

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

*Екан*

**Канин Евгений Алексеевич**

**Асимптотические модели процессов массопереноса в  
задаче роста трещины гидроразрыва**

Специальность 1.1.9 — Механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Диссертация подготовлена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

**Научные руководители:**

Осищов Андрей Александрович, доктор физико-математических наук  
Карликов Владимир Павлович, доктор физико-математических наук, профессор

**Официальные оппоненты:**

Смирнов Николай Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, профессор кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета

Головин Сергей Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, доцент кафедры теоретической механики

Турунтаев Сергей Борисович, доктор физико-математических наук, институт динамики геосфер имени академика М.А. Садовского РАН, директор

Защита диссертации состоится 9 июня 2023 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.5 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, дом 1, НИИ механики МГУ, кинозал.

E-mail: pelevina.daria@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.5/2519>.

Автореферат разослан “    ” апреля 2023 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета МГУ.011.5,  
кандидат физико-математических наук

Д.А. Пелевина

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы исследования.

Гидроразрыв пласта представляет собой трещину нормального разрыва, распространяющуюся в твердом материале и заполненную нагнетаемой под высоким давлением жидкостью. В природе встречаются естественные трещины гидроразрыва, например, магматические дайки и трещины в ледниках. Искусственные трещины гидроразрыва пласта, созданные при помощи нагнетания гидроразрывной жидкости под высоким давлением, применяются для интенсификации добычи углеводородов при разработке нефтяных и газовых месторождений. Гидроразрыв пласта – это сложная и многоэтапная технология, состоящая из нескольких фаз: рост трещины, размещение частиц проппанта, очистка трещины, добыча углеводородов. Математическое моделирование процедуры гидроразрыва является важным научным направлением, способствующим оптимизации и повышению эффективности гидроразрывных технологий.

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению ряда гидродинамических факторов, влияющих на динамику роста трещины. Эволюция трещины зависит от взаимного воздействия различных взаимосвязанных гидродинамических (течение жидкости внутри канала трещины, массообмен между трещиной и окружающим коллектором) и геомеханических (упругие деформации горной породы, ее разрушение на кончике трещины) процессов. Корректный учет их количественного вклада в закономерности роста трещины необходим для правильной оценки геометрических параметров трещины, которые впоследствии используются для оценки продуктивности скважины. Таким образом, правильная оценка геометрических параметров трещины очень важна при планировании работ по гидроразрыву пласта.

Первые модели роста трещины гидроразрыва использовали простую “эффективно одномерную” геометрию: модель Перкинса - Керна - Нордгрена (РКН), модель Христиановича - Гиртсма - де Клерка (КГД) и модель радиальной трещины. В последние два десятилетия активно развивались как аналитические, так и численные модели трещин с КГД и радиальной геометриями, направленные на корректный учет различных сопряженных физических процессов. Решения, полученные на основе этих моделей, можно рассматривать как эталонные, позволяющие верифицировать более сложные, численные трехмерные модели роста трещины гидроразрыва pseudo-3D и planar-3D. Помимо моделей конечных трещин гидроразрыва в литературе также рассматривается модель полубесконечной трещины или модель концевой элемента. Это асимптотическое решение для трещины гидроразрыва вблизи кончика используется в численных симуляторах в

качестве критерия распространения трещины, позволяющего определить положение фронта трещины в каждый момент времени.

Литературный обзор, проведенный в диссертации, показал, что роль ряда гидродинамических факторов, таких как обмен жидкостью между трещиной и пластом, неламинарность течения внутри канала трещины и вязкопластическая реология жидкости гидроразрыва, изучена недостаточно подробно, несмотря на практическую важность и значительное влияние указанных факторов на распространение трещины гидроразрыва в определенных условиях.

### **Цели и задачи работы.**

Целью диссертационной работы является исследование влияния следующих гидродинамических факторов на распространение трещины гидроразрыва:

- массообмен между трещиной и пластом при учете зависимости скорости массообмена от давления внутри канала трещины;
- смена режима течения внутри канала трещины от ламинарного к турбулентному с увеличением расстояния от кончика трещины;
- вязкопластическая реология жидкости гидроразрыва.

В диссертации решены следующие задачи:

1. Построение численных моделей полубесконечной и радиальной трещин с учетом зависимости скорости массообмена от давления. Получение аналитических решений для предельных режимов распространения полубесконечной трещины и нахождение границ их применимости. Сопоставление построенных численных решений с результатами классических моделей полубесконечной и радиальной трещин, в которых утечки описываются законом Картера, и определение условий, при которых необходимо учитывать зависимость скорости массообмена от давления в канале трещины.

2. Разработка численных моделей концевой элемента и радиальной трещины, распространяющихся в проницаемой горной породе под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” внутри канала трещины. Вывод аналитических и полуаналитических решений для предельных режимов распространения полубесконечной и радиальной трещин, построение карт с областями применимости предельных решений, анализ положения границы перехода между ламинарным и турбулентным режимами течения. Нахождение диапазонов значений определяющих параметров в модели радиальной трещины, при которых течение внутри канала трещины можно считать полностью турбулентным или полностью ламинарным.

3. Создание модели радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли. Реализация численного и полуаналитического алгоритмов для расчета динамики роста трещины. Вывод полуаналитических решений для предельных режимов распространения, определение их областей применимости, нахождение интервалов

значений определяющих параметров, при которых предел текучести жидкости гидроразрыва оказывает значительное воздействие на эволюцию радиальной трещины.

### **Научная новизна работы.**

В диссертационной работе впервые представлены следующие результаты:

1. Продемонстрировано, что массообмен, зависящий от давления, способствует формированию зоны циркуляции поровой жидкости вблизи кончика трещины, приводит к конечному значению давления жидкости на фронте трещины и увеличению интенсивности утечек в пласт вдоль основной части трещины конечной геометрии по сравнению с законом утечек Картера.

2. Для модели радиальной трещины выявлено, что при учете зависимости массообмена от давления формируется более короткая и менее раскрытая трещина по сравнению с классической моделью с утечками по закону Картера.

3. Найдены диапазоны значений определяющих параметров в моделях полубесконечной и радиальной трещин с массообменом, зависящим от давления, при которых важно учитывать рассматриваемый гидродинамический эффект и, наоборот, определены условия, при которых данным эффектом можно пренебречь и пользоваться стандартным законом утечек Картера.

4. Проанализировано влияние комбинированных эффектов ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” и утечек в пласт на распространение полубесконечной и радиальной трещин гидроразрыва. Показано, что турбулентный режим течения реализуется вблизи скважины и влияет на характеристики радиальной трещины в этой области в начальный период распространения. Продемонстрировано, что утечки продлевают влияние эффектов турбулентности на эволюцию трещины гидроразрыва.

5. Получены решения для предельных режимов распространения полубесконечной и радиальной трещин в проницаемой горной породе под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” внутри канала трещины. Построены карты режимов. В случае радиальной трещины на картах указаны области, в которых важно учитывать смену режима течения и, наоборот, когда можно использовать ламинарное решение.

