

На правах рукописи

Кузнецов Никита Юрьевич

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ
НЕПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ
В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ
ДИФРАКЦИИ**

Специальность 1.3.19 —
«Лазерная физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Диссертация подготовлена на кафедре общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель — **Макаров Владимир Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты — **Розанов Николай Николаевич**,
доктор физико-математических наук,
академик РАН, профессор,
ФГБУН «Физико-технический институт
им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук»,
Отделение физики плазмы,
атомной физики и астрофизики
главный научный сотрудник

Манцызов Борис Иванович,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБУ ВО «Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова»
Физический факультет,
профессор кафедры общей физики

Фёдоров Михаил Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБУН Федеральный исследовательский центр
«Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук» (ИОФ РАН),
Отдел ТИАМ ЦЕНИ,
главный научный сотрудник

Защита состоится «23» ноября 2023 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.013.4 в по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы 1, стр. 62, корпус нелинейной оптики, аудитория им. С.А. Ахманова.

E-mail: diss.sov.31@physics.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/013.4/2642>

Автореферат разослан « » 2023 года

Учёный секретарь
диссертационного совета МГУ.013.4
кандидат физико-математических наук

А.А. Коновко

Общая характеристика работы

Интерференция падающих и рассеянных на различных объектах волн может приводить к возникновению изолированных узловых линий в пространстве, в точках которых амплитуда колебаний суммарного поля обращается в ноль, а фаза становится неопределенной. Потоки энергии вблизи них отличаются характерной вихревой структурой. Определение положения таких точек и описание структуры образуемых ими линий, получивших соответственно названия точек и линий фазовой сингулярности, анализ топологии последних, исследование характера изменения фазы колебаний скалярного поля при обходе этих точек по контурам малого размера являются предметом скалярной сингулярной оптики и акустики. С начала восьмидесятых годов прошлого века проводятся многочисленные, в основном теоретические, исследования статистики фазовых сингулярностей в случайных полях, условий их возникновения, динамики распространения в пространстве, закономерностей в распределении их топологических типов. К концу 90-ых годов появляется интерес к разработке методов генерации сингулярных пучков, содержащих заранее определённый набор фазовых сингулярностей. Генерация, измерение и преобразование их топологии осуществляются при помощи цилиндрических и конических линз и зеркал, спиральных фазовых пластинок, а также адаптивных зеркал, допускающих динамическую перестройку типов получаемых сингулярностей. Большую популярность получили методы конструирования топологически нетривиальных световых пучков при помощи голографически протравленных фазовых и амплитудных пластин, а также с помощью жидкокристаллических масок, позволяющих получать сингулярные пучки высочайшего качества и перестраиваться между различными их типами с рекордной скоростью.

В случае векторных полей, к которым относятся электромагнитные, место фазовых сингулярностей занимают сингулярности поляризации — точки пространства, в которых один из связанных с эллипсом поляризации параметров теряет смысл. Простейшим их примером служат C -точки и линии — области (в сечении и объёме соответственно) параксиальных пучков, поляризация в которых оказывается строго циркулярной. Предсказанные теоретически в 1980-ых годах, к началу 1990-ых они были обнаружены экспериментально в микроволновом излучении. C -точки можно рассматривать как фазовые сингулярности одной из циркулярно поляризованных компонент электромагнитной волны, поэтому экспериментальные методы получения таких точек часто базируются на наложении пучков с противоположными циркулярными поляризациями и различной структурой фазовых сингулярностей. Для получения содержащих поляризационные сингулярности пучков также используются двойные аксиконы, конические зеркала, жидкокристаллические маски с наведённым двулучепреломлением и адаптивные микрзеркала.

С конца 1980-ых годов вышло большое число работ, посвящённых роли сингулярностей поляризации в формировании общей картины светового поля, динамике их рождения, распространения и аннигиляции в оптических волокнах, линейных и нелинейных кристаллах и изотропных средах, морфологии и статистике поляризационных сингулярностей в случайных полях, методам их регистрации и генерации. Большая часть исследований проводилась в параксиальном приближении: трёхмерный вид C -линий рассматривался в них сугубо с позиций медленного дрейфа сингулярной точки в поперечном

сечении пучка по мере его распространения. Такое рассмотрение не может быть полным, поскольку в точке сингулярности, где не определена одна из характеристик эллипса поляризации, величина продольной компоненты вектора напряжённости электрического поля уже не может считаться малой, а «скорость» движения C -точек в поперечном сечении стремится к бесконечности вблизи точек их рождения и аннигиляции. В последнее десятилетие стали появляться исследования структуры трёхмерного распределения векторов электромагнитного поля вблизи линий истинно циркулярной (C^T) и истинно линейной (L^T) поляризации в некоторых задачах линейной оптики.

Значительный интерес в настоящее время привлекают оптические ленты — поверхности, заметаемые одним из характеризующих эллипс поляризации векторов при его прослеживании вдоль замкнутого контура. Вблизи поляризационных сингулярностей эти ленты могут иметь нетривиальную топологию, отражающую особенности локального распределения эллипсов поляризации. Анализ поля с учётом его продольной составляющей показывает, что существующая в параксиальной теории систематика C -точек не вполне применима к случаю существенно трёхмерных волн. Несмотря на то, что в ряде работ предлагаются новые классификации, их нельзя считать исчерпывающими — выработка полной систематики оптических лент остаётся актуальным вопросом.

Выходят отдельные работы, указывающие на возможность генерации таких состояний света, в которых сингулярные линии оказываются завязаны в узлы и тороидальные зацепления (хопфионы), образуя более высокий порядок топологических особенностей, предлагаются методы использования данных конфигураций оптического излучения в качестве носителей информации и характеристических маркеров рассеянного излучения. Однако число рассмотренных задач невелико и не позволяет сделать общие выводы о причинах возникновения той или иной топологии светового поля. В связи с этим исследование топологических особенностей непараксиальных световых полей в задачах линейной и нелинейной дифракции является **актуальным**.

Цели работы

1. Разработка эффективных алгоритмов обнаружения и визуализации линий сингулярности поляризации электромагнитного поля и оптических лент поляризации в численном эксперименте.
2. Исследование топологии линий сингулярности поляризации и оптических лент, возникающих при рассеянии монохроматической эллиптической поляризованной волны на структурах субволнового масштаба и при фокусировке лазерного излучения.
3. Определение наиболее устойчивых при варьировании параметров падающего излучения топологических инвариантов, характеризующих структуру и свойства линий сингулярности поляризации и оптических лент.
4. Исследование перспектив применения электромагнитных полей, обладающих сингулярностями поляризации, для определения характеристик вещества, демонстрирующего нелинейный оптический отклик на световое поле.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования является поляризационная структура электрических полей, возникающих при дифракции и рассеянии лазерного квазимонохроматического излучения на структурах субволнового масштаба, в том числе при наличии у этих структур нелинейно-оптического отклика. Предметом исследования являются топологические особенности полей эллипсов поляризации квазимонохроматического излучения, возникающие при его дифракции и рассеянии на структурах субволнового масштаба: сингулярности фазы и поляризации, а также оптические ленты.

Научная новизна полученных результатов

1. Разработан алгоритм, позволяющий обнаруживать и отслеживать изменения геометрии линий сингулярности поляризации электромагнитного поля с рекордной на момент первого применения вычислительной эффективностью.
2. Впервые обнаружена и описана структура линий сингулярности поляризации электрического поля монохроматической плоской волны, рассеянной металлическими и диэлектрическими частицами субволнового размера, и установлено существование в нём оптических лент поляризации различного типа.
3. Понятие числа перекручиваний оптической ленты впервые обобщено на случай непланарных контуров построения.
4. Впервые зафиксировано наличие нетривиальных узлов и зацеплений линий истинно циркулярной и истинно линейной поляризации и описаны их возможные конфигурации при рассеянии плоской монохроматической электромагнитной волны на частицах субволнового масштаба и при острой фокусировке параболическим зеркалом лазерных пучков.
5. Впервые продемонстрирована применимость алгоритмов глубокого машинного обучения к задачам нелинейной поляризационной оптики и показано качественное преимущество использования для этих целей лазерных пучков с сингулярностями фазы и поляризации электрического поля.

