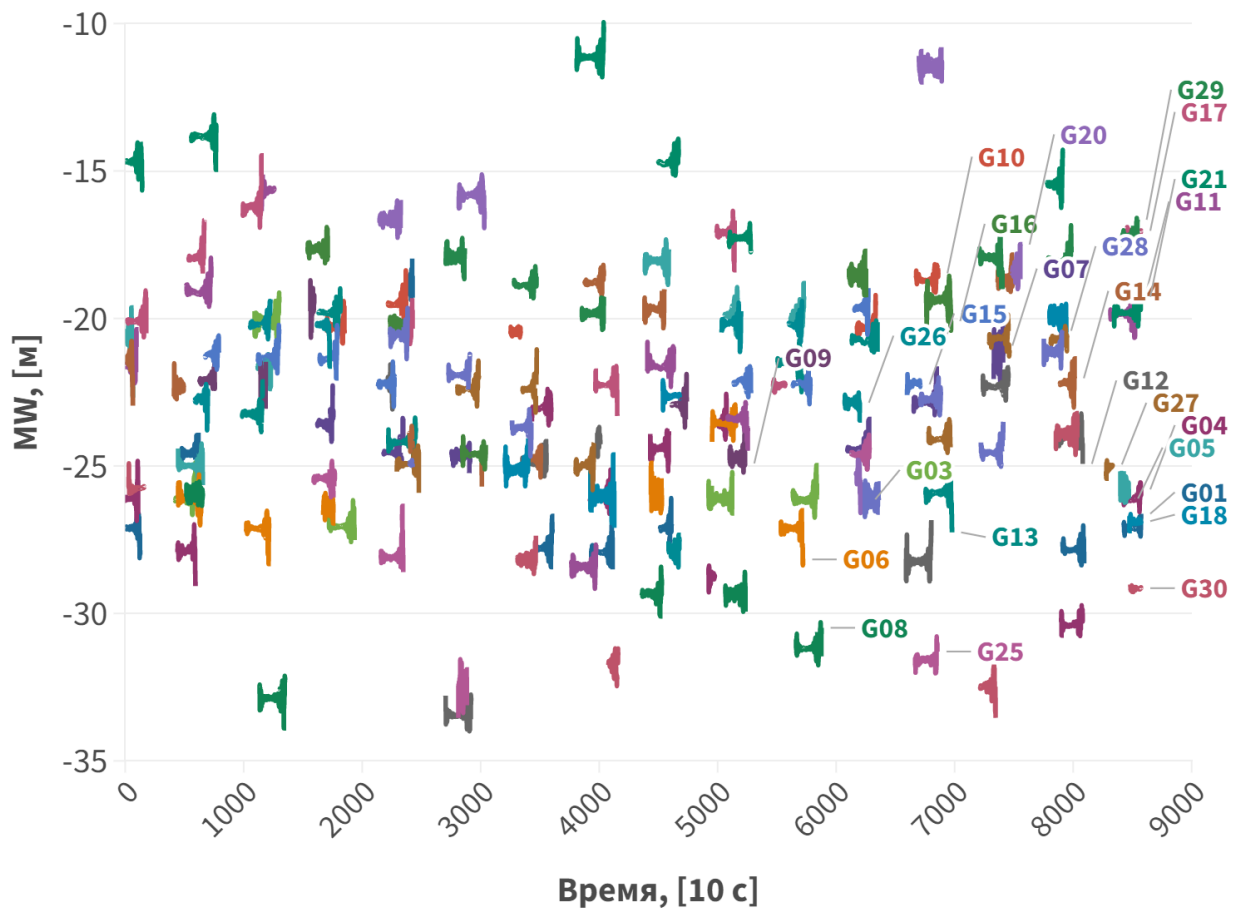


Рисунок 3.20 — Комбинация MW реальных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.

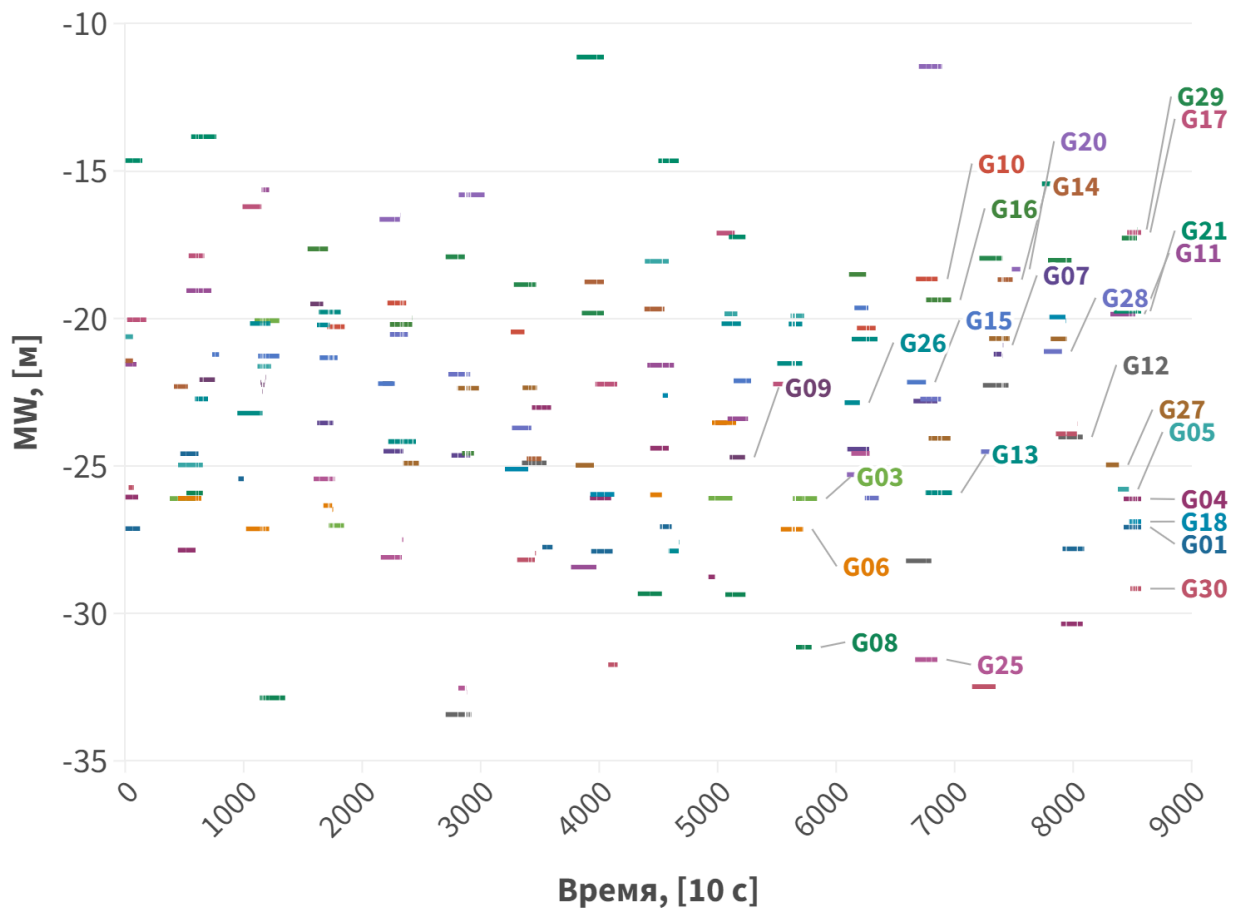


Рисунок 3.21 — Комбинация MW реальных сглаженных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.

Комбинация PGF, свободная от геометрии системы и хранящая информацию только о неоднозначностях и ионосфере, также играет важную роль при фиксации целочисленных неоднозначностей. На рис. 3.22 изображены графики комбинаций PGF реальных и модельных измерений. Модельные измерения взяты из эксперимента, описанного в предыдущем разделе с шумом фазовых измерений 5 мм. Они содержат влияние ионосферы и обозначены на графике серым цветом. Реальные измерения обозначены цветными линиями в зависимости от номера НС. На данном графике хорошо видно отличие реальных измерений от синтетических из-за наличия у реальных целочисленных неоднозначностей, которые представлены разными величинами для каждого НС.

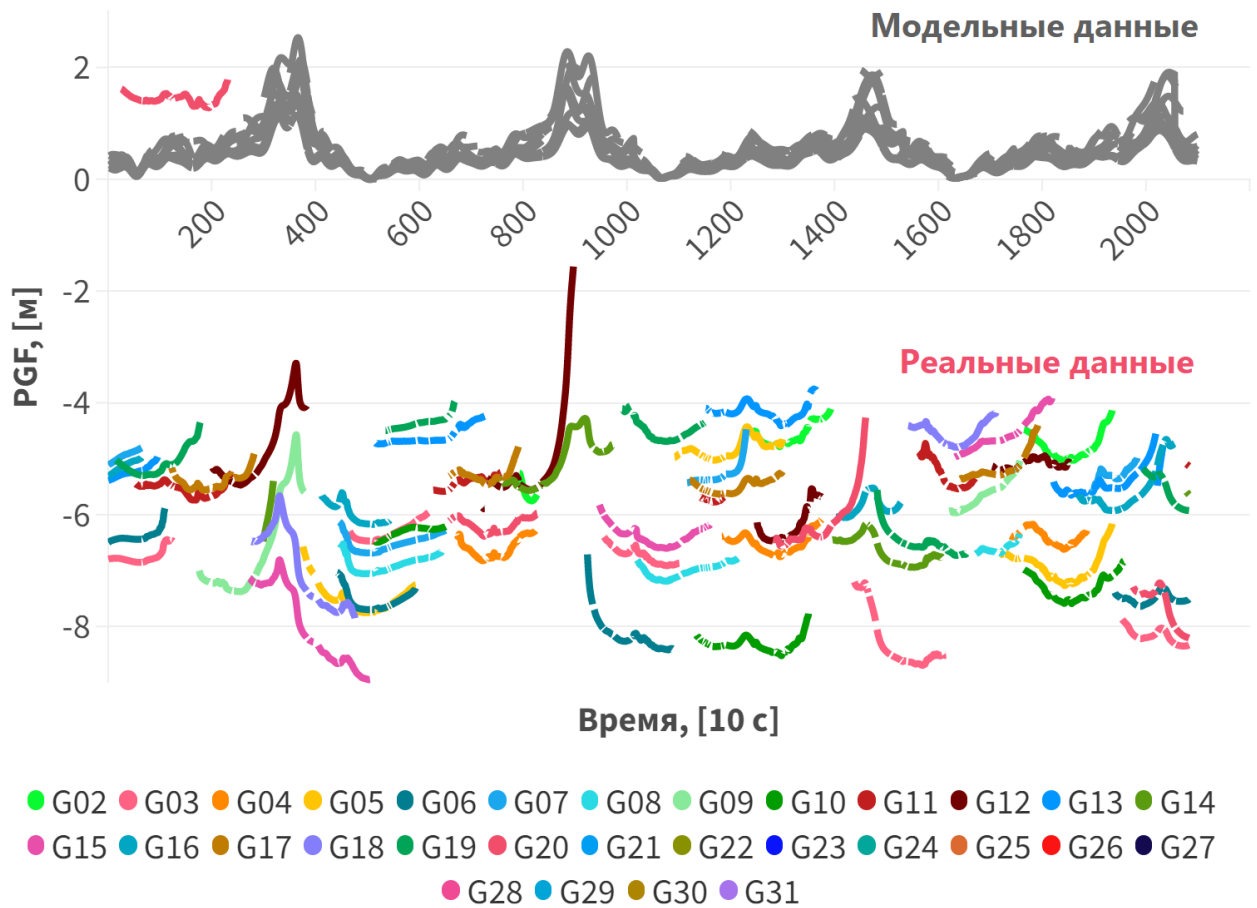


Рисунок 3.22 — Комбинация PGF реальных и модельных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.

3.3.2 Полученные результаты

Для высокоточного позиционирования необходимо использовать фазовые ГНСС измерения. Сложность их использования состоит в неизвестном целом числе пропущенных циклов до привязки сигнала к приемнику. Для устранения влияния ионосферы используют безионосферную комбинацию измерений. Поэтому ключевым измерением, по которому ведется высокоточное позиционирование, является комбинация PIF. На рис. 3.24 изображен результат уточнения орбиты спутника GRACE A с помощью безионосферной комбинации фазовых измерений. Целочисленные неоднозначности оцениваются как плавающие числа с помощью ОФК. Средняя невязка трехмерного положения между истинной орбитой и оцененной составляет **72 мм**. А рис. 3.23 отображает статистиче-

ские данные этого эксперимента. Можно видеть, что на практике количество спутников оказывается меньше, чем их есть на самом деле (исходя из модельных измерений). Это связано с тем, что в реальном эксперименте некоторые спутники находились на профилактике, либо сигнал от них обладал слишком большим шумом и был отброшен на этапе формирования данных уровня 1В. Помимо этого спутники также фильтровались в программном обеспечении LOIS: был установлен минимальный зенитный угол – 85° , и минимальное отношение сигнал/шум – 10. В связи с этим коэффициент PDOP также оказывается немного хуже, чем в синтетических данных, однако его значение все еще позволяет использовать наблюдения для высокоточной навигации. Значение средней автоковариации ошибок положения в начале графика значительно различается для комбинаций PIF и CIF. Это связано с тем, что в комбинации PIF присутствует неизвестный член неоднозначностей, который программа постепенно уточняет со временем.

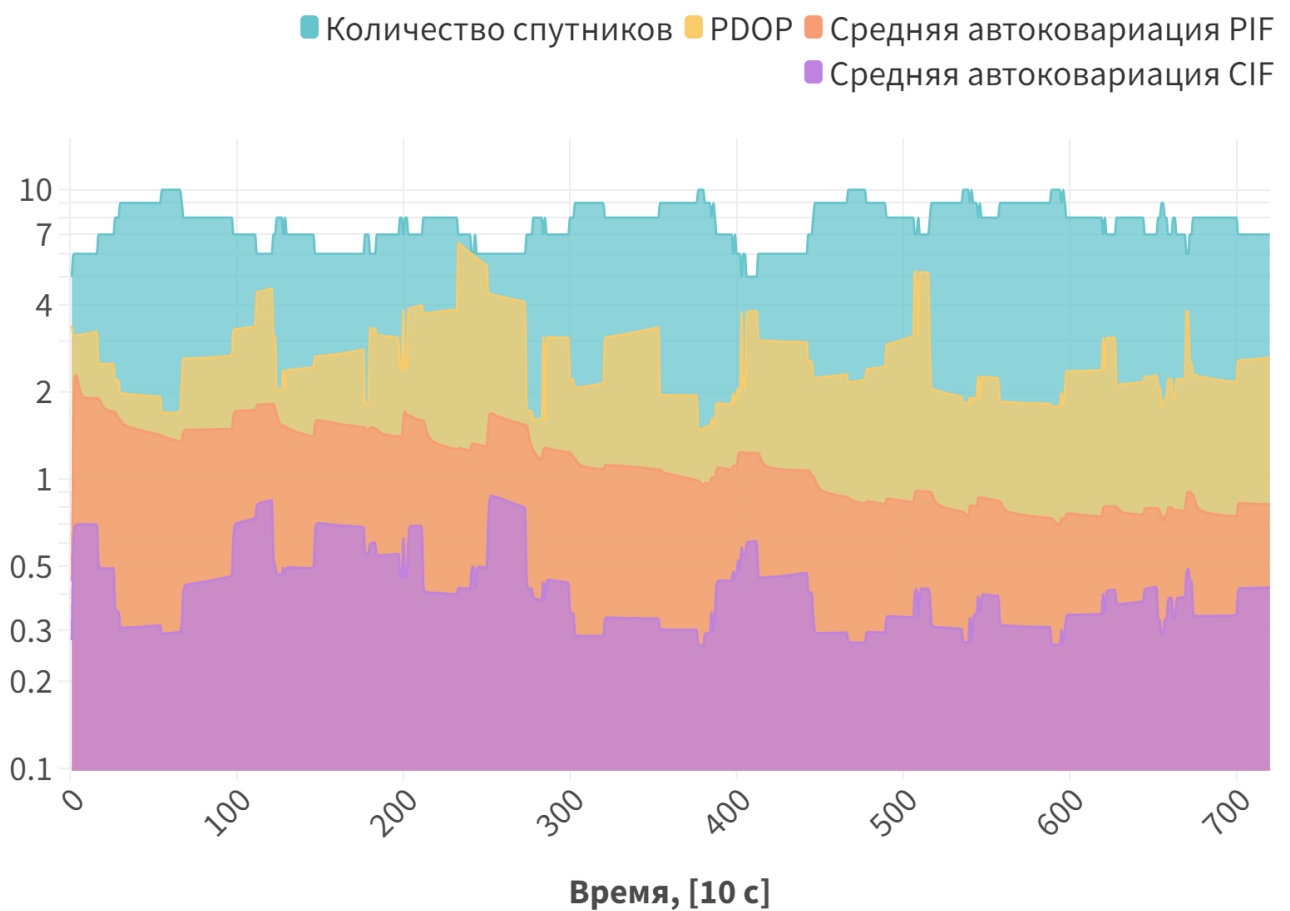


Рисунок 3.23 — Системные статистические параметры эксперимента определения орбиты GRACE A по реальным измерениям.

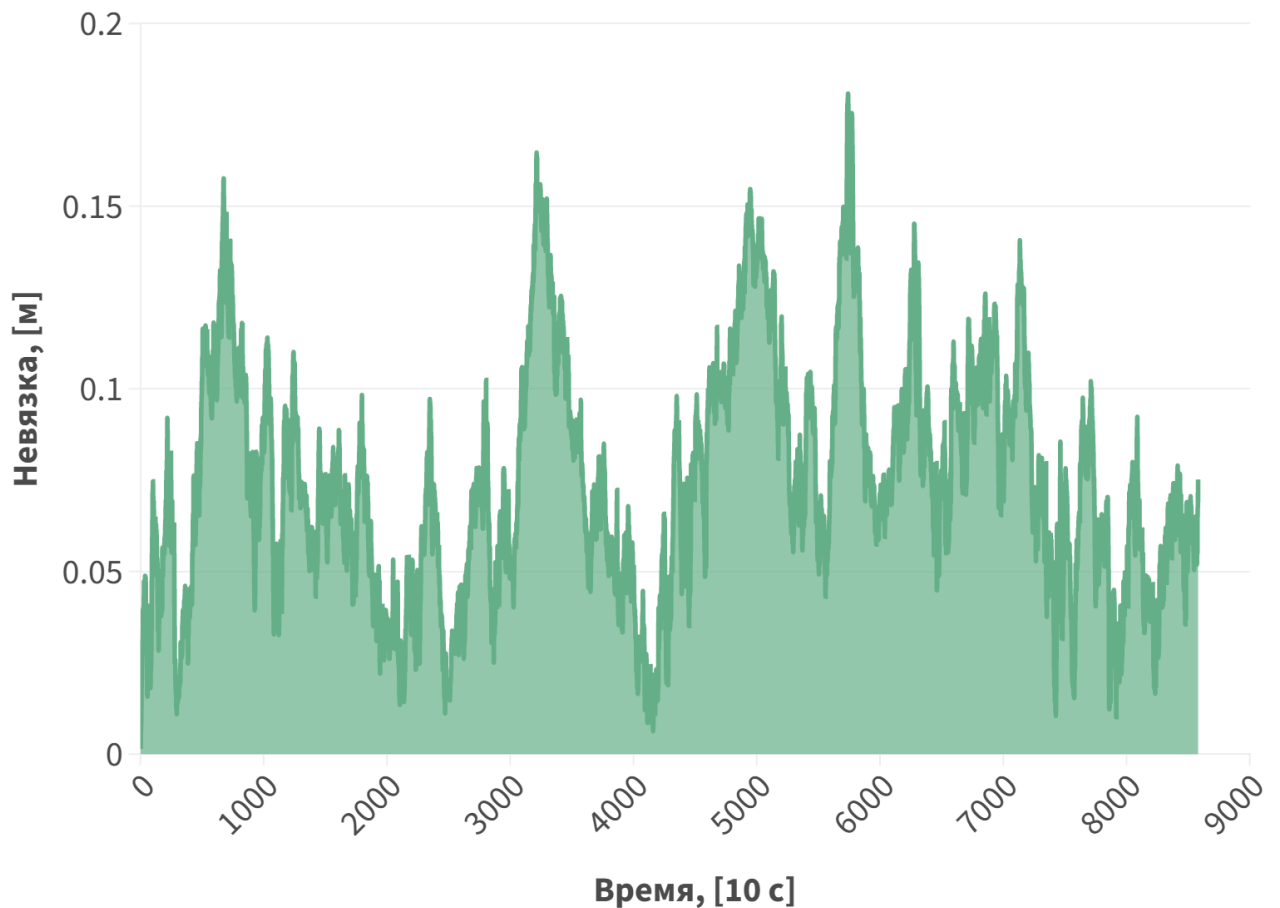


Рисунок 3.24 — Невязка трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям.

Крайне важно следить за устойчивостью решения, поскольку малые возмущения в начальной приближенном векторе состояния могут серьезно сказаться на качестве восстановления орбиты. Устойчивость сходимости решения была проверена на всех этапах разработки алгоритма. На этапе работы с оценкой неоднозначностей данная процедура являлась особенно важной, поскольку большое начальное отклонение в геометрическом смысле вектора состояния могло быть ложно воспринято алгоритмом как неоднозначность фазового измерения. На рис. 3.25 показаны результаты экспериментов с различными начальными возмущениями вектора состояния. Видно, что чем больше ошибка начального вектора, тем дольше времени требуется алгоритму, чтобы прийти к лучшему результату.

