

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**Толмачёва Кристина Игоревна**

**Развитие многоконтинуальных моделей  
фильтрации суспензии**

Специальность 1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор  
Карликов Владимир Павлович,

доктор физико-математических наук  
Осипцов Андрей Александрович

Москва – 2023

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Обзор литературы по моделям фильтрации суспензии в пористой среде</b>	<b>13</b>
1.1 Введение . . . . .	13
1.2 Континуальные модели фильтрации суспензии . . . . .	14
1.3 Кольматация . . . . .	16
1.4 Мобилизация частиц . . . . .	24
1.5 Стохастические модели . . . . .	29
1.6 Перенос частиц в трещине гидроразрыва и нефтенасыщенном пласте . . . . .	31
1.7 Моделирование притока к трещине гидроразрыва . . . . .	34
1.8 Аналитические решения уравнения пьезопроводности для давления	37
1.9 Моделирование очистки трещины гидроразрыва . . . . .	38
1.10 Выводы . . . . .	40
<b>2 Однофазная фильтрация суспензии</b>	<b>43</b>
2.1 Система уравнений . . . . .	43
2.2 Реология Гершеля-Балкли . . . . .	47
2.3 Численный алгоритм для задачи однофазной фильтрации . . . . .	50
2.4 Аналитическое решение задачи о фильтрации суспензии . . . . .	56
2.5 Критическая скорость мобилизации частиц . . . . .	60
2.6 Образование внешней глинистой корки . . . . .	63
2.6.1 Выводы . . . . .	65
<b>3 Сравнения с экспериментальными данными</b>	<b>66</b>
3.1 Эксперименты по кольматации . . . . .	66
3.2 Эксперименты по самокольматации . . . . .	85

3.3	Эксперименты по мобилизации . . . . .	88
3.4	Эксперименты по образованию внешней глинистой корки . . . . .	90
3.5	Лабораторные данные по фильтрации жидкости Гершеля-Балкли . . . . .	91
3.6	Выводы . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Двухфазная фильтрация суспензии</b>	<b>96</b>
4.1	Система уравнений . . . . .	96
4.2	Численный алгоритм . . . . .	98
4.3	Аналитическое решение . . . . .	102
4.4	Выводы . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Моделирование течений около нагнетательных скважин</b>	<b>105</b>
5.1	Постановка задачи . . . . .	105
5.2	Анализ эффективности очистки прискважинной области . . . . .	106
5.3	Выводы . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Течения в трещине гидроразрыва и пласте</b>	<b>111</b>
6.1	Введение . . . . .	111
6.2	Вывод уравнений . . . . .	112
6.3	Учет геомеханических свойств . . . . .	115
6.4	Описание притока жидкости из пласта в процессе очистки трещины ГРП . . . . .	118
6.4.1	Приток по формуле Картера . . . . .	119
6.4.2	Интегральный приток из пласта . . . . .	121
6.4.3	Другие аналитические решения задачи фильтрации в полубесконечной области . . . . .	128
6.4.4	Численное моделирование притока из резервуара . . . . .	132
6.5	Относительное влияние геомеханических эффектов на очистку трещины ГРП . . . . .	137
6.6	Моделирование различных режимов очистки трещины гидроразрыва . . . . .	141
6.7	Выводы . . . . .	146

Заключение	148
Список литературы	150

## Введение

### Актуальность темы

Работа посвящена математическому моделированию многофазной фильтрации суспензии в пористой среде. Данная задача представляет большой интерес в связи с широким распространением многофазной фильтрации в различных технологических и природных процессах, включая движение подземных вод и течения жидкостей в процессах нефтегазовой индустрии.

В нефтегазовой промышленности моделирование фильтрации суспензий необходимо для описания течений в трещине гидроразрыва, заполненной зернистым расклинивающим агентом (проппантом), и нефтегазоносных пластах в процессе добычи углеводородов или нагнетания воды в пласт для поддержания высокого пластового давления. Течение в пласте около скважины или в трещине гидроразрыва может быть однофазным или многофазным (закачиваемый раствор, пластовая вода и нефть/газ). Также может наблюдаться перенос, осаждение и повторное вымывание твердых частиц, источниками которых могут быть как сама порода, так и частицы нерастворимых солей и других загрязнений в закачиваемом растворе, частицы разрушенного проппанта в трещине гидроразрыва.

Трещина гидроразрыва представляет собой узкую область в пласте, заполненную песком или керамическими частицами (проппантом), для поддержания конечной ширины трещины и обеспечения более высокой проводимости по сравнению с проводимостью пласта. В начальный момент трещина полностью заполнена гидроразрывной жидкостью, пласт заполнен нефтью и водой. С одной стороны трещина присоединена к скважине, с другой стороны (на кончике трещины) приток или вытекание жидкости невозможно. В предположении линейного режима течения в пласте считаем, что течение в нем перпендикулярно

течению в трещине.