Практическая значимость работы

Проведённый в работе анализ условий возникновения, геометрии и распределения типов поляризационных сингулярностей при рассеянии и острой фокусировке света позволяет конструировать электромагнитные поля с топологически нетривиальными и устойчивыми к помехам конфигурациями. Оригинальный алгоритм прослеживания поляризационных сингулярностей в численном эксперименте, предложенный в работе, также позволит эффективно обнаруживать подобные топологические особенности в других полях, что может быть важным элементом решения задач оптической информатики; известные подходы к кодированию информации при помощи сингулярных линий фазы с геометрией сложных узлов могут быть обобщены на случай

проявляющих большее разнообразие топологических типов поляризационных сингулярностей. Наконец, приведённый анализ влияния наличия в поляризационном профиле излучения сингулярностей на протекание некоторых нелинейно-оптических процессов, в том числе задействующий методы глубокого машинного обучения, может быть использован для конструирования состояний света, для которых возрастает порог нежелательных в эксперименте явлений, таких как нелинейно-оптический коллапс в ходе самофокусировки.

Положения, выносимые на защиту

1. В электрическом поле монохроматической эллиптически поляризованной волны, рассеянной металлической или диэлектрической сферической частицей субволнового размера, на расстояниях порядка нескольких её характерных радиусов присутствуют линии круговой (C^T -линии) и линейной (L^T -линии) поляризации. Размеры занимаемой ими области пространства и их форма зависят от степени эллиптичности падающего излучения: при приближении его поляризации к круговой размеры области локализации C^T -линий увеличиваются, а при приближении к линейной — уменьшаются. Существующее зацепление L^T -линий с C^T -линиями не исчезает при любом изменении формы и ориентации эллипса поляризации падающего излучения. Инвариантом при изменении степени эллиптичности падающей волны является чётность индекса зацепления между совокупностями линий строго циркулярной и строго линейной поляризации.
2. При падении плоской монохроматической линейно поляризованной электромагнитной волны на планарный нелинейный метаматериал, базовый элемент которого содержит две тонкие металлические пластины, формируются две пересекающиеся линии циркулярной поляризации. Положение точки их пересечения в пространстве устойчиво к изменению длины падающей волны и её интенсивности и неустойчиво к изменению состояния её поляризации.
3. При острой фокусировке ($NA = 0.9$) эллиптически поляризованных Гауссовых и Лагерр-Гауссовых пучков, а также пучков Пуанкаре, падающих на параболическое зеркало вдоль его оси, вблизи его геометрического фокуса существует по крайней мере одна L^T -линия с топологией простого кольца, около которой C^T -линии образуют $(m; n)$ —торические узлы или зацепления, которые всегда m —кратно сцеплены с осью зеркала и n —кратно с вышеупомянутой L^T -линией. При изменении состояния поляризации падающего излучения неизменной оказывается чётность индекса зацепления между системами линий строго циркулярной и строго линейной поляризации.
4. Вблизи линий строго циркулярной поляризации электрического поля излучения, рассеянного частицей субволнового размера или жестко сфокусированного параболическим зеркалом, индексы внутреннего переключения оптических лент поляризации принимают целые значения тогда и только тогда, когда индекс зацепления контура их построения

со всей совокупностью линий циркулярной поляризации излучения является чётным. Знаки индексов внутреннего перекручивания лент большой и малой осей эллипса поляризации, прослеженных на одном контуре, противоположны.

5. Нахождение параметров изотропной гиротропной среды с кубической нелинейностью, определяющих в ней режим самовоздействия лазерного излучения, осуществляется искусственной нейронной сетью со свёрточной архитектурой на порядок точнее в процентном выражении, если при её обучении используются пучки, содержащие на своей оси сингулярности фазы или поляризации, по сравнению с результатами, получаемыми при использовании однородно поляризованных Гауссовых и Супергауссовых пучков.

Апробация работы и публикации по теме диссертации

Результаты работы опубликованы в 9 рецензируемых международных научных журналах [1–9] и доложены на Всероссийской школе-семинаре «Волны в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова (Можайск – 2017), XI Всероссийской школе для студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов по лазерной физике и лазерным технологиям (Саров – 2018), международных конференциях Advanced Laser Technologies ALT'16 (Голуэй, Ирландия – 2016), ALT'18 (Таррагона, Испания – 2018) и ALT'21 (Москва – 2021), XI Международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики» ФПО-2019 (Санкт-Петербург – 2019), конференции «Нейронные сети и их применение в научных исследованиях» (Москва – 2021) некоммерческого фонда развития науки и образования «Интеллект», XII Международной конференции по фотонике и информационной оптике (Москва – 2023).

Личный вклад автора

Результаты диссертации получены автором лично. Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук профессора В. А. Макарова, с которым определялось направление исследований и проводилось обсуждение полученных результатов. На всех этапах выполнения работы научную консультацию по вопросам сингулярной поляризационной оптики автору оказывал кандидат физико-математических наук К. С. Григорьев. Все алгоритмы автоматического обнаружения, визуализации и классификации по топологическим характеристикам линий сингулярности поляризации и оптических лент поляризации созданы и реализованы автором на основе теоретических работ, ранее выполненных доктором физико-математических наук В. А. Макаровым и кандидатами физико-математических наук К. С. Григорьевым, Ю. В. Владимировой и Н. Н. Потравкиным, результаты которых с их участием были адаптированы и применены автором для достижения целей диссертационной работы. Численное решение задачи об острой фокусировке лазерных пучков параболическим зеркалом, необходимое для реализации алгоритмов автоматического построения и классификации по топологическим характеристикам оптических лент, осуществлено кандидатом физико-математических наук Н. А. Пановым и А. Е. Рядченко. Отдельные вопросы численного решения этой задачи обсуждались с докторами физико-математических наук

В. П. Кандидовым и О. Г. Косаревой и кандидатом физико-математических наук Д. Е. Шпило.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и списка используемых обозначений. Объём работы составляет 132 страницы, в том числе 46 рисунков и 1 таблицу. Главы разбиты на параграфы, первый параграф каждой главы содержит краткий обзор литературы по тематике изложенных в ней исследований. Остальные параграфы содержат оригинальные результаты. В конце каждой главы они сформулированы в сжатой форме.

Содержание работы

Глава 1. Систематика, обнаружение и визуализация топологических особенностей электромагнитных полей

Первая глава начинается с обзорного параграфа, в котором последовательно изложена сформировавшаяся в литературе классификация топологических особенностей электромагнитных полей и введён используемый в дальнейшей работе математический формализм. Рассмотрена классификация и ключевые свойства фазовых и поляризационных сингулярностей электромагнитного поля, их топологические типы и основные ассоциированные с этими особенностями величины. Особое внимание уделено сингулярностям поляризации непараксиальных световых полей.

Следуя этой классификации, вектор напряжённости $\mathcal{E}(\mathbf{r}, \tau)$ электрического поля произвольной квазимонохроматической электромагнитной волны записывается в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, \tau) = \text{Re}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) \exp(-i\omega\tau)), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, τ — время, ω — циклическая частота, \mathbf{E} — медленно меняющаяся комплексная амплитуда напряжённости поля. С течением времени конец вектора \mathcal{E} описывает эллипс, геометрия и ориентация которого однозначно задаются значением \mathbf{E} в его центре.