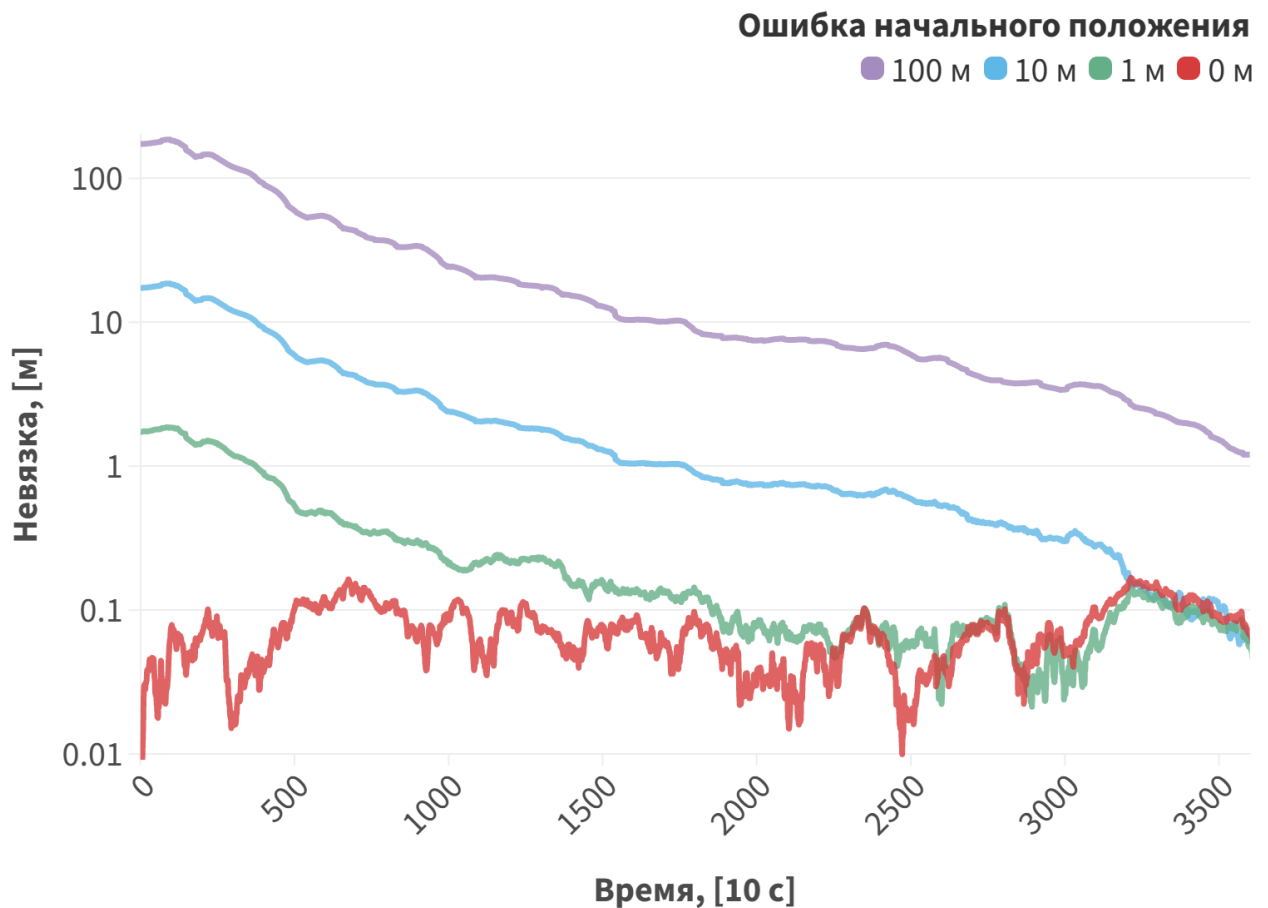


Рисунок 3.25 — Невязка трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям с различной ошибкой начального вектора состояния.

Наиболее точные результаты с фиксацией фазовых неоднозначностей удалось получить в режиме двойных разностей. На рис. 3.26 приведено сравнение количества доступных спутников для режима нулевых и двойных разностей. Поскольку база дифференциального режима составляет примерно 250 км, то не все спутники могут одновременно наблюдаться обоими приемниками. К тому же количество измерений в двойных разностях уменьшается на единицу. Несмотря на это, режим двойных разностей позволяет снизить влияние различных эффектов модели наблюдений. На рис. 3.27 показан результат определения орбиты в режиме двойных разностей с помощью кодовой и фазовой безионосферной комбинации измерений. Кодовые измерения при этом проходили процедуру сглаживания, а в фазовых измерениях осуществляется оценка члена B с помощью фильтра Калмана. Более подробно результат оценки невязок орбиты на фазовых измерениях можно увидеть на рис. 3.28. В дополнение на нем приведено сравнение с результатом режима нулевых разностей. Средняя

невязка трехмерного положения между истинной орбитой и оцененной в данном случае составляет **54 мм**. Существенное отличие режимов нулевых и двойных разностей можно также видеть на рис. 3.29, где изображена невязка по радиальной компоненте положения спутника GRACE A. Участки данных графиков, где невязка двойных разностей оказывается сопоставима с невязкой нулевых разностей, возникают из-за нескольких факторов. Во-первых, в ходе проведения экспериментов в реальными измерениями было обнаружено, что файлы ориентации КА имеют пропуски значений кватернионов. Всего таких пропусков насчитывается порядка 4-5 за сутки. При отсутствии информации об ориентации в ходе эксперимента программа брала ближайшее доступное значение кватерниона. Во-вторых, в режиме двойных разностей минимальный уровень порога отношения сигнал/шум был понижен, а максимальное значение зенитного угла составляло 90° . Это было сделано для того, чтобы увеличить количество наблюдений. В-третьих, даже с учетом такого значения максимально допустимого зенитного угла на суточном интервале количество измерений на 2-3 эпохах не превышало трех. В этом случае программа просто игнорировала данную эпоху и продолжала численное интегрирование орбиты до следующей. Несмотря на высокоточную модель сил, это негативно сказывалось на результате определения орбиты, поскольку вносились дополнительные шумы при оценке параметра B целочисленных неоднозначностей.

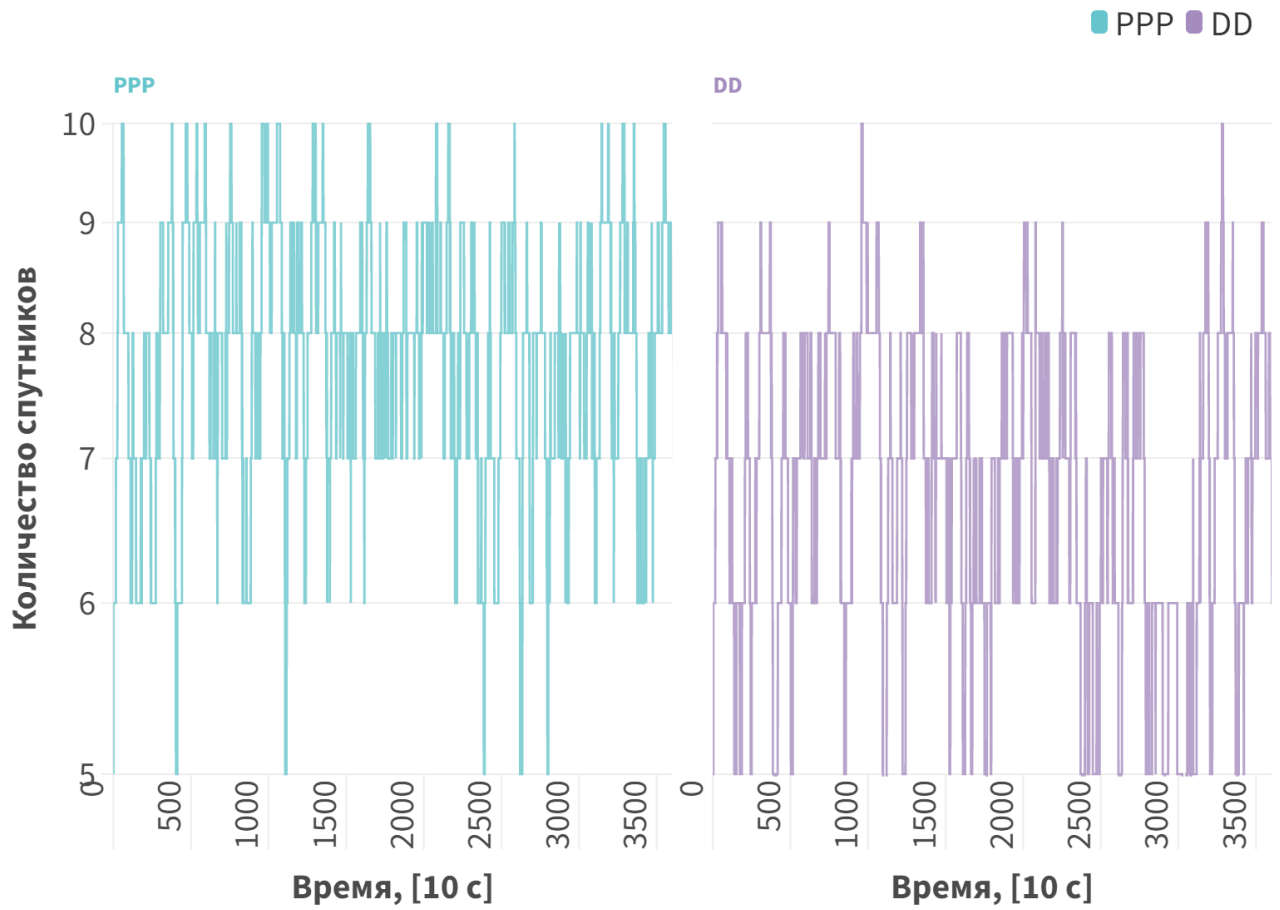


Рисунок 3.26 — Количество спутников в реальных измерениях для режима нулевых и двойных разностей.

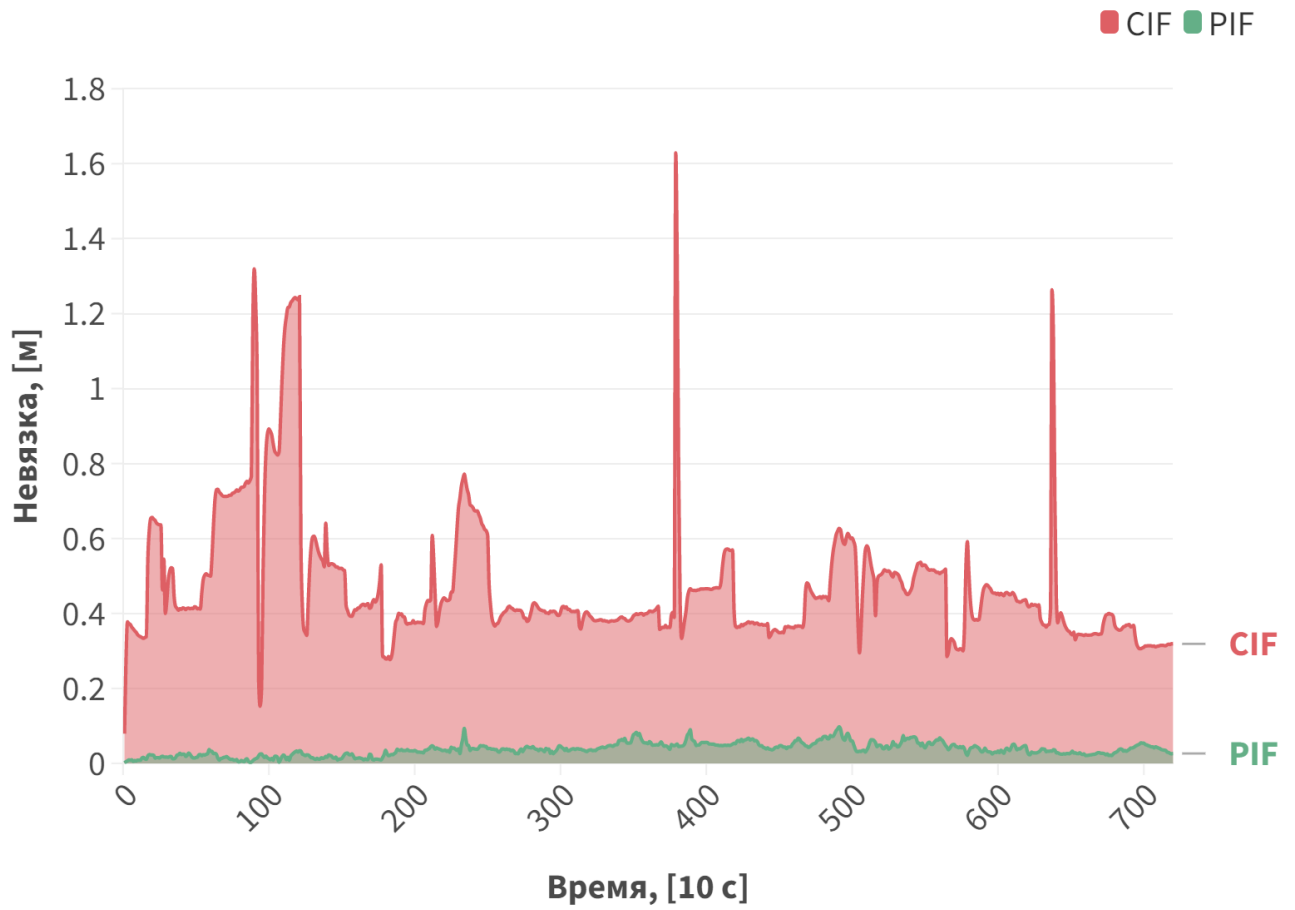


Рисунок 3.27 — Невязка трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям. Кодовая и фазовая безионосферные комбинации в режиме двойных разностей.

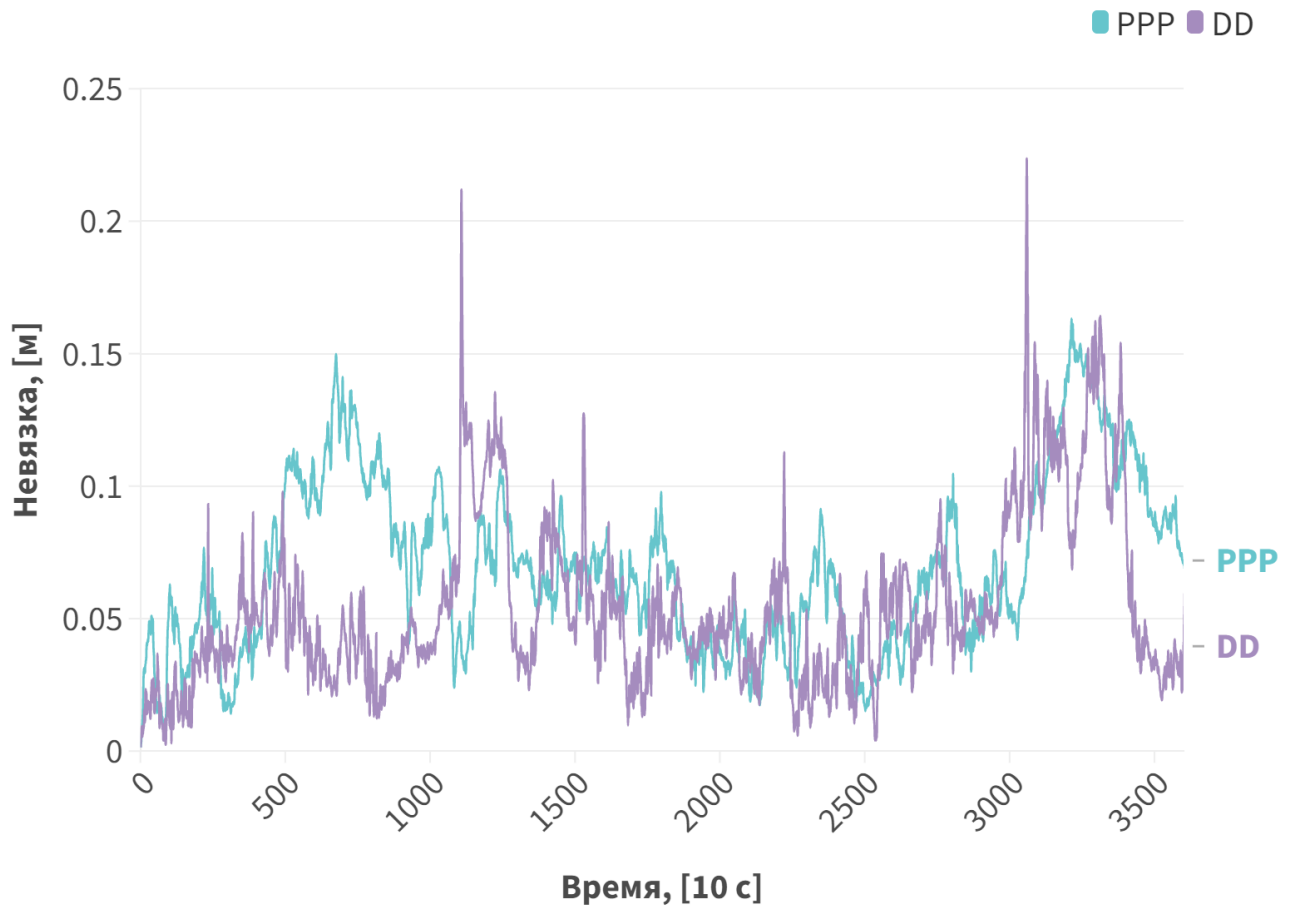


Рисунок 3.28 — Невязка трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям. Фазовая безионосферная комбинация в режиме нулевых и двойных разностей.

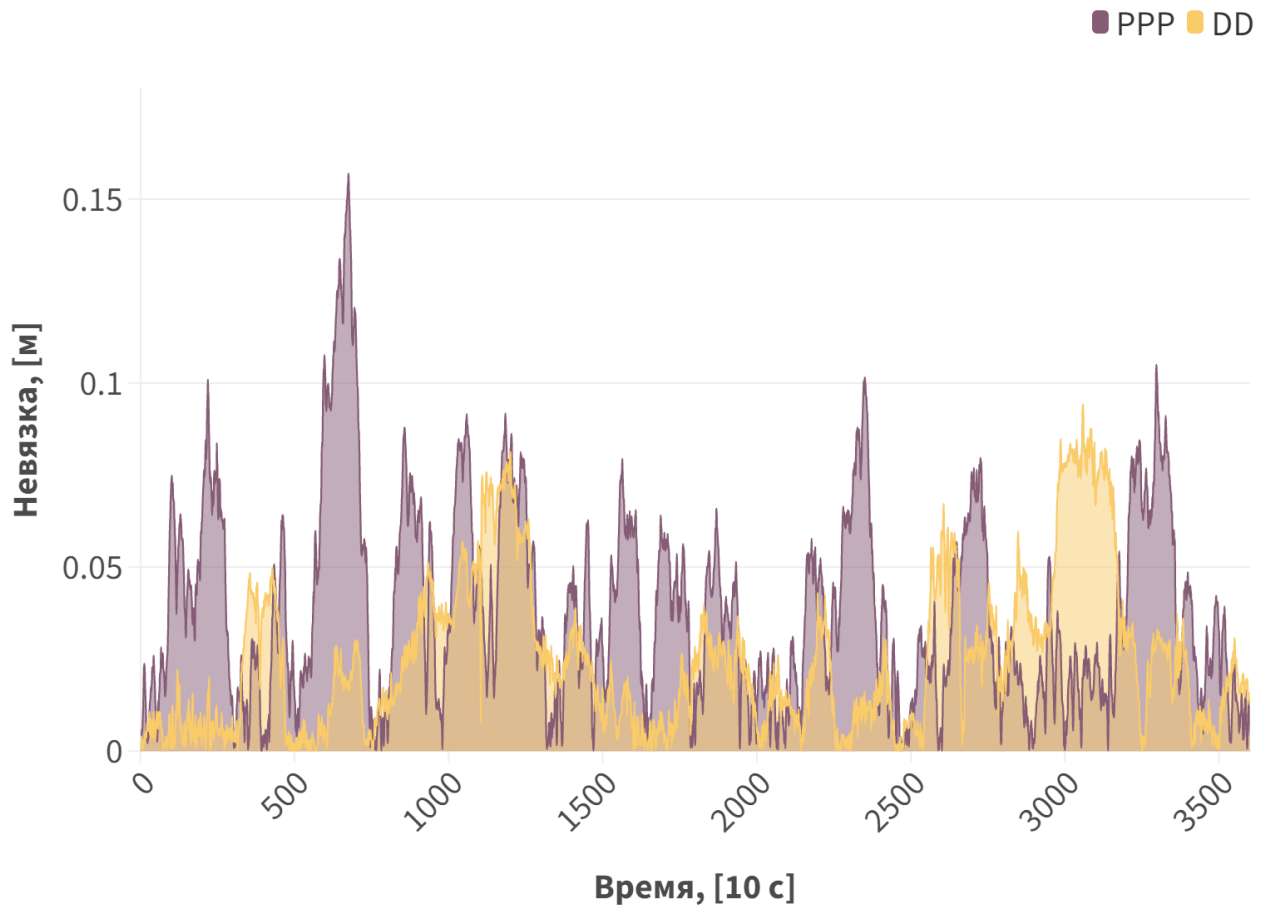


Рисунок 3.29 — Невязка радиальной компоненты трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям. Фазовая безионосферная комбинация в режиме нулевых и двойных разностей.

В заключении результатов приведен график на рис. 3.30, показывающий результат работы разработанного метода фиксации целочисленных неоднозначностей. Его подробное описание было сделано в разделе 3.1.6. Из графика видно, что фиксация осуществлялась не для всех эпох. В районе 1000-й и 3000-й итерации существуют выше обозначенные проблемы с пропусками данных и недостаточным числом спутников, поэтому алгоритму фиксации не удалось обнаружить правильного кандидата на фиксацию на этих участках. Итоговая средняя невязка трехмерного положения после фиксации неоднозначностей уменьшилась с 54 мм до **23 мм**. Было зафиксировано 87% неоднозначностей (по эпохам за сутки). В режиме нулевых разностей существенного улучшения точности определения орбиты с помощью данного метода добиться не удалось. Возможно это связано с тем, что в режиме двойных разностей уменьшается влияние неучтенных эффектов модели наблюдений.



Рисунок 3.30 — Пример работы метода фиксации целочисленных неоднозначностей двухразностных фазовых измерений. Невязка трехмерного положения спутника GRACE A.

3.4 Определение других типов орбит с помощью ГНСС

Помимо низкоорбитальных космических аппаратов, в высокоточном определении орбиты нуждаются также и другие научные космические проекты. В данном разделе приводятся результаты по возможностям использования ГНСС для уточнения орбит космических радиотелескопов.

Космическая миссия «Радиоастрон» [86] — это уникальный проект РСДБ-наблюдений (радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой), реализованный с помощью КА «Спектр-Р». Данный КА был запущен в 2011 г. и являлся радиотелескопом и элементом наземно-космического интерферометра. Его апогей составлял 300 тыс. км. С запуском данного телескопа возникла необходимость

в определении положения космического аппарата на высокоэллиптических орбитах (ВЭО) с высокой точностью. Для корреляционной обработки научной информации отличие расчетной орбиты от реальной по положению и скорости не должно было превышать 600 м и 2 см/с соответственно. Эти критерии берутся из условий для точности вычисления задержки в программном корреляторе научных данных миссии «Радиоастрон».