Перед вводом скважины в эксплуатацию проводится серия мероприятий, направленных на очистку скважины и присоединенных к ней трещин (или трещины) ГРП и выводу на режим добычи. Как правило, запуск скважины сопровождается резким открытием штуцера на поверхности, приводящим к быстрому падению давления (депрессии) скважины и трещин ГРП, что влечет за собой такие же сильные и часто необратимые изменения в проводимости трещины. Эти изменения связаны как с течением в пласте, так и с геомеханическими эффектами, сопутствующими течению в системе трещина-пласт: сжатие, разрушение и вдавливание в стенки трещины частиц пропанта. В полевых условиях представляется возможным измерение только нескольких характеристик течения в скважине - объемного расхода, давления в забойной зоне (если скважина оборудована забойным манометром), количества твердых частиц, содержащихся в добываемой жидкости. Точное предсказание этих величин возможно только при корректном моделировании с учетом всех факторов, влияющих на фильтрацию в пористой среде.

Наличие твердых частиц может существенно снижать проницаемость породы, а значит и суммарную добычу углеводородов. Измерение количества твердых частиц и их распределение вдоль породы или трещины гидроразрыва невозможно производить в полевых условиях. Именно поэтому описание различных нефтесервисных процессов требует корректного математического моделирования транспорта частиц и других эффектов, оказывающих влияние на фильтрационные свойства породы.

Кроме процесса очистки трещины так же будет проведено моделирование процесса нагнетания воды и очистки прискважинной зоны. В данном процессе сначала происходит нагнетание (закачка) воды из вертикальной скважины в пласт (радиальное течение с центром в скважине). Во время закачки воды возможно осаждение и застревание в порах породы мелких частиц, мигрирующих вместе с водой (частицы нерастворенных солей, остатки твердых частиц породы в скважине после бурения, вымытые частицы породы в прискважинной зоне). Затем направление течения меняется (посредством уменьшения давления в скважине) и пластовая нефть вытесняет закаченную воду. Во время процесса обратного течения возможно вымывание (мобилизация) осажденных частиц

в поток воды, что значительно повышает проницаемость породы, а значит и суммарную добычу нефти.

Развитие моделей фильтрации суспензии является важной фундаментальной задачей. Несмотря на актуальность проблемы, многие задачи все еще остаются нерешенными. Так, в открытой литературе не сформулирована замкнутая и равномерно пригодная модель переноса частиц в пористой среде с учетом коагуляции и мобилизации частиц. Единственным надежным источником замыкающих соотношений для модели переноса частиц в пористой среде являются эксперименты на искусственных (насыпных) образцах пористой среды или на кернах породы. Обычно для каждого эксперимента по коагуляции (загрязнению суспензией пористого образца) подбирается индивидуальная формула со свободными параметрами, значения которых никак не коррелируют с параметрами породы и течения. Актуальной задачей является построение математической модели очистки трещины гидроарзрыва с учетом описания как гидромеханических эффектов фильтрации в упаковке проппанта, так и геомеханических эффектов при сжатии упаковки проппанта массивом породы под действием тектонических напряжений. Ни одна из существующих моделей не описывает все эффекты, влияющие на характер течения, среди которых приток из резервуара в пласт в условиях нестационарного давления в трещине ГРП, вязко-пластическая реология жидкостей, перенос твердых частиц, сжатие, разрушение и вдавливание частиц проппанта, динамика развития трещины и многие другие.

### **Степень разработанности**

Моделирование фильтрации суспензий уже много лет является актуальной и исследуемой темой. Было построено множество континуальных ([1–9]) и стохастических ([10], [11]) моделей фильтрации.

Для описание переноса, осаждения и вымывания частиц также было предложено множество различных моделей и эмпирических соотношений ([1], [3],[12], [13], [14]), однако каждый из подходов имеет свои ограничения на характер течения и не может быть переименован для описания любой фильтрации.

Сопряженная гео- и гидромеханическая задача об обратном течении в трещине является слабо изученной проблемой, по сравнению, например, с процес-

сом образования и распространения трещины гидроразрыва пласта ([15], [16]).

### **Методология и методы исследования**

Исследование процессов фильтрации суспензии проводится в рамках многоконтинуального подхода. При составлении численных схем используются конечно-разностные методы, уравнение на давление решается методом прогонки. Устойчивость численных расчетов достигается использованием условием Куранта-Фридрихса-Леви. Для нахождения свободных параметров модели используются методы Ньютона и градиентного спуска.

### **Цели работы**

- Построение моделей фильтрации суспензии в пористой среде с учетом различных факторов, сопутствующих нефтесервисным процессам (перенос и осаждение твердых частиц, вязкопластическая реология несущей жидкости, геомеханические эффекты).
- Выбор замыкающих соотношений для интенсивности осаждения и мобилизации частиц в пористой среде на основе сравнения с экспериментальными данными из открытых источников.
- Численная реализация моделей фильтрации и проведение серии параметрических расчетов для оптимизации нефтесервисных технологий: очистка трещины ГРП с учетом фильтрации в канале трещины и окрестной породе, заводнение пласта и очистка прискважинной области в процессе заводнения.