Ориентация эллипса поляризации в пространстве определяется двумя независимыми направлениями: вектором нормали к плоскости эллипса

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \frac{1}{2} \text{Im}[\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}] \quad (2)$$

и двунаправленным вектором большой полуоси

$$\vec{\mathbf{A}} = \pm \text{Re} \left(\mathbf{E}^* \sqrt{\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{\|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\|}} \right). \quad (3)$$

Важными характеристиками эллипса поляризации являются также его степень эллиптичности M , независимая от \mathbf{N} и $\vec{\mathbf{A}}$ и характеризующая его

близость к окружности, а также двунаправленный вектор малой оси $\vec{\vec{B}}$, однозначно определяемый тремя другими характеристиками. Как функции \mathbf{E} эти величины записываются следующим образом:

$$M = \frac{\|\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*\|}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}; \quad \vec{\vec{B}} = \pm \text{Im} \left(\mathbf{E}^* \sqrt{\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{\|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\|}} \right). \quad (4)$$

Поляризационными сингулярностями считаются точки, в которых поляризация излучения строго линейна (L^\top -точки, $M = 0$, \mathbf{N} и $\vec{\vec{B}}$ не определены) или строго циркулярна (C^\top -точки, $M = 1$, $\vec{\vec{A}}$ и $\vec{\vec{B}}$ не определены). Поскольку условие возникновения сингулярности может быть задано двумя скалярными вещественными уравнениями для компонент вектора \mathbf{E} , нахождение точек сингулярности поляризации в плоских сечениях области существования электромагнитного поля представляет сравнительно простую математическую задачу, связанную с решением системы двух уравнений с двумя неизвестными, которые в малой области могут рассматриваться с точностью до линейных слагаемых.

В литературе построение объёмной геометрии сингулярных линий как правило производится при помощи отыскания особых точек в семействе вышеупомянутых плоских сечений исследуемой области поля с их последующим соединением некоторой интерполяционной функцией. Такой подход требует решения серии линейных уравнений, число которых пропорционально кубу пространственного разрешения задачи.

Основная часть главы, содержащая оригинальные результаты, посвящена описанию алгоритма построения сингулярных линий поляризации в произвольных непараксиальных квазимонохроматических электромагнитных полях, превосходящего выше описанный подход по точности и вычислительной эффективности. Данный алгоритм используется для получения результатов двух следующих глав диссертации. Он заключается в интегрировании дифференциальных уравнений, решениями которых являются вектор-функции $\mathbf{r}_{C,L}$, параметрически задающие сингулярные линии:

$$\frac{d\mathbf{r}_C(s)}{ds} = \mathbf{\Omega}_C = \text{Re}(\nabla\psi) \times \text{Im}(\nabla\psi); \quad \psi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (5)$$

для C^\top -линий и

$$\frac{d\mathbf{r}_L(s)}{ds} = \vec{\vec{\Omega}}_L = \pm \sqrt{\psi} \text{adj} \left(\mathbf{G}^* - \frac{\psi^*}{\|\mathbf{E}\|^2} \mathbf{G} \right) \mathbf{E}, \quad (6)$$

где \mathbf{G} — тензор градиента \mathbf{E} , для L^\top -линий соответственно.

Число элементарных шагов численного интегрирования при этом растёт пропорционально первой степени пространственного разрешения, что позволяет значительно сократить вычислительное время по сравнению с подходом, основанным на соединении сингулярных точек, найденных в отдельных плоских срезах, и одновременно повысить точность отыскания поляризационных сингулярностей обоих классов. Эта точность дополнительно может быть оценена и выдержана на необходимом уровне с использованием адаптивных

методов численного интегрирования, что также продемонстрировано в главе. Построение сингулярных линий обоих классов по этому алгоритму было выполнено во втором параграфе главы на примере электромагнитного поля, рассеянного сферической кремниевой частицей субволнового размера.

Небольшая модификация метода также позволяет строить траектории, вдоль которых деформируются сингулярные линии при изменении произвольного параметра μ содержащего их поля. В заключительном параграфе главы выведены уравнения, решениями которых являются параметризации этих траекторий:

$$\frac{d\mathbf{r}_C}{d\mu} = \frac{\text{Im}(\partial_\mu \psi \times d\boldsymbol{\Omega}_C)}{\|d\boldsymbol{\Omega}_C\|^2} \quad (7)$$

для C^T -линий и

$$\frac{d\mathbf{r}_L}{d\mu} = \left(\frac{\mathbf{D}_L}{\text{Tr}(\mathbf{D}_L)} - \mathbf{I} \right) \left(\mathbf{G}^* - \frac{\psi^*}{\|\mathbf{E}\|^2} \mathbf{G} \right)^{-1} \left(\partial_\mu \mathbf{E}^* - \frac{\psi^*}{\|\mathbf{E}\|^2} \partial_\mu \mathbf{E} \right), \quad (8)$$

для L^T -линий, где $\mathbf{D}_L = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_L \otimes \overleftrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_L$, \mathbf{I} — единичная матрица.

Решение данных уравнений проведено на примере сингулярных линий поляризации электромагнитного поля плоской монохроматической волны, рассеянной сфероидальной металлической частицей. Показано, что траектории эволюции сингулярных линий обоих классов по мере изменения угла поляризации падающей волны строго соответствуют изменению формы данных линий при их последовательном построении для нескольких различных значений данного угла, а значения M вдоль построенных линий отличаются от теоретических не более, чем на 10^{-7} .

Глава 2. Топологические особенности светового поля, рассеянного объектами субволновых размеров

Обзорный параграф второй главы диссертации посвящён рассмотрению существующих подходов к классификации сингулярных точек по типу распределения окружающих их эллипсов поляризации: параметров изотропии $\Upsilon_{C,L}$, позволяющих детально охарактеризовать вращение поляризационного эллипса в выделенной проекции при обходе сингулярной точки поляризации по малому замкнутому контуру, и оптических лент, заметаемых одним из векторов $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$, $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ и $\overleftrightarrow{\mathbf{N}}$ при аналогичном обходе в пространстве.

Основная часть второй главы посвящена рассмотрению топологического каркаса — совокупности всех линий сингулярности поляризации — в трёх электромагнитных полях, соответственно образующихся при рассеянии изначально плоской монохроматической волны на одиночных рассеивающих диэлектрических и металлических частицах, а также на периодических структурах субволнового размера. Комплексная амплитуда \mathbf{E}_0 падающей волны задавалась выражением

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \{ \mu_+ (\mathbf{e}_z \cos \theta + \mathbf{e}_x \sin \theta) + i \mu_- \mathbf{e}_y \}, \quad (9)$$

где $\mathbf{e}_{x,y,z}$ — орты декартовой системы координат, θ — угол между осью симметрии рассеивающей частицы или среды Oz и волновым вектором, а μ_\pm выражается через степень эллиптичности эллипса поляризации падающей

волны M_0 и угол наклона Ψ большой оси эллипса поляризации в плоскости, перпендикулярной волновому вектору, с помощью равенства

$$\mu_{\pm} = 0.5 \left[(1 - M_0)^{1/2} \exp(-i\Psi) \pm (1 + M_0)^{1/2} \exp(i\Psi) \right]. \quad (10)$$

Компоненты вектора напряженности электрического поля монохроматической волны ($\lambda = 710$ нм), рассеянной сферической кремниевой частицей (радиус $R = 90$ нм) находились (параграф 2.2) прямым решением системы уравнений Максвелла методом конечных элементов с использованием программного пакета COMSOL Multiphysics. При этом на границе области построения использовались периодические граничные условия, дополненные «Идеально подобранными слоями» (Perfectly Matched Layers), предотвращающими отражение волны от границ области построения. Расчётное пространство было разбито на 50 000 конечных элементов.

Компоненты вектора амплитуды напряженности электрического поля монохроматической электромагнитной волны ($\lambda = 600$ нм), рассеянной металлическим сфероидом (расстояние между фокусами $2f = 60$ нм, отношение длин осей 3.125), рассчитывались (параграф 2.3) по известным аналитическим формулам¹:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + f(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) (\mathbf{e}_z \vartheta_{10}(\xi, \eta) + (\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi) \vartheta_{11}(\xi, \eta)), \quad (11)$$

где

$$\vartheta_{nm}(\xi, \eta) = \frac{(\tilde{\varepsilon} - 1)P_n^{(m)}(\xi_0)}{(\tilde{\varepsilon}_{nm} - \tilde{\varepsilon})Q_n^{(m)}(\xi_0)} P_n^{(m)}(\eta) Q_n^{(m)}(\xi). \quad (12)$$

В (11), (12) $P_n^{(m)}$ и $Q_n^{(m)}$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода, $\tilde{\varepsilon}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость золота на частоте падающей волны ω , $\tilde{\varepsilon}_{nm}$ — собственные значения мод плазмонных колебаний. а сфероидальные координаты ξ , η и φ связаны x , y и z соотношениями

$$x = f\sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \cos \varphi; \quad y = f\sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \sin \varphi; \quad z = f\xi\eta, \quad (13)$$

где $f = 30$ нм — половина расстояния между фокусами сфероида.