Опыт проекта показал, что далеко не во всех радиоинтерферометрических сеансах наблюдений данного проекта была найдена корреляция [158]. В первую очередь это может быть связано с точностью определения орбиты КА. В 2021 г. автором данной работы была проведена повторная процедура определения орбиты КА «Спектр-Р» с помощью радиодальномерных и доплеровских данных, полученных с наземных станций «Уссурийск» и «Медвежья Озера». Был выбран временной интервал измерений на котором имелась уже восстановленная орбита. Эта орбита была получена в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша (ИПМ) и принималась в данной работе за опорную траекторию космического аппарата. Результаты восстановления параметров орбиты сравнивались с этой орбитой.

Орбита восстанавливалась с использованием однопутевых измерений наклонной дальности и лучевой скорости. Согласно полученным результатам, описанным в работе [159], если не учитывать аномальные измерения, уточненный радиус-вектор КА отличался от опорного примерно на 45 м. А лучевая скорость отличалась от своего значения на опорной орбите на 15 мм/с. В то время как в файлах наблюдений ошибка наклонной дальности была указана как 50 м, а ошибка лучевой скорости – как 1 см/с. Однако истинная орбита КА «Спектр-Р» остается неизвестной с точностью 50-100 м по положению. Такая точность обеспечивалась далеко не во всех сеансах наблюдений и, как правило, требовала учета всех доступных типов наблюдений: радиодальномерных, доплеровских, оптических, лазерных [160].

Следующим этапом развития концепции РСДБ в космосе должны стать проекты «Миллиметрон» [88; 89] и проект интерферометра типа *космос-космос* [90–92]. В проекте «Миллиметрон» для уточнения орбиты требуется увеличивать число наземных станций и улучшать качество радиодальномерных и оптических наблюдений [159]. Для определения параметров движения КА «Спектр-М» проекта «Миллиметрон» на гало-орбите вблизи точки Лагранжа

L2 системы Солнце-Земля планируется проводить траекторные измерения в X диапазоне с максимальной погрешностью 0.5 мм/с по скорости и 20 м по дальности. Такая точность определения параметров орбиты связана с расстоянием до космического аппарата с необходимыми требованиями для поиска корреляции. В настоящий момент проект «Миллиметрон» находится на стадии разработки и его номинальная орбита подвергается корректировке. В том числе изучается возможность схода с гало-орбиты на ВЭО вокруг Земли. В этом случае на некоторых участках орбиты возможно будет использование ГНСС-наблюдений для ее уточнения. В проекте радиointерферометра типа *космос-космос* предполагается использовать группировку радиотелескопов на низких и средних околоземных орбитах (СОО). Средняя орбита занимает диапазон высот от 2000 км до высоты геосинхронной орбиты (ГСО) в 35 000 км. В случае использования таких орбит также появляется возможность использования ГНСС-наблюдений для повышения качества восстановления орбиты и, соответственно, вероятности нахождения корреляции в интерферометре. Для обоих этих будущих проектов предъявляются высокие требования по точности определения орбиты, которые получаются из научных характеристик радиотелескопов. В связи с этим в данной работе была проведена оценка возможности проведения ГНСС-наблюдений на СОО и ВЭО.

Исследования по использованию ГНСС для определения орбит с высотой выше 20 000 км начались сравнительно недавно [93–96]. На таких орбитах приемник получает сигналы в основном от спутников, находящихся по другую сторону от Земли. Такие наблюдения условно назовем *обратными*. В этом случае сигнал становится слабее, количество доступных навигационных спутников уменьшается, а их геометрия становится *слабой*. Кроме того, малым становится количество НС, сигнал от которых приходит в главном лепестке диаграммы направленности антенны НС. Для того чтобы увеличить количество видимых спутников, используются боковые лепестки диаграммы направленности. Безусловно в этом случае при определении орбиты необходимо различать НС главного лепестка и первого бокового, поскольку их сигналы отличаются уровнем шума. На рис. 3.31 показана примерная схема работы ГНСС для определения СОО и ВЭО. Антенны всех спутников ГНСС направлены строго на центр Земли. Предельный угол главного лепестка сигнала GPS составляет 21.3° от надира. При этом Земля имеет угловой диаметр в 13.9° с радиуса орбиты GPS.

Остальная часть сигнала главного лепестка уходит за Землю, проходя на высоте 3000 км над ее поверхностью. Уровень сигнала первого бокового лепестка в два раза меньше, чем в главном, а сам лепесток условно принято ограничивать 45° от надира. В данной работе анализ проводился с учетом использования главного и первого бокового лепестка. При этом в некоторых зарубежных работах стараются включить в обработку все возможные видимые спутники, учитывая все боковые лепестки вплоть до 90° [96]. В этом случае количество спутников увеличивается примерно в три раза, однако качество таких наблюдений значительно снижается. На рис. 3.32 показан график зависимости эффективно изотропно излучаемой мощности (ЭИИМ) НС в зависимости от угла отклонения от надира. Из него можно судить о качестве наблюдений, получаемых приемником под конкретным углом. В первом боковом лепестке мощность сигнала значительно уменьшается, однако количество видимых спутников при этом увеличивается в несколько раз. Точность определения орбиты при этом уменьшается, по сравнению с определением орбиты НКА [94; 96].

$$C/N_0[dBHz] = EIRP + G_r + L_s - 10 \lg kT, \quad (3.6)$$

где $T = T_r + T_t$ – шумовая температуры системы, T_r – шумовая температура антенны приемника, T_t – шумовая температура антенны НС.

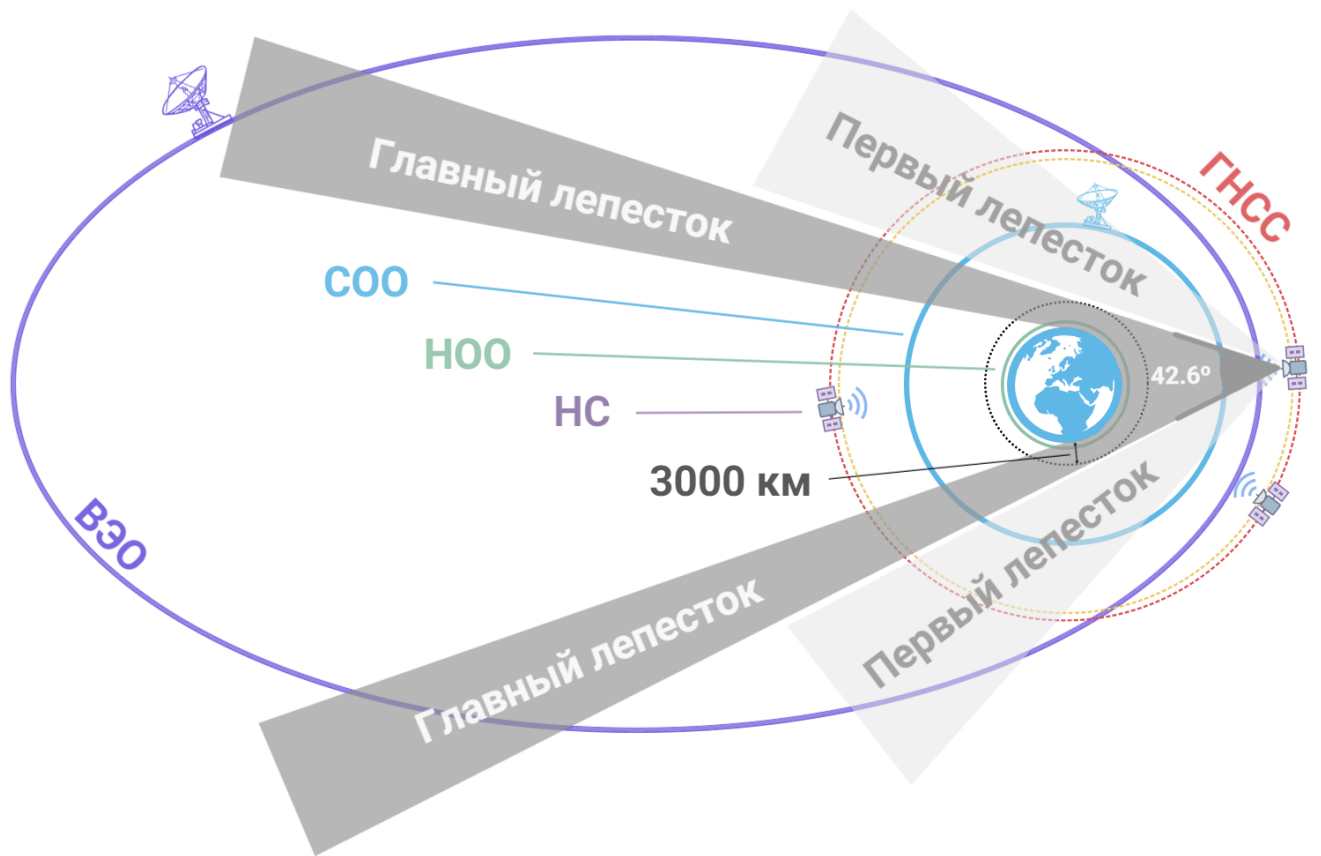


Рисунок 3.31 — Схема обратных наблюдений ГНСС.

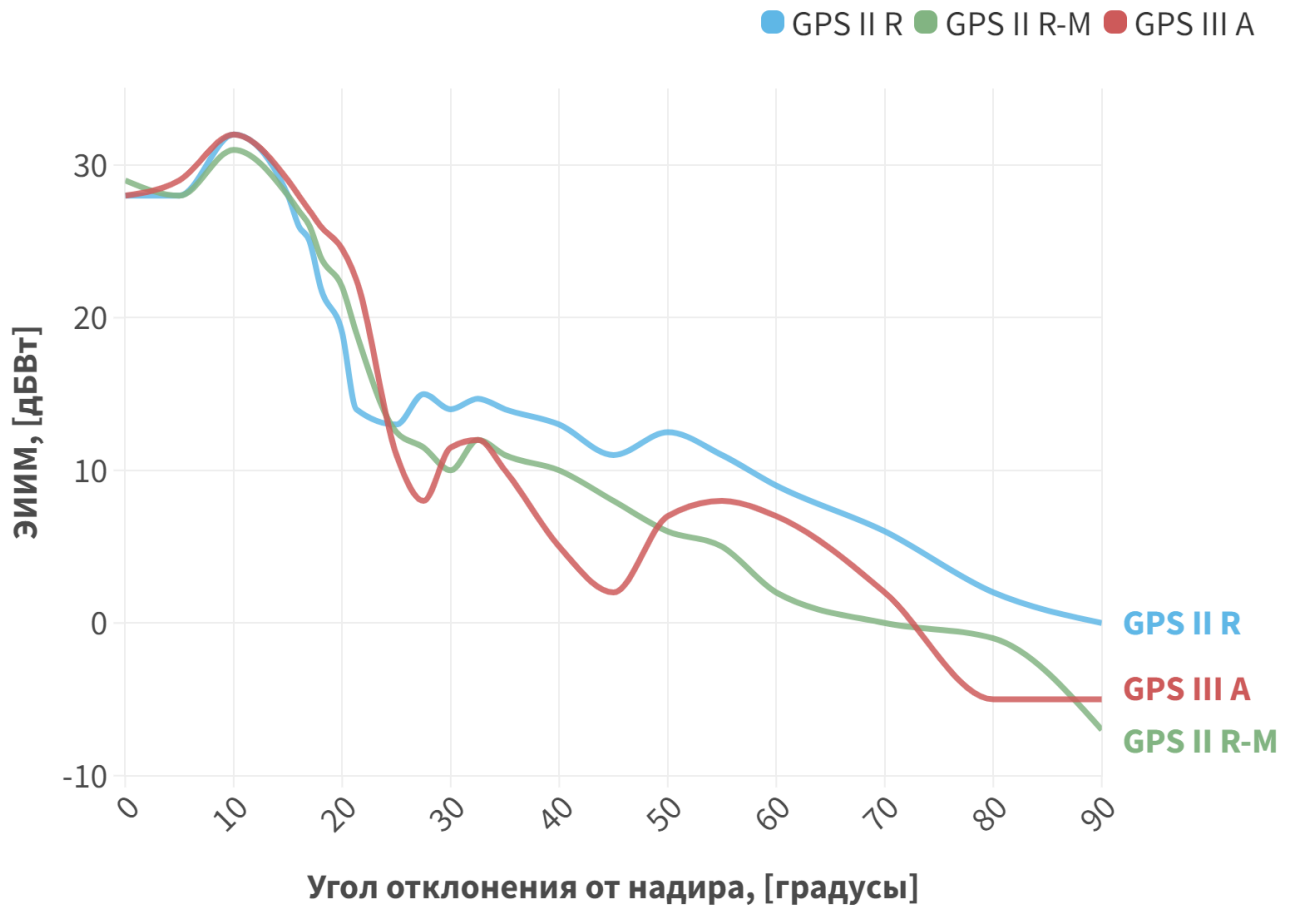


Рисунок 3.32 — Зависимость эффективно изотропно излучаемой мощности различных поколений спутников GPS от угла отклонения от надира.

В данной работе был проведен анализ видимости НС для высокоэллиптической орбиты по типу орбиты КА «Спектр-Р». Такая высокоэллиптическая орбита имеет период равный 8 сут. 15 ч. На рис. 3.33 изображен график видимости спутников ГНСС на такой орбите на временном интервале, примерно соответствующем периоду орбиты. Для оценки максимальных возможностей ГНСС были взяты все 4, имеющиеся на сегодня, глобальные навигационные системы: GPS, ГЛОНАСС, Galileo и BeiDou. Оказалось, что на такой высокой орбите КА может принимать сигналы только с **10-20 спутников** из приблизительно 110 имеющихся в четырех системах ГНСС. Стоит учесть, что здесь учитывались только спутники, попадающие в главный и первый боковой лепесток, т.е. для которых угол между Землей и КА меньше 45° . На графике также можно увидеть пик в районе 1400-й итерации, который соответствует прохождению перицентра орбиты. В этот момент количество видимых спутников значительно возрастает, т.к. КА оказывается в пределах высоты орбит ГНСС. При этом на рис. 3.34

можно увидеть диаграмму распределения видимых спутников по лепесткам и навигационным системам, из которой следует, что 83% спутников наблюдается в первом боковом лепестке. Значение PDOP в такой конфигурации максимально достигает значения 150 в апогее орбиты. В то же время, из-за достаточно малого перицентрического расстояния данной орбиты существует отрезок траектории, на котором достигается приемлемое значение коэффициента PDOP. Значение **PDOP < 10** (высокоточное позиционирование) достигается на протяжении **0.9 сут**, а **PDOP < 20** (допустимо грубое позиционирование) – на протяжении **1.5 сут**. Это говорит о том, что определение орбиты с таким высоким апогеем, как у КА «Спектр-Р» (300 000 км) с помощью ГНСС возможно только тогда, когда он подлетает достаточно близко к Земле. Величины 0.9 сут и 1.5 сут невелики по сравнению с периодом орбиты, однако из-за высокой скорости КА в момент прохождения перицентра орбиты они покрывают весомую ее часть. В процентном соотношении к общему расстоянию, пройденному КА за один период, они составляют **33%** и **44%** соответственно. Здесь проявляется преимущество использования ГНСС, поскольку определение орбиты стандартными наземными средствами на этом *высокоскоростном* участке дает относительно небольшую точность по сравнению с более *медленными* участками орбиты.

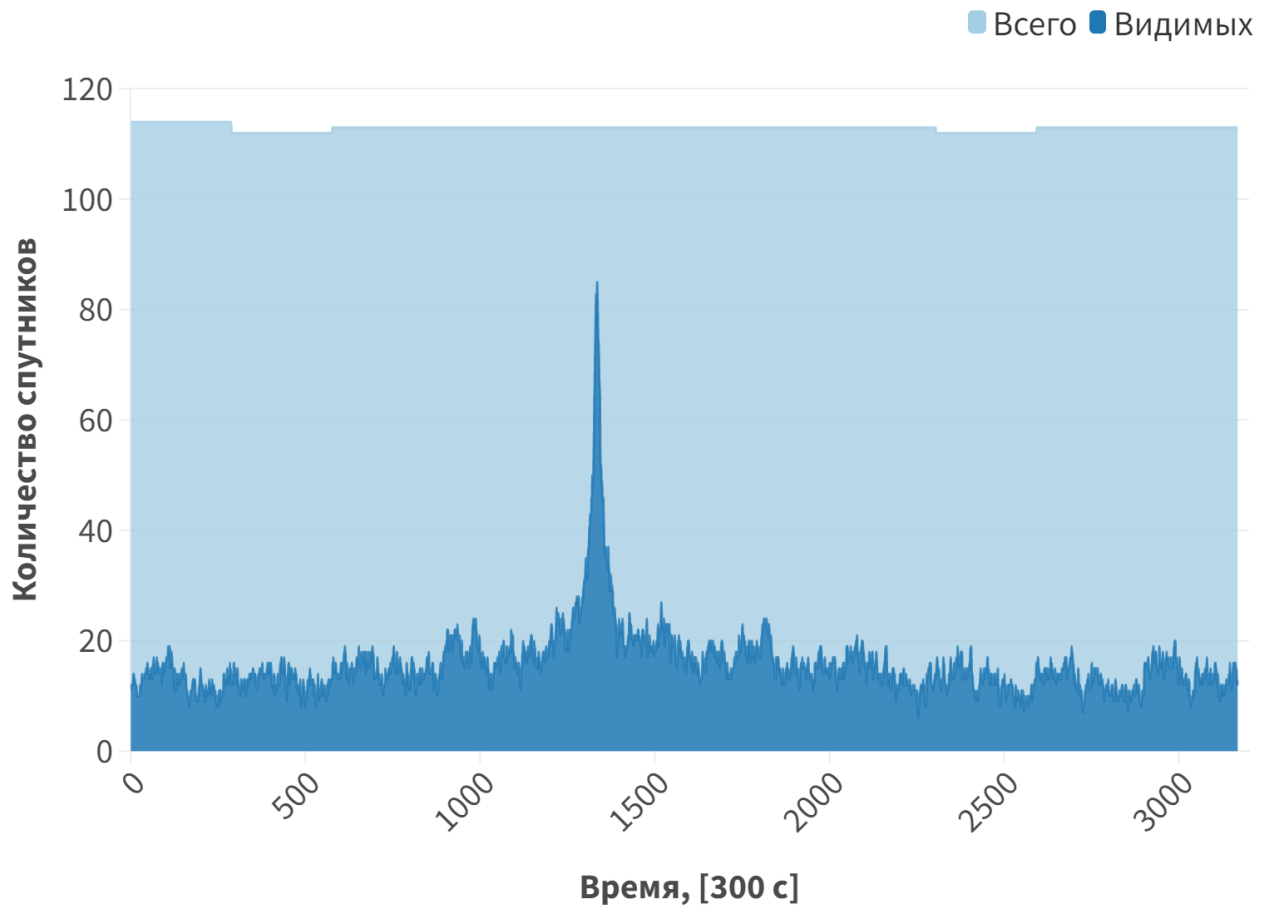


Рисунок 3.33 — Оценка видимости НС систем GPS/ГЛОНАСС/Galileo/BeiDou с высокоэллиптической орбиты в главном и первом боковом лепестке диаграммы направленности НС.

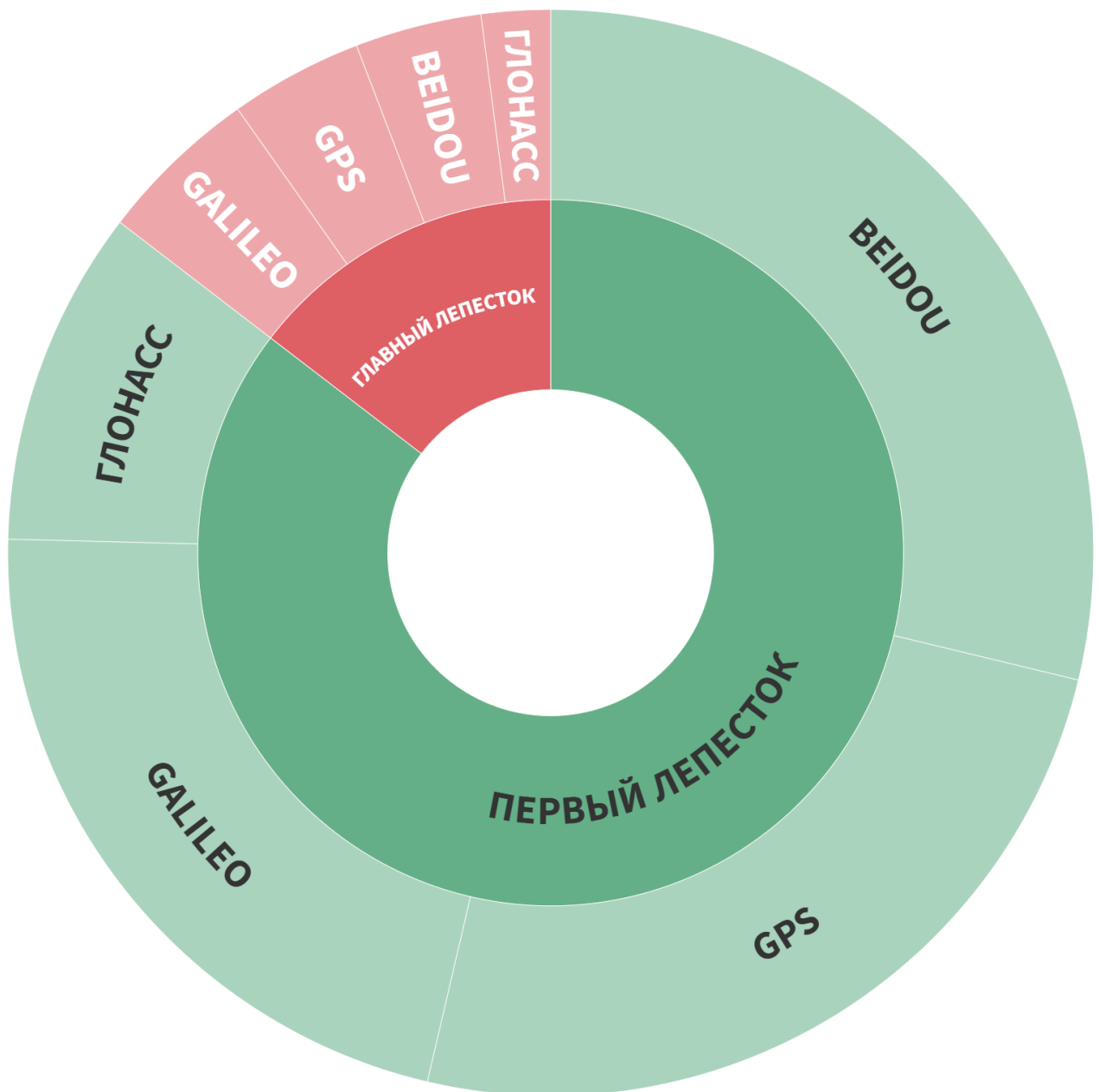


Рисунок 3.34 — Распределение количества видимых спутников систем GPS/ГЛОНАСС/Galileo/BeiDou для ВЭО по главному и первому боковому лепестку диаграммы направленности НС.