### **Научная новизна**

- Развита следующие трехконтинуальные модели фильтрации суспензии:
  - (i) модель фильтрации суспензии с двумя жидкими фазами, учитывающая следующие факторы: перенос, захват и вымывание твердых частиц; течение жидкости внутри упаковки захваченных твердых частиц; влияние захваченных частиц на пористость и проницаемость породы;
  - (ii) сопряженная модель вытеснения в трещине ГРП, заполненной пропантом, и окружающем пласте с учетом геомеханических (сжатие упаковки

пропанта, вдавливание зерен пропанта в стенки трещины) и гидромеханических (вязкопластическая реология вытесняемой жидкости, сжимаемость жидкостей) эффектов;

- На основе сравнения результатов численных расчетов с результатами лабораторных экспериментов по фильтрации суспензий были получены диапазоны применения различных замыкающих соотношений, описывающих захват и вымывание частиц; получены корреляции между свободными параметрами этих соотношений и параметрами фильтрации;
- Построена модель отрыва сферической частицы от плоской поверхности в потоке вязкой жидкости, на основе которой получено выражение для критической скорости вымывания частиц; полученное выражение внедрено в многофазную модель фильтрации;
- На основании результатов численных расчетов предложен алгоритм для анализа эффективности очистки прискважинной зоны, учитывающий захват и вымывание твердых частиц.

### **Положения, выносимые на защиту**

На защиту выносятся следующие новые результаты, полученные в диссертации:

- Для достаточно мелких закачиваемых частиц (отношение диаметров частиц и зерен породы менее  $10^{-2}$ ) формула с экспоненциальной зависимостью коэффициента кольтматации от концентрации осажденных частиц лучше всего подходит для описания процесса осаждения частиц, если частицы только застревают в породе; если частицы и застревают, и осаждаются, лучше всего подходит формула с линейной зависимостью от концентрации осажденных частиц и степенной зависимостью от координаты; для более крупных частиц (отношение диаметров более  $10^{-2}$ ) лучше всего подходит двухпараметрическая формула с линейной зависимостью от концентрации осажденных частиц.
- В заданном диапазоне параметров для достижения максимальной добычи нефти в случае невысокой проницаемости пласта давление в скважине

должно падать быстро; при увеличении проницаемости пласта давление должно падать тем медленнее, чем меньше начальная толщина трещины; при ненулевом пределе текучести жидкости давление должно падать медленнее, чем в случае нулевого предела текучести.

- Для выбранного диапазона параметров течения чем выше концентрация захваченных частиц, тем быстрее падает проницаемость породы вблизи скважины и тем меньше оптимальная продолжительность очистки при-скважинной зоны.

### **Практическая значимость**

Практическая значимость работы обусловлена широким спектром приложений построенных моделей для описания процессов фильтрации флюидов, сопутствующих различным нефтесервисным технологиям: нагнетание неочищенной воды в пласт для поддержания высокого порового давления; очистка трещины ГРП и вывод скважины на режим. При наличии данных о породе и закачиваемой жидкости могут быть предложены выражения, описывающие интенсивность коагуляции твердых частиц, а также вычислена критическая скорость мобилизации, начиная с которой возможен отрыв ранее осевших частиц. Эти процессы крайне важны при моделировании течений в прискважинной области и трещине гидроразрыва, поскольку они существенно влияют на проницаемость породы и, следовательно, проводимость скважины/трещины. Разработанный комплекс программ для решения уравнений фильтрации суспензии может быть использован для моделирования заводнения и очистки прискважинной зоны, а также очистки трещины гидроразрыва. При помощи моделирования можно предсказать снижение и восстановление проводимости, суммарную добычу углеводородов и расход нагнетаемой жидкости. Для достижения максимальной добычи при предварительном моделировании может быть выбрана оптимальная динамика снижения давления в забойной зоне скважины.

### **Достоверность и апробация работы**

Достоверность полученных результатов обуславливается применением классических моделей гидромеханики и контролем сходимости используемых чис-

ленных методов. Численные результаты сравнивались с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными.

Результаты работы докладывались на следующих конференциях: II Всероссийская научная конференция «Теплофизика и физическая гидродинамика» с элементами школы молодых ученых (Ялта, 2017); International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, 2017); 9th International Conference on Computational and Experimental Methods in Multiphase and Complex Flow (Таллин, 2017); Конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва, 2016); XVIII Всероссийская конференция «Современные проблемы аэрогидродинамики», посвященная 60-летию Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике и 125-летию его первого председателя академика АН СССР Н.И. Мусхелишвили (Сочи, 2016); X Международная летняя школа «Компьютерные технологии анализа инженерных проблем механики» (Москва, 2016); Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016» (Москва, 2016).

Постановки задач и результаты работы обсуждались на научных семинарах кафедры гидромеханики для студентов и аспирантов (2015-2019); семинарах в Московском научно-исследовательском центре компании Шлюмберже (2015-2016); семинарах лаборатории механики многофазных сред НИИ механики МГУ под руководством проф. А.Н. Осипцова (2015-2021); семинарах лаборатории по моделированию многофазных систем центра по добыче углеводородов Сколковского института науки и технологий под руководством проф. А.А. Осипцова (2018-2021); семинарах проектного центра по энергопереходу Сколковского института науки и технологий под руководством проф. А.А. Осипцова (2022-2023); совместном семинаре «Газпромнефть НТЦ» (г. Санкт-Петербург) и Новосибирского госуниверситета «Моделирование в нефтяном инжиниринге» под руководством д.ф.-м.н. С.В. Головина (2023).

