ОТЗЫВ

официального оппонента
на диссертацию Икэда Ясуси
«Квантовый метод сдвига аргумента и квантовые алгебры Мищенко–Фоменко в $Ugl(d,\mathbb{C})$», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 — геометрия и топология

Диссертационная работа Икэда Ясуси «квантованию» оператора сдвига аргумента, т.е. поднятию его в симметрическую алгебру Sg алгебры Ли g в случае $g = gl(d,\mathbb{C})$. Метод сдвига был предложен в работе А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко в 1978 г. и оказался эффективным средством исследования интегрируемости гамильтоновых систем. Этим определяется как *актуальность*, так и *практический интерес* его приложения к различным системам, возникающих на алгебрах Ли и, в частности, на алгебре gl. Дополнительно хочется отметить, что работа интересна не только сама по себе, но возможность дальнейших значимых обощений, о чём будет сказано ниже, вконце настоящего отзыва.

Работа состоит из введения, четырёх глав и списка литературы, включающего 21 наименование. Во введении дана общая характеристика исследования и краткий, но вполне исчерпывающий обзор публикаций по теме диссертации. Этот обзор в более развёрнутом виде продолжен в первой главе.

Глава 2 посвящена изучению базисных квантовых дифференцирований ∂^i_j в универсальной обёртывающей алгебре. Изучену основные свойства этих дифференцирований и, в частности, показано, сто они удовлетворяют «квантовому правилу Лейбница»

$$\partial(xy) = (\partial x)y + x(\partial y) + (\partial x)(\partial y)$$

(с. 36). Центральный Результат этой главы — теорема 2.4.1, в которой дано эксплицитное описание действия «векторного поля» $\partial_\xi = \sum \xi^i_j \partial^j_i$.

В третьей главе доказывается квантовый аналог классической теоремы Мищенко–Фоменко, который позволяет строить большие семейства коммутирующих полей, что имеет фундаментальное значение для теории интегрируемых систем. Доказательства опираются на результаты Винберга и Рыбникова, которые показали, что квантовые сдвиги в направлении ξ совпадают с коммутантом множества

$$\left\{ e^i_i,\ \sum_{i\neq j} \frac{e^i_i e^i_j}{z_i - z_j} \right\}_{i=1}^{d},$$

где $z_i \in \mathbb{C}$.

В последней, четвёртой главе работы выводится весьма нетривиальная формула для квантовых сдвигов аргумента второго порядка, использование которой позволяет найти новые, ранее не известные семейства коммутирующих элементов. Автор показывает, что выполнены следующие абсолютно не очевидные тождества

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & P_m^T \\ P_{m+2n} & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2n-k}{k} + \binom{2n-k-1}{k-1}\right) P_{m+k}^{(m+k)},$$

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & P_m^T \\ P_{m+2n+1} & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{k}\left(P_{m+k+1}^{(m+k)} + P_{m+k}^{(m+k+1)}\right),$$

где $P_n^{(m)}$ — коэффициенты матричного полинома

$$x^n f_+^{(n-j)}(x) = \sum_{i=1}^{m+n} \left(P_n^{(m)}\right)_j^i x^{i-1}$$

и

$$\sigma(x) = \sum_{i,j} x_j^i \delta_{\max\{i,j\}} \delta^{\min\{i,j\}},$$

$$f_+^{(n)} = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2}.$$

Собственно это, вместе с результатами предыдущей главы, определяет важную прикладную роль работы в теории интегрируемых систем. Интересно, что часть комбинаторных результатов была верифицирована с помощью программной системы `Mathematica`. Соответствующий код также приведён в диссертации.

Все перечисленные результаты, насколько я могу судить, новы и представляют, по моему мнению, значительный научный интерес. Доказательства разумно полны и корректны. Серьёзных замечаний к тексту у меня нет (конечно, в почти 100-страничном труде неизбежны опечатки и мелкие огрехи, но и их совсем мало). Отмечу только два момента:

- На с. 1 автореферата диссертант пишет: «Напомним, что гамильтоновой интегрируемой системой на M называется уравнение вида

  $$\dot{x} = \{H, x\},$$

  где H – функция Гамильтона (энергия системы)...» (то же и на с. 3 диссертации). Конечно, это неудачная формулировка: так определяется *любая* гамильтонова система, для интегрируемости нужны дополнительные свойства, которые, впрочем чуть ниже и приведены в тексте.

- Мне кажется, для «исторической справедливости», в список цитируемой литературы следует добавить статью И.М. Гельфанда «Центр инфинитезимального группового кольца» (см. Математический сборник, 68.1 (1950): 103–112).

Кроме того, мне было бы крайне интересно получит ответы на следующие вопросы:

- На первый взгляд кажется, что применяемая автором техника «жёстко привязана» к алгебре Ли $gl(d, \mathbb{C})$ – например, все вычисления существенно используют выбор базиса $\{e_i^j\}$ этой алгебры. Так ли это на самом деле и сколь просто (или сложно) обобщить полученные результаты на другие алгебры Ли (скажем, на $sl(d, \mathbb{C})$)? И сколь существен выбор $\mathbb{C}$ в качестве основного поля? Что изменится в вещественной ситуации?
- Второй, возможно, более сложный, но для меня и более интересный вопрос связан со обобщениями на гамильтоновы системы с бесконечным числом степеней свободы. Известно, что многое интегрируемые уравнения допускают интерпретацию как уравнения Эйлера алгебрах Ли. Например, в одной из работ В. Овсиенко (Valentin Ovsienko, Advances in Pure and Applied Mathematics, vol. 1, no. 1, 2010, pp. 7–17. https://doi.org/10.1515/apam.2010.002) рассмотрено уравнение
$$u_{tx} = u_y u_{xy} - u_x u_{yy},$$
которое является уравнением Эйлера на некотором обобщении алгебры Вирасоро, откуда следует бигамильтоновость этого уравнения. Конечноб существуют и другие содержательные примеры. Применимы ли в подобных ситуациях методы, подобные тем, которыми пользуется автор? Если да, то насколько сложна их адаптация к бесконечномерному случаю?

Автореферат диссертации полностью соответствует основному её тексту (не считая, конечно, того факта, что он написан по-русски, а сама диссертация изложена на английском языке). Все важнейшие полученные автором результаты были неоднократно апробированы на различных конференциях и семинарах и опубликованы в изданиях, индексируемых международной системой SCOPUS, а также российской РИНЦ.

На основании сказанного считаю, что диссертационная работа Икэда Ясуси «Квантовый метод сдвига аргумента и квантовые алгебры Мищенко–Фоменко в $Ugl(d, \mathbb{C})$» отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Икэда Ясуси заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. геометрия и топология.

Главный научный сотрудник
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук,
лаборатория № 6,
д.ф.-м.н., профессор

И.С. Красильщик
11 декабря 2024 г.

Подпись
заверяю
вед. инжене