В проекте радиоинтерферометра типа *космос-космос*, разрабатываемом Астрокосмическим центром Физического института им. П.Н. Лебедева (АКЦ ФИАН), предлагается использовать несколько аппаратов на круговых низких и средних околоземных орбитах. Поскольку по определению НОО уже были приведены результаты в разделе 3.3.1, здесь приводится расчет видимости навигационных спутников для средней орбиты, высотой 16 000 км. В данном случае такая орбита не выходит за пределы высоты ГНСС, а ее наблюдаемость

значительно повышается. Поэтому в качестве навигационных систем в этом эксперименте для наглядности были взяты только системы GPS и ГЛОНАСС. Рис. 3.35 и 3.36 отображают расчеты по количеству видимых НС в зависимости от времени и распределению спутников по лепесткам и системам ГНСС соответственно. Несмотря на то, что данная орбита круговая и ее высота невелика по сравнению с ВЭО, прямые наблюдения ГНСС практически отсутствуют. Все видимые спутники с такой орбиты наблюдаются по ту сторону от Земли, при этом 85% спутников наблюдается в первом боковом лепестке. Значение PDOP на протяжении всей орбиты меняется **от 1 до 2.5**, что говорит о *сильной* геометрии наблюдаемой группировки и, соответственно, о потенциально высокой точности определения орбиты.

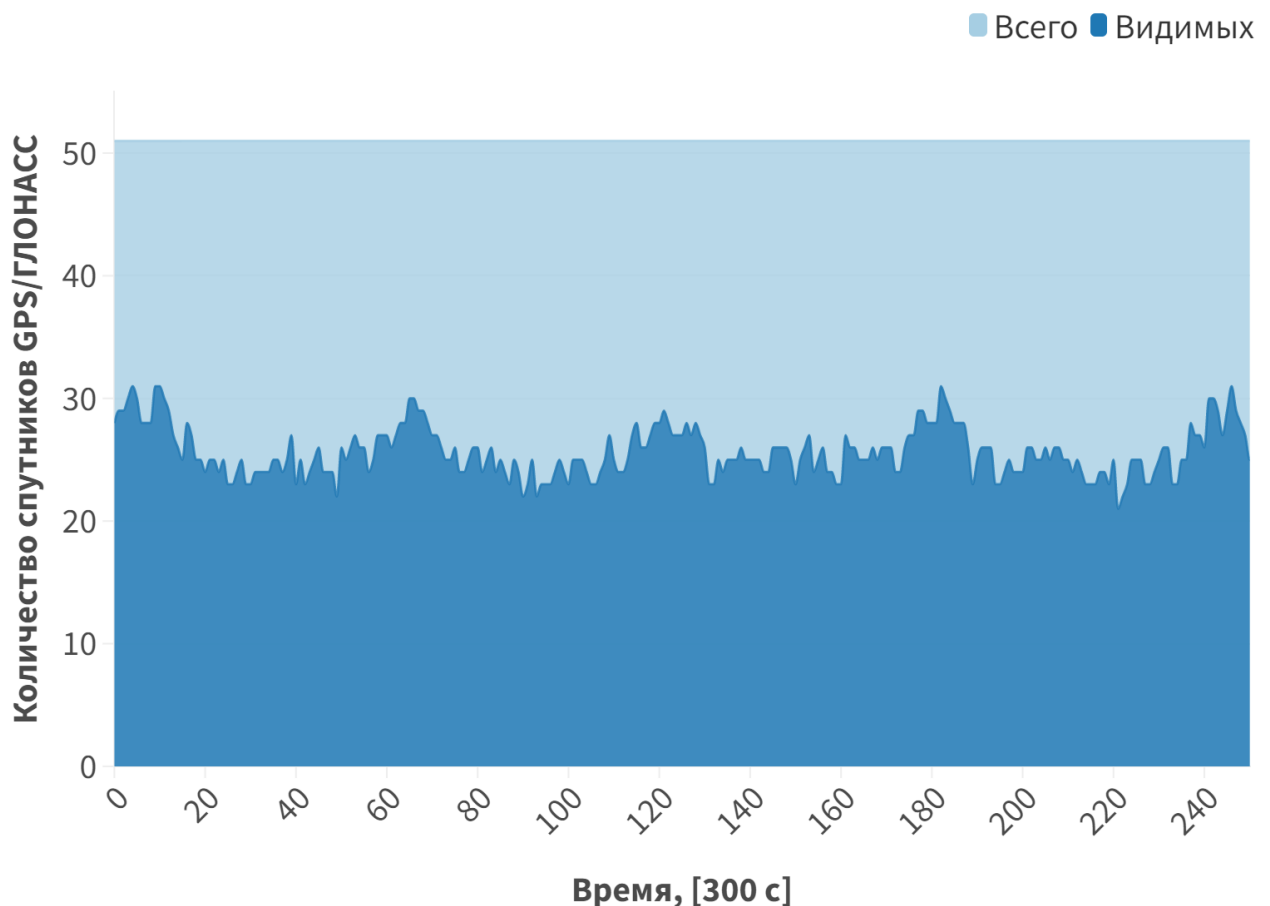


Рисунок 3.35 — Оценка видимости НС систем GPS/ГЛОНАСС со СОО в главном и первом боковом лепестке диаграммы направленности НС.

Временной интервал составляет примерно 2.3 периода орбиты.

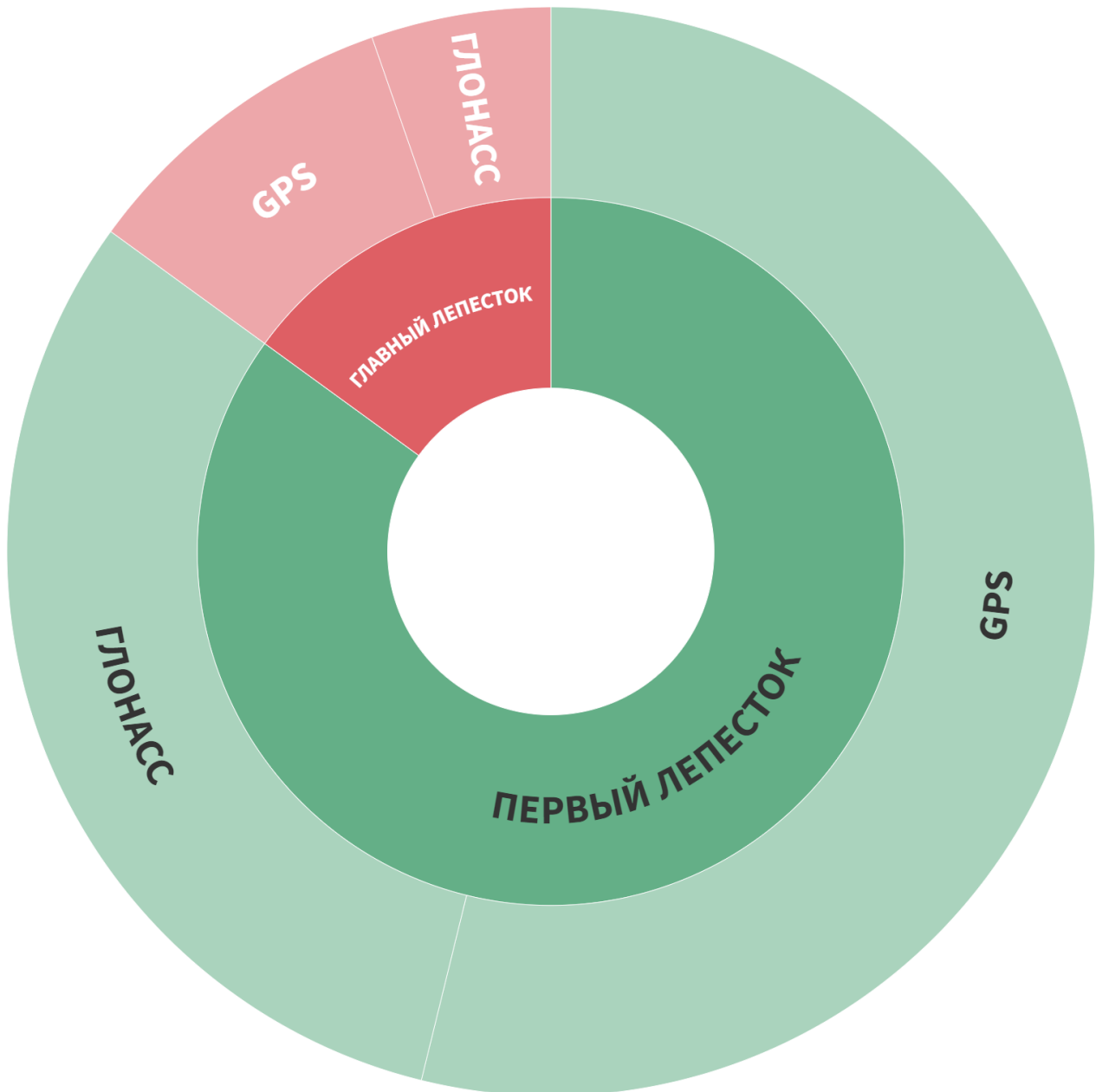


Рисунок 3.36 — Распределение количества видимых спутников систем GPS/ГЛОНАСС для СОО по главному и первому боковому лепестку диаграммы направленности НС.

Глава 4. Уточнение определения ориентации космических аппаратов

В данной главе предлагается рассмотреть уточнение определения ориентации КА с помощью звездных датчиков. Определение ориентации КА прямым образом влияет на точность определение орбиты, поскольку требуется рассчитывать засветку от Солнца, попадания КА в тень Земли, смещения и вариации фазового центра антенны и, в особенности для измерений ГНСС, эффект набега фазы. Усовершенствование систем управления ориентацией также может оказать значительное влияние на результаты космических гравитационных и геодезических экспериментов.

Как было отмечено во введении, на сегодня самым популярным прибором для измерения ориентации КА является звездный датчик. Этот прибор использует фотокамеры для измерения местоположения звезд и их идентификации по звездному каталогу. После снимка звездного неба изображение со звездного датчика обрабатывается вычислительным процессором для получения матрицы перехода из локальной системы координат в инерциальную. Одним из способов достижения высокой точности определения ориентации КА является улучшение алгоритма определения центра звезд. Задача поиска центра звезды не всегда проста в решении, особенно, когда речь идет о субпиксельных координатах звезды. Стандартные методы, вроде метода центра тяжести, могут ошибаться при наличии различных шумов и искажений изображения. Идея использования машинного обучения для идентификации звезд была рассмотрена в некоторых недавних зарубежных работах [161], [162]. В этих работах нейронные сети хранят шаблоны расположения звезд, связанные с одной опорной звездой. Используя алгоритм извлечения некоторых признаков из кадров звездного неба, опорным звездам присваиваются определенные шаблоны, основанные на окружающих их звездах. После этого производится поиск таких шаблонов в каталоге звездного неба для нахождения ближайшего соответствия. Однако эта стратегия не включает процедуру определения центра звезды. В ней считается, что процедура нахождения центра была выполнена заранее с субпиксельной точностью. Влияние определения центра звезды на идентификацию звезд в данном методе остается за рамками исследований. В настоящей работе предлагается новый алгоритм определения центра звезды, основанный

на машинном обучении, который значительно улучшает процедуру нахождения центра изображения звездного кадра.

4.1 Подготовка данных

В данной работе был собран уникальный набор данных (датасет) с изображениями звезд и их субпиксельными центрами. Этот набор данных был выложен в открытый доступ. Он состоит 50000 изображений ярких звезд с их субпиксельными координатами и может быть использован учеными для совершенствования различных методик и алгоритмов, связанных с фотограмметрией, астрометрией и фотометрией. Данные для этого набора получены с космической обсерватории Gaia – миссии последнего поколения среди космических астрометрических миссий.

Данные по изображениям звездного неба были созданы путем получения изображений с наземного телескопа, а именно – из Оптического обзора ночного неба Меллингера [163]. В процессе сбора данных необходимо было собрать как можно больше информации. В результате изображения звезд с трех разных каналов были объединены в RGB-изображение. Таким образом, пользователь датасета сможет выбрать, какой канал изображения использовать, либо использовать цветное изображение. Сами изображения были получены в тангенциальной проекции с полем зрения 2° и размером изображения в 256×256 пикселей путем объединения кадров с разным временем экспозиции для расширения динамического диапазона [163].

На сегодня коммерческие звездные датчики способны обнаруживать звезды до 5^m – 7.5^m видимой звездной величины [110], однако перспективные разработки позволят обнаруживать звезды до 11^m [111]. Изображения в каталоге Меллингера включают звезды до 14^m . Для составления набора данных были отобраны кадры со звездами вплоть до 9^m . Изображение звезд было обрезано путем совмещения координат звезд в звездном каталоге с их координатами на изображении. Обрезка изображения осуществлялась до размера 32×32 центром в найденных координатах (рис. 4.1). При таком размере изображения даже очень яркие звезды получают приемлемого размера и не превышают

пределов кадра. Для получения изображений из обзора неба и последующей обработки кадров использовалась программная библиотека *Astroquery* [164].

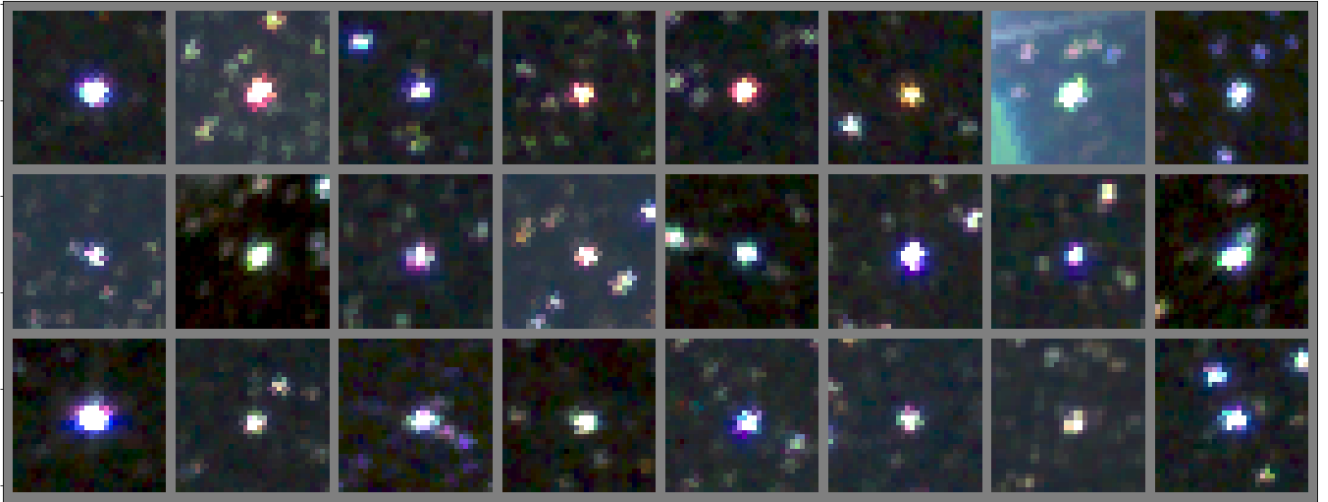


Рисунок 4.1 — Изображения звезд размером 32×32 пикселей.

Для маркировки изображений звезд использовался звездный каталог *Gaia* [165]. *Gaia* – это европейская космическая миссия, которая собирает данные астрометрии, фотометрии и спектроскопии более чем у 1 миллиарда звезд в нашей галактике. Был использован второй релиз данных *Gaia*, *Gaia* DR2, крайний релиз на момент написания данной работы и включающий астрометрию для источников ярче 21^m . *Gaia* предоставляет самые точные астрометрические данные из когда-либо созданных, по крайней мере, в оптической области. В полученных кадрах звездного неба 1 пиксель соответствует 28 000 мс дуги, а ошибки положения звезд в каталоге *Gaia* – 0.1-10 мс дуги, что ничтожно мало. Все это позволило создать набор данных, в котором ошибки в координатах звезд практически исключены.

4.2 Обработка данных с помощью нейронной сети

Существует несколько классических методов получения центра звезды на кадре звездного датчика, о которых говорилось во введении. Более того, постоянно разрабатываются и исследуются перспективные методы для достижения более высокой точности [78; 123; 124]. По сути, они основаны на расчете модели шума изображения, детали которой неизвестны. Кроме того, они требуют на-

стройки ряда различных гиперпараметров и пороговых значений. На практике изменения этих параметров могут описываться нелинейными законами и проявлять флуктуации значений параметров. Поэтому возникает идея использовать искусственные нейронные сети (ИНС) – метод глубокого машинного обучения.

Помимо многочисленных исследований по идентификации звезд на снимке, есть несколько работ, посвященных решению проблемы определения центра звезды с помощью ИНС [126; 127]. В них предлагается использовать нейросети для устранения влияния сложно моделируемых шумов и аббераций изображений, полученных со звездных датчиков. Например, в одной из последних работ [128] предлагается представить традиционный метод центра тяжести как нейросеть. В данной работе используется функция потерь (см. Словарь терминов) кросс-энтропии [166] для решения задачи определения центра пятна звезды. Каждый пиксель потенциально является центром, поэтому количество пикселей соответствует числу классов нейросети. После примерного определения центра пятна, используется регрессионный алгоритм для определения субпиксельного центра звезды.

В настоящей работе к проблеме определения ориентации КА также был применен подход с использованием машинного обучения [167]. Была разработана модель нейросети, основанная на сверточной ИНС [168], которая изначально предназначалась для обнаружения ключевых точек на лицах людей [169], поскольку изображения звезд могут быть представлены как ключевые точки в кадре. Эта сеть была немного модифицирована для работы с изображениями звезд. Архитектура предложенной сети показана на рис. 4.2. Она состоит из двух сверточных слоев с функцией активации (см. Словарь терминов) *ReLU*, после чего применяется *пакетная нормализация (batch normalization)* (см. Словарь терминов), и одного линейного слоя с сигмоидной функцией активации. Также после первого сверточного слоя применяется *максимальный пуллинг (max-pooling)* (см. Словарь терминов) для уменьшения размерности изображений. Эта архитектура была выбрана эмпирически путем многократного обучения ИНС на изображениях звезд. Пробовалось добавлять и удалять различные слои ИНС, а также варьировать их размерность. В итоге именно эта архитектура привела к лучшим результатам.

Не имея представления о том, подойдет ли этот алгоритм для данной задачи, было решено сначала взять как можно больше данных и протестировать

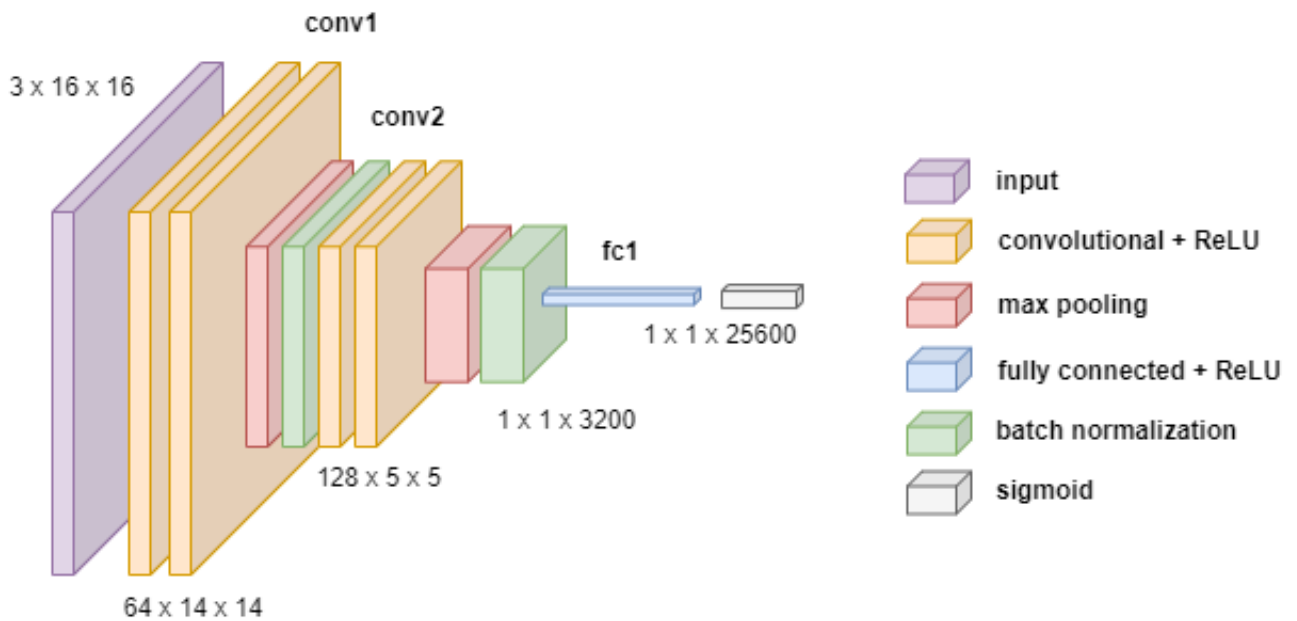


Рисунок 4.2 — Архитектура предлагаемой нейросети.

алгоритм на трех различных каналах цветных изображений звезд. На вход подавалось трехканальное изображение звезды, а на выходе получалась так называемая звездная маска – распределение вероятности нахождения центра звезды. Пример входного и выходного изображения можно увидеть на рис. 4.3.