Показано, что при падении таких волн на сферическую кремниевую или сфероидальную золотую частицы в топологическом каркасе рассеянного излучения, как правило, присутствуют две замкнутые C^T -линии, форма и размеры которых зависят от степени эллиптичности M_0 падающего излучения, а в случае менее симметричной сфероидальной частицы — также от углов θ , Ψ , задающих ориентацию её эллипса поляризации в пространстве (изображены в тёплых тонах на рис. 1). При увеличении M_0 эти линии имеют тенденцию увеличиваться в размерах. Для некоторых сочетаний углов падения и поляризации плоской волны они также могут сливаться в одну линию с более сложной геометрией.

Кроме того, вблизи вышеупомянутых частиц могут присутствовать L^T -линии, типичная картина которых изображена на рис. 1 в холодных тонах. В

¹E.D. Chubchev, Y.V. Vladimirova, V.N. Zadkov. Opt. Express, 2014, v. 22№17 p. 20432

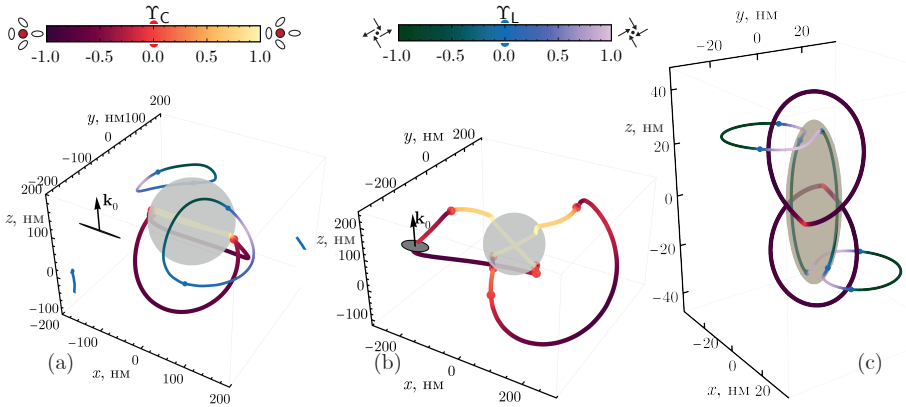


Рис. 1: Примеры топологических каркасов поля плоской монохроматической волны, рассеянной диэлектрической сферой (a) — при $M_0 = 0.07$, (b) — при $M_0 = 0.9$, (c) — рассеянной металлическим сфероидом ($M_0 = 0.2$; $\theta = 10^\circ$; $\Psi = 10^\circ$). Более толстые линии в тёплых тонах — C^T -линии, более тонкие в холодных — L^T -линии. Цвет (яркость) линий отражает значения параметров изотропии сингулярности в соответствующих точках. На легенде диаграмм схематично изображены предельные распределения эллипсов поляризации и нормалей к ним, возникающие вблизи сингулярных точек со значениями параметров изотропии $\Upsilon_{C,L} = \pm 1$.

случае рассеяния на диэлектрической частице волны, поляризация которой близка к линейной, их число равно 4 (на рис. 1a две из этих линий ещё обнаруживаются, но имеют очень малые размеры). С ростом M_0 все линии линейной поляризации быстро уменьшаются, в результате чего при $M_0 > 0.08$ одна, а при $M_0 > 0.22$ и другая их пара исчезают из топологического каркаса электрического поля (рис. 1b). L^T -линии, возникающие в топологическом каркасе электромагнитного поля, рассеянного металлической частицей, оказываются сцеплены с C^T -линиями (см., например, рис. 1c), что не наблюдается при рассеянии на диэлектрической частице. Поскольку пересечение сингулярностей поляризации разных классов требует одновременного выполнения шести скалярных вещественных условий, такое событие имеет вероятность 0 в трёхмерной задаче общего типа, в результате чего зацепление, существующее между L^T -линиями и C^T -линиями не нарушается и линии линейной поляризации, существующие в поле электромагнитной волны, рассеянной золотой сфероидальной частицей, не исчезают ни при каких значениях M_0 , а также углов падения и поляризации плоской электромагнитной волны.

Найденные в этих двух задачах компоненты амплитуд напряженности электрического поля рассеянного излучения использовались также для построения в различных его областях оптических лент — поверхностей, замечаемых векторами осей эллипса поляризации при его прослеживании вдоль замкнутого контура. Показано, что оптические ленты имеют топологию листа Мёбиуса тогда и только тогда, когда их контуры построения сцеплены

с C^T -линиями поля с нечётным индексом зацепления². В настоящей работе, когда речь идёт о значении индекса зацепления между контуром построения оптической линзы и C^T -линией используется обозначение \mathcal{L}_C , а индекс взаимного зацепления краёв линзы обозначается \mathcal{L}_e . Наличие зацепления контура построения с L^T -линиями и величина его индекса не влияют на топологию оптических линз.

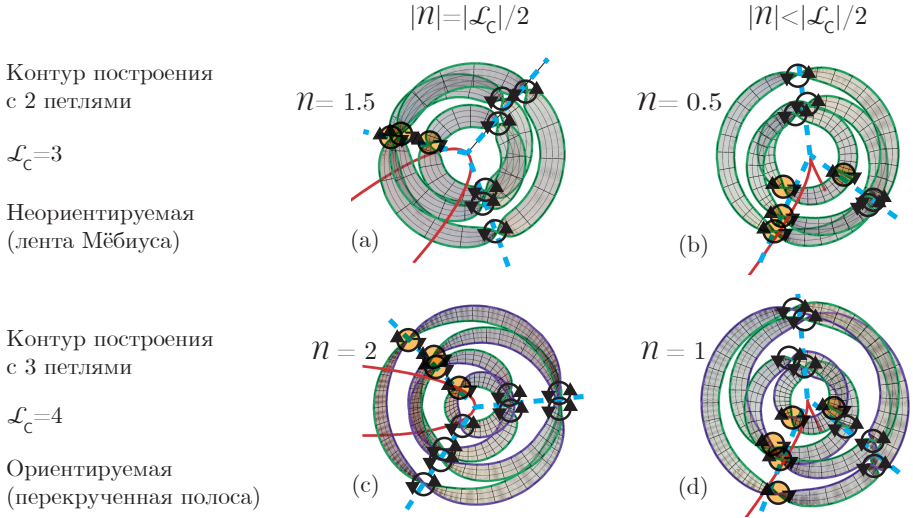


Рис. 2: Оптические линзы, заметаемые нормированной проекцией \vec{A}_\perp директора большой оси эллипса поляризации на ортогональную направлению обхода линзы плоскость. Рядом с рисунками указаны значения индексов внутреннего перекручивания линзы n и зацепления контура её построения с C^T -линией \mathcal{L}_C . Красным цветом изображена сцепленная с линзой C^T -линия. Голубым пунктиром отмечены области, вблизи которых лента претерпевает перекручивание, а круглыми маркерами указаны его направления.