6. Разработана модель радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием вязкопластической жидкости с реологией Гершеля-Балкли. Показано, что рассматриваемая реология приводит к формированию недеформируемого ядра внутри канала трещины, причем трещина имеет меньший радиус и большее раскрытие по сравнению со случаем жидкости гидроразрыва со степенной реологией. Получены предельные режимы распространения, построены карты режимов, выделены

области, внутри которых важно учитывать наличие предела текучести жидкости гидроразрыва.

### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Приведенные в диссертационной работе карты режимов, иллюстрирующие области применимости предельных решений, дают представление о том, какие физические процессы реализуются вблизи кончика трещины (асимптотическая модель полубесконечной трещины) и доминируют в процессе эволюции радиальной трещины. Найденные диапазоны значений определяющих параметров, при которых изучаемые гидродинамические эффекты оказывают значительное влияние на характеристики радиальной трещины, могут быть полезны при проектировании работ по гидроразрыву пласта.

Разработанные модели радиальной трещины можно применять для расчета эволюции трещины гидроразрыва на начальном этапе закачки, а также использовать как эталонное решение для верификации симуляторов гидроразрыва пласта. Модели конечного элемента могут быть встроены в модели конечной трещины гидроразрыва в качестве критерия распространения, позволяющего определить положение фронта трещины на каждом временном шаге.

### **Методология и методы исследования.**

В диссертации для формулирования математических постановок задач используются законы гидромеханики, линейной теории упругости, линейно-упругой механики разрушения и теории фильтрации. Аналитические и полуаналитические решения для предельных режимов распространения полубесконечной и радиальной трещин получены путем применения известных подходов. Для нахождения общих численных решений в задачах о распространении полубесконечной и радиальной трещин используются алгоритмы, опубликованные в литературных источниках и модифицированные автором с учетом рассматриваемых в диссертации новых гидродинамических эффектов. Моделирование эволюции радиальной трещины гидроразрыва проводится при помощи трех алгоритмов, два из которых численные и один – приближенный полуаналитический.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. При учете массообмена, зависящего от давления, образуется зона циркуляции поровой жидкости, примыкающая к кончику трещины. Давление жидкости на фронте трещины имеет конечное значение. Наблюдаются более интенсивные утечки в пласт вдоль основной части трещины конечной геометрии по сравнению с законом утечек Картера, при этом радиальная трещина оказывается более короткой и менее раскрытой. Учет массообмена, зависящего от давления, оказывает определяющее влияние на структуру решения вблизи кончика полубесконечной трещины, а наибольшее воздействие на характеристики радиальной трещины проявляется при больших значениях параметра эффективности.

2. При распространении трещины гидроразрыва конечной геометрии внутри канала трещины, как правило, существуют зоны и ламинарного, и турбулентного режимов течения. Ламинарная зона расположена вблизи кончика трещины, длина этой зоны увеличивается с течением времени. Турбулентный режим возникает вблизи нагнетательной скважины, он влияет на параметры радиальной трещины в начальный период распространения, причем интервалы времени, в течение которых профили раскрытия и давления отличаются от ламинарного решения, различны. Утечки в пласт продлевают воздействие эффектов турбулентности.

3. Вязкопластическая реология жидкости гидроразрыва способствует формированию недеформируемого ядра внутри канала трещины, объем этого ядра увеличивается с течением времени. Радиальная трещина, распространяющаяся под влиянием жидкости с пределом текучести, имеет меньший радиус и большее раскрытие по сравнению со случаем жидкости гидроразрыва со степенной реологией. Воздействие вязкопластической реологии жидкости гидроразрыва на параметры радиальной трещины проявляется по прошествии конечного интервала времени от инициализации трещины.

#### **Степень достоверности результатов.**

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием классических законов гидромеханики, линейной теории упругости, линейно-упругой механики разрушения и теории фильтрации. Реализованные численные алгоритмы верифицированы путем сравнения с известными решениями, опубликованными в литературе. Для моделирования роста радиальной трещины гидроразрыва реализовано два численных алгоритма и проведено сравнение их расчетов в случае модели с классическим набором предположений. При моделировании роста радиальной трещины контролировался интегральный баланс жидкости.

#### **Апробация результатов.**

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: семинар по механике сплошных сред под руководством акад. РАН А.Г. Куликовского, проф. В.П. Карликова, члена-корреспондента РАН О.Э. Мельника и проф. А.Н. Осипцова (2022); научно-исследовательский семинар кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством акад. РАН Р.И. Нигматулина (2022); семинар лаборатории механики многофазных сред Института механики МГУ имени М.В. Ломоносова (2022); совместный семинар Газпромнефть НТЦ и НГУ “Моделирование в нефтяном инжиниринге” (2023); международный семинар “Сопряженные гидро- и термодинамические задачи механики трещин” (2019); Международная конференция AGU Fall Meeting (2019-2021); Всероссийская конференция молодых специалистов ООО “ЛУКОЙЛ-Инжиниринг” (2020); Всероссийская конференция “Цифровые технологии в добыче и переработке углеводородов: от моделей к

практике” (2020, 2021); Международная конференция EAGE ECMOR XVII (2020); Международная конференция 14th WCCM & ECCOMAS Congress (2021); Международная конференция 82nd EAGE Annual (2021).

Полученные в диссертации результаты легли в основу научно-квалификационной работы на тему: “Сопряженные гидрогеомеханические явления в задаче роста трещины гидроразрыва”, которая была успешно защищена автором при окончании аспирантуры механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова в 2022 году.

### **Публикации.**

Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 печатных работах, 3 из которых [1, 2, 3] опубликованы в рейтинговых (Топ-25%) международных журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus, 1 – в сборнике материалов международной конференции [4] и 1 – в сборнике научных статей [5].

### **Личный вклад автора.**

Все представленные в диссертации результаты получены автором лично. В постановке задач, обсуждении результатов и подготовке научных публикаций принимали участие научные руководители А.А. Осипцов, В.П. Карликов и научные консультанты Д.И. Гарагаш, Е.В. Донцов. Личный вклад автора в публикациях [1–5] составляет 4/5.

### **Объем и структура работы.**

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 2 приложений. Полный объем диссертации составляет 225 страниц, включая 56 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 132 наименования.

## **Содержание работы**

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, приводится литературный обзор по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость полученных результатов, описываются методы исследования, перечисляются положения, выносимые на защиту, обосновывается достоверность результатов и отмечается их апробация.

**Глава 1** посвящена формулировкам моделей концевой элемента (полубесконечной трещины) и радиальной трещины, включающим постановку задачи и систему уравнений. Представлены основные формулировки задач, содержащие предположения, часто используемые в литературных источниках (“классические постановки”). В последующих главах приводятся модификации постановок задач, необходимые для описания анализируемого гидродинамического фактора.