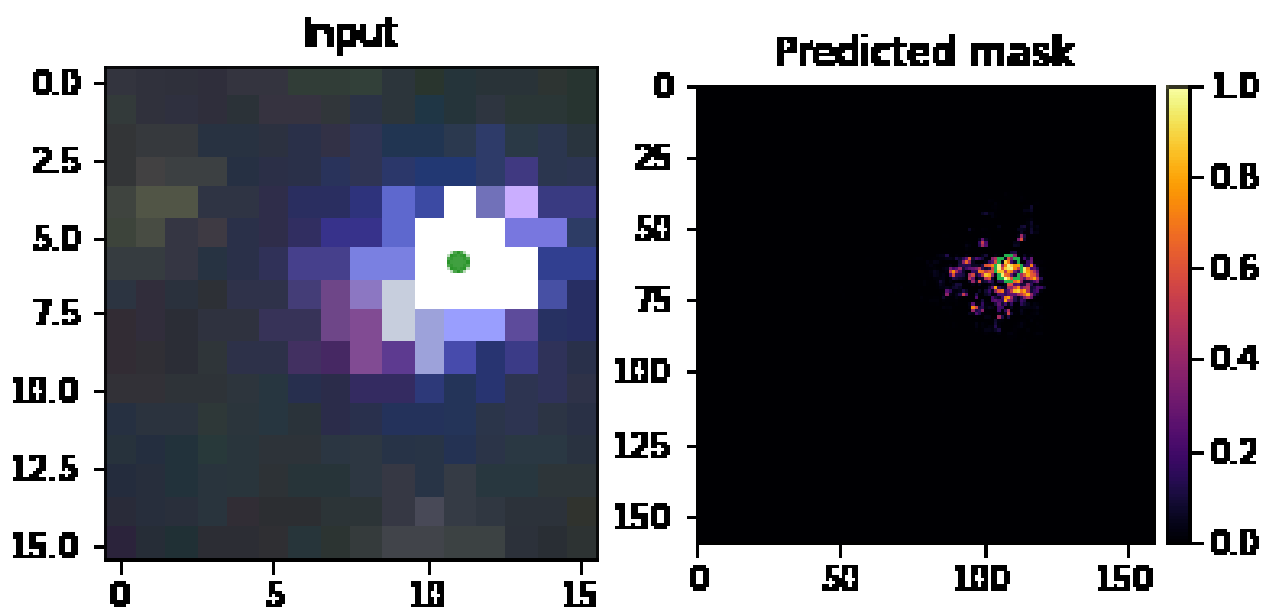


Рисунок 4.3 — Входное изображение и выходная маска. Зеленой точкой отмечен истинный центр звезды. Желтым отмечена область наиболее вероятного нахождения центра звезды.

Данные были разделены на пакеты (*батчи*) по 128 кадров в каждой. К каждому изображению прилагались координаты центра звезды в пикселях. Координаты ключевой точки, которую необходимо найти, вычислялись относительно левого верхнего угла изображения. Эти координаты были представлены в виде маски звезды. Маска представляет собой бинарное изображение, в котором все пиксели имеют нулевую интенсивность, кроме одного. В нем находится центр звезды. По сути эти маски и являются метками данных. Кроме того, к этим маскам был применен фильтр Гаусса. Для достижения субпиксельной точности был увеличен размер маски в 10 раз. Таким образом, определялись не целочисленные координаты звезд, а координаты с точностью до 0.1 пикселя, см. рис. 4.4.

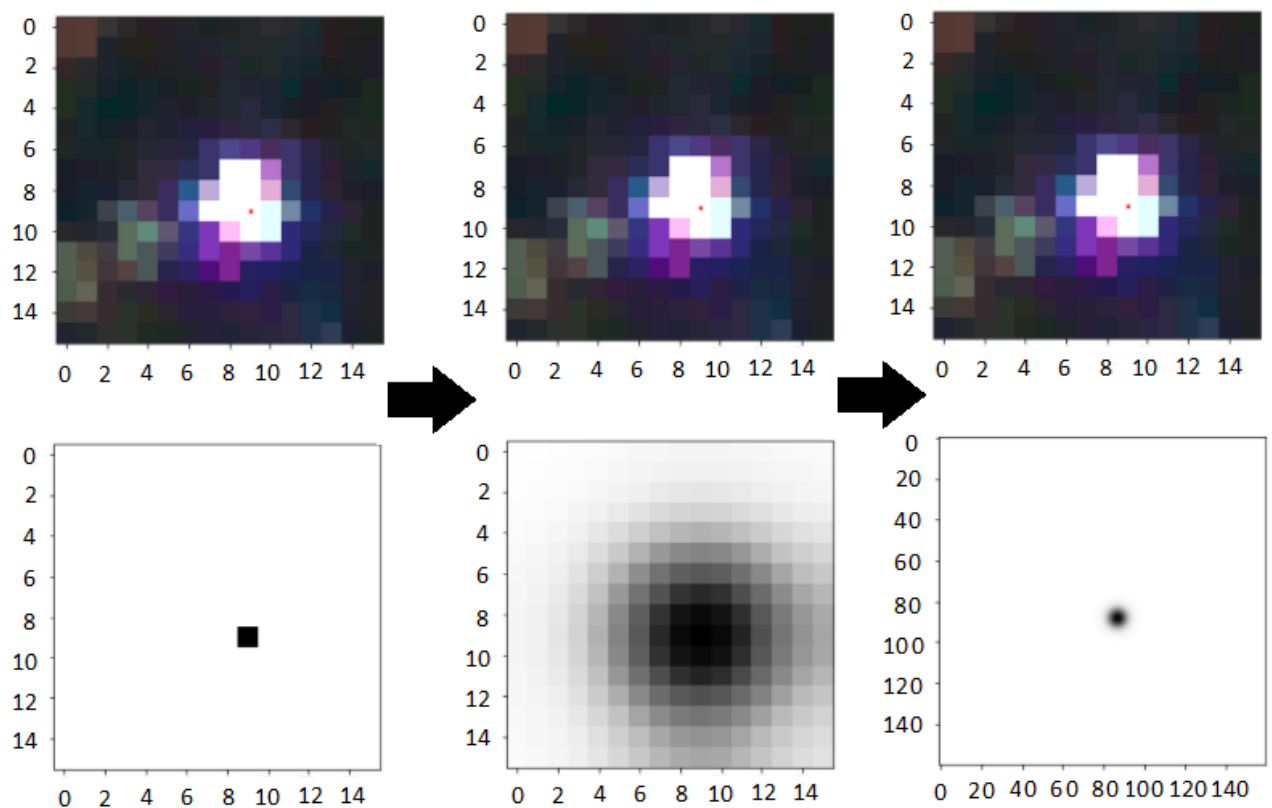


Рисунок 4.4 — Процесс создания маски звезды. Слева направо: создание маски центрального пикселя, применение фильтра Гаусса, создание маски субпикселя.

В качестве метрики точности ИНС была выбрана ошибка определения центра звезды, которая соответствует поккадровому среднему расстоянию между предсказанным центром звезды и истинным. Для определения истинного центра использовались данные GAIA [170]. Чтобы добиться хороших резуль-

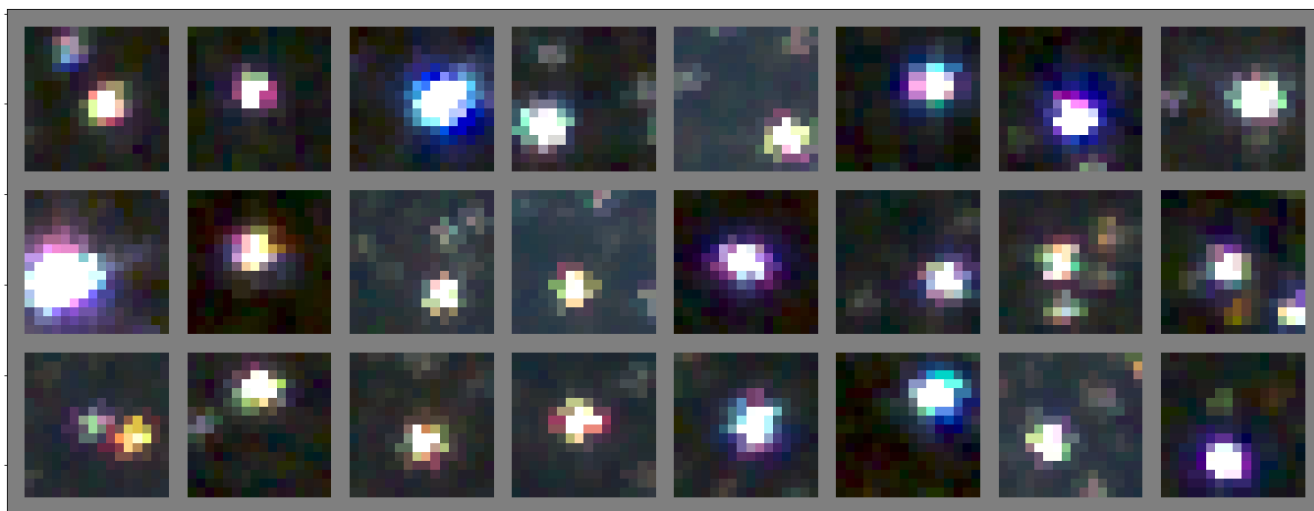
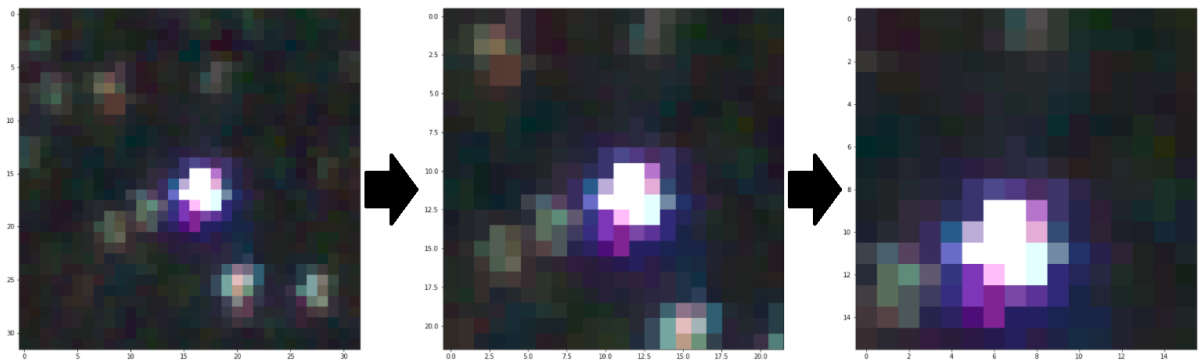


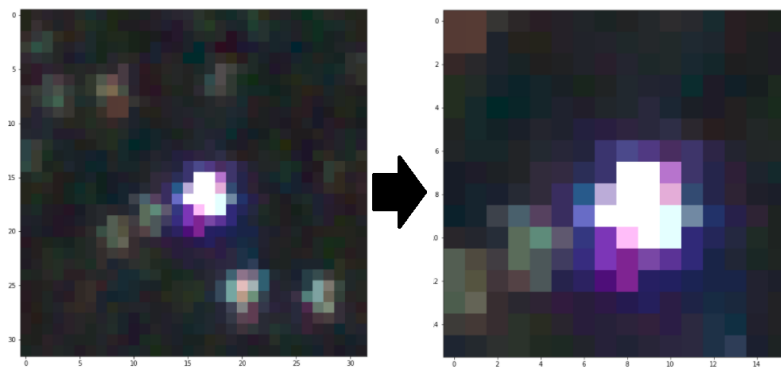
Рисунок 4.5 — Изображения звезд тренировочного датасета размера 16×16 .

татов, к данным была применена аугментация (см. Словарь терминов). Для тренировочного набора данных использовалось перевертывание (*Flip* ($p=0.5$)), центральная обрезка кадра (*CenterCrop* ($22, 22$)) и случайная обрезка кадра (*RandomCrop* ($16, 16$)) (рис. 4.5). Для валидационного и тестового наборов данных использовался только *CenterCrop* размером 16. Процесс аугментации изображений показан на рис. 4.6.

Алгоритм обучения включал в себя обработку входных данных моделью нейросети, вычисление ошибки на выходе с помощью функции потерь и подстройку весов с помощью метода обратного распространения с градиентным спуском. Процесс обучения происходит итерационно. Для обучения был выбран алгоритм стохастического градиентного спуска *Adam* (Adaptive Moment Estimation [171]). Темп обучения (*learning rate*) (см. Словарь терминов) был установлен на уровне $3e-4$. В качестве функции потерь были испытаны Dice Loss ([172]), MSE ([173]), Jackard loss ([174]) и CenterNet loss ([175]). В итоге была выбрана функция Dice Loss, так как она быстрее уменьшала ошибку определения центра звезды. Кроме того, использовалась система оптимизации гиперпараметров Optuna для оптимизации стандартного отклонения фильтра Гаусса. Для обучения использовался процессор Intel(R) Xeon(R) 2.20 ГГц и видеокарта NVIDIA-SMI 460.32.03 Tesla T4 16 ГБ. Время обучения одной эпохи составило около 100 сек. Большая часть этого времени была потрачена на загрузку данных из датасета. Данные загружались пакетами по 128 изображений в каждом.



а)



б)

Рисунок 4.6 — Процесс аугментации изображений: а) тренировочный датасет, б) тестовый и валидационный датасеты. На рис. а) к тренировочному изображению размера 32×32 применяется CenterCrop (22, 22), а затем RandomCrop (16, 16). На рис. б) к изображению применяется только CenterCrop (16, 16).

4.3 Полученные результаты

После обучения ИНС в течение 57 эпох, она была протестирована на тестовом наборе данных, который не использовался для обучения или валидации, состоящем из около 9 000 звезд. Общее время обучения составило около 1.5 часов. Средняя ошибка центра звезды составила 0.28 пикселя. Таким образом, была достигнута субпиксельная точность в определении центра звезды. В таблице 4 показано, как происходило обучение нейросети. Результаты показали, что обучение эффективно, если стандартное отклонение гауссовского фильтра уменьшается по мере обучения. В этом случае функция потерь не так сильно «наказывает» ИНС за неправильное определение центра звезды и в то же время уменьшает область наиболее вероятного положения центра. После достижения

стандартного отклонения фильтра Гаусса, равного 1.8, функция потерь достигла плато, ошибка определения центра звезды перестала снижаться, и обучение было остановлено.

Фаза Обучения	Количество эпох	σ_{gauss}
I	20	3.6
II	20	2.6
III	7	2.1
IV	5	1.9
V	5	1.8

Таблица 4 — Процесс обучения нейросети. σ_{gauss} обозначает СКО фильтра Гаусса, который применяется к маскам звезд.

Поскольку большинство современных звездных датчиков используют монохроматические изображения, процесс обучения был повторен, используя только один красный канал в изображениях звезд. После тестирования сети на тестовом наборе данных были выведены изображения звезд с точностью центров до 0.1 пикселя, и звезд с ошибками центров более 10 пикселей. Судя по этим изображениям, нейросеть плохо справляется с изображениями звезд вне кадра, с засвеченными звездами и звездами неправильной формы, которые, скорее всего, имеют несколько оптических или физических компонентов.

Было проведено сравнение полученных результатов с классическим методом взвешенного центра тяжести (МВЦТ) в его субпиксельной модификации [176; 177]. Метод центра тяжести был взят из открытого исходного кода [178] на языке C++ и протестирован на тестовом наборе данных. Результаты показаны в таблице 5. Видно, что предлагаемая ИНС превосходит стандартный алгоритм по величине ошибки оценки центра звезды, а также по стандартному отклонению этой величины.

	$ \Delta X $	$ \Delta Y $	ΔR
ИНС (RGB)	0.16 ± 0.16	0.2 ± 0.19	0.28 ± 0.21
ИНС (R)	0.17 ± 0.18	0.22 ± 0.21	0.32 ± 0.23
МВЦТ (R)	0.69 ± 0.48	0.72 ± 0.51	1.07 ± 0.58

Таблица 5 — Сравнение ошибки определения центра звезды с использованием метода центра тяжести и нейросети. Горизонтальная и вертикальная ошибка обозначается как $|\Delta X|$ и $|\Delta Y|$ соответственно.

4.4 Ограничения метода и дальнейшие исследования

Данная работа предлагает новый перспективный метод определения центра звезд на кадрах звездного датчика. Однако для полноценного внедрения подобной технологии необходимо провести дополнительные исследования. Например, необходимо провести сравнения с другими классическими методами определения центра звезды, а также попытаться использовать иные каталоги изображений. Помимо этого, разумным представляется провести анализ полученных результатов в зависимости от характеристик кадров звезд. Продемонстрированный в данной работе метод имеет свои особенности.

Во-первых, собранный наземный датасет изображений звезд содержит шум, связанный с атмосферой. Это означает, что реальные кадры со звездных датчиков могли бы значительно улучшить нейронную сеть. Во-вторых, предельная видимая звездная величина в данной работе была установлена равной 9^m , поскольку звездный датчик ориентируется только на яркие звезды, называемые также опорными. Обычно их видимая звездная величина находится в области $5^m - 8^m$. Набор данных может быть расширен, если выбрать более высокую предельную звездную величину. Предполагается, что с увеличением набора данных можно добиться лучших результатов. Наконец, реальные изображения отличаются от искусственно созданных в данной работе с точки зрения динамического диапазона, предельных величин и разрешения. На реальные результаты могут повлиять все эти различия в изображениях. Поэтому сеть необходимо обучить заново для реальных изображений звездных датчиков.

Стоит также отметить, что нейронная сеть ведет поиск центра звезды на выбранном сегменте кадра со звездой, а не на всем кадре звездного датчика. Поэтому для определения приблизительных координат звезд в кадре и их выделения требуются дополнительные инструменты. Кроме того, в реальных кадрах звездного датчика большинство звезд соответствуют всего 2-4 пикселям, что в несколько раз хуже разрешения изображений из данной работы. Однако существует способ искусственно увеличить разрешение реальных кадров. Для этого используется процедура расфокусировки звезды: изображение звезды размывается по нескольким соседним пикселям. В этом случае изображение становит-

ся более похожим на те, которые были использованы для обучения нейронной сети.

Вследствие уникальных характеристик и особенностей каждого типа звездных датчиков, эта сеть не обладает способностью к обобщению. Потребуется обучение для каждого инструмента в отдельности. Для переобучения сети для использования другого типа звездного датчика может быть полезна технология Fine-tuning¹.

Можно заключить, что предложенный метод является новой перспективной разработкой в области определения ориентации космических аппаратов, и требует дальнейшего изучения.

¹<https://platform.openai.com/docs/guides/fine-tuning>

Заключение

При проведении данной научно-квалификационной работы были разработаны, реализованы и отлажены алгоритмы определения орбит космических аппаратов по данным глобальных навигационных спутниковых систем. Для достижения поставленной цели были решены следующие основные **задачи**.

1. Разработка высокоточной модели движения космических аппаратов на низких околоземных орбитах и высокоточной модели наблюдений ГНСС с учетом всех возможных эффектов, влияющих на распространение сигнала от навигационного спутника к приемнику.
2. Исследование существующих и разработка новых алгоритмов определения и фиксации целочисленных неоднозначностей фазовых измерений глобальных навигационных спутниковых систем. Реализация данных алгоритмов.
3. Разработка, развитие и унификация программного комплекса, используемого для реализации алгоритмов определения орбит космических аппаратов по данным ГНСС.
4. Обработка и анализ синтетических и реальных ГНСС наблюдений для низкоорбитальных КА. Использование наблюдений для определения орбиты КА.
5. Исследование возможности использования глобальных навигационных спутниковых систем для ВЭО и СОО.
6. Улучшение алгоритмов определения ориентации космических аппаратов.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Был разработан программный комплекс для высокоточного определения орбит искусственных спутников Земли по данным глобальных навигационных спутниковых систем. В рамках создания данного комплекса были разработаны методы предварительной обработки измерений для оценки степени шума, наличия скачков фазы и целочисленных фазовых неоднозначностей. Также был разработан новый метод фиксации целочисленных параметров фазовой неоднозначности, использующий только комбинации измерений, полученные в процессе определения ор-

- биты. С помощью данного программного комплекса в рамках моделирования орбиты низкоорбитального космического аппарата показана возможность высокоточного позиционирования КА с использованием систем GPS/ГЛОНАСС. На основе реальных измерений гравиметрической миссии GRACE было проведено уточнение орбит низкоорбитальных спутников в режиме нулевых и двойных разностей. Расхождение с орбитой, полученной центром обработки научных данных этой миссии – GFZ, показало среднее расхождение трехмерного положения в 23 мм в режиме двойных разностей.
2. На примере орбиты проекта «Радиоастрон» продемонстрирована возможность использования ГНСС на высокоэллиптической орбите. Проведена оценка видимости количества наблюдаемых спутников и коэффициента потери точности PDOP. Проведены аналогичные оценки в рамках моделирования движения КА на средней околоземной орбите и показана принципиальная возможность использования систем GPS/ГЛОНАСС для высокоточного позиционирования для решения фундаментальный прикладных астрометрических задач.
 3. В рамках улучшения методов определения ориентации космических аппаратов с целью повысить точность определения орбиты и, соответственно, результатов научно-прикладных космических миссий, разработан метод определения субпиксельных координат звезды на кадре звездного датчика. Собран уникальный датасет изображений звезд и их субпиксельных координат, основанный на снимках реального неба и данных астрометрической миссии GAIA. Разработанный метод, с помощью собранного датасета и методов машинного обучения показал четырехкратное превосходство по средней невязке координат звезды по сравнению с взвешенным методом центра масс.

Результаты, полученные в данной работе, демонстрируют высокую относительную точность определения орбиты по данным ГНСС. Существующее расхождение с орбитой GFZ можно объяснить следующими факторами:

1. Использование различных данных в координатно-временном обеспечении проекта.
2. Неизвестность реальной модели наблюдений, технических особенностей проекта и системы обработки полученных измерений.

3. Ошибка эфемерид НС и используемой модели сил.

Для дальнейшего увеличения точности определения координат НКА с использованием моделей и алгоритмов, предложенных в данной работе, будет необходимо решение следующих задач.

1. Дальнейшая отработка алгоритмов определения орбит на синтетических данных с учетом различных эффектов с целью улучшения согласования моделей движения и наблюдений с программным комплексом Bernese.
2. Улучшение алгоритма фиксации целочисленных фазовых неоднозначностей для возможности его работы в режиме нулевых разностей.
3. Разработка программного обеспечения для дифференциального режима определения орбиты с учетом наземных станций. Учет соответствующих эффектов в модели наблюдений.
4. Отладка моделей и алгоритмов, предложенных в данной работе, на отечественных космических проектах с использованием систем GPS/ГЛОНАСС.