Результаты диссертации также докладывались автором и обсуждались на семинаре НИИ механики МГУ по механике сплошных сред под руководством А.Г. Куликовского, В.П. Карликова, О.Э. Мельника и А.Н. Осипцова. Кроме того, на основании данных результатов успешно защищена при окончании аспирантуры научно-квалификационная работа на тему: «Развитие многоконтинуальных

моделей фильтрации суспензий».

За результаты, изложенные в диссертации, автор была награждена дипломом за лучший доклад секции «математика и механика» подсекции «гидромеханика» конференции «Ломоносов 2016».

### **Публикации**

Основные результаты работы опубликованы в 12 печатных работах, 7 из которых опубликованы в журналах, индексируемых в Web of Science и/или Scopus [17–23]; 5 - в сборниках материалов международных конференций [24–28], получен 1 патент [29].

### **Личный вклад автора**

В диссертации приведены результаты, полученные лично автором. Автор участвовала в формулировке моделей, планировании и обсуждении результатов численных расчетов. Численный алгоритм был реализован в программном коде лично автором. Все результаты и их анализ, графики, таблицы, представленные в диссертации, автор выполнила лично. Положения, выносимые на защиту, получены лично соискателем. Личный вклад автора в работах [18, 19, 22, 23] составляет 4/5, в статье [24] - 2/3, [20, 25] - 1/3, [21, 26] - 1/4, [17] - 1/5, [27–29] - 1/6.

### **Благодарности**

Автор выражает благодарность научному консультанту к.ф.-м.н. С.А. Бородину и И.А. Гарагашу, результаты исследований которого были использованы в данной работе.

### **Объем и структура работы**

Диссертация состоит из введения, 6 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 161 страницу. Список литературы содержит 118 наименований.

## Глава 1

### Обзор литературы по моделям фильтрации суспензии в пористой среде

#### 1.1 Введение

В данной главе будет проведен обзор исследований, посвященных задачам, возникающим при фильтрации суспензии. Будут рассмотрены основные подходы к описанию процесса фильтрации (континуальный и стохастический), выявлены основные особенности моделирования и различия существующих моделей. Поскольку для замыкания модели фильтрации необходимо определить скорость коагуляции (осаждения и застревания) и мобилизации (вымывания в поток) твердых частиц, будет проведен обзор эффектов, влияющих на коагуляцию и мобилизацию, а также предложенных в литературе выражений для описания интенсивности этих эффектов.

Модель фильтрации суспензии активно используется для описания течений на месторождениях: в упаковке расклинивающего агента (проппанта), заполняющего закрепленную трещину ГРП в процессе добычи углеводородов, и в нефтеносном пласте. Будет проведен обзор механизмов, снижающих и повышающих проницаемость породы и трещины ГРП, классифицированы источники твердых частиц.

Для проверки численной схемы модели фильтрации суспензии, а также для описания течения в пласте при моделировании течения в трещине с учетом притока из пласта необходимо использовать аналитические решения уравнения пьезопроводности или диффузии для давления. В соответствующем разделе будет проведен обзор существующих решений и области их применения.

В заключение будет проведен литературный обзор существующих моделей очистки трещины гидроразрыва с перечнем всех учтенных факторов и допущенных предположений и упрощений.

## 1.2 Континуальные модели фильтрации суспензии

Классическая и наиболее широко используемая модель переноса частиц в пористой среде формулируется с использованием континуального подхода и обычно называется «модель фильтрации глубокого слоя» (deep-bed filtration, DBF). Она был успешно применена к моделированию различных технологических и природных явлений, включая течение воды в почве и фильтрацию бурового раствора в пласте ([1], [2], [3]).

Сформулируем классическую модель глубокой фильтрации и ее наиболее важные модификации. Фильтрация суспензии описывается в рамках модели взаимопроникающих континуумов: несжимаемой несущей (ньютоновской) жидкостью, взвешенными частицами с объемной долей  $C$  и осажденными частицами с объемной долей  $\sigma$  [1–9]:

$$\frac{\partial (\phi(\sigma) C)}{\partial t} + \frac{\partial (uC)}{\partial x} = -q, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = q, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.3)$$

$$u = -\frac{k(\sigma)}{\mu(C)} \nabla p, \quad (1.4)$$

Здесь уравнение (1.1) описывает перенос взвешенных частиц, где  $\phi(\sigma)$  - пористость,  $u$  - скорость фильтрации и  $q$  - интенсивность (скорость) коагуляции (объемная доля частиц, переходящих из одного состояния в другое в единицу времени); уравнение (1.2) является кинетическим уравнением для захваченных частиц, уравнение (1.3) – уравнение неразрывности для жидкости, (1.4) – закон фильтрации Дарси ( $p$  - давление). Отметим, что объемная доля взвешенных твердых частиц  $C$  рассчитывается относительно объема пор, а концентрация захваченных твердых частиц  $\sigma$  определяется относительно общего объема пористой среды. Предполагается, что взвешенные частицы движутся с той же

скоростью, что и несущая жидкость. Захваченные твердые частицы уменьшают проницаемость  $k(\sigma)$  и пористость  $\phi(\sigma)$  пористой среды, которые являются эмпирическими корреляциями, и обычно находятся путем анализа экспериментальных данных. Обзор различных моделей для снижения проницаемости можно найти в [12] (см. Рисунок 1.1).