В рамках стандартной модели рассматривается однородная, линейно-упругая горная порода, характеризующаяся модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Квазистатическое распространение асимптотически

тонкой трещины в горной породе с коэффициентом трещиностойкости  $K_{Ic}$  описывается теорией линейно-упругой механики разрушения. Трещина распространяется вдоль плоскости, перпендикулярной однородному обжимающему напряжению  $\sigma_o$ , действующему в дальнем поле. Предполагается, что жидкость гидроразрыва ньютоновская с вязкостью  $\mu$ . Течение жидкости внутри канала трещины ламинарное и описывается теорией смазки. Фронт жидкости гидроразрыва и фронт трещины совпадают. Массообмен между трещиной и окружающим проницаемым коллектором описывается законом Картера, согласно которому скорость утечек обратно пропорциональна квадратному корню от времени экспозиции с коэффициентом  $C_L$ .

В разделе 1.1 обсуждается модель кончика трещины (рисунок 1а), представляемая в виде полубесконечной трещины плоской деформации, распространяющейся с постоянной скоростью  $V$  (мгновенная локальная скорость фронта родительской трещины). Система уравнений записывается в движущейся системе координат, связанной с фронтом трещины, и формулируется относительно профилей раскрытия  $w(x)$  и эффективного давления  $p(x) = p_f(x) - \sigma_o$ , зависящих от расстояния до кончика  $x$  и набора материальных параметров:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_{Ic}, \quad M' = 12\mu, \quad C' = 2C_L, \quad (1)$$

где  $E'$  модуль плоской упругой деформации,  $K'$  и  $M'$  параметры трещиностойкости и вязкости, а  $C'$  – коэффициент утечек.

В разделе 1.2 описывается модель осесимметричной трещины (рисунок 1b), формирующейся вследствие нагнетания жидкости через точечный источник с постоянным объемным расходом  $Q_0$ . Система уравнений формулируется относительно радиуса трещины  $R(t)$ , профилей раскрытия  $w(r, t)$  и эффективного давления  $p(r, t) = p_f(r, t) - \sigma_o$ , зависящих от расстояния до источника  $r$ , времени  $t$  и материальных параметров (1). Дополнительным важным параметром трещины является эффективность  $\eta(t)$ , равная отношению объема трещины к объему закачанной жидкости гидроразрыва.

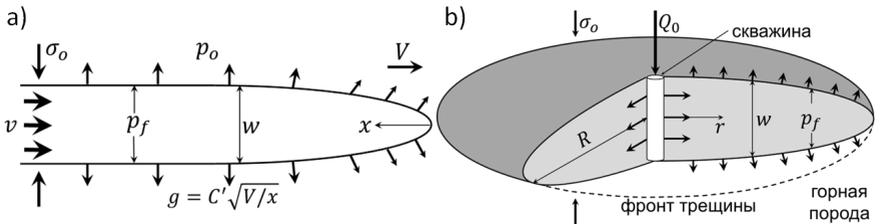


Рис. 1 — Модели полубесконечной (а) и радиальной (б) трещин.

Система уравнений в модели радиальной трещины состоит из

- уравнения упругости, связывающего эффективное давление с профилем раскрытия и радиусом трещины:

$$p(r, t) = -\frac{E'}{2\pi R} \int_0^R G\left(\frac{r}{R}, \frac{s}{R}\right) \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} ds,$$

где  $G(\rho, s)$  интегральное ядро;

- усредненного по ширине канала трещины закона сохранения массы для несжимаемой жидкости, дополненного законом Картера  $g(r, t)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rwv)}{\partial r} + g(r, t) = 0, \quad g(r, t) = \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}},$$

где  $v$  скорость течения жидкости внутри канала трещины,  $t_0(r) = R^{-1}(t)$  – обратная функция к динамике радиуса;

- усредненного по ширине канала трещины закона сохранения импульса для несжимаемой жидкости в предположении тонкого слоя и малости инерционных слагаемых (закона Пуазейля):

$$v = -\frac{w^2}{M'} \frac{\partial p}{\partial r};$$

- критерия распространения трещины в виде асимптотики профиля раскрытия вблизи кончика:

$$w = \frac{K'}{E'} \sqrt{R - r}, \quad r \rightarrow R;$$

- граничных условий на фронте трещины и на скважине:

$$w(R, t) = 0, \quad q(R, t) = 0; \quad \lim_{r \rightarrow 0} rw(r, t)v(r, t) = Q_o/(2\pi).$$

Система уравнений в модели полубесконечной трещины состоит из аналогичных соотношений (за исключением граничного условия на скважине), записанных для области трещины в окрестности кончика в движущейся системе координат, связанной с фронтом трещины.

**Глава 2** посвящена анализу влияния массообмена, скорость которого зависит от давления внутри канала трещины, на рост полубесконечной и радиальной трещин гидроразрыва в проницаемой горной породе. В большинстве моделей распространения трещины гидроразрыва используется закон утечек Картера. Предположение  $p_f(r, t) \approx \sigma_o$ , заложенное в закон, не верно в общем случае, означая необходимость уточнения механизма массообмена.

Для модифицированного описания массообмена в главе предполагаются: одномерность механизма, идентичность свойств гидроразрывной и

поровой жидкостью, отсутствие полимерной корки. В результате получено следующее выражение для скорости массообмена, записанное в фиксированной системе координат:

$$g(r, t) = \frac{C'}{\sqrt{t-t_0}} + Q' \left[ \frac{p(r, t_0)}{\sqrt{t-t_0}} + \int_{t_0}^t \frac{\partial p(r, s)}{\partial s} \cdot \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \right], \quad (2)$$

где  $t_0 = t_0(r)$  момент времени, когда фронт трещины находится на расстоянии  $r$  от скважины;  $Q' = 2k/(\mu\sqrt{\pi c})$  коэффициент, характеризующий зависимость массообмена от давления,  $k$  проницаемость пласта,  $c$  коэффициент пьезопроводности; коэффициент утечек  $C' = Q'(\sigma_o - p_o)$ ,  $p_o$  поровое давление в дальнем поле. Выражение (2) принимает форму закона Картера при  $Q' = 0$ .

В разделе 2.1 рассматривается модель полубесконечной трещины. В подразделе 2.1.1 приводится постановка задачи и описывается физическая особенность трещины, связанная с массообменом, зависящим от давления, заключающаяся в формировании зоны циркуляции поровой жидкости, примыкающей к кончику трещины (рисунок 2а). Объем поровой жидкости, пересекающий стенки трещины в этой зоне, равен нулю.

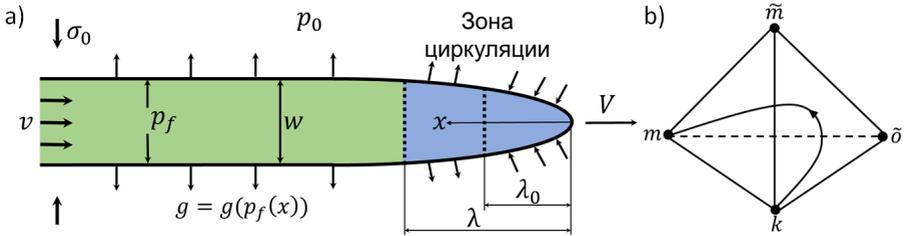


Рис. 2 — (а) Модель полубесконечной трещины с массообменом, зависящим от давления. (б) Параметрическое пространство задачи.