Как показали результаты данной работы, определение средних и высокоэллиптических орбит также возможно с использованием ГНСС наблюдений. Для этого необходимо использовать максимально доступное количество НС и улучшать отношение сигнал/шум в боковых лепестках диаграммы направленности. Для улучшения скорости и точности определения ориентации КА возможно использовать методы машинного обучения, как показали результаты главы 4. В дальнейшем подход, описанный в этой главе, можно распространить на алгоритм отождествления звезд на кадрах звездного датчика. Помимо этого, для высокоточного определения орбит космических аппаратов следует использовать и другие типы наблюдений: лазерные и РСДБ измерения. Несмотря на то, что проведение лазерных измерений ограничено количеством наземных станций и погодными условиями, с помощью лазерных измерений возможно провести валидацию модели наблюдений ГНСС. РСДБ измерения позволят повысить точность определения трехмерного положения КА в картинной плоскости.

Алгоритмы и программное обеспечение, описываемые в данной работе, используются в настоящее время в нескольких научно-исследовательских работах по спутниковой градиентометрии и космической геодезии, проводимых

Государственным Астрономическим институтом имени П. К. Штернберга для государственной корпорации по космической деятельности «Роскосмос».

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, Жарову Владимиру Евгеньевичу, за помощь, поддержку и ценные указания во время выполнения данной работы. Также автор благодарит Н. В. Емельянова и А. С. Жамкова за помощь в теоретических и практических аспектах теории уточнения орбит. Автор благодарен сотрудникам лаборатории баллистико-навигационного обеспечения космических проектов АКЦ ФИАН за помощь в написании работы по уточнению орбит космических радиотелескопов и А. Новоселову за неоценимый вклад в работу по созданию нейросети для определения центров звезд. Автор выражает глубокую признательность А. В. Логинову за предоставление и генерацию синтетических и реальных данных ГНСС, а также за плодотворные научные дискуссии.

Список сокращений и условных обозначений

- АКЦ ФИАН** – Астрокосмический центр Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук
- ВЭО** – Высокоэллиптическая орбита
- ГЛОНАСС** – Российская глобальная навигационная спутниковая система
- ГНСС** – Глобальные навигационные спутниковые системы
- ГСМГПЗ** – Глобальная система мониторинга геодезических параметров Земли
- ГСО** – Геосинхронная орбита
- ГПЗ** – Гравитационное поле Земли
- ИНС** – Искусственная нейронная сеть
- ИСЗ** – Искусственный спутник Земли
- КА** – Космический аппарат
- МАС** – Международный астрономический союз
- МНК** – Метод наименьших квадратов
- МСВЗ** – Международная служба вращения Земли
- МЦМ** – Метод центра масс
- НКА** – Низкоорбитальный космический аппарат
- НОО** – Низкая околоземная орбита
- НС** – Навигационный спутник
- ОФК** – Обобщенный фильтр Калмана
- РАН** – Российская академия наук
- СКО** – Среднеквадратическое отклонение
- СОО** – Средняя околоземная орбита
- BeiDou** – Китайская глобальная навигационная спутниковая система
- CODE** – Center for Orbit Determination in Europe
- DLR** – Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt
- DOP** – Dilution of Precision
- EUREF** – IAG Reference Frame Sub-Commission for Europe
- EPN** – EUREF Permanent Network
- Galileo** – Европейская глобальная навигационная спутниковая система

GCRS/GCRF – Geocentric Celestial Reference System/Frame
GDOP – Geometric Dilution of Precision
GFZ – Потсдамский центр имени Гельмгольца
GNSS – Global Navigation Satellite System
GOCE – Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer
GPS – Global Positioning System
GRACE/GRACE-Fo – The Gravity Recovery and Climate Experiment
GRAIL – Gravity Recovery and Interior Laboratory
IAG – International Association of Geodesy
IERS – International Earth Rotation Service
IGS – International GNSS Service
ITRS/ITRF – International Terrestrial Reference System/Frame
LAMBDA – Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment
NASA – The National Aeronautics and Space Administration
PCO – Phase Center Offset
PCV – Phase Center Variation
PDOP – Position Dilution of Precision
PPP – Precision Point Positioning
QIF – Quasi-Ionosphere-Free Strategy
RINEX – Receiver Independent Exchange Format
SAASM – Selective Availability Anti-Spoofing Module
TEC – Total Electron Content
TDOP – Time Dilution of Precision
VTEC – Vertical Total Electron Content
UTC – Coordinated Universal Time

Словарь терминов

Альманах – информация, передаваемая с каждого НС в составе навигационного сообщения, включающая в себя данные о системной шкале времени ГНСС, данные о бортовых шкалах времени всех НС и данные об элементах их орбит и техническом состоянии.

Антиспуфинг – система, направленная на борьбу со спуфингом. Спуфинг – это специальная интерферометрическая система, которая посылает в приемник ложные навигационные сигналы, чтобы нарушить процедуру определения правильного местоположения приемника. Система антиспуфинг специальным образом шифрует измерения, чтобы не допустить этого. Измерения, подверженные антиспуфингу имеют увеличенный уровень шума.

Аугментация – в области машинного обучения процесс дополнения датасета схожими данными, созданными из уже имеющихся. Данная процедура применяется при недостаточном размере датасета, а также для избежания переобучения ИНС.

Датасет – в области машинного обучения специальная база данных, состоящая из двух взаимно-однозначных категорий: самих данных и их меток. В качестве метки блока данных обычно выступает некая характеристика этого блока, которую необходимо найти машине. Датасет обычно разделяется на тренировочную и тестовую выборки. Метки данных тренировочной выборки показываются машине, а метки тестовой выборки машина должна оценить сама.

Макс-пулинг – объединение в пул, в области машинного обучения метод, уменьшающий количество объектов на выходе из слоя ИНС путем применения 2-мерного фильтра, выбирающего максимум из пикселей изображения, покрытых фильтром.

Пакетная нормализация – метод, который позволяет повысить производительность и стабилизировать работу ИНС перед подачей данных в сеть. Данные будут иметь нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

Темп обучения – это коэффициент скорости обучения ИНС, позволяющий управлять величиной коррекции весов на каждой итерации обучения.

Узкая и широкая комбинация измерений – комбинация ГНСС измерений, состоящая из кодовых или фазовых двухчастотных измерений, в которой целочисленные неоднозначности (если они есть) имеют эффективную длину волны в 11 и 86 см соответственно для узкой и широкой комбинации. Кодовые комбинации, несмотря на то, что не имеют неоднозначностей, составляются идентичным образом, как и фазовые, и имеют свое приложение для решения задачи навигации.

Функция активации – это нелинейная функция, которая применяется к выходу каждого нейрона ИНС. С помощью нее добавляется нелинейность в вычисления нейрона, что позволяет модели ИНС учиться более сложным функциям.

Функция потерь – это функция, характеризующая невязку между прогнозируемой меткой и реальной после прямого прохода нейросети.

Список литературы

1. *Эльясберг П.* Определение движения по результатам измерений. — Наука, 1976. — 413 с.
2. *Иванов Н. М., Лысенко Л. Н.* Баллистика и навигация космических аппаратов. — Москва : МГТУ им. Баумана : Дрофа, 2016. — 523 с.
3. *Escobal P. R., Cook G. E.* Methods of Orbit Determination // The Aeronautical Journal. — 1966. — т. 70, № 667. — с. 738—739.
4. *Furfaro R., Mortari D.* Least-squares solution of a class of optimal space guidance problems via Theory of Connections // Acta Astronautica. — 2020. — т. 168. — с. 92—103. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.05.050>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576519302292>.
5. *Jiang Y., Baoyin H., Ma P.* Augmented unbiased minimum-variance input and state estimation for tracking a maneuvering satellite // Acta Astronautica. — 2019. — т. 163. — с. 96—107. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.015>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576518311500> ; Fourth IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems (DYCOSS2018).
6. *Li H., Li J., Huang Y.* Minimum-Variance Estimation of Thrust Acceleration During Orbit Transfer Process //. — 05.2002. — ISBN 978-1-62410-111-3. — DOI: [10.2514/6.2002-1914](https://doi.org/10.2514/6.2002-1914).
7. *Barrett M., Brierley S.* Maximum likelihood estimation for orbit determination // Astrodynamics Conference. — 1986. — DOI: [10.2514/6.1986-2167](https://doi.org/10.2514/6.1986-2167). — eprint: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.1986-2167>. — URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.1986-2167>.
8. *Closas P., Fernandez-Prades C., Fernandez-Rubio J. A.* Maximum Likelihood Estimation of Position in GNSS // IEEE Signal Processing Letters. — 2007. — т. 14, № 5. — с. 359—362. — DOI: [10.1109/LSP.2006.888360](https://doi.org/10.1109/LSP.2006.888360).

9. *Swerling P.* First-Order Error Propagation in a Stageswise Smoothing Procedure for Satellite Observations. — Santa Monica, CA : RAND Corporation, 1959.
10. *Kalman R.* A new approach to linear filtering and prediction problems transaction of the asme journal of basic //. — 1960.
11. *Sorenson H.* Kalman filtering : theory and application //. — 1985.
12. *Basar T.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. — 2009. — нояб. — DOI: [10.1109/9780470544334.ch9](https://doi.org/10.1109/9780470544334.ch9).
13. *R. Sh. Liptser.* A review of «Applied optimal estimation» by A. Gelb, J. F. Rasper, R. A. Nash, Ch. F. Price, A. A. Sutherland // Avtomat. i Telemekh. — 1977. — с. 207—208.
14. Ensemble Consider Kalman Filtering / Т.-s. Lou [и др.]. — 2019. — июнь.
15. Analysis of an Extended Kalman Filter Based Orbit Determination System / Q. Lam [и др.] //. — 08.2010. — ISBN 978-1-60086-962-4. — DOI: [10.2514/6.2010-7600](https://doi.org/10.2514/6.2010-7600).
16. *Julier S., Uhlmann J.* Unscented Filtering and Nonlinear Estimation // Proceedings of the IEEE. — 2004. — апр. — т. 92. — с. 401—422. — DOI: [10.1109/JPROC.2003.823141](https://doi.org/10.1109/JPROC.2003.823141).
17. *Lagrasta S.* Unscented Filtering for LEO Satellite Orbit Determination. — 2008. — янв. — DOI: [10.1007/978-0-387-47524-0_57](https://doi.org/10.1007/978-0-387-47524-0_57).
18. *Karlgaard C., Schaub H.* Huber-Based Divided Difference Filtering // Journal of Guidance Control and Dynamics - J GUID CONTROL DYNAM. — 2007. — май. — т. 30. — с. 885—891. — DOI: [10.2514/1.27968](https://doi.org/10.2514/1.27968).
19. *Xin M., Balakrishnan S.* A new filtering technique for a class of nonlinear systems //. т. 1. — 01.2003. — 1034—1039 vol.1. — DOI: [10.1109/CDC.2002.1184646](https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1184646).
20. *Kuang J., Tan S., Wang Y.* GPS-Based On-Board Orbit Determination of a Satellite Using Extended H_{∞} Filtering Algorithms // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2004. — февр. — т. 88. — с. 103—122. — DOI: [10.1023/B:CELE.0000016808.94028.f0](https://doi.org/10.1023/B:CELE.0000016808.94028.f0).

21. CHAMP mission 5 years in orbit / C. Reigber [и др.] // Observation of the Earth System from Space. — 2006. — янв. — DOI: [10.1007/3-540-29522-4_1](https://doi.org/10.1007/3-540-29522-4_1).
22. Application of GOCE Satellite Gravimetric Data For Mineral Exploration / N. Chipanta [и др.] // Zambia ICT Journal. — 2023. — март. — т. 7. — с. 1—6. — DOI: [10.33260/zictjournal.v7i1.140](https://doi.org/10.33260/zictjournal.v7i1.140).
23. Instrument of Grace: GPS augments gravity measurements / C. Dunn [и др.] // GPS World. — 2003. — февр. — т. 14. — с. 16—28.
24. *Enzer D., Wang R., Klipstein W.* GRAIL — A microwave ranging instrument to map out the lunar gravity field // Frequency Control Symposium (FCS), 2010 IEEE International. — 07.2010. — с. 572—577. — DOI: [10.1109/FREQ.2010.5556264](https://doi.org/10.1109/FREQ.2010.5556264).
25. GRACE-FO: The Gravity Recovery and Climate Experiment Follow-On Mission / R. Kornfeld [и др.] // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2019. — т. 56, № 3. — с. 931—951. — DOI: [10.2514/1.A34326](https://doi.org/10.2514/1.A34326).
26. The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission overview and early results / B. Tapley [и др.] // Geophysical Research Letters. — 2004. — май. — т. 31, № 9. — 4 PP. — DOI: [10.1029/2004GL019920](https://doi.org/10.1029/2004GL019920).
27. *Xu G., Xu Y.* GPS: Theory, algorithms and applications, third edition. — 01.2016. — с. 1—489. — DOI: [10.1007/978-3-662-50367-6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-50367-6).
28. GLONASS Signals Characteristics Analysis and Navigation Performance for Geostationary Satellites / M. Wang [и др.]. — 03.2023. — DOI: [10.21203/rs.3.rs-2731303/v1](https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2731303/v1).
29. Contribution of the Galileo system to space geodesy and fundamental physics / K. Sośnica [и др.] //. — 05.2022. — DOI: [10.5194/egusphere-egu22-2477](https://doi.org/10.5194/egusphere-egu22-2477).
30. *Lin H.-Y.* Details in BeiDou-G2: Past and Present. — 04.2022.
31. Low-Earth Orbit Determination from Gravity Gradient Measurements / X. Sun [и др.] // Acta Astronautica. — 2016. — т. 123. — с. 350—362. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.03.012>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576515301193> ; Special Section: Selected Papers from the International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying 2015.

32. GPS based onboard orbit determination system providing fault management features for a LEO satellite / Н. Bolandi [и др.] // Journal of Navigation. — 2013. — июль. — т. 66. — DOI: [10.1017/S0373463313000179](https://doi.org/10.1017/S0373463313000179).
33. *BAĞCI M., Hajiyeve C.* Integrated NRM/EKF for LEO Satellite GPS Based Orbit Determination //. — 06.2016.
34. *Bar-Sever Y.* Orbit Determination with GNSS // Position, Navigation, and Timing Technologies in the 21st Century. — John Wiley, Ltd, 2020. — гл. 62. с. 1893—1919. — ISBN 9781119458555. — DOI: <https://doi.org/10.1002/9781119458555.ch62>. — eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781119458555.ch62>. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781119458555.ch62>.
35. *Chiaradia A. P., Kuga H., Prado A.* Onboard and Real-Time Artificial Satellite Orbit Determination Using GPS // Mathematical Problems in Engineering. — 2013. — янв. — т. 2013. — DOI: [10.1155/2013/530516](https://doi.org/10.1155/2013/530516).
36. Integrated Adjustment of LEO and GPS in Precision Orbit Determination / J. Geng [и др.] //. т. 132. — 01.2008. — с. 133—137. — ISBN 978-3-540-74583-9. — DOI: [10.1007/978-3-540-74584-6_20](https://doi.org/10.1007/978-3-540-74584-6_20).
37. *Yang Y., Yue X., Yuan J.* GPS Based Reduced-Dynamic Orbit Determination for Low Earth Orbiters with Ambiguity Fixing // International Journal of Aerospace Engineering. — 2015. — июль. — т. 2015. — DOI: [10.1155/2015/723414](https://doi.org/10.1155/2015/723414).
38. *Leung S., Montenbruck O.* Real-Time Navigation of Formation-Flying Spacecraft Using Global-Positioning-System Measurements // Journal of Guidance Control and Dynamics - J GUID CONTROL DYNAM. — 2005. — март. — т. 28. — с. 226—235. — DOI: [10.2514/1.7474](https://doi.org/10.2514/1.7474).
39. *Hackel S.* Refinement of Reduced-Dynamic Orbit Determination for Low Earth Satellites : дис. ... канд. / Hackel Stefan. — 01.2019.
40. *Yang Y., Yue X., Dempster A.* GPS-based onboard real-time orbit determination for leo satellites using consider Kalman filter // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. — 2016. — апр. — т. 52. — с. 769—777. — DOI: [10.1109/TAES.2015.140758](https://doi.org/10.1109/TAES.2015.140758).

41. *Allahviridi-Zadeh A., Wang K., El-Mowafy A.* Precise Orbit Determination of LEO Satellites Based on Undifferenced GNSS Observations // Journal of Surveying Engineering. — 2021. — окт. — т. 148. — с. 03121001. — DOI: [10.1061/\(ASCE\)SU.1943-5428.0000382](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000382).
42. Efficient precise orbit determination of LEO satellites using GPS / H. Peter [и др.] // Advances in Space Research. — 2002. — июль. — т. 30. — с. 295—300. — DOI: [10.1016/S0273-1177\(02\)00298-3](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(02)00298-3).
43. Bernese GNSS Software Version 5.2 / R. Dach [и др.]. — 11.2015. — ISBN 978-3-906813-05-9. — DOI: [10.7892/boris.72297](https://doi.org/10.7892/boris.72297).
44. Multi-GNSS real-time clock estimation using sequential least square adjustment with online quality control / W. Fu [и др.] // Journal of Geodesy. — 2018. — нояб. — т. 93. — DOI: [10.1007/s00190-018-1218-z](https://doi.org/10.1007/s00190-018-1218-z).
45. Precise Orbit Determination for LEO Satellites using GNSS Tracking data from Multiple Antennas / D. Kuang [и др.] // т. 4. — 09.2010.
46. *Zhang W.* Triple Frequency Cascading Ambiguity Resolution for Modernized GPS and GALILEO. — 2023. — апр.
47. *Bolla P., Won J.-H.* Performance Analysis of geometry-free and ionosphere-free code-carrier phase observation models in integer ambiguity resolution // IET Radar, Sonar and Navigation. — 2018. — авг. — DOI: [10.1049/iet-rsn.2018.5036](https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2018.5036).
48. *Rodriguez-Solano C., Hugentobler U., Steigenberger P.* Adjustable box-wing model for solar radiation pressure impacting GPS satellites // Advances in Space Research. — 2012. — апр. — т. 49. — с. 1113—1128. — DOI: [10.1016/j.asr.2012.01.016](https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.01.016).
49. Execution of Parker Solar Probe's unprecedented flight to the Sun and early results / Y. Guo [и др.] // Acta Astronautica. — 2021. — февр. — т. 179. — с. 425—438. — DOI: [10.1016/j.actaastro.2020.11.007](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.11.007).
50. *Springer T., Beutler G., Rothacher M.* A New Solar Radiation Pressure Model for GPS // Advances in Space Research - ADV SPACE RES. — 1999. — дек. — т. 23. — с. 673—676. — DOI: [10.1016/S0273-1177\(99\)00158-1](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(99)00158-1).

51. *Mehta P., Mclaughlin C., Sutton E.* Drag coefficient modeling for GRACE using direct simulation Monte Carlo // *Advances in Space Research.* — 2013. — дек. — т. 52. — с. 2035—2051. — DOI: [10.1016/j.asr.2013.08.033](https://doi.org/10.1016/j.asr.2013.08.033).
52. *Shubin V., Tamara G.* Solar forcing on the ionosphere: Global model of the F2 layer peak parameters driven by re-calibrated sunspot numbers // *Acta Astronautica.* — 2020. — окт. — DOI: [10.1016/j.actaastro.2020.10.029](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.10.029).
53. *Montenbruck O., Gill E.* Ionospheric Correction for GPS Tracking of LEO Satellites // *The Journal of Navigation.* — 2002. — май. — т. 55. — с. 293—304. — DOI: [10.1017/S0373463302001789](https://doi.org/10.1017/S0373463302001789).
54. Mapping topside ionospheric vertical electron content from multiple LEO satellites at different orbital altitudes / X. Ren [и др.] // *Journal of Geodesy.* — 2020. — сент. — т. 94. — DOI: [10.1007/s00190-020-01415-2](https://doi.org/10.1007/s00190-020-01415-2).
55. Assessment of vertical TEC mapping functions for space-based GNSS observations / J. Zhong [и др.] // *GPS Solutions.* — 2016. — июль. — т. 20. — с. 353—362. — DOI: [10.1007/s10291-015-0444-6](https://doi.org/10.1007/s10291-015-0444-6).
56. Global ionosphere maps of VTEC from GNSS, satellite altimetry, and Formosat-3/cosmic data / M. Alizadeh [и др.] // *Journal of Geodesy.* — 2011. — дек. — т. 85. — DOI: [10.1007/s00190-011-0449-z](https://doi.org/10.1007/s00190-011-0449-z).
57. High-order ionospheric delay correction of GNSS data for precise reduced-dynamic determination of LEO satellite orbits: cases of GOCE, GRACE, and SWARM / J. Guo [и др.] // *GPS Solutions.* — 2022. — окт. — т. 27. — DOI: [10.1007/s10291-022-01349-6](https://doi.org/10.1007/s10291-022-01349-6).
58. *Yang X., Li J., Zhang S.* Ionospheric correction for spaceborne single-frequency GPS based on single layer model // *Journal of Earth System Science.* — 2014. — июнь. — т. 123. — с. 767—778. — DOI: [10.1007/s12040-014-0442-z](https://doi.org/10.1007/s12040-014-0442-z).
59. Modeling the IRI topside profile using scale heights from ground-based ionosonde measurements / B. Reinisch [и др.] // *Advances in Space Research.* — 2004. — дек. — т. 34. — с. 2026—2031. — DOI: [10.1016/j.asr.2004.06.012](https://doi.org/10.1016/j.asr.2004.06.012).