Expression	Parameters	Investigators
$G = 1 + d\sigma; d > 0$	$d$	Mehter et al. (1970)
$G = 1 + d\frac{\sigma}{\phi_0}; d > 0$	$d$	Mints (1966)
$G = \left(\frac{1}{1-d\sigma}\right)^{m_1}; d > 0, m_1 > 0$	$d, m_1$	Mehter et al. (1970)
$G = \left(1 - \frac{2d\sigma}{\beta}\right)^{-1/2}; \beta > 0$	-	(Maroudas and Eisenklam, 1965b)
$G = \left\{1 + d\left[1 - 10^{-m_1\sigma/(1-\phi_0)}\right]\right\} \cdot \left\{\frac{\phi_0}{\phi_0 - \sigma/(1-\phi_0)}\right\}^3; d > 0, m_1 > 0$	$d, m_1$	Deb (1969)
$G = \left(1 + \frac{d\sigma}{\phi_0}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{\sigma}{\phi_0}\right)^{m_2}; d > 0, m_1 > 0, m_2 > 0$	$d, m_1, m_2$	Ives (1969)
$G = 1 + f\left\{\lambda_0 + d\phi_0\sigma + \left(\frac{\sigma + d}{2}\right)^2 + d\phi_0^2 \ln\left(\frac{\phi_0 - \sigma}{\phi_0}\right)\right\}; f, d, e > 0$	$f, d, e$	Ives (1961)
$G = \left(\frac{\phi_0}{\phi_0 - \sigma}\right)^3 \left(\frac{1 - \phi_0 + \sigma}{1 + \phi_0}\right)^2 \cdot \left\{\sqrt{\frac{\sigma}{3(1 - \phi_0)} + \frac{1}{4}} + \frac{\sigma}{3(1 - \phi_0)} + \frac{1}{2}\right\}$	-	Camp (1964)

Рисунок 1.1: Обзор различных моделей повреждения проницаемости  $G(\sigma), k = k_0G(\sigma)$ , где  $k_0$  - проницаемость пористой среды при отсутствии частиц (таблица взята из [12]).

Классическая модель фильтрации сформулирована для неброуновских частиц с пренебрежимо малыми эффектами молекулярной диффузии (что справедливо для частиц диаметром более 1 мкм - см., например, [3], [30]). В противном случае уравнение сохранения массы (1.1) будет включать в себя диффузионный член ([3]).

Величина  $q$  в правой части уравнений (1.1) и (1.2) описывает объемную скорость обмена между захваченными и взвешенными твердыми частицами (интенсивность захвата и мобилизации). Существуют два противоположных механизма обмена - захват частиц из-за различных гидродинамических и физико-химических процессов и мобилизация частиц - освобождение (ресуспензирование) частиц с поверхности пор.

Модель фильтрации суспензии содержит два выражения, которые необходимо определить для замыкания модели. Первое - выражение, связывающее проницаемость породы и пористость (или концентрацию осажденных частиц), второе - выражение для интенсивности коагуляции и мобилизации. Именно различие в этих двух выражениях и отличает существующие континуальные модели фильтрации.

Одно из самых распространенных улучшений модели фильтрации “глубокого слоя” - это разделение пористой среды на две части: поровые каналы, внутри которых частицы могут осаждаться на стенках и повторно вымываться в поток,

и поровые горлышки, внутри которых твердые частицы могут застревать, но не могут повторно вымываться. Впервые данный подход был предложен в работе [2], затем развит в работе [13]. В [13] также учитывается площадь свободной поверхности внутри поровых каналов, доступной для осаждения частиц. Недостатком обеих моделей является большое количество свободных параметров (9 и 4 соответственно).

В [31] был рассмотрен баланс крутящего момента, действующего на частицы. В модель включена только скорость кольматации частиц, а скорость мобилизации частиц игнорируется (считается, что суммарный эффект от кольматации и мобилизации можно описать одним членом). Предполагается, что кольматирование частиц прекращается, когда достигается баланс крутящего момента, действующего на одну частицу. Скорость захвата содержит один свободный параметр.

Ниже будет приведен обзор моделей, описывающих процессы кольматации и мобилизации частиц в пористой среде.