Концептуальное представление параметрического пространства задачи приведено в подразделе 2.1.2. Оно имеет форму тетраэдра (рисунок 2б), в узлах которого располагаются четыре предельных режима распространения ( $m, \tilde{m}, \tilde{o}, k$ ), именуемые узловыми решениями, которые выведены аналитически в параграфе 2.1.2.1. Структура параметрического пространства отличается от модели кончика трещины с утечками по закону Картера (раздел 1.1) наличием узла  $\tilde{o}$ , в котором доминируют вязкостные эффекты и приток к трещине. Узловое решение  $k$ , связанное с доминированием эффектов трещиностойкости и реализуемое вблизи фронта трещины, характеризуется конечным значением давления, равным  $p_f|_{x=0} = p_o - K'\sqrt{V}/(E'Q')$ , что является принципиальным отличием от случая утечек по закону Картера, в котором на фронте давление сингулярно. Структура решения задачи изучается в параграфе 2.1.2.2, где

подчеркивается, что решение задачи в общем случае эволюционирует из  $k$  узла в режим  $m$  “трещина-вязкость”.

В подразделе 2.1.3 найдены численно и охарактеризованы решения для ребер и граней параметрической пирамиды, а также некоторых траекторий внутри нее. Решения найдены в безразмерном виде (масштабирования приведены в параграфе 2.1.3.1) при помощи подхода из работы [Garagash D.I. и др. Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off // Journal of Fluid Mechanics. – 2011.], модифицированного для учета массообмена, зависящего от давления. Для представления траекторий внутри параметрического пространства используется  $mk$  масштабирование, при котором профили раскрытия (рисунок 3а) и давления зависят от безразмерного расстояния до кончика  $\xi$ , коэффициентов утечек  $\chi$  и притока  $\zeta$ :

$$\xi = \frac{x}{\ell_{mk}}, \quad \ell_{mk} = \frac{K'^6}{E'^4 V^2 M'^2}, \quad \chi = \frac{2C'E'}{K'\sqrt{V}}, \quad \zeta = \frac{E'(M'Q'\sqrt{V})^{1/3}}{K'}. \quad (3)$$

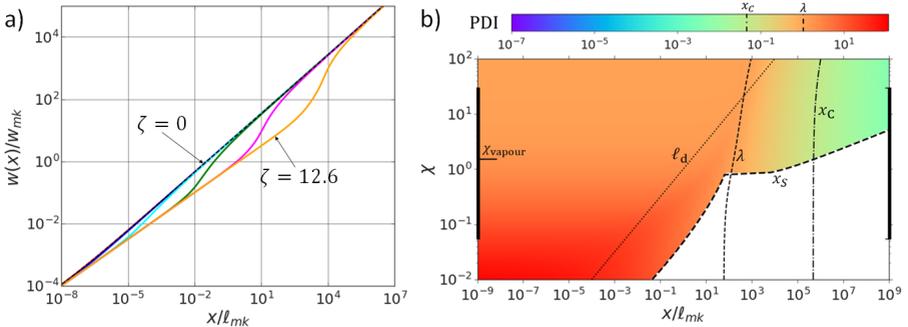


Рис. 3 — Примеры (а) профилей раскрытия полубесконечной трещины при  $\chi = 100$  и (б) карты с индексом зависимости массообмена от давления при  $\chi/\zeta^3 = 0.1$ .

В подразделе 2.1.4 обсуждается решение задачи. В параграфе 2.1.4.2 строятся карты режимов, отображающие границы применимости узловых решений, и карты, на которых изображены значения функции  $PDI(x) = -[(\sigma_o - p_o)\sqrt{x}]^{-1} \cdot \int_0^x p(s)ds / [2\sqrt{x - s}]$  (рисунок 3б), оценивающей долю вклада притока, зависящего от давления, в массообмен. Области, окрашенные в теплые цвета, означают важность учета зависимости массообмена от давления в задаче о кончике трещины. На картах также нанесены характерные масштабы длины, например, длина зоны циркуляции ( $\lambda$ ) и граница области применимости закона Картера ( $x_c$ ). В параграфе 2.1.4.3 перечисляются ограничения построенной модели.

Раздел 2.2 посвящен модели радиальной трещины. В подразделе 2.2.1 рассматривается постановка задачи. Особенности численного алгоритма изложены в подразделе 2.2.2. Используется подход из работы

[Dontsov E. V. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity and leak-off // Royal Society open science. – 2016.], адаптированный для учета массообмена, зависящего от давления, и состоящий из дискретизации уравнений и решения полученной нелинейной системы методом простой итерации. Важной компонентой алгоритма является описание свойств концевой элемента и нахождение положения кончика трещины на каждой временной итерации при помощи модели полубесконечной трещины из раздела 2.1.

В подразделе 2.2.3 представлены полученные результаты. В параграфе 2.2.3.1 проведены численные расчеты эволюции радиальной трещины в размерных переменных. Отслеживаемыми характеристиками трещины, зависящими от времени, являются радиус, максимальное раскрытие, давление на расстоянии половины радиуса и эффективность. Сравнивая полученные динамики с результатами модели радиальной трещины с утечками по закону Картера, делается вывод, что массообмен, зависящий от давления, приводит к более короткой и менее раскрытой трещине. Относительные разницы между значениями радиуса и максимального раскрытия по прошествии 100 минут составляют около 4% и 2%. Полученный результат объясняется более интенсивными утечками в пласт вдоль основной части радиальной трещины по сравнению с законом Картера.

В параграфе 2.2.3.3 выполнено сравнение решений для радиальной трещины с утечками, зависящими от давления, и с утечками по закону Картера в безразмерных переменных в терминах радиуса, максимального раскрытия, давления на расстоянии половины радиуса и эффективности. Для нормализации системы уравнений используется  $mk$  масштабирование, описанное в параграфе 2.2.3.2, при котором решение задачи зависит от безразмерного времени  $\tau$ , расстояния до скважины  $\rho = r/R$ , коэффициента утечек  $\phi$  и параметра, характеризующего зависимость массообмена от давления,  $\psi$ :

$$\tau = \frac{t}{(M'^5 E'^{13} Q_0^3 / K'^{18})^{1/2}}, \quad \phi = \frac{C'^4 E'^{11} M'^3 Q_0}{K'^{14}}, \quad \psi = \frac{Q'^4 E'^5 M'}{K'^2 Q_0}. \quad (4)$$

Расчеты проведены для фиксированных значений  $\psi$ , и результаты представлены в виде зависимостей отслеживаемых характеристик радиальной трещины от времени, а также в виде карт, на которых отображены относительные разницы в значениях параметров трещины между сопоставляемыми моделями (рисунок 4а). В результате сравнения определены диапазоны значений  $\phi$  и  $\psi$ , при которых важно учитывать гидродинамический фактор, например, области с большими значениями эффективности.