60. *Hyung J. R., Yoon S. P., Shutz B. E.* The GLAS Algorithm Theoretical Basis Document for Precision Orbit Determination (POD). — Center for Space Research, The University of Texas at Austin, 2013. — 144 p.
61. *Ashby N.* GNSS and other applications of General Relativity //. — 12.2015. — с. 165—188. — ISBN 978-3-11-034042-6. — DOI: [10.1515/9783110343304.165](https://doi.org/10.1515/9783110343304.165).
62. *Kouba J.* Improved relativistic transformations in GPS // GPS Solutions. — 2004. — сент. — т. 8. — с. 170—180. — DOI: [10.1007/s10291-004-0102-x](https://doi.org/10.1007/s10291-004-0102-x).
63. An assessment of relativistic effects for low Earth orbiters: The GRACE satellites / K. Larson [и др.] // METROLOGIA Metrologia. — 2007. — дек. — т. 44. — с. 484—490. — DOI: [10.1088/0026-1394/44/6/007](https://doi.org/10.1088/0026-1394/44/6/007).
64. Relativistic Effects in the Global Positioning System / D. Eardley [и др.] // NASA STI/Recon Technical Report N. — 1985. — май. — с. 19.
65. Application of Independently Estimated DCB and Ionospheric TEC in Single-Frequency PPP / W. Nie [и др.] //. т. 304. — 04.2014. — с. 239—254. — ISBN 978-3-642-54742-3. — DOI: [10.1007/978-3-642-54743-0_21](https://doi.org/10.1007/978-3-642-54743-0_21).
66. Assessment of a TEC calibration procedure by single-frequency PPP / F. Prol [и др.] // GPS Solutions. — 2018. — янв. — т. 22. — DOI: [10.1007/s10291-018-0701-6](https://doi.org/10.1007/s10291-018-0701-6).
67. Consideration of GLONASS Inter-Frequency Code Biases in Precise Point Positioning (PPP) International Time Transfer / Y. Ge [и др.] // Applied Sciences. — 2018. — июль. — т. 8. — с. 1254. — DOI: [10.3390/app8081254](https://doi.org/10.3390/app8081254).
68. Characteristics of inter-system biases in Multi-GNSS with precise point positioning / J. Hong [и др.] // Advances in Space Research. — 2019. — март. — т. 63. — DOI: [10.1016/j.asr.2019.02.037](https://doi.org/10.1016/j.asr.2019.02.037).
69. GPS and GLONASS observable-specific code bias estimation: comparison of solutions from the IGS and MGEX networks / N. Wang [и др.] // Journal of Geodesy. — 2020. — авг. — т. 94. — DOI: [10.1007/s00190-020-01404-5](https://doi.org/10.1007/s00190-020-01404-5).
70. Simultaneous estimation of GPS P1-P2 differential code biases using low earth orbit satellites data from two different orbit heights / M. Liu [и др.] // Journal of Geodesy. — 2020. — нояб. — т. 94. — с. 121. — DOI: [10.1007/s00190-020-01458-5](https://doi.org/10.1007/s00190-020-01458-5).

71. Mitigation of Multipath Influence on Tracking Errors in LEO Navigation Applications / H. Abdulkader [и др.] // . — 01.2006. — с. 2673—2678. — DOI: [10.1109/IJCNN.2006.247148](https://doi.org/10.1109/IJCNN.2006.247148).
72. Quality assessment of FORMOSAT-3/COSMIC and GRACE GPS observables: analysis of multipath, ionospheric delay and phase residual in orbit determination / C. Hwang [и др.] // GPS Solutions. — 2010. — янв. — т. 14. — с. 121—131. — DOI: [10.1007/s10291-009-0145-0](https://doi.org/10.1007/s10291-009-0145-0).
73. *Leick A., Rapoport L., Tatarnikov D.* GPS Satellite Surveying. — 04.2015. — ISBN ISBN: 978-1-118-67557-1. — DOI: [10.1002/9781119018612](https://doi.org/10.1002/9781119018612).
74. *Jin S., Cardellach E., Xie F.* Introduction to GNSS // . т. 19. — 08.2014. — с. 3—16. — ISBN 978-94-007-7481-0. — DOI: [10.1007/978-94-007-7482-7_1](https://doi.org/10.1007/978-94-007-7482-7_1).
75. Cycle slip detection and repair of undifferenced single-frequency GPS carrier phase observations / F. Zangeneh-Nejad [и др.] // GPS Solutions. — 2017. — окт. — т. 21. — с. 1—11. — DOI: [10.1007/s10291-017-0633-6](https://doi.org/10.1007/s10291-017-0633-6).
76. Efficient Ambiguity Resolution Using Constraint Equation / C. Park [и др.] // . — 05.1996. — с. 277—284. — ISBN 0-7803-3085-4. — DOI: [10.1109/PLANS.1996.509089](https://doi.org/10.1109/PLANS.1996.509089).
77. Three-step Algorithm for Rapid Ambiguity Resolution between Reference Stations within Network RTK / S. Wang [и др.] // Journal of Navigation. — 2016. — июнь. — т. 1. — с. 1—15. — DOI: [10.1017/S037346331600031X](https://doi.org/10.1017/S037346331600031X).
78. GNSS carrier phase ambiguity resolution based on integrity restriction in ambiguity domain / H. Liu [и др.] // Advances in Space Research. — 2014. — апр. — т. 53. — DOI: [10.1016/j.asr.2014.01.030](https://doi.org/10.1016/j.asr.2014.01.030).
79. *Piergentili F., Cordelli E.* A new method for DGPS ambiguity resolution // Journal of Navigation. — 2010. — окт. — т. 63. — с. 645—661. — DOI: [10.1017/S0373463310000299](https://doi.org/10.1017/S0373463310000299).
80. Enhanced orbit determination for formation-flying satellites through integrated single- and double-difference GPS ambiguity resolution / X. Guo [и др.] // GPS Solutions. — 2019. — нояб. — т. 24. — DOI: [10.1007/s10291-019-0932-1](https://doi.org/10.1007/s10291-019-0932-1).

81. *Li T., Wang J., Huang J.* Analysis of ambiguity resolution in precise pseudolite positioning // . — 11.2012. — с. 1—7. — ISBN 978-1-4673-1955-3. — DOI: [10.1109/IPIN.2012.6418924](https://doi.org/10.1109/IPIN.2012.6418924).
82. *Dong D., Bock Y.* Global Positioning System Network Analysis With Phase Ambiguity Resolution Applied to Crustal Deformation Studies in California // Journal of Geophysical Research Atmospheres. — 1989. — май. — т. 94. — DOI: [10.1029/JB094iB04p03949](https://doi.org/10.1029/JB094iB04p03949).
83. Real-Time Kinematic Precise Orbit Determination for LEO Satellites Using Zero-Differenced Ambiguity Resolution / X. Li [и др.] // Remote Sensing. — 2019. — нояб. — т. 11. — с. 2815. — DOI: [10.3390/rs11232815](https://doi.org/10.3390/rs11232815).
84. Resolution of GPS Carrier-Phase Ambiguities in Precise Point Positioning (PPP) with Daily Observations / M. Ge [и др.] // Journal of Geodesy. — 2008. — июль. — т. 82. — с. 389—399. — DOI: [10.1007/s00190-007-0187-4](https://doi.org/10.1007/s00190-007-0187-4).
85. Integer Ambiguity Resolution on Undifferenced GPS Phase Measurements and Its Application to PPP and Satellite Precise Orbit Determination / D. Laurichesse [и др.] // Navigation. — 2009. — июнь. — т. 56. — с. 135—149. — DOI: [10.1002/j.2161-4296.2009.tb01750.x](https://doi.org/10.1002/j.2161-4296.2009.tb01750.x).
86. *Kardashev N., Langston G., Project R.* RadioAstron Space VLBI: Micro-Arc Second Resolution. — 2004. — дек.
87. *Sokolovsky K., Group f.* RadioAstron Early Science Program Space-VLBI AGN survey: strategy and first results. — 2013. — март.
88. *Likhachev S.* Millimetron and Earth-Space VLBI. — 2014. — янв.
89. Analysis of orbital configurations for Millimetron space observatory / A. Rudnitskiy [и др.] // Acta Astronautica. — 2022. — апр. — т. 196. — DOI: [10.1016/j.actaastro.2022.03.036](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.03.036).
90. The Chinese Space Millimeter-wavelength VLBI array - A step toward imaging the most compact astronomical objects / X. Hong [и др.] // Acta Astronautica. — 2014. — март. — т. 102. — DOI: [10.1016/j.actaastro.2014.05.026](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.05.026).
91. *Liu L., Zheng W.-M.* The optimization of satellite orbit for Space-VLBI observation // Research in Astronomy and Astrophysics. — 2021. — март. — т. 21. — с. 037. — DOI: [10.1088/1674-4527/21/2/37](https://doi.org/10.1088/1674-4527/21/2/37).

92. *Zhang Y., Liu H., Liu X.* Effects of Surface Errors of Antennas on Detection Performance of Space VLBI // *Aerospace*. — 2022. — май. — т. 9. — с. 247. — DOI: [10.3390/aerospace9050247](https://doi.org/10.3390/aerospace9050247).
93. *Capuano V., Botteron C., Farine P.-A.* GNSS performances for MEO, GEO and HEO // . т. 4. — 09.2013.
94. *Geng T., Su X., Zhao Q.* MEO and HEO satellites orbit determination based on GNSS onboard receiver // *Lecture Notes in Electrical Engineering*. — 2012. — янв. — т. 160. — с. 223–234. — DOI: [10.1007/978-3-642-29175-3_20](https://doi.org/10.1007/978-3-642-29175-3_20).
95. GNSS Performance Research for MEO, GEO, and HEO / *H. Liu [и др.] // China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2017 Proceedings: Volume III / под ред. J. Sun [и др.]*. — Singapore : Springer Singapore, 2017. — с. 37–45. — ISBN 978-981-10-4594-3.
96. Navigation in GEO, HEO, and Lunar Trajectory Using Multi-GNSS Sidelobe Signals / *M. Guan [и др.] // Remote Sensing*. — 2022. — т. 14, № 2. — DOI: [10.3390/rs14020318](https://doi.org/10.3390/rs14020318). — URL: <https://www.mdpi.com/2072-4292/14/2/318>.
97. Intersatellite laser ranging instrument for the GRACE follow-on mission / *B. S. Sheard [и др.] // Journal of Geodesy*. — 2012. — дек. — т. 86, № 12. — с. 1083–1095. — DOI: [10.1007/s00190-012-0566-3](https://doi.org/10.1007/s00190-012-0566-3).
98. Estimation of Vertical Phase Center Offset and Phase Center Variations for BDS-3 B1CB2a Signals / *S. Xie [и др.] // Remote Sensing*. — 2022. — дек. — т. 14. — с. 6380. — DOI: [10.3390/rs14246380](https://doi.org/10.3390/rs14246380).
99. Impact of Attitude Model, Phase Wind-Up and Phase Center Variation on Precise Orbit and Clock Offset Determination of GRACE-FO and CentiSpace-1 / *Y. Junjun [и др.] // Remote Sensing*. — 2021. — июль. — т. 13. — с. 2636. — DOI: [10.3390/rs13132636](https://doi.org/10.3390/rs13132636).
100. Effect of PCV and attitude on the precise orbit determination of Jason-3 satellite / *K. Li [и др.] // Journal of Applied Geodesy*. — 2022. — янв. — т. 16. — DOI: [10.1515/jag-2021-0052](https://doi.org/10.1515/jag-2021-0052).
101. *Kim D., Serrano L., Langley R.* Phase wind-up analysis: Assessing real-time kinematic performance // *GPS world: News and applications of the global positioning system*. — 2006. — сент. — т. 17. — с. 58–64.

102. Effects of antenna orientation on GPS carrier phase / J.-T. Wu [и др.] // . — 1992.
103. *Ertan A., Aslan A.* Attitude Determination of a Nanosatellite Using Magnetometer and Sun Sensor : дис. ... канд. / Ertan Altug, Aslan A.R. — 06.2021. — DOI: [10.13140/RG.2.2.26107.80165](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.26107.80165).
104. *Kikuya Y., Matunafa S.* On-board Relative Attitude Determination and Propagation Using Earth Sensor // Transactions of the Japan society for aeronautical and space sciences, aerospace technology Japan. — 2021. — март. — т. 19. — с. 231—237. — DOI: [10.2322/tastj.19.231](https://doi.org/10.2322/tastj.19.231).
105. *Van der Ha J.* Progress in Satellite Attitude Determination and Control // Transactions of the Japan society for aeronautical and space sciences. — 2009. — июль. — т. 57. — с. 191—198.
106. *Zhang C., Lin G., Chen Z.* Research on Attitude Calculation Based on MEMS Sensor // Journal of Physics: Conference Series. — 2023. — март. — т. 2450. — с. 012078. — DOI: [10.1088/1742-6596/2450/1/012078](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2450/1/012078).
107. *Liebe C.* Star trackers for attitude determination // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. — 1995. — т. 10, № 6. — с. 10—16. — DOI: [10.1109/62.387971](https://doi.org/10.1109/62.387971).
108. An accuracy measurement method for star trackers based on direct astronomic observation / T. Sun [и др.] // Scientific Reports. — 2016. — март. — т. 6, № 1. — с. 22593. — DOI: [10.1038/srep22593](https://doi.org/10.1038/srep22593).
109. Overview on the satellite attitude determination methods / E. Benfriha [и др.] // . — 12.2021.
110. On Increasing the Accuracy of Star Trackers to Subsecond Levels / A. Zakharov [и др.] // Solar System Research. — 2018. — дек. — т. 52. — с. 636—643. — DOI: [10.1134/S0038094618070201](https://doi.org/10.1134/S0038094618070201).
111. *Stekolschikov O., Zakharov A., Prokhorov M.* Design Philosophy of a Star Tracker of the SAI MSU with the Mirror Objective and Narrow Field of View // *Mechanica, upravlenie i informatika (Mechanics, Control and Computer Science)*. — 2012. — т. 13. — с. 69—79.

112. A Sub-pixel Centroid Algorithm for Star Image Based on Gaussian Distribution / J. Sun [и др.] // Transactions of The Japan Society for Aeronautical and Space Sciences. — 2011. — февр. — т. 53. — с. 307—310. — DOI: [10.2322/tjsass.53.307](https://doi.org/10.2322/tjsass.53.307).
113. Star Centroiding Based on Fast Gaussian Fitting for Star Sensors / X. Wan [и др.] // Sensors (Basel, Switzerland). — 2018. — авг. — т. 18, № 9. — с. 2836. — DOI: [10.3390/s18092836](https://doi.org/10.3390/s18092836).
114. Efficiency of methods for recognizing stellar configurations by comparing pairs of stars with and without using information about the brightness of stars. / A. Biryukov [и др.] // 3rd All-Russian Scientific and Technical Conference "Modern Problems of Orientation and Navigation of Spacecraft" Series: "Mechanics, Control and Informatics". т. 13. — 2013. — с. 220—229.
115. *Hashemi M., Mashhadi K. M., Fiuzy M.* Modification and hardware implementation of star tracker algorithms // SN Applied Sciences. — 2019. — нояб. — т. 1, № 12. — с. 1524. — DOI: [10.1007/s42452-019-1530-0](https://doi.org/10.1007/s42452-019-1530-0).
116. *Samaan M., Pollock T., Junkins J.* Predictive Centroiding for Star Trackers with the Effect of Image Smear // Journal of the Astronautical Sciences. — 2002. — март. — т. 50. — с. 113—123. — DOI: [10.1007/BF03546333](https://doi.org/10.1007/BF03546333).
117. *Spratling B., Mortari D.* A Survey on Star Identification Algorithms // Algorithms. — 2009. — март. — т. 2. — с. 93—107. — DOI: [10.3390/a2010093](https://doi.org/10.3390/a2010093).
118. *Cole C., Crassidis J.* Fast Star-Pattern Recognition Using Planar Triangles // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2006. — т. 29, № 1. — с. 64—71. — DOI: [10.2514/1.13314](https://doi.org/10.2514/1.13314).
119. Optimization of center of gravity algorithms in a Shack-Hartmann sensor / T. Fusco [и др.] // Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering. — 2006. — июнь. — т. 6272. — DOI: [10.1117/12.670811](https://doi.org/10.1117/12.670811).
120. *Zhang H., Yuan J.-H., Liu E.-H.* CCD noise effects on position accuracy of star sensor. — 2006. — окт.
121. *Akondi V., Roopashree M., Prasad B.* Performance of Centroiding Algorithms at Low Light Level Conditions in Adaptive Optics // Advances in Recent Technologies in Communication and Computing. — 11.2009. — с. 366—369. — DOI: [10.1109/ARTCom.2009.30](https://doi.org/10.1109/ARTCom.2009.30).

122. Improving night sky star image processing algorithm for star sensors / M. Arbabmir [и др.] // Journal of the Optical Society of America. A, Optics, image science, and vision. — 2014. — апр. — т. 31. — с. 794–801. — DOI: [10.1364/JOSAA.31.000794](https://doi.org/10.1364/JOSAA.31.000794).
123. A novel star image thresholding method for effective segmentation and centroid statistics / X. Wei [и др.] // Optik. — 2013. — т. 124, № 20. — с. 4673–4677. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2013.01.067>.
124. Determining star-image location: A new sub-pixel interpolation technique to process image centroids / B. Quine [и др.] // Computer Physics Communications. — 2007. — т. 177, № 9. — с. 700–706. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2007.06.007>.
125. Centroid extraction algorithm based on grey-gradient for autonomous star sensor / Y. He [и др.] // Optik - International Journal for Light and Electron Optics. — 2019. — т. 194. — с. 162932. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.162932>.
126. *Weddell S., Webb R.* Dynamic Artificial Neural Networks for Centroid Prediction in Astronomy // 2006 Sixth International Conference on Hybrid Intelligent Systems (HIS'06). — 2006. — с. 68–68. — DOI: [10.1109/HIS.2006.264951](https://doi.org/10.1109/HIS.2006.264951).
127. Use of artificial neural networks for Hartmann-sensor lenslet centroid estimation / D. Montera [и др.] // Applied Optics. — 1996. — окт. — т. 35, № 29. — с. 5747–5757. — DOI: [10.1364/AO.35.005747](https://doi.org/10.1364/AO.35.005747).
128. *Li Z., Li X.* Centroid computation for Shack-Hartmann wavefront sensor in extreme situations based on artificial neural networks // Opt. Express. — 2018. — нояб. — т. 26, № 24. — с. 31675–31692. — DOI: [10.1364/OE.26.031675](https://doi.org/10.1364/OE.26.031675).
129. *Жаров В.* Сферическая астрономия. — ЛитРес, 2022. — ISBN 9785040939176. — URL: <https://books.google.ru/books?id=P8pBDwAAQBAJ>.
130. *Жамков А.* Моделирование орбит космических аппаратов для решения астрометрических и гравиметрических задач. — 2018. — с. 158.

131. *The SOFA software libraries.* — International Astronomical Union, 2018. — 367 p.
132. *Holmes S., Featherstone W.* A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions // *J. Geod.* — 2002. — май. — т. 76. — с. 279—299. — DOI: [10.1007/s00190-002-0216-2](https://doi.org/10.1007/s00190-002-0216-2).
133. *Cunningham L.* On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // *Celestial Mechanics.* — 1970. — июнь. — т. 2. — с. 207—216. — DOI: [10.1007/BF01229495](https://doi.org/10.1007/BF01229495).
134. *Беликов М., К. Т.* Эффективный алгоритм вычисления гравитационного потенциала Земли и его первых производных для решения спутниковых задач // *Computer Physics Communications.* — 1990. — т. 6, № 2.
135. *Pitjev N.* Modern Numerical Ephemerides of Planets and the Importance of Ranging Observations for Their Creation // *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy - CELEST MECH DYNAM ASTRON.* — 2001. — июль. — т. 80. — с. 249—271. — DOI: [10.1023/A:1012289530641](https://doi.org/10.1023/A:1012289530641).
136. *Fukushima T.* Time ephemeris // *Astronomy and Astrophysics.* — 1995. — янв. — т. 294. — с. 895—906.
137. *Petit G., Luzum B.* IERS conventions (2010) // *Tech. Rep. DTIC Document.* — 2010. — янв. — т. 36. — с. 180.
138. *Жамков А., Жаров В.* Моделирование движения двух информационно связанных космических аппаратов в гравитационном поле Земли для решения гравиметрических задач. — 2018.
139. *Montenbruck O., Gill E.* *Satellite Orbits. Models, Methods, and Applications.* — ISBN 3-540-67280 - X Springer – Verlag Berlin Heidelberg New York., 2000. — 382 p.
140. Geodetic VLBI for precise orbit determination of Earth satellites: a simulation study / G. Klotek [и др.] // *Journal of Geodesy.* — 2020. — июнь. — т. 94. — с. 56—. — DOI: [10.1007/s00190-020-01381-9](https://doi.org/10.1007/s00190-020-01381-9).

141. Spacecraft VLBI and Doppler tracking: Algorithms and implementation / D. Duev [и др.] // *Statistica Neerlandica - STAT NEERL.* — 2012. — март. — т. 541. — DOI: [10.1051/0004-6361/201218885](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201218885).
142. *Lachapelle G.* Hydrography. — 1998.
143. *Ashjaee J.* An analysis of Y-code tracking techniques and associated technologies // *Geodetical Info Magazine.* — 1993. — т. 7. — с. 26—30.
144. *Keegan R.* P-code aided Global Positioning System receiver // US Patent Office. — 1990.
145. *Eissfeller B.* Stand der GPS-Empfänger-Technologie. — 1993. — май.
146. *Ashjaee J., Lorenz R.* Precision GPS surveying after Y-code // *Proceedings of ION GPS-92.* — 1992. — с. 657—659.
147. Overview of the GPS M Code Signal / B. Barker [и др.]. — 2023. — май.
148. On GPS data quality of GRACE-FO and GRACE satellites: effects of phase center variation and satellite attitude on precise orbit determination / Y. Xia [и др.] // *Acta Geodaetica et Geophysica.* — 2020. — окт. — т. 56. — DOI: [10.1007/s40328-020-00324-2](https://doi.org/10.1007/s40328-020-00324-2).
149. Impact of Attitude Model, Phase Wind-Up and Phase Center Variation on Precise Orbit and Clock Offset Determination of GRACE-FO and CentiSpace-1 / Y. Junjun [и др.] // *Remote Sensing.* — 2021. — июль. — т. 13. — с. 2636. — DOI: [10.3390/rs13132636](https://doi.org/10.3390/rs13132636).
150. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparison and scientific issues / J. Picone [и др.] // *Journal of Geophysical Research.* — 2002. — дек. — т. 107. — DOI: [10.1029/2002JA009430](https://doi.org/10.1029/2002JA009430).
151. Evaluation and correction of the IRI2016 topside ionospheric electron density model / S. Wang [и др.] // *Advances in Space Research.* — 2016. — июнь. — т. 58. — DOI: [10.1016/j.asr.2016.06.020](https://doi.org/10.1016/j.asr.2016.06.020).
152. *Kutschera M., Zajiczek W.* Shapiro effect for relativistic particles - testing General Relativity in a new window // *Acta Physica Polonica Series B.* — 2009. — июнь. — т. 41.