### 1.3 Кольматация

Наиболее часто используемое выражение для скорости захвата частиц  $q_{trap}$  было предложено впервые в [1], где рассматривается задача загрязнения песчаного фильтра. Предполагается, что скорость захвата частиц пропорциональна объемному потоку взвешенных твердых частиц, а коэффициент пропорциональности  $\lambda$  обычно называют коэффициентом кольматации (или фильтрации):

$$q_{trap} = \lambda u C \quad (1.5)$$

В случае малой концентрации захваченных твердых частиц параметр кольматации можно считать постоянным [4], [5], [8], [30], [32]. Выражение (1.5) с постоянным коэффициентом кольматации может использоваться для описания начальной стадии фильтрации (или снижения проницаемости), а на более поздних стадиях эффективность захвата значительно зависит от концентрации захваченных частиц  $\sigma$ . Исходя из различных экспериментальных данных, линейная поправка к коэффициенту кольматации в терминах  $\sigma$  широко используется в

открытой литературе [2], [3], [6], [7]:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta\sigma) \quad (1.6)$$

Масштабирующий коэффициент  $\lambda_0$  представляет собой так называемый начальный коэффициент фильтрации (коэффициент фильтрации чистой пористой среды с  $\sigma = 0$ ), а выражение в скобках описывает закупорку фильтра (изменение эффективности фильтра с увеличением объема захваченных частиц). Точное описание скорости захвата частиц является ключевым компонентом макроскопической модели фильтрации суспензии (1.1) - (1.4). Значения для начального коэффициента фильтрации не могут быть получены с использованием макроскопического подхода, они получаются путем сравнения с экспериментальными данными. Заметим, что существуют другие корреляции между коэффициентом кольтматации и концентрацией осажденных частиц, обзор этих моделей можно найти, например, в [12] (см. Рисунок 1.2).

Expression	Parameters	Investigators
$F = 1 + b\sigma; b > 0$	$b$	(Iwasaki, 1937; Stein, 1940)
$F = 1 - b\sigma; b > 0$	$b$	(Mehter et al., 1970; Ornatki et al., 1955)
$F = 1 - \frac{\sigma}{\phi_0}$		(Heertjes and Lerk, 1967; Shekhtman, 1961)
$F = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}$		(Maroudas and Eisenklam, 1965b)
$F = \left(\frac{1}{1 + b\sigma}\right)^n; b > 0, n > 0$	$b, n$	Mehter et al. (1970)
$F = \left[\frac{\phi(\sigma)/\phi_0}{\phi_0 - \sigma/(1 - \phi_0)}\right]^n$	$n$	Deb (1969)
$F = \left(1 + \frac{b\sigma}{\phi_0}\right)^{n_1} \left(1 - \frac{\sigma}{\phi_0}\right)^{n_2}; b > 0$	$b, n_1, n_2$	Mackrie et al., (1965)
$F = 1 + b\sigma - \frac{a\sigma^2}{\phi_0 - \sigma}; b > 0, a > 0$	$a, b$	Ives (1960)
$F = \left(1 + \frac{b\sigma}{\phi_0}\right)^{n_1} \left(1 - \frac{\sigma}{\phi_0}\right)^{n_2} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^{n_3}; b > 0$	$b, n_1, n_2, n_3$	(Ives, 1969)

Рисунок 1.2: Обзор различных выражений для функции загрязнения при фильтрации  $G(\sigma)$ , где  $\lambda = \lambda_0 F(\sigma)$  [12].

В работе [13] интенсивность кольтматации разделена на два члена: осаждение в каналах и застревание в порах (первое и второе слагаемое в формуле 1.7 соответственно):

$$q_{trap} = (1 - \phi)\lambda_1 C \frac{1 - \sigma_{att}}{\sigma_{max}} + \lambda_2 C (1 - \phi_c) \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{max}}\right) \left(\frac{d_g + x}{d_g}\right)^{-0.432} \quad (1.7)$$

Использование выражения (1.7) вместе с интенсивностью мобилизации (подробнее в следующем разделе) показало высокую предсказательную способность при моделировании экспериментов. Однако модель [13] содержит 4 свободных параметра, определение которых требует валидации на экспериментальных

данных.

В работе [14] была предложена модель, описывающая только застревание частиц (когда осаждением под действием гидродинамических и физико-химических сил можно пренебречь). Для описания интенсивности кольтматации использовалось следующее выражение:

$$q_{trap} = \gamma C e^{-\beta\sigma}, \quad (1.8)$$

которое также содержит 2 свободных параметра ( $\gamma$  и  $\beta$ ) и хорошо описывает экспериментальные данные по застреванию частиц.

Пористая среда, как правило, имеет широкое распределение пор и частиц по размерам. Извилистые проводящие каналы внутри пористой среды приводят к сложным течениям на масштабе частицы (различные силы гидродинамической и физико-химической природы, действующие на одну частицу, шероховатость стенок пор, диффузия субмикронных частиц и т. д. [3]). Эти явления можно описать лишь приближенно на макроскопическом уровне, используя выражение для интенсивности захвата частиц, рассмотренные выше.

Одним из способов уточнения формулы для скорости захвата частиц является корреляция коэффициента фильтрации с параметрами потока, например с масштабом длины задачи, который представляет собой отношение среднего диаметра частиц к среднему диаметру пор (или диаметру зерен пористой среды). Тем не менее, многочисленные экспериментальные исследования, проведенные в различных условиях, позволяют сделать вывод о том, что не существует однозначной корреляции  $\lambda$  с вышеупомянутым отношением масштабов длины [3], [33–35], что, в свою очередь, ставит вопрос об общей предсказательности макроскопической эмпирической модели (1.1) - (1.6).