В задаче рассеяния плоской волны на металлическом наносфереиде впервые исследована топология оптических линз, прослеженных вдоль контуров, не лежащих в одной плоскости. Примеры таких линз изображены на рис. 2. Показано, что для непланарных контуров построения понятие числа перекручиваний оптической линзы, используемое в литературе как её основная топологическая характеристика, может быть определено не единственным образом. Проанализировано поведение естественно возникающего в этой ро-

²Индексом зацепления \mathcal{L} двух кривых, параметрически заданных вектор-функциями $\mathbf{g}(s_1)$, $\mathbf{h}(s_2)$, параметризованными своими длинами $s_{1,2} \in [0; l_{1,2}]$, называется интеграл

$$\mathcal{L}(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{\mathbf{g}(s_1) - \mathbf{h}(s_2)}{|\mathbf{g}(s_1) - \mathbf{h}(s_2)|} \cdot [\dot{\mathbf{g}}(s_1) \times \dot{\mathbf{h}}(s_2)] ds_1 ds_2.$$

ли коэффициента перекручивания ленты

$$\mathcal{F}_W(\mathbf{g}; \mathbf{v}_\perp) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \left(\left[\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial s} \times \mathbf{v}_\perp \right] \cdot \dot{\mathbf{g}} \right) ds, \quad (14)$$

где $\mathbf{g}(s)$ — вектор-функция с естественной параметризацией, задающая контур построения ленты, \mathbf{v}_\perp — нормированная проекция образующего ленту вектора $\vec{\vec{A}}$, $\vec{\vec{B}}$, либо \mathbf{N} на направление, ортогональное контуру построения. Коэффициент перекручивания \mathcal{F}_W может принимать для объёмных контуров общего вида любое вещественное значение, в то время как число перекручиваний построенных на плоских контурах лент может быть только целым или полуцелым. В связи с этим, в роли топологических характеристик оптической ленты естественнее рассматривать её дискретные характеристики: индексы зацепления краёв \mathcal{L}_e и внутреннего перекручивания

$$n = \mathcal{F}_W - \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{(\dot{\mathbf{g}}(s) \times \ddot{\mathbf{g}}(s)) \cdot \dot{\mathbf{g}}'(s)}{|\dot{\mathbf{g}} \times \ddot{\mathbf{g}}|^2} ds. \quad (15)$$

Три величины — \mathcal{F}_W , \mathcal{L}_e и n — совпадают для лент, построенных на плоских конурах, но различны в более общем случае. На основе статистики их распределения в электрических полях излучения, рассеянного сфероидальной золотой частицей при разных наборах параметров M_0 , θ , Ψ падающей волны показано, что свойства, характерные для числа перекручивания оптических лент, построенных вдоль контуров в виде малых окружностей, могут быть наиболее точно перенесены на случай объёмных контуров построения с использованием индекса внутреннего перекручивания n . В частности, он всегда принимает целые значения для лент, контур построения которых охватывает C^Γ -линию чётное число раз (рис. 2с, d) и полуцелые для лент, контур построения которых охватывает C^Γ -линию нечётное число раз (рис. 2а, b). Отметим, что в значительном большинстве случаев оптические ленты, задаваемые векторами $\vec{\vec{A}}$ и $\vec{\vec{B}}$ при их прослеживании вдоль одного и того же контура имеют противоположные знаки этого индекса, отвечающие за направление перекручивания.

В заключительном параграфе второй главы была рассмотрена структура линий сингулярностей поляризации, образующихся при нормальном падении плоской однородно поляризованной монохроматической волны, имеющей задаваемую уравнением (9) при $\theta = 90^\circ$ комплексную амплитуду \mathbf{E}_0 , на планарный нелинейный метаматериал, базовый элемент которого содержит две металлические пластинки в объёме изотропного диэлектрика. Моделирование распространения волны в метаматериале осуществлялось решением уравнения:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} (\tilde{\varepsilon} + 6\pi\chi_2 \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{E} + 3\pi\chi_1 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}^*) = 0, \quad (16)$$

являющегося прямым следствием системы уравнений Максвелла. Здесь линейная комплексная диэлектрическая проницаемость изотропных металлических пластин $\tilde{\varepsilon} = 1 - \omega_p^2 / (\omega(\omega - i\delta))$, где $\omega_p = 1.366 \cdot 10^{16}$ рад/с — плазменная частота, а $\delta = 3.07 \cdot 10^{13} \text{с}^{-1}$ — коэффициент поглощения, $\chi_1 = \chi_{xyxy}^{(3)}$ и

$\chi_2 = \chi_{xyxy}^{(3)}$ — компоненты симметричного по перестановке двух индексов тензора кубической восприимчивости. Решение уравнения (16) производилось методом конечных элементов с использованием пакета Intel MKL PARDISO в расчётной области, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x = \pm 260$ нм; $y = \pm 260$ нм; $z = \pm 1000$ нм, обусловленными периодом метаматериала по осям $0x$, $0y$ и достаточным удалением от метаматериала по оси $0z$, чтобы прошедшая и отражённая волны могли считаться плоскими на соответствующих границах.

Как правило, в топологическом каркасе такого материала присутствуют две крупные C^T -линии, замыкающиеся в пределах одной ячейки периодичности и серия малых, конфигурация которых существенно зависит от степени эллиптичности и длины падающей на материал волны. Вблизи пластин метаматериала также могут присутствовать L^T -линии, в зависимости от степени эллиптичности падающей волны замыкающиеся в пределах одной ячейки периодичности или образующие протяжённые кривые, проходящие через весь материал.

Наиболее важной особенностью топологического каркаса в этой задаче является наличие в нём точки пересечения двух C^T -линий при освещении метаматериала волной с линейной поляризацией. Данная точка оказывается устойчивой к изменению длины волны падающего излучения и его амплитуды даже при учёте кубической нелинейности оптического отклика материала пластин в уравнении (16), но исчезает за счёт сдвига сингулярных линий друг относительно друга при изменении состояния поляризации падающего излучения.

Глава 3. Узлы и зацепления топологического каркаса светового поля в задаче острой фокусировки лазерного излучения параболическим зеркалом

Третья глава диссертации посвящена анализу топологических особенностей более высокого порядка — узлов и зацеплений самих линий сингулярности поляризации электромагнитного поля, наблюдающихся в его объёме при острой фокусировке эллиптически поляризованного излучения параболическим зеркалом. Описаны топологические особенности, присущие трёхмерному распределению эллипсов поляризации при учёте продольной компоненты электрического поля, которая перестаёт быть малой при достаточно острой ($NA = 0.9$) фокусировке. В этом ключе описана фокусировка четырёх световых пучков:

Гауссова пучка:

$$\mathbf{E}_\perp(x, y) = E_0 \mathbf{e}_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right), \quad (17)$$

где \mathbf{E}_\perp — вектор комплексной амплитуды напряженности электрического поля до фокусировки, E_0 — размерная константа, $\mathbf{e}_0 = \sqrt{1 - M_0} \mathbf{e}_+ + \sqrt{1 + M_0} \mathbf{e}_-$, w — ширина пучка, $\mathbf{e}_\pm = \mathbf{e}_x \mp i \mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_{x,y}$ — орты декартовой системы координат xyz ;

Лагерр–Гауссова пучка:

$$\mathbf{E}_\perp(x, y) = E_0 \mathbf{e}_0 \frac{x \pm iy}{w} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right); \quad (18)$$

Двух типов пучка Пуанкаре:

$$\mathbf{E}_\perp(x, y) = E_0 \left[\mu \mathbf{e}_+ + \left(\frac{\Lambda_+(x + iy) + \Lambda_-(x - iy)}{w} \right) \mathbf{e}_- \right] \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2} \right), \quad (19)$$

представляющих собой линейную комбинацию двух предыдущих пучков с ортогональными круговыми поляризациями. В (19) Λ_\pm — комплексные коэффициенты, для которых были рассмотрены два сочетания: $\Lambda_+ = 0, \Lambda_- = 1$ (пучок Пуанкаре типа «звезда») и $\Lambda_+ = 1, \Lambda_- = 0$ (пучок Пуанкаре типа «лимон»), μ — вещественный коэффициент, определяющий относительный вклад Гауссовой компоненты в напряженность электрического поля падающей волны.

Для численного расчёта компонент вектора напряжённости электрического поля отражённого пучка в окрестности геометрического фокуса мы использовали точное решение уравнений Максвелла в квадратурной форме, полученное в классической работе³ для случая жёсткой осевой фокусировки падающего пучка параболическим зеркалом. Структура интенсивности поля на нескольких его плоских срезах была дополнительно сверена с результатами численного моделирования и эксперимента, опубликованными в работе⁴, в которой лазерный пучок имел ширину $w = 1$ мм и длину волны $\lambda = 530$ нм, фокусное расстояние зеркала составляло 1.128 мм, числовая апертура, определённая по уровню интенсивности e^{-2} , равнялась 0.9.