В параграфе 2.2.3.4 проведена оценка важности массообмена, зависящего от давления, при помощи модели радиальной трещины с утечками по закону Картера. Найдены значения  $\psi_\alpha$  в зависимости от  $\tau$  и  $\phi$ , начиная

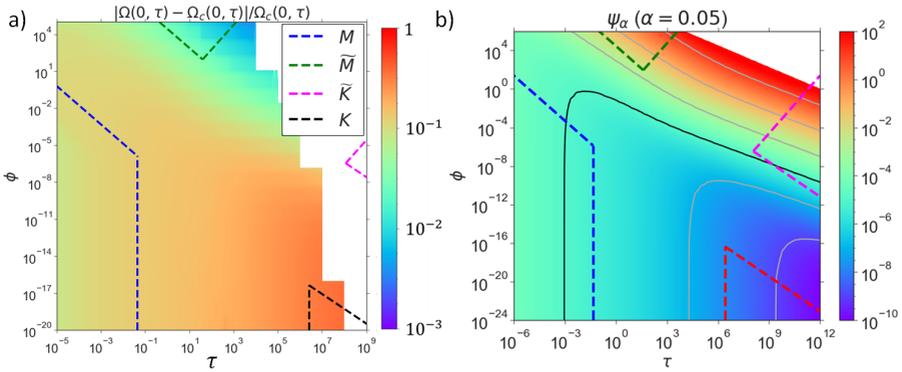


Рис. 4 — (а) Относительная разница между значениями максимального раскрытия радиальной трещины в модели с утечками, зависящими от давления, и в модели с утечками по закону Картера для случая  $\psi = 0.1$ . (б) Значения  $\psi$ , при которых поправка, зависящая от давления, в балансе жидкости составляет 5% от объема закачанной жидкости гидроразрыва.

с которых ( $\psi \geq \psi_\alpha$ ) вклад в баланс жидкости от поправки, зависящей от давления, составляет более 5% от закачанного объема жидкости гидроразрыва, означая важность моделирования утечек, зависящих от давления, в явном виде.

В разделе 2.3 сформулированы основные результаты главы 2.

**Глава 3** посвящена изучению влияния ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” (водный раствор с полимерными добавками, снижающими трение) внутри канала трещины на распространение полубесконечной и радиальной трещин в проницаемом коллекторе. Для разработки сланцевых месторождений применяется “скользящая вода” в качестве жидкости гидроразрыва. Так как данная жидкость имеет низкую вязкость, то ее необходимо закачивать в пласт с высокой скоростью для создания благоприятных условий для последующей закачки частиц проппанта. В результате, реализуется турбулентный режим течения вблизи ствола нагнетательной скважины.

В главе предполагается, что в ламинарном режиме течения “скользящую воду” можно охарактеризовать как ньютоновскую жидкость с вязкостью  $\mu$  и плотностью  $\rho$ , а в турбулентном режиме ее реология описывается асимптотой максимального снижения сопротивления (MDR) [Virk P. S. Drag reduction fundamentals // AIChE Journal. – 1975.] (рисунок 5, зеленая кривая). Используя аппроксимацию MDR асимптоты в виде степенной зависимости коэффициента сопротивления  $f$  от числа Рейнольдса  $Re$ ,  $f \sim Re^{-n}$  (рисунок 5, красная кривая), получено следующее уравнение для скорости течения “скользящей воды” внутри канала трещины, записанное в фиксированной системе координат:

$$v = -\frac{1}{\tilde{f}} \cdot \frac{w^2}{M'} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \tilde{f} = \begin{cases} 1, & \text{Re} \leq \text{Re}_c, \\ f_0'' \cdot \text{Re}^{1-n}, & \text{Re} > \text{Re}_c, \end{cases}, \quad \text{Re} = \frac{\rho v w}{\mu}, \quad (5)$$

где  $\tilde{f} = f/f^{\text{lam}}$  нормализованный коэффициент сопротивления,  $f^{\text{lam}}$  коэффициент сопротивления для ламинарного потока,  $\text{Re}_c = 1133$  критическое число Рейнольдса,  $f_0'' = 0.122$  и  $n = 0.7$  параметры аппроксимации MDR асимптоты степенной функцией. Утечки в пласт описываются законом Картера.

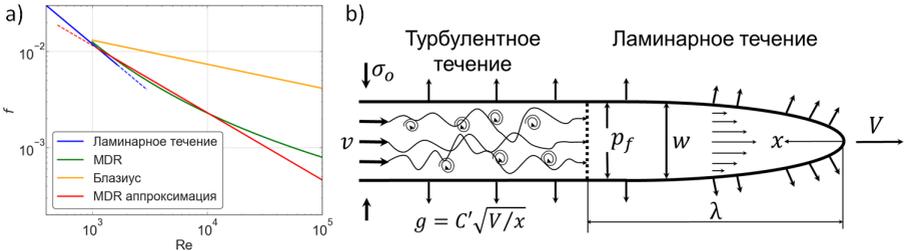


Рис. 5 — (а) Коэффициент сопротивления для чистой воды и “скользящей воды” в зависимости от числа Рейнольдса. (б) Модель полубесконечной трещины, распространяющейся под влиянием ламинарно-турбулентного течения.

В разделе 3.1 изучается модель полубесконечной трещины. Постановка задачи приведена в подразделе 3.1.1, где описывается физическая особенность трещины гидроразрыва – наличие ламинарной зоны, примыкающей к кончику трещины (рисунок 5b). За пределами ламинарной области, реализуются переходный и турбулентный режимы течения.

В подразделе 3.1.2 перечислены предельные режимы распространения полубесконечной трещины. Три из них ( $m, \tilde{m}, k$ ) относятся к модели с ламинарным режимом течения внутри канала трещины (раздел 1.1). Турбулентные узловое решения,  $t$  и  $\tilde{t}$ , характеризующиеся доминированием турбулентного течения внутри канала трещины, выведены аналитически в терминах профилей раскрытия и эффективного давления.

Общее решение задачи, эволюционирующее из режима доминирования трещиностойкости  $k$  в режим доминирования турбулентности  $t$ , рассчитывается численно при помощи алгоритма из работы [Garagash D.I. и др. Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off // Journal of Fluid Mechanics. – 2011.], модифицированного для учета смены режима течения внутри канала трещины и реологии “скользящей воды”. Примеры решений приводятся подразделе 3.1.3 в безмерном виде. Для нормализации системы уравнений используется  $mk$  масштабирование, описанное в параграфе 3.1.3.1, при котором решение задачи зависит от безразмерного

расстояния до кончика трещины  $\xi$  и коэффициента утечек  $\chi$ , приведенных в (3), а также характеристического числа Рейнольдса:

$$\mathcal{R} = \frac{12\rho K^{1/4}}{E^{1/3} M^{1/2}}. \quad (6)$$

Решение задачи обсуждается в **подразделе 3.1.4**. В **параграфе 3.1.4.1** анализируется положение точки перехода между режимами течения в зависимости от значений  $\chi$  и  $\mathcal{R}$ . Делается вывод, что увеличение интенсивности утечек в пласт способствует смещению точки перехода ближе к фронту трещины, означая уменьшение размера ламинарной области и большее влияние турбулентного режима течения на характеристики полубесконечной трещины. В **параграфе 3.1.4.2** определяются границы применимости предельных решений, которые изображаются в виде карт в координатах  $(\xi, \mathcal{R})$  при фиксированных значениях  $\chi$ . На картах также нанесены положение точки перехода между режимами течения и граница области применимости аппроксимации MDR асимптоты степенной функцией.