Одной из причин этой несогласованности является то, что эксперименты проводились в широком диапазоне параметров потока, так что одного геометрического параметра недостаточно для правильного описания динамики частиц внутри пористой среды. Следовательно, необходимо применить модель фильтрации для описания как можно большего числа экспериментов с разными параметрами породы и суспензии. Это позволит определить выражение для интенсивности кольтматации и выражения для ее свободных параметров для

каждого конкретного случая.

В рамках модели фильтрации суспензии представлено лишь несколько теоретических исследований переноса частиц, в которых обсуждается коэффициент фильтрации и его связь с параметрами потока (например, [7], [8], [30]). Эти исследования основаны на результатах, полученных в рамках микроскопических (пористых) моделей переноса частиц [36—43]. В этих моделях рассматривается баланс сил, действующий на одну частицу, движущуюся через пористую среду, представленную набором так называемых сферических ячеек Хаппеля [41]. Ниже мы суммируем ключевые результаты, связанные с динамикой микромасштабных частиц, которые могут быть использованы для установления связи между коэффициентом фильтрации и параметрами потока.

Подробный обзор механизмов захвата частиц на поровой поверхности представлен в [3], [36]. Определены следующие механизмы, способствующие захвату частиц: броуновская диффузия, захват (контактная адгезия), инерционное воздействие, гравитационное осаждение, отталкивание ближнедействующих сил двойного слоя.

Частицы подвержены влиянию броуновской диффузии, если их размер сопоставим со средней длиной свободного пробега молекул несущей жидкости, которая обычно составляет порядка 1 мкм. Захват - процесс осаждения частиц на поверхности пор из-за контактной адгезии. Частицы двигаются по линиям тока вблизи стенок пор и захватываются, когда их расстояние до стенок становится меньше порогового значения. В рамках модели Хаппеля существует так называемая «предельная траектория» частиц, которая отделяет свободно двигающиеся частицы от захватываемых на поверхности коллектора. Концепция предельной траектории позволяет напрямую определить эффективность коллектора во время захвата.

Заметим, что захват твердых тел в жидкостях требует точного моделирования гидродинамики частицы, приближающейся к жесткой поверхности, сопровождающейся образованием тонкого слоя жидкости между ними, что является одной из классических задач гидромеханики. Инерционные свойства частиц проявляются в их тенденции к движению в прямолинейном направлении и отклонению от криволинейных линий тока жидкости. Это приводит к интенсивному скоплению твердых частиц при приближении к зернам пористой среды.

Жесткая поверхность в водных растворах обычно имеет поверхностный заряд, который уравнивается диффузионным слоем противоположно заряженных ионов со стороны жидкости, так что образуется двойной слой. Это приводит к электростатическим силам (обычно отталкивания), действующим на приближающиеся поверхности.

В предположении о малом диаметре частиц по сравнению с размером зерен пористой среды и при пренебрежении эффектом осаждения частиц, влияние этих механизмов на эффективность коллектора изучено в [43]. Рассматриваются силы длинного и ближнего действия, так что модель применима как к коллоидным, так и к неколлоидным частицам. Проанализированы предельные траектории частиц для модели пористой среды Хаппеля. Авторы получили следующее выражение для эффективности коллектора  $\eta$  и коэффициента фильтрации  $\lambda$  в терминах безразмерных параметров, описывающих влияние различных механизмов:

$$\eta = 0.72A_s N_{Lo}^{1/8} N_R^{15/8} + 2.4 \cdot 10^{-3} A_s N_G^{1.2} N_R^{-0.4} + 4A_s^{1/3} N_{Pe}^{-2/3}, N_R \leq 0.18 \quad (1.9)$$

$$\lambda = \frac{3(1 - \phi_0)}{2d_g} \eta, \quad (1.10)$$

$$A_s = \frac{2(1 - p^5)}{w}, N_{Lo} = \frac{H}{9\pi\mu a^2 u}, N_G = \frac{2a^2(\rho_p - \rho_f)g}{9\mu}, \quad (1.11)$$

$$N_{Pe} = \frac{ud_g}{D_{BM}}, N_R = \frac{d_p}{d_g}, \quad (1.12)$$

$$p = (1 - \phi_0)^{1/3}, w = 2 - 3p + 3p^5 - 2p^6. \quad (1.13)$$

Здесь  $A_s$  - геометрический параметр Хаппеля,  $\phi_0$  - начальная пористость породы,  $N_{Lo}$ ,  $N_G$ ,  $N_{Pe}$  и  $N_R$  - безразмерные параметры, описывающие влияние силы Лондона, силы тяжести, диффузии и отношения диаметров частиц и пор на осаждение частиц. Численное моделирование переноса частиц в пористой среде, представленной ячейками Хаппеля, хорошо согласуется с экспериментальными данными в диапазоне диаметров частиц  $d_p \leq 0.18d_g$ . Выражения (1.9), (1.13) могут быть использованы для описания начальной стадии захвата частиц, а влияние осажденных частиц на динамику захвата частиц анализиру-

ется в [37].