При острой фокусировке лазерного излучения (17) – (19) продольная компонента вектора напряжённости электрического поля перестаёт быть пренебрежимо малой. Точки сингулярности поляризации обоих классов (C^T - и L^T -) образуют серию замкнутых кривых вблизи фокальной плоскости параболического зеркала, которые могут быть как топологически независимыми, так и иметь топологию нетривиальных торических узлов и зацеплений. В случае пучков, имевших сингулярность на оси при $z = 0$, она продолжает также существовать и при учёте продольной компоненты, но деформируется, в результате чего к замкнутым сингулярным линиям добавляются вытянутые вблизи оси пучка линии, выходящие за пределы области в несколько фокусных расстояний. В частности, неустойчивая фазовая сингулярность, совпадающая с осью Лагерр–Гауссова пучка разделяется на две близкие к этой оси C^T - линии и одну совпадающую с осью z L^T - линию. При варьировании параметров M_0 и μ в формуле (19), определяющих поляризацию излучения, его сингулярности поляризации могут непрерывно деформироваться, смыкаясь и пересоединяясь. В результате их число и тип зацеплений меняются.

Нетривиальные зацепления линий сингулярности поляризации, как относящихся к одному, так и к разным классам (C^T - и L^T -), наблюдаются для всех четырёх пучков, а поляризационные сингулярности, завязанные в нетривиальные узлы — для Лагерр–Гауссова пучка (рис. 3а) и пучка Пуанкаре типа «звезда» (рис. 3б). Наиболее часто встречаются C^T -линии, образующие трилистниковый узел, конкретная геометрическая реализация которого определяется порядком оси симметрии фокусируемой моды излучения. Вариация параметров M_0 и μ , определяющих поляризацию падающего на зеркало излучения, приводит к деформации сингулярных линий и их пересоединениям

³P. Varga, P. Török. J. Opt. Soc. Am. A., 2000., v. 17, № 11, p. 2090

⁴T. Bauer, P. Banzer, E. Karimi, S. Orlov, A. Rubano et al. Science, 2015, v. 347, p. 964

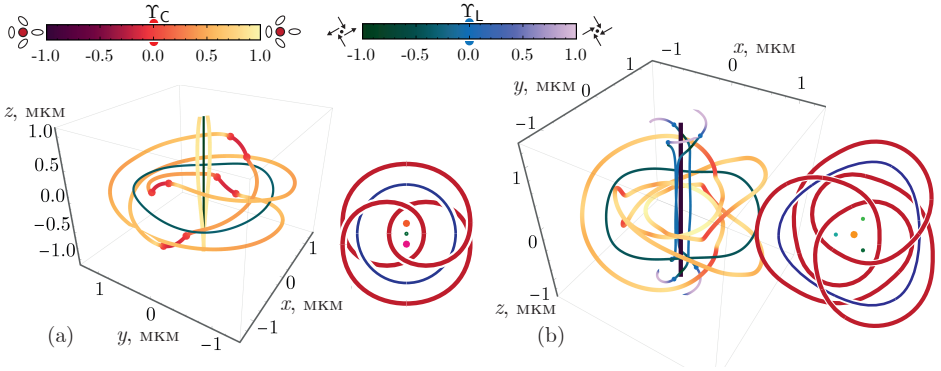


Рис. 3: Примеры топологических каркасов напряженности электрического поля излучения, остро сфокусированного параболическим зеркалом в случае (a) Лагерр-Гауссова пучка ($M_0 = 0.9$) и (b) пучка Пуанкаре типа «звезда» ($\mu = 1$). Толстыми линиями в тёплых тонах изображены C^T -линии, тонкими в холодных — L^T -линии. На трёхмерных рисунках приведена полная структура топологического каркаса, цвет (яркость) точек линий отражает значение в них параметра изотропии. Плоские рисунки показывают принципиальную картину зацепления C^T - и L^T линий, на которой каждая линия сингулярности поляризации показана отдельным цветом.

с изменением числа и топологии линий сингулярности поляризации. Установлено, что таким пересоединениям всегда предшествует изменение знака параметра изотропии одной из участвующих в нём линий вблизи точки пересоединения.

При некоторых значениях μ в объёме сфокусированного пучка Пуанкаре типа «звезда» можно наблюдать C^T -линию, образующую $(4; 3)$ -торический узел (рис. 3b), при других — L^T -линию, образующую трилистниковый узел. Многообразие топологически нетривиальных конфигураций линий сингулярности поляризации ограничено нулевой вероятностью пересечения C^T - и L^T -линий. Установлено, что это ограничение обуславливает сохранение индекса зацепления между линиями сингулярности поляризации различных классов в подавляющем большинстве происходящих пересоединений. Редкое исключение из этого правила объясняется невозможностью однозначного определения знака индекса зацепления линий сингулярности поляризации. В то же время, индексы зацепления между сингулярными линиями поляризации одного класса, а также число этих линий и распределение их параметров изотропии могут изменяться и действительно часто изменяются при непрерывном варьировании параметров, описывающих поляризацию падающего излучения.

В заключительном параграфе этой главы изложены результаты численного исследования характеристик оптических лент Мёбиуса различного типа, образованных векторами \vec{A} , \vec{B} и \vec{N} при их движении вдоль замкнутых контуров построения, расположенных вблизи фокуса параболического зеркала, при жёсткой фокусировке пучков Пуанкаре. Установлено, что топология краёв

этих лент совпадает с топологией наиболее крупной из замкнутых C^T -линий в топологическом каркасе содержащего их пучка. При изменении радиуса контура построения оптической ленты происходит изменение её топологии в моменты пересечения им одной из C^T -линий. В силу симметрии пучка Пуанкаре типа «звезда», эти изменения происходят одновременно в трёх точках, а для пучка Пуанкаре типа «лимон» — несколько раз поочередно, ввиду отсутствия подобной симметрии. В обоих случаях с увеличением радиуса контура построения происходит пересечение C^T -линий в нечётном числе точек. В результате меняется чётность индекса зацепления контура с C^T -линиями и ориентируемость наблюдаемой ленты. Эти изменения топологии аналогичны закономерностям, описанным во второй главе диссертации. Форма и свойства некоторых из обнаруженных и исследованных лент качественно совпадают с найденной ранее численно и обнаруженной в эксперименте⁵, но предсказано также большое число пока не исследованных экспериментально конфигураций оптических лент.

Глава 4. Особенности протекания процессов нелинейной дифракции и удвоения частоты световых пучков и импульсов, содержащих сингулярности поляризации, и их использование в задачах, решаемых с помощью методов глубокого машинного обучения

Четвёртая глава диссертации посвящена рассмотрению особенностей протекания некоторых нелинейно-оптических процессов, связанных с наличием в сечении падающего на среду светового пучка или импульса сингулярностей фазы либо поляризации. В первом параграфе приведён обзор работ, посвященных генерации и преобразованию световых пучков и импульсов, содержащих сингулярности поляризации в средах с нелинейным оптическим откликом.

Во втором параграфе показана возможность создания искусственной нейронной сети, позволяющей решать задачу определения параметров α_{\pm} и β_{\pm} , характеризующих нелинейно-оптический отклик изотропной гиротропной среды и определяющих динамику распространения эллиптически поляризованного светового пучка, которая в безразмерных переменных описывается системой дифференциальных уравнений параболического типа:

$$\partial_z \mathcal{A}_{\pm} - \frac{i}{4} \nabla_{\perp}^2 \mathcal{A}_{\pm} = i(\alpha_{\pm} |\mathcal{A}_{\pm}|^2 + \beta_{\pm} |\mathcal{A}_{\mp}|^2) \mathcal{A}_{\pm}. \quad (20)$$

Здесь $\mathcal{A}_{\pm} = E_{\pm}/E_0$ — медленно меняющиеся комплексные безразмерные амплитуды циркулярно поляризованных компонент напряженности электрического поля, $\nabla_{\perp}^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$, $x = x/w$, $y = y/w$, $z = z/l_{df}$, w — ширина пучка, l_{df} — длина линейной дифракции.