В **разделе 3.2** рассматривается модель радиальной трещины гидро-разрыва. Постановка задачи приведена в **подразделе 3.2.1**, а численный алгоритм описан в **подразделе 3.2.2**. Используется подход из работы [Liu D. и др. Propagation of a fluid-driven fracture with fracture length dependent apparent toughness // Engineering Fracture Mechanics. – 2019.], адаптированный для учета ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” внутри канала трещины и наличия утечек в пласт по закону Картера. Алгоритм основан на квадратурном интегрировании методом Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа. Численная схема не требует внедрения полноценного асимптотического решения вблизи кончика трещины и использует только критерий распространения из линейно-упругой механики разрушения в связи с высоким пространственным разрешением вблизи фронта. Дискретизированные уравнения объединяются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты верификации численного подхода представлены в **приложении А**.

В **подразделе 3.2.3** продемонстрированы результаты моделирования роста радиальной трещины под влиянием “скользящей воды” / чистой воды в проницаемом / непроницаемом резервуаре. В численном эксперименте ламинарно-турбулентное решение сопоставляется с ламинарным (раздел 1.2) в терминах радиуса, профилей раскрытия (рисунок 6а) и эффективного давления. Моделирование показало, что трансформация режима течения влияет на характеристики трещины в течение начального этапа распространения, приводя к меньшему значению радиуса, большим значениям раскрытия и давления вблизи нагнетательной скважины. Также выявлено, что наличие утечек в пласт продлевает влияние турбулентного

режима течения на профили раскрытия и давления, а эффекты турбулентности проявляются на протяжении более длительного промежутка времени в случае гидроразрыва на основе чистой воды.

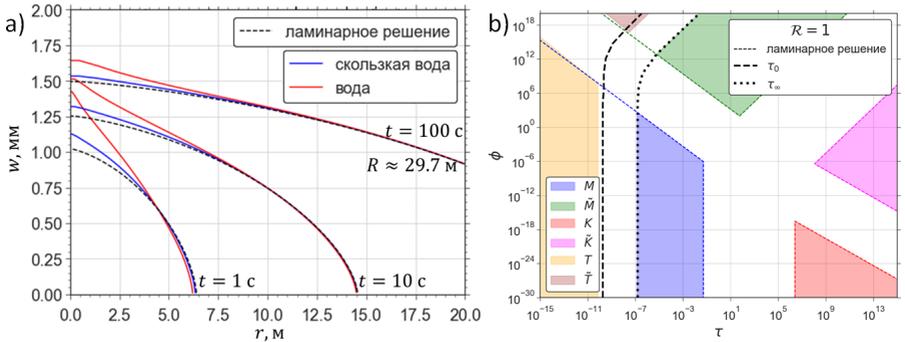


Рис. 6 — Результаты модели радиальной трещины, распространяющейся под влиянием ламинарно-турбулентного течения: примеры (а) профилей раскрытия в случае проницаемого коллектора и (б) карты режимов.

В подразделе 3.2.4 найдены полуаналитические решения для шести предельных режимов распространения радиальной трещины. Решения выписаны в терминах радиуса, максимального раскрытия и эффективного давления на расстоянии половины радиуса от скважины. Четыре режима ( $M$ ,  $\tilde{M}$ ,  $K$ ,  $\tilde{K}$ ) наблюдаются в модели с ламинарным режимом течения внутри канала трещины (раздел 1.2). Остальные два режима,  $T$  и  $\tilde{T}$ , возникают в случае доминирования вязкостных эффектов, когда вдоль всей трещины реализуется турбулентный режим течения (размер ламинарной зоны становится пренебрежимо малым по сравнению с радиусом трещины).

Исследование параметрического пространства задачи проведено в подразделе 3.2.6 с использованием безразмерной формулировки. Для нормализации системы уравнений используется  $mk$  масштабирование (подраздел 3.2.5), при котором решение задачи зависит от безразмерного времени  $\tau$ , расстояния до скважины  $\rho = r/R$ , коэффициента утечек  $\phi$  (4) и характеристического числа Рейнольдса  $\mathcal{R}$  (6). Определены области применимости предельных режимов распространения радиальной трещины, которые изображены на картах. Для различных значений  $\phi$  и  $\mathcal{R}$  приведены динамики радиуса, максимального раскрытия, давления на расстоянии половины радиуса и эффективности.

В параграфе 3.2.6.1 рассмотрен случай непроницаемого резервуара. Карта режимов построена в координатах  $(\tau, \mathcal{R})$  и сделан вывод, что решение эволюционирует из турбулентного режима  $T$  к режиму доминирования трещиностойкости  $K$ , в то время как ламинарный режим  $M$  может

реализоваться в промежуточные моменты времени. На карте дополнительно изображены две временные границы,  $\tau_0$  и  $\tau_\infty$ , показывающие зоны, где ламинарно-турбулентное решение можно приближенно считать полностью турбулентным ( $\tau < \tau_0$ ) и полностью ламинарным ( $\tau > \tau_\infty$ ).

Случай проницаемого коллектора обсуждается в **параграфе 3.2.6.2**. Карты режимов построены в координатах  $(\tau, \phi)$  для фиксированных значений  $\mathcal{R}$  (рисунок 6b). Решение эволюционирует из режима  $T$  в режим  $\tilde{K}$ , характеризующийся доминированием эффектов трещиностойкости и утечек в пласт. Остальные четыре предельных режима распространения могут реализовываться в промежуточные моменты времени. Отмечается уменьшение областей применимости ламинарных режимов  $M$  и  $\tilde{M}$  при увеличении значения  $\mathcal{R}$ . На картах нанесены временные границы  $\tau_0$  и  $\tau_\infty$ .

В **разделе 3.3** сформулированы основные результаты главы 3.

**Глава 4** посвящена изучению влияния вязкопластической реологии жидкости гидроразрыва на распространение радиальной трещины в проницаемой горной породе. Некоторые жидкости гидроразрыва (эмульсии, суспензии с частицами пропантанта и волокнами, пены) имеют вязкопластическую реологию, которая описывается моделью Гершеля-Балкли:  $\tau_m = \tau_0 + M\dot{\gamma}^n$ , где  $\tau_m$  напряжение сдвига,  $\tau_0$  предел текучести,  $\dot{\gamma}$  скорость сдвига,  $M$  коэффициент густоты потока,  $n$  показатель текучести. Усредненный по ширине канала трещины профиль скорости, соответствующий реологической модели Гершеля-Балкли, выглядит следующим образом:

$$v = -\frac{w^{1+\frac{1}{n}}}{M'^{\frac{1}{n}}} \frac{\partial p}{\partial r} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^{\frac{1}{n}-1} \left(1 - \frac{2y_\tau}{w}\right)^{1+\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{2y_\tau}{w}\right), \quad y_\tau = \tau_0 \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^{-1}. \quad (7)$$

Параметр вязкости в наборе материальных параметров (1), учитывающий в текущей модели нелинейность напряжения сдвига, задается выражением:  $M' = 2^{n+1}(2n+1)^n M/n^n$ . Утечки в пласт фильтра жидкости гидроразрыва описываются законом Картера.