153. *Ashby N., Bender P.* Measurement of the Shapiro Time Delay Between Drag-Free Spacecraft // . — 01.2008. — с. 219—230. — ISBN 978-3-540-34376-9. — DOI: [10.1007/978-3-540-34377-6_10](https://doi.org/10.1007/978-3-540-34377-6_10).
154. *Tapley B. D., Schutz B. E., Born G. H.* Statistical Orbit Determination. — Center for Space Research The University of Texas at Austin, Center for Space Research, Colorado Center for Astrodynamics Research University of Colorado, Boulder Amsterdam : Elsevier Academic Press, 2004. — 563 p.
155. *Жамков А. С., Жаров В. Е.* Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с помощью радиодальномерных и доплеровских измерений. — МГУ имени М. В. Ломоносова, Физический факультет : ВМУ. Серия 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ № 3, 2016. — с. 61—69.
156. *Zapevalin P., Zharov V., Zhamkov A.* LOIS – a Program for Refining the Orbits of Artificial Earth Satellites Using Global Positioning Systems // Moscow University Physics Bulletin. — 2021. — дек. — т. 76, № 1. — S110—S117. — DOI: [10.3103/S0027134922010118](https://doi.org/10.3103/S0027134922010118).
157. *JPL N. N.* About SPICE TOOLKIT. — 2018. — <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/aboutspice.html>.
158. *Zhamkov A. S., Zharov V. E.* Improvement of the orbit of the Spektr-R spacecraft in the RadioAstron mission on the basis of radio range and Doppler measurements // Moscow University Physics Bulletin. — 2016. — май. — т. 71, № 3. — с. 299—308. — DOI: [10.3103/S0027134916030152](https://doi.org/10.3103/S0027134916030152). — URL: <https://doi.org/10.3103/S0027134916030152>.
159. Уточнение орбиты космического радиотелескопа в проекте «Миллиметр-он» («Спектр-М») / П. Р. Запевалин [и др.] // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2022. — № 3. — с. 34.
160. RadioAstron orbit determination and evaluation of its results using correlation of space-VLBI observations / М. Zakhvatkin [и др.] // Advances in Space Research. — 2019. — май. — т. 65. — DOI: [10.1016/j.asr.2019.05.007](https://doi.org/10.1016/j.asr.2019.05.007).
161. Efficient Star Identification Using a Neural Network / D. Rijlaarsdam [и др.] // Sensors. — 2020. — т. 20, № 13. — с. 3684. — DOI: [10.3390/s20133684](https://doi.org/10.3390/s20133684).

162. *Hong J., Dickerson J. A.* Neural-Network-Based Autonomous Star Identification Algorithm // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2000. — т. 23, № 4. — с. 728—735. — DOI: [10.2514/2.4589](https://doi.org/10.2514/2.4589).
163. *Mellinger A.* A Color All-Sky Panorama Image of the Milky Way // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. — 2009. — т. 121. — с. 1180—1187. — DOI: [10.1086/648480](https://doi.org/10.1086/648480).
164. Astroquery: An Astronomical Web-querying Package in Python / A. Ginsburg [и др.] // The Astronomical Journal. — 2019. — март. — т. 157. — с. 98. — DOI: [10.3847/1538-3881/aafc33](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aafc33).
165. Gaia Data Release 2 - Summary of the contents and survey properties / A. Brown [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2018. — т. 616. — A1. — DOI: [10.1051/0004-6361/201833051](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833051).
166. *Mannor S., Peleg D., Rubinstein R.* The cross entropy method for classification // Machine Learning, Proceedings of the Twenty-Second International Conference (ICML 2005), Bonn, Germany, August 7-11, 2005. — 01.2005. — с. 561—568. — DOI: [10.1145/1102351.1102422](https://doi.org/10.1145/1102351.1102422).
167. *Zapevalin P., Novoselov A., Zharov V.* Artificial neural network for star tracker centroid computation // Advances in Space Research. — 2022. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.11.023>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117722010456>.
168. Fundamental Concepts of Convolutional Neural Network / A. Ghosh [и др.] // Recent Trends and Advances in Artificial Intelligence and Internet of Things / под ред. E. Valentina, R. Balas, S. Rajshree. — Springer, Boston, 01.2020. — с. 519—567. — ISBN 978-3-030-32643-2. — DOI: [10.1007/978-3-030-32644-9_36](https://doi.org/10.1007/978-3-030-32644-9_36).
169. *Linares A.* Facial KeyPoint Detection with Pytorch. — 2019.
170. Gaia Data Release 2. The astrometric solution / L. Lindegren [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2018. — апр. — т. 616. — A2. — DOI: [10.1051/0004-6361/201832727](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201832727).
171. *Kingma D., Ba J.* Adam: A Method for Stochastic Optimization // International Conference on Learning Representations. — 12.2014. — DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980>.

172. Dice Loss for Data-imbalanced NLP Tasks / X. Li [и др.] // Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. — 11.2019. — с. 465—476. — DOI: [10.18653/v1/2020.acl-main.45](https://doi.org/10.18653/v1/2020.acl-main.45).
173. Mean Squared Error / J. Fürnkranz [и др.] // Encyclopedia of Machine Learning / под ред. C. Sammut, G. Webb. — Springer, Boston, 01.2010. — DOI: [10.1007/978-0-387-30164-8_528](https://doi.org/10.1007/978-0-387-30164-8_528).
174. On Power Jaccard Losses for Semantic Segmentation / D. Duque [и др.] // 16th International Conference on Computer Vision Theory and Applications. — 01.2021. — с. 561—568. — DOI: [10.5220/0010304005610568](https://doi.org/10.5220/0010304005610568).
175. CenterNet: Keypoint Triplets for Object Detection / K. Duan [и др.] // 2019 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). — arXiv, 2019. — с. 1294—1298. — DOI: [10.48550/ARXIV.1904.08189](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1904.08189).
176. *Akondi V., Roopashree M., Prasad B.* Optimization of Existing Centroiding Algorithms for Shack Hartmann Sensor // Proceeding of the National Conference on Innovative Computational Intelligence & Security Systems. — 08.2009. — с. 400—405. — DOI: [10.48550/ARXIV.0908.4328](https://doi.org/10.48550/ARXIV.0908.4328).
177. *Akondi V., Roopashree M., Prasad B.* Advanced Methods for Improving the Efficiency of a Shack Hartmann Wavefront Sensor // Topics in Adaptive Optics / под ред. R. K. Tyson. — InTech, Vienna, 01.2012. — с. 167—196. — ISBN 978-953-307-949-3. — DOI: [10.5772/29884](https://doi.org/10.5772/29884).
178. *Carsten.* Night sky image processing – Part 4: Calculate the star centroid with sub-pixel accuracy. — 2015. — <https://www.lost-infinity.com/night-sky-image-processing-part-4-calculate-the-star-centroid-with-sub-pixel-accuracy>.

Список рисунков

1.1	Различия в ходе шкал времени со временем в секундах.	19
1.2	Схема падения и отражения солнечного излучения на поверхность КА.	32
2.1	Схема расположения спутников ГЛОНАСС в трех различных плоскостях.	37
2.2	Схема кодовых измерений ГНСС.	38
2.3	Схема дифференциальных измерений	43
2.4	Алгоритм вычисления момента передачи сигнала с ГНСС-спутника. ϵ – достаточно малая величина. См. пояснения в тексте.	52
2.5	Процедура вычисления световой задержки ГНСС сигнала для НКА. В верхней части рисунка изображен ГНСС-спутник в разные моменты времени. Положение НС определяется либо путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения (<i>propagation</i>) с известными начальными условиями в некоторый момент времени t_{past} , либо путем интерполирования эфемерид. В нижней части рисунка изображен низкоорбитальный космический аппарат в момент времени t_{rec} , где t_{rec} – время приема сигнала. Вычисляется расстояние R_0 , задержка сигнала δt_{delay}^1 и определяется положение НС на момент времени $t_{tr}^{est,1} = (t_{rec} - \delta t_{delay}^1)$, где $t_{tr}^{est,1}$ – потенциальное время отправки сигнала. Данная процедура повторяется итеративно, пока не будет соблюдено одно из условий. Либо две последние вычисленные задержки, либо два последних расстояния должны совпадать в пределах малой величины ϵ . После этого можно считать, что последний вычисленный момент времени t_{tr}^{est} есть оценка истинного момента времени отправки сигнала t_{tr}^{true}	53
2.6	Угол для вычисления вектора РСВ	55
2.7	Система координат навигационного спутника.	55
2.8	Схема учета ионосферной задержки для системы НКА-НС.	59

2.9	Сильная (а)) и слабая (б)) геометрия навигационных спутников.	74
3.1	Основное окно программы LOIS.	80
3.2	Окно выбора параметров программного комплекса LOIS.	81
3.3	Метод поиска скачков фазы через составление временной разности безгеометрической комбинации PGF.	87
3.4	Невязка положения спутника GRACE A по безшумовым и безионосферным синтетическим измерениям.	95
3.5	Невязка положения спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодовых измерений 0.5 м и шумом фазовых измерений 5 мм.	96
3.6	Невязка по радиальной (R), трансверсальной (T) и бинормальной компоненте (B) положения спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодовых измерений 0.5 м. Измерение P_1	97
3.7	Невязки компонент радиус-вектора положения спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом фазового измерения 5 мм. Комбинация PIF.	98
3.8	Невязки компонент вектора скорости спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодового измерения 5 мм. Комбинация PIF.	99
3.9	Демонстрация алгоритма сглаживания кодовых измерений при определении орбиты спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодовых измерений 0.5 м. Измерение P_1	100
3.10	Среднее и СКО невязок (O-C) эксперимента по определению орбиты GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодового измерения 0.5 м. Комбинация CIF.	101
3.11	Системные статистические параметры эксперимента определения орбиты GRACE A по синтетическим измерениям с шумом кодовых измерений 0.5 м и шумом фазовых измерений 5 мм.	102
3.12	Модуль разницы радиус-векторов опорной и уточняемой орбиты спутника GRACE A в дифференциальном режиме двойных разностей с базой GRACE A – GRACE B по синтетическим измерениям с шумом одиночного кодового измерения 0.5 м.	103

3.13	Модуль разницы радиус-векторов опорной и уточняемой орбиты спутника GRACE A в режиме нулевых (PPP) и двойных разностей (DD) по синтетическим безионосферным кодовым измерениям с шумом одиночного измерения 0.5 м.	104
3.14	Модуль разницы радиус-векторов опорной и уточняемой орбиты спутника GRACE A в режиме нулевых (PPP) и двойных разностей (DD) по синтетическим фазовым измерениям с шумом 5 мм.	105
3.15	Среднее и СКО невязок (O-C) эксперимента по определению орбиты GRACE A по синтетическим измерениям системы ГЛОНАСС с шумом фазового измерения 5 мм. Комбинация PIF.	106
3.16	Системные статистические параметры эксперимента определения орбиты GRACE A по синтетическим измерениям ГЛОНАСС с шумом фазового измерения 5 мм. Комбинация PIF.	107
3.17	Невязки трехмерного положения спутника GRACE A по синтетическим измерениям с шумом фазового измерения 5 мм. Комбинация PIF.	108
3.18	Комбинация CPIF реальных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.	110
3.19	Комбинация CPIF реальных сглаженных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.	111
3.20	Комбинация MW реальных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.	112
3.21	Комбинация MW реальных сглаженных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.	113
3.22	Комбинация PGF реальных и модельных измерений спутника GRACE A на 207-й день 2010 г.	114
3.23	Системные статистические параметры эксперимента определения орбиты GRACE A по реальным измерениям.	115
3.24	Невязка трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям.	116
3.25	Невязка трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям с различной ошибкой начального вектора состояния.	117

- 3.26 Количество спутников в реальных измерениях для режима нулевых и двойных разностей. 119
- 3.27 Невязка трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям. Кодовая и фазовая безионосферные комбинации в режиме двойных разностей. 120
- 3.28 Невязка трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям. Фазовая безионосферная комбинация в режиме нулевых и двойных разностей. 121
- 3.29 Невязка радиальной компоненты трехмерного положения спутника GRACE A по реальным измерениям. Фазовая безионосферная комбинация в режиме нулевых и двойных разностей. 122
- 3.30 Пример работы метода фиксации целочисленных неоднозначностей двухразностных фазовых измерений. Невязка трехмерного положения спутника GRACE A. 123
- 3.31 Схема обратных наблюдений ГНСС. 127
- 3.32 Зависимость эффективно изотропно излучаемой мощности различных поколений спутников GPS от угла отклонения от надира. 128
- 3.33 Оценка видимости НС систем GPS/ГЛОНАСС/Galileo/BeiDou с высокоэллиптической орбиты в главном и первом боковом лепестке диаграммы направленности НС. 130
- 3.34 Распределение количества видимых спутников систем GPS/ГЛОНАСС/Galileo/BeiDou для ВЭО по главному и первому боковому лепестку диаграммы направленности НС. 131
- 3.35 Оценка видимости НС систем GPS/ГЛОНАСС со СОО в главном и первом боковом лепестке диаграммы направленности НС. Временной интервал составляет примерно 2.3 периода орбиты. 132
- 3.36 Распределение количества видимых спутников систем GPS/ГЛОНАСС для СОО по главному и первому боковому лепестку диаграммы направленности НС. 133
- 4.1 Изображения звезд размером 32×32 пикселей. 136
- 4.2 Архитектура предлагаемой нейросети. 138

- 4.3 Входное изображение и выходная маска. Зеленой точкой отмечен истинный центр звезды. Желтым отмечена область наиболее вероятного нахождения центра звезды. 138
- 4.4 Процесс создания маски звезды. Слева направо: создание маски центрального пикселя, применение фильтра Гаусса, создание маски субпикселя. 139
- 4.5 Изображения звезд тренировочного датасета размера 16×16 . . . 140
- 4.6 Процесс аугментации изображений: а) тренировочный датасет, б) тестовый и валидационный датасеты. На рис. а) к тренировочному изображению размера 32×32 применяется CenterCrop (22, 22), а затем RandomCrop (16, 16). На рис. б) к изображению применяется только CenterCrop (16, 16). 141

Список таблиц

1	Пример отличий шкал времени.	20
2	Значения чисел Лява	26
3	Значения диагональных элементов матриц ОФК	85
4	Процесс обучения нейросети. σ_{gauss} обозначает СКО фильтра Гаусса, который применяется к маскам звезд.	142
5	Сравнение ошибки определения центра звезды с использованием метода центра тяжести и нейросети. Горизонтальная и вертикальная ошибка обозначается как $ \Delta X $ и $ \Delta Y $ соответственно.	142

Приложение А

Матрицы Фильтра Калмана

А.1 Матрица перехода параметров движения КА

В простейшем случае, когда уточняемыми параметрами являются координаты и скорости КА, матрица перехода выглядит следующим образом:

$$F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t \\ \frac{\partial \ddot{r}_x}{\partial x} t & \frac{\partial \ddot{r}_x}{\partial y} t_k & \frac{\partial \ddot{r}_x}{\partial z} t & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{r}_y}{\partial x} t & \frac{\partial \ddot{r}_y}{\partial y} t_k & \frac{\partial \ddot{r}_y}{\partial z} t & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{r}_z}{\partial x} t & \frac{\partial \ddot{r}_z}{\partial y} t_k & \frac{\partial \ddot{r}_z}{\partial z} t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где t – временной интервал между наблюдениями. В случае наличия дополнительных оцениваемых параметров, независящих от модели сил, данная матрица расширяется диагональным образом с единственным диагональным единичным элементом. В случае, если параметры зависят от модели сил, то берется производная модели сил по этим параметрам элементам в вышеприведенной матрице. Для вычисления производных, стоящих в левом нижнем квадрате матрицы [A.1](#) достаточно взять производную от Кеплеровской модели сил, поскольку производные от возмущений достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь. Кроме того, на практике оказывается, что для более точных расчетов матрица перехода используется только для распространения ковариационной матрицы ошибок уточняемых параметров, а для распространения самих параметров используется численное интегрирование уравнений движения.

A.2 Матрица нормальных уравнений

Матрица нормальных уравнений для случая шестимерного вектора состояния записывается следующим образом:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial C^1}{\partial x} & \frac{\partial C^1}{\partial y} & \frac{\partial C^1}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial C^n}{\partial x} & \frac{\partial C^n}{\partial y} & \frac{\partial C^n}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

где C – модель наблюдения, n – количество доступных наблюдений на данную эпоху.

В случае наличия дополнительных уточняемых параметров, зависящих от модели наблюдений, матрица несколько усложняется.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial C^1}{\partial x} & \frac{\partial C^1}{\partial y} & \frac{\partial C^1}{\partial z} & \frac{\partial C^1}{\partial N_1} & \frac{\partial C^1}{\partial N_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C^1}{\partial(c\delta t)} \\ \frac{\partial C^2}{\partial x} & \frac{\partial C^2}{\partial y} & \frac{\partial C^2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial C^2}{\partial N_1} & \frac{\partial C^2}{\partial N_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C^2}{\partial(c\delta t)} \\ \frac{\partial C^3}{\partial x} & \frac{\partial C^3}{\partial y} & \frac{\partial C^3}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C^3}{\partial N_1} & \frac{\partial C^3}{\partial N_2} & 0 & 0 & \frac{\partial C^3}{\partial(c\delta t)} \\ \frac{\partial C^4}{\partial x} & \frac{\partial C^4}{\partial y} & \frac{\partial C^4}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C^4}{\partial N_1} & \frac{\partial C^4}{\partial N_2} & \frac{\partial C^4}{\partial(c\delta t)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

При этом производные находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^1}{\partial x} &= \frac{x - x^1}{R}, \\ \frac{\partial C_{SD}^1}{\partial x} &= \frac{x - x^1}{R}, \\ \frac{\partial C_{DD}^1}{\partial x} &= \frac{x - x^1}{R} - \frac{x - x^0}{R}, \\ \frac{\partial C_{PIF}^1}{\partial N_1} &= \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, \quad \frac{\partial C_{PIF}^1}{\partial N_2} = -\frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, \\ \frac{\partial C_{L_1}^1}{\partial N_1} &= \lambda_1, \quad \frac{\partial C_{L_2}^1}{\partial N_2} = \lambda_2, \\ \frac{\partial C^1}{\partial(c\delta t)} &= 1, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

где x^1 – координата НС, x^0 – координата фиксированного НС при составлении двойной разности, R – расстояние спутник-приемник.

А.3 Матрица шума модели движения

На практике, в случае дискретных измерений, матрица шума модели движения вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 V_{1-3} &= \begin{pmatrix} \Phi_{11}T + \frac{\Phi_{44}T^3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22}T + \frac{\Phi_{55}T^3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{33}T + \frac{\Phi_{66}T^3}{3} \\ (\Phi_{11}F_{41} + \Phi_{44})\frac{T^2}{2} & \Phi_{22}F_{42}\frac{T^2}{2} & \Phi_{33}F_{43}\frac{T^2}{2} \\ \Phi_{11}F_{51}\frac{T^2}{2} & (\Phi_{22}F_{52} + \Phi_{55})\frac{T^2}{2} & \Phi_{33}F_{53}\frac{T^2}{2} \\ \Phi_{11}F_{61}\frac{T^2}{2} & \Phi_{22}F_{62}\frac{T^2}{2} & (\Phi_{33}F_{63} + \Phi_{66})\frac{T^2}{2} \end{pmatrix}, \\
 V_4 &= \begin{pmatrix} (\Phi_{11}F_{41} + \Phi_{44})\frac{T^2}{2} \\ \Phi_{22}F_{42}\frac{T^2}{2} \\ \Phi_{33}F_{43}\frac{T^2}{2} \\ (\Phi_{11}F_{41}^2 + \Phi_{22}F_{42}^2 + \Phi_{33}F_{43}^2)\frac{T^3}{3} + \Phi_{44}T \\ (\Phi_{11}F_{41}F_{51} + \Phi_{22}F_{42}F_{52} + \Phi_{33}F_{43}F_{53})\frac{T^3}{3} \\ (\Phi_{11}F_{41}F_{61} + \Phi_{22}F_{42}F_{62} + \Phi_{33}F_{43}F_{63})\frac{T^3}{3} \end{pmatrix}, \\
 V_5 &= \begin{pmatrix} \Phi_{11}F_{51}\frac{T^2}{2} \\ (\Phi_{22}F_{52} + \Phi_{55})\frac{T^2}{2} \\ \Phi_{33}F_{53}\frac{T^2}{2} \\ (\Phi_{11}F_{41}F_{51} + \Phi_{22}F_{42}F_{52} + \Phi_{33}F_{43}F_{53})\frac{T^3}{3} \\ (\Phi_{11}F_{51}^2 + \Phi_{22}F_{52}^2 + \Phi_{33}F_{53}^2)\frac{T^3}{3} + \Phi_{55}T \\ (\Phi_{11}F_{51}F_{61} + \Phi_{22}F_{52}F_{62} + \Phi_{33}F_{53}F_{63})\frac{T^3}{3} \end{pmatrix}, \\
 V_6 &= \begin{pmatrix} \Phi_{11}F_{61}\frac{T^2}{2} \\ \Phi_{22}F_{62}\frac{T^2}{2} \\ (\Phi_{33}F_{63} + \Phi_{66})\frac{T^2}{2} \\ (\Phi_{11}F_{41}F_{61} + \Phi_{22}F_{42}F_{62} + \Phi_{33}F_{43}F_{63})\frac{T^3}{3} \\ (\Phi_{11}F_{51}F_{61} + \Phi_{22}F_{52}F_{62} + \Phi_{33}F_{53}F_{63})\frac{T^3}{3} \\ (\Phi_{11}F_{61}^2 + \Phi_{22}F_{62}^2 + \Phi_{33}F_{63}^2)\frac{T^3}{3} + \Phi_{66}T \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

где V_{1-3} – первые три столбца, а V_4, V_5, V_6 – последние три столбца матрицы V . Для дополнительных уточняемых параметров матрица V расширяется диагональным образом, т.е. заполняется только диагональный элемент, на месте

которого стоит автоковариация модели перехода данного параметра. В случае уточнения параметра неоднозначности фазового измерения, диагональный элемент равен нулю, поскольку неоднозначности остаются постоянными в течение всей видимости НС с борта НКА.