Нейронная сеть получает в качестве входных данных распределение в плоскости $z = 1$ комплексной амплитуды светового пучка, претерпевшего нелинейную дифракцию в изотропной хиральной среде, и должна определить на его основании значения α_{\pm} и β_{\pm} данной среды. Для обучения нейронной сети использовались результаты численной симуляции по методу Кранка–Николсона нелинейной дифракции пучков той же пространственной моды

⁵Т. Bauer, P. Banzer, E. Karimi, S. Orlov, A. Rubano et al. Science, 2015, v. 347, p. 964

через ряд сред с другими сочетаниями α_{\pm} и β_{\pm} . Обучающая выборка включала в себя результаты 1280 таких симуляций, для подбора гиперпараметров нейронной сети использовались результаты ещё 512 симуляций с другими значениями параметров нелинейного отклика; наконец, для финального заключения об эффективности построенной сети вычислялись её ошибки в предсказании выборки из ещё 256 модельных сред. Разработанная сеть имела три скрытых свёрточных (с ядром свёртки 4×4) и два скрытых полносвязных слоя. Полная схема её архитектуры приведена на рисунке 4. Для обучения сети использовался метод стохастической оптимизации Adam и алгоритм подбора гиперпараметров «лассо».

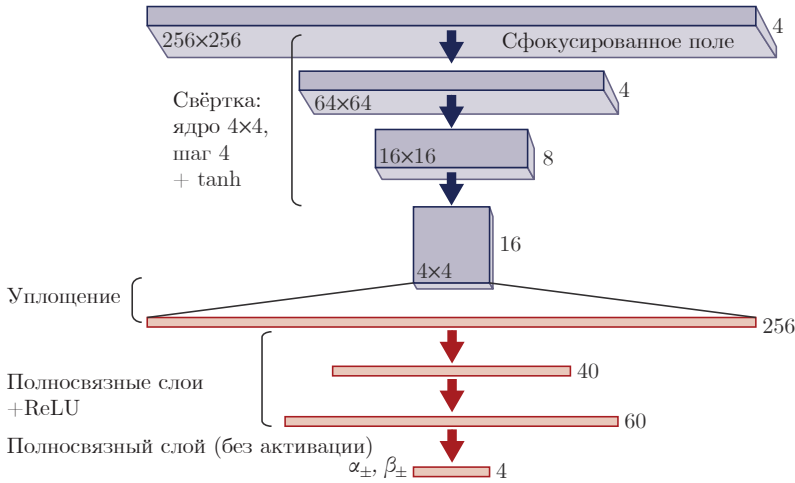


Рис. 4: Архитектура используемой нейронной сети. Синим цветом выделены свёрточные слои, красным — полносвязные. Числа в их нижней части указывают на пространственное разрешение соответствующих слоёв, а числа в верхней части — на число каналов для свёрточных слоёв или общее число нейронов для полносвязных.

Были проанализированы результаты предсказания параметров нелинейного отклика среды с использованием для обучения и работы искусственной нейронной сети четырёх различных пучков лазерного излучения, имеющих одинаковую пиковую интенсивность:

эллиптически поляризованного Гауссова пучка:

$$\mathcal{A}_+^G(x, y, 0) = e^{-x^2 - y^2}; \quad \mathcal{A}_-^G(x, y, 0) = 2^{-1/2} e^{-x^2 - y^2}; \quad (21)$$

эллиптически поляризованного супергауссова пучка:

$$\mathcal{A}_+^{SG}(x, y, 0) = e^{-2(x^2 + y^2)}; \quad \mathcal{A}_-^{SG}(x, y, 0) = 2^{-1/2} e^{-2(x^2 + y^2)}; \quad (22)$$

линейно поляризованного Лагерр-Гауссова пучка:

$$\mathcal{A}_+^{LG}(x, y, 0) = \sqrt{e(x^2 + y^2)} e^{-x^2 - y^2}; \quad \mathcal{A}_-^{LG}(x, y, 0) = \sqrt{e} (x + iy) e^{-x^2 - y^2}; \quad (23)$$

пучка Пуанкаре типа «лимон»:

$$\mathcal{A}_+^P(x, y, 0) = \sqrt{2}(x + iy)e^{-x^2 - y^2}; \quad \mathcal{A}_-^P(x, y, 0) = e^{-x^2 - y^2}. \quad (24)$$

Значения α_{\pm} и β_{\pm} удаётся определить с точностью до одного-двух процентов при использовании пучков, содержащих на оси сингулярность фазы (23) или поляризации (24). В тоже время, для однородно поляризованных пучков с гауссовым или супергауссовым распределением интенсивности ошибка при нахождении α_{\pm} и β_{\pm} составляла около 10%. Такое различие объясняется тем, что правая часть уравнения (20) может иметь одинаковую величину при разных наборах значений параметров, характеризующих нелинейный оптический отклик среды если поляризация падающего пучка однородна. При этом различить эти наборы не представляется возможным. Такое объяснение подтверждается анализом распределения ошибок предсказательной модели. В диссертации также продемонстрировано, что использование содержащих сингулярности пучков позволяет дополнительно расширить диапазон значений α_{\pm} и β_{\pm} , при которых не происходит нелинейно-оптический коллапс.

Последняя часть четвёртой главы посвящена описанию двух возможных механизмов генерации второй гармоники в объёме изотропной хиральной среды одним пучком основного излучения. Несмотря на классический запрет на её генерацию за счёт локального нелинейного отклика, слабый сигнал на удвоенной частоте может появиться благодаря пространственной или временной нелокальности нелинейного оптического отклика, но для этого требуется использование пучков и импульсов основного излучения, неоднородно поляризованных в пространстве и во времени. Световые импульсы, содержащие сингулярность поляризации, прекрасно удовлетворяют этим условиям: наличие в них неоднородности поляризации оказывается топологически устойчиво и не может сгладиться по мере распространения.

Расчёт интенсивности и параметров поляризации излучения на удвоенной частоте, возникающей в следствие описанного выше механизма, проводился в приближении неизменности волны основного излучения. Методом Кранка–Николсона проводилось численное интегрирование системы уравнений для медленно меняющихся амплитуд $E_{\pm}^{(2\omega)}$ циркулярно поляризованных компонент напряженности электрического поля на удвоенной частоте:

$$\left[\left(\partial_s + \frac{l_{df}^{(2\omega)}}{l_{gr}^{(2\omega)}} \partial_t \right) - \frac{i}{4} \left(\nabla_{\perp}^2 - \frac{l_{df}^{(2\omega)}}{l_{ds}^{(2\omega)}} \partial_t^2 \right) \right] E_{\pm}^{(2\omega)} = 2\pi i \frac{k_{2\omega} l_{df}^{(2\omega)}}{\varepsilon_{2\omega}} P_{\pm}^{(2\omega)} e^{-i\Delta k z}, \quad (25)$$

учитывающей нелинейную дифракцию и частотную дисперсию второго порядка. Здесь $\varepsilon_{2\omega}$ — линейная диэлектрическая проницаемость на удвоенной частоте, $\Delta k = 2k_{\omega} - k_{2\omega}$ — расстройка волновых векторов, $\nabla_{\perp} = \{\partial_x, \partial_y\}$, $P^{(2\omega)}$ — комплексная амплитуда квадратичной поляризации среды. В (25) $l_{df}^{(2\omega)} = k_{2\omega} w^2 / 2$, $l_{ds}^{(2\omega)} = \tau_0^2 / 2k_{2\omega}''$, а $l_{gr}^{(2\omega)} = u_{2\omega} \tau_0$, где $u_{2\omega}$ — групповая скорость волны, τ_0 — длительность импульса основного излучения в перетяжке, а индексы 2ω у всех величин указывают на их отношение к излучению на удвоенной частоте.