В **разделе 4.1** приводится постановка задачи и выделяется физическая особенность трещины, заключающаяся в формировании недеформируемого ядра шириной  $2y_\tau$  (7) посередине канала трещины, внутри которого  $\tau_m < \tau_0$  (рисунок 7a).

В **разделе 4.2** обсуждаются два подхода для моделирования эволюции радиальной трещины. Первый метод – это численный алгоритм, основанный на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа. Подход применялся в разделе 3.2 и адаптирован в текущей главе для учета реологии Гершеля-Балкли (**подраздел 4.2.1**). Второй метод – это быстрый полуаналитический алгоритм, позволяющий получить приближенное решение (**подраздел 4.2.2**). В подходе используются приближенный профиль раскрытия трещины из работы [Dontsov E. V. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture

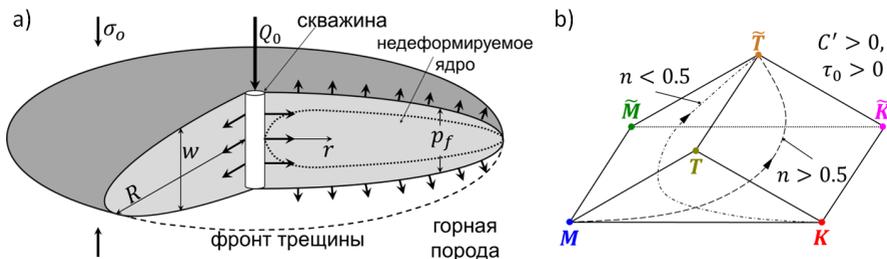


Рис. 7 — (а) Модель радиальной трещины, распространяющейся под влиянием вязкопластической жидкости. (б) Параметрическое пространство задачи.

that accounts for fracture toughness, fluid viscosity and leak-off // Royal Society open science. – 2016.], асимптотическое решение для полубесконечной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли [Bessmertnykh и др. A semi-infinite hydraulic fracture driven by a herschel–bulkley fluid // Journal of Applied Mechanics. – 2019.] и уравнение баланса жидкости.

В разделе 4.3 построено параметрическое пространство задачи, представленное в виде шестиугольной пирамиды, в вершинах которой располагаются предельные режимы (рисунок 7b). Полуаналитические узловое решения получены в подразделе 4.3.1 в терминах динамики радиуса, профилей раскрытия и давления. Четыре режима ( $M, \tilde{M}, K, \tilde{K}$ ) наблюдаются в модели радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости со степенной реологией ( $\tau_0 = 0$ ). Остальные два режима,  $T$  и  $\tilde{T}$ , связаны с доминированием предела текучести, и в этих предельных случаях объем недеформируемого ядра стремится к объему трещины. В подразделе 4.3.2 описаны всевозможные траектории решения задачи внутри параметрического пространства. В общем случае, когда предел текучести ненулевой и горная порода проницаема решение эволюционирует из режима  $M$  (“трещина-вязкость”) в случае  $n > 0.5$  или из режима  $K$  (“трещина-трещиностойкость”) в случае  $n < 0.5$  в режим  $\tilde{T}$ , характеризующийся доминированием утечек и предела текучести.

В разделе 4.4 представляются полученные результаты и проводится их обсуждение. Подраздел 4.4.2 посвящен анализу параметрического пространства задачи, который выполнен при помощи постановки в безразмерных переменных, описанной в подразделе 4.4.1. Для нормализации системы уравнений применяется  $mk$  масштабирование, при котором решение задачи зависит от безразмерного времени  $\tau = t / (M^5 E^{16n+7} Q_0^{n+2} / K^{16(n+2)})^{1/(4n-2)}$ , расстояния до скважины  $\rho = r/R$  (профили раскрытия и давления), коэффициента утечек  $\phi = C'^4 (M^3 E^{10n+1} Q_0^{2-n} / K^{10n+4})^{1/(2n-1)}$  и предела текучести  $\psi =$

$\tau_0 (E'^4 Q_0 M'^{1/n} / K'^6)^{n/(2n-1)}$ : Исследование параметрического пространства включает нахождение областей применимости предельных режимов распространения, которые изображаются в виде карт. Также изучается поведение радиуса, максимального раскрытия, давления на расстоянии половины радиуса и эффективности в зависимости от времени при различных значениях  $\phi$  и  $\psi$ . Рассматриваются два значения показателя текучести,  $n = 1$  (жидкость Бингама) и  $n = 0.3$ , а также обсуждаются случаи непроницаемого и проницаемого коллекторов.

На основе численного моделирования роста трещины в непроницаемой горной породе (**параграф 4.4.2.1**), распространяющейся под влиянием вязкопластической жидкости с  $n = 1$  (жидкость Бингама) и  $n = 0.3$ , были построены карты в координатах  $(\tau, \psi)$ , демонстрирующие эволюцию решения  $M \rightarrow T$  при  $n > 0.5$  и  $K \rightarrow T$  при  $n < 0.5$ , т. е. в обоих случаях траектории приходят в узел  $T$ , характеризующийся доминированием предела текучести.

Рост радиальной трещины в проницаемом коллекторе рассматривается в **параграфе 4.4.2.2**. Карты режимов построены в координатах  $(\tau, \phi)$  для фиксированных значений  $\psi$  (рисунок 8а). В случае показателя текучести  $n > 0.5$  решение задачи эволюционирует из узла  $M$  в узел  $\tilde{T}$ . При  $n < 0.5$  наблюдаются траектории  $K \rightarrow \tilde{T}$ . Увеличение значения безразмерного предела текучести  $\psi$  способствует уменьшению областей применимости режимов  $K, \tilde{K}$  при  $n > 0.5$  и  $M, \tilde{M}$  при  $n < 0.5$ .

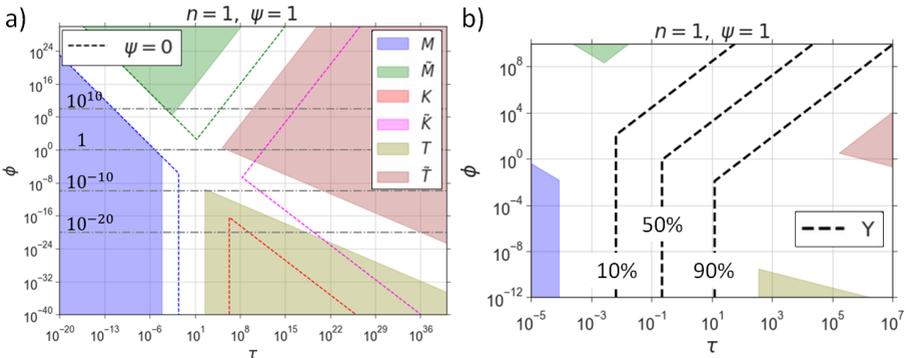


Рис. 8 — Результаты моделирования роста радиальной трещины, распространяющейся под влиянием вязкопластической жидкости: примеры (а) карты режимов и (б) карты с изолиниями, вдоль которых объемная доля недеформируемого ядра фиксирована.

В подразделе 4.4.3 проведены количественные оценки объема недеформируемого ядра, формирующегося внутри канала трещины. Для

наблюдения за развитием ядра вводится функция  $\Upsilon(\tau, \phi, \psi)$ , соответствующая доле ядра в объеме трещины. Результаты расчетов представляются в виде карт с изолиниями, вдоль которых объемная доля равна 0.1, 0.5, 0.9 (рисунок 8b). Функция  $\Upsilon(\tau, \phi, \psi)$  при фиксированных значениях  $\phi$  и  $\psi$  плавно растет от 0 до 1, эволюционируя от режимов, в которых доминирует вязкость  $M, \tilde{M}$  при  $n > 0.5$  или трещиностойкость  $K, \tilde{K}$  при  $n < 0.5$  к режимам с доминированием предела текучести  $T, \tilde{T}$ .

В подразделе 4.4.4 приведены результаты моделирования роста радиальной трещины в размерных переменных. Сделан вывод, что наличие предела текучести у жидкости гидроразрыва приводит к формированию менее длинной и более раскрытой трещины по сравнению со случаем гидроразрыва на основе жидкости со степенной реологией ( $\tau_0 = 0$ ). Отмечается, что различия между двумя сравниваемыми решениями более существенны при распространении трещины в непроницаемой горной породе, а именно, относительные разницы для радиуса и максимального раскрытия по простевии 100 минут в случае непроницаемого резервуара составляют 9.4 % и 19.9 %, а в случае проницаемого коллектора – 3.1 % и 16.1 % (отличие в эффективности 8.2 %).

В разделе 4.5 сформулированы основные результаты главы 4.

В заключении приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Построена модель полубесконечной трещины гидроразрыва, учитывающая массообмен, зависящий от давления в канале трещины. Выявлены новые физические особенности, заключающиеся в формировании зоны циркуляции поровой жидкости, примыкающей к фронту трещины, и конечном значении давления в кончике. Выведены аналитические решения для предельных режимов распространения и реализован численный алгоритм для нахождения общего решения задачи. Найденны границы применимости предельных решений и проведена оценка относительной важности учета зависимости скорости массообмена от давления. Определены диапазоны значений определяющих параметров, при которых построенное решение стремится к решению для полубесконечной трещины с утечками по закону Картера.

2. Разработана модель радиальной трещины гидроразрыва, учитывающая массообмен, зависящий от давления. Реализован численный алгоритм, в котором используется модель концевго элемента в качестве критерия распространения. Продемонстрировано, что при учете зависимости массообмена от давления увеличивается интенсивность утечек в пласт вдоль основной части трещины, что приводит к формированию более короткой и менее раскрытой трещины по сравнению с результатами модели с утечками по закону Картера. Найденны диапазоны значений определяющих параметров, при которых необходимо учитывать зависимость массообмена

от давления.

3. Построена модель полубесконечной трещины, распространяющейся в проницаемом резервуаре под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” внутри канала трещины. Выведены аналитические решения для предельных режимов распространения и реализован численный алгоритм для нахождения общего решения. Построены карты режимов с границами применимости предельных решений. Определено положение границы перехода между режимами течения в зависимости от значений определяющих параметров.

4. Разработана модель радиальной трещины, распространяющейся в проницаемом резервуаре под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” внутри канала трещины. Найдены полуаналитические решения для предельных режимов распространения и реализован численный алгоритм для расчета эволюции трещины. Продемонстрировано, что турбулентное течение возникает вблизи ствола скважины, а ламинарный режим реализуется вблизи кончика трещины, причем, размер ламинарной области увеличивается с течением времени. Выявлено, что наличие утечек в пласт продлевает воздействие эффектов турбулентности на распространение трещины. Показано, что турбулентный режим течения влияет на характеристики трещины вблизи ствола скважины в начальный период распространения. Определены области применимости предельных решений в пространстве определяющих параметров задачи и найдены диапазоны значений параметров, при которых решение можно считать полностью турбулентным или полностью ламинарным.

5. Построена модель радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли. Реализованы численный и полуаналитический приближенный алгоритмы для расчета динамики роста трещины. Показано, что в середине канала трещины формируется недеформируемое ядро, объем которого увеличивается с течением времени. Учет вязкопластической реологии жидкости гидроразрыва приводит к формированию менее длинной и более раскрытой трещины по сравнению со случаем жидкости гидроразрыва со степенной реологией. Получены полуаналитические решения для предельных режимов распространения трещины и определены их области применимости в пространстве определяющих параметров задачи. Найдены интервалы значений определяющих параметров, при которых наличие предела текучести жидкости гидроразрыва оказывает значительное воздействие на эволюцию радиальной трещины. Выполнены количественные оценки роста объемной доли недеформируемого ядра.

## Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI:

1. Kanin E.A., Garagash D.I., Osiptsov A.A. The near-tip region of a hydraulic fracture with pressure-dependent leak-off and leak-in // Journal of Fluid Mechanics. – 2020. – Vol. 892. – Pp. A31-1-A31-34. – DOI: 10.1017/jfm.2020.193. – IF WoS: 4.245.
2. Kanin E.A., Dontsov E.V., Garagash D.I., Osiptsov A.A. A radial hydraulic fracture with pressure-dependent leak-off // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2020. – Vol. 143. – P. 104062. – DOI: 10.1016/j.jmps.2020.104062. – IF WoS: 5.582.
3. Kanin E.A., Dontsov E.V., Garagash D.I., Osiptsov A.A. A radial hydraulic fracture driven by a Herschel–Bulkley fluid // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2021. – Vol. 295. – P. 104620. – DOI: 10.1016/j.jnnfm.2021.104620. – IF WoS: 3.112.

### Иные публикации:

4. Kanin E.A., Garagash D.I., Osiptsov A.A. Turbulent flow effects in a slickwater fracture propagation in permeable rock // ECMOR XVII - 17th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. – 2020. – Pp. 1-18. – DOI: 10.3997/2214-4609.202035216.
5. Kanin E.A., Garagash D.I., Osiptsov A.A. Turbulent Flow Effects on Propagation of Radial Hydraulic Fracture in Permeable Rock // Mechanics of Hydraulic Fracturing. – John Wiley & Sons, Inc, 2023. – Ch. 10. Pp. 107-126. – DOI: 10.1002/9781119742487.ch10.