Результаты решения системы уравнений для медленно меняющихся амплитуд циркулярно поляризованных компонент вектора напряженности электрического поля, учитывающей нелинейную дифракцию и частотную дисперсию второго порядка, позволяют утверждать, что использование пучков

с фазовыми и поляризационными сингулярностями обеспечивает возникновение сигнала на удвоенной частоте в объёме изотропной гиротропной среды. Сигнал второй гармоники однородно поляризован и степень эллиптичности его эллипса поляризации по модулю совпадает с параметром изотропии сингулярности поляризации на оси импульса излучения на основной частоте. При осуществлении генерации за счёт пространственной нелокальности оптического отклика направление вращения вектора напряжённости электрического поля в сигнальном пучке совпадает с направлением вращения вектора напряжённости электрического поля в пучке основного излучения, если топологический индекс сингулярности поляризации в нём положителен, и противоположено направлено, если он отрицателен. При генерации за счёт временной нелокальности эти направления связаны обратным образом.

Основные результаты и выводы

1. Разработан алгоритм построения трёхмерных линий сингулярности поляризации электрического поля по известным значениям декартовых компонент меняющейся в пространстве комплексной амплитуды монохроматической электромагнитной волны произвольного вида, вычислительная сложность которого значительно ниже сложности прежде опубликованных подходов к этой задаче, а точность может быть динамически адаптирована к установленному порогу допустимой ошибки.
2. Исследованы топологические каркасы электрических полей электромагнитного излучения, рассеянного на одиночных сферической кремниевой и сфероидальной золотой частицах при падении на них плоских монохроматических волн. Показано, что при любых состояниях поляризации падающей волны вблизи частиц присутствуют одна или две S^T -линии, а также до четырёх L^T -линий, геометрия которых определяется степенью эллиптичности падающего излучения. Показана определяющая роль зацеплений между линиями сингулярности поляризации различных классов в их устойчивости к вариациям параметров падающего излучения.
3. Исследован топологический каркас плоской электромагнитной волны, нормально падающей на планарный метаматериал, базовый элемент которого содержит две металлические пластины. Установлено, что в объёме метаматериала может существовать точка взаимного пересечения S^T -линий, устойчивая к изменению длины волны и интенсивности падающего излучения и неустойчивая к отклонению его поляризации от линейной.
4. В излучении, рассеянном сфероидальной золотой частицей, проведён анализ топологических индексов, характеризующих пространственную геометрию оптических лент, замечаемых одним из ассоциированных с эллипсом поляризации векторов при его движении вдоль замкнутых контуров различного типа, находящихся вдали от линий сингулярности поляризации излучения и непосредственно их окружающих. Показано, что индекс внутреннего перекучивания ленты однозначно характеризует её топологию не только в случае её построения вдоль планарных

контуров, но и когда для этого используются произвольные трёхмерные контуры.

5. Проанализирован топологический каркас лазерного излучения, жёстко сфокусированного параболическим зеркалом. Обнаружено, что вблизи его фокуса расположено значительное число линий сингулярности поляризации, образующих нетривиальные торические узлы и зацепления, геометрия и топология которых определяется состоянием поляризации падающего пучка. При изменении поляризации падающего излучения неизменной оказывается чётность индекса зацепления между системами линий строго циркулярной и строго линейной поляризации.
6. Исследована связь топологии оптических лент, образуемых задающими эллипс поляризации векторами, с расположением и ориентацией контура их построения относительно топологического каркаса лазерного излучения, рассеянного металлической и диэлектрической частицами, а также жестко сфокусированного параболическим зеркалом. Использовались как плоские, так и трёхмерные контуры построения, в том числе содержащие петли и охватывающие несколько раз одну и ту же C^T -линию. Установлено, что ориентируемость этих лент однозначно определяется чётностью их зацепления с совокупностью C^T -линий и не зависит от её зацепления с L^T -линиями. При этом направления перекручивания построенных на одном и том же контуре оптических лент векторов двух главных осей эллипса поляризации, как правило, противоположны.
7. Разработана искусственная нейронная сеть, позволяющая предсказывать с ошибкой не выше полутора процентов значения коэффициентов объёмного нелинейно-оптического отклика изотропной хиральной среды по профилю комплексной амплитуды излучения, претерпевшего в ней нелинейную дифракцию. Применение для её обучения световых пучков, содержащих фазовую или поляризационную сингулярность, обеспечивает на порядок бóльшую точность определения этих коэффициентов по сравнению с использованием однородно поляризованного излучения.
8. Описаны два возможных механизма генерации второй оптической гармоники в объёме изотропной хиральной среды одним пучком основного излучения, содержащим фазовые и поляризационные сингулярности, за счёт пространственной и временной нелокальности её нелинейного оптического отклика. Показано, что сигнальный пучок на удвоенной частоте однородно поляризован и модуль его степени эллиптичности совпадает с параметром изотропии сингулярности поляризации основного излучения.

Публикации по теме диссертации в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в Перечне изданий МГУ

- [1] Second harmonic generation in isotropic chiral medium with nonlocality of nonlinear optical response by heterogeneously polarized pulsed beams / K. S. Grigoriev, N. Y. Kuznetsov, E. B. Cherepetskaya, V. A. Makarov // *Optics Express*. — 2017. — Vol. 25, no. 6. — P. 6253–6262. JIF=3.356 (вклад соискателя — 0.25)
- [2] Fine characteristics of polarization singularities in a three-dimensional electromagnetic field and their properties in the near field of a metallic nanospheroid / K. S. Grigoriev, N. Y. Kuznetsov, Y. V. Vladimirova, V. A. Makarov // *Physical Review A — Atomic, Molecular, and Optical Physics*. — 2018. — Vol. 98. — P. 063805. JIF=2.907 (вклад соискателя — 0.2)
- [3] Near-field polarization singularities at a planar nonlinear metamaterial with strong frequency dispersion / N. N. Potravkin, I. A. Perezhogin, N. Y. Kuznetsov et al. // *Laser Physics Letters*. — 2018. — Vol. 15, no. 11. — P. 115403. JIF=2.328 (вклад соискателя — 0.3)
- [4] New approach to plot polarization singularity lines of electromagnetic fields in nonparaxial optics / P. S. Ryzhikov, N. Y. Kuznetsov, K. S. Grigoriev, V. A. Makarov // *Laser Physics Letters*. — 2020. — Vol. 17, no. 10. — P. 105403. JIF=2.016 (вклад соискателя — 0.25)
- [5] Three-dimensional structure of polarization singularities of a light field near a dielectric spherical nanoparticle / N. Y. Kuznetsov, K. S. Grigoriev, Y. V. Vladimirova, V. A. Makarov // *Optics Express*. — 2020. — Vol. 28, no. 19. — P. 27293–27299. JIF=3.894 (вклад соискателя — 0.4)
- [6] Kuznetsov N. Y., Grigoriev K. S., Makarov V. A. Topology of polarization-ellipse strips in the light scattered by a dielectric nanosphere // *Physical Review A — Atomic, Molecular, and Optical Physics*. — 2021. — Vol. 104, no. 4. — P. 043505. JIF=2.971 (вклад соискателя — 0.4)
- [7] Kuznetsov N. Y., Grigoriev K. S., Makarov V. A. Usage of machine-learning algorithms in inverse problem of light self-focusing in isotropic chiral medium with cubic nonlinearity // *Laser Physics Letters*. — 2022. — Vol. 19, no. 8. — P. 085401. JIF=1.704 (вклад соискателя — 0.6)
- [8] Knots and links of polarization singularity lines of light under tight focusing with a parabolic mirror / N. Y. Kuznetsov, A. E. Ryadchenko, K. S. Grigoriev, V. A. Makarov // *Physical Review A — Atomic, Molecular, and Optical Physics*. — 2023. — Vol. 107, no. 6. — P. 063506. JIF=2.971 (вклад соискателя — 0.6)
- [9] Kuznetsov N. Y., Grigoriev K. S., Makarov V. A. Topological features of polarization ellipse strips built on non-planar contours in the light scattered on a metal nanospheroid // *Laser Physics Letters*. — 2023. — Vol. 20, no. 8. — P. 085401. JIF=1.704 (вклад соискателя — 0.7)