Стоит отметить, что подход Хаппеля подходит для описания захвата частиц в насыпных породах, где все частицы сферические и одного диаметра. При описании течений в естественных породах частицы могут быть произвольных размеров и форм, следовательно можно лишь оценить масштаб зерен и размер ячеек Хаппеля, исходя из характерного диаметра пор

В [38]-[40] построены микромасштабные модели, описывающие поверхностное осаждение коллоидных частиц с диаметром, намного меньшим по сравнению с поровыми горлышками. Рассмотрены различные режимы течения в терминах числа Пекле (чисто диффузионный, конвекционно-диффузионный, гидродинамический и захват). В каждом из этих режимов предлагаются различные выражения для эффективности захвата частиц. Исследования дополняют результаты, полученные в [39], где влияние диффузии учитывается очень приближенно.

Микромодели [36]-[43] позволяют изучать только осаждение частиц на поверхности матрицы пористой среды, поскольку в них рассматривается динамика частиц вблизи лишь одного зерна (коллектора). Поэтому при использовании полученного выражения для интенсивности захвата частиц на макро уровне пористой среды заведомо игнорируются эффекты взаимного влияния зерен породы (например, закупорка узких горлышек крупными частицами или создание арок из нескольких частиц [44]). Как показано в [3], полная закупорка среды происходит при  $d_p/d_g > 0.15$  (отношение диаметра частицы к диаметру зерен пористой среды), тогда как при  $d_p/d_g > 0.065$  интенсивность захвата мала (только поверхностное осаждение).

Относительное значение механизмов, влияющих на захват частиц, обсуждается, например, в [3].

Обнаружено, что гравитационным осаждением частиц можно пренебречь, если размер частиц составляет 1 мкм. Если размер частицы около 25 мкм, то осаждением можно пренебречь, только если плотность твердых частиц мало отличается от плотности жидкости. Для более крупных частиц (порядка 100 мкм) гравитационное осаждение необходимо учитывать.

Мелкие (коллоидные) частицы с диаметром порядка длины свободного пробега молекул несущей жидкости (около 1 мкм и меньше) подвержены броунов-

скому движению. Влияние молекулярной диффузии определяется числом Пекле  $Pe$ , которое является отношением типичного конвективного потока к диффузионному потоку:

$$Pe = \frac{ud_g}{D_B}, \quad D_B = \frac{Th_B}{3\pi\mu d_p} \quad (1.14)$$

Здесь  $D_B$  - коэффициент диффузии частиц,  $h_B$  - постоянная Больцмана,  $T$  - абсолютная температура. Эффектом диффузии можно пренебречь, когда среднеквадратичная длина пути частицы, обусловленного диффузией, значительно меньше размера зерна  $d_g$ . Расчет показывает, что отношение длины пути к размеру частицы меньше  $10^{-2}$  в диапазоне скоростей жидкости, рассматриваемых для частиц размером более 0.1 мкм.

Прямой захват частиц имеет место, когда расстояние между траекторией частиц и поверхностью пор меньше радиуса частицы и имеются свободные от частиц участки. Было показано, что в предположении параболического профиля скорости потока в поровом пространстве коэффициент захвата частиц при их осаждении на стенках пор принимает следующий вид:

$$\lambda = \frac{1}{d_g} \left( \frac{d_p}{d_g} \right)^2 \quad (1.15)$$

Одиночная частица застревает в треугольных сужениях (Рисунок 1.3), образованных зернами при  $d_p/d_g > 0.152$ . Для бриджинга (образования мостика) двух и трех частиц предельное отношение составляет 0.1 и 0.082 соответственно. Вероятность образования мостиков из большего числа меньших частиц значительно меньше. Хотя мелкие частицы с  $d_p/d_g < 0.082$  могут быть захвачены в трещинах. В последнем случае коэффициент фильтрации имеет следующий вид:

$$\lambda = \frac{1}{d_g} \left( \frac{d_p}{d_g} \right)^{3/2} \quad (1.16)$$

Также в [3] получено выражение для максимальной концентрации частиц, за-

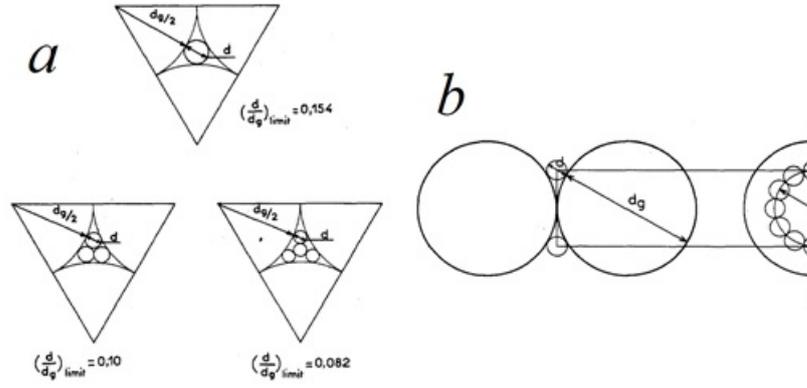


Рисунок 1.3: Захват частиц (застревание и бриджинг) в треугольных сужениях (а) и захват частиц в расщелинах между зернами (b) [3].

оставшихся в расщелинах между сферическими зернами:

$$\sigma = \frac{1 - \phi_0}{2} \pi A \left( \frac{d_p}{d_g} \right)^2 \sqrt{\left( 1 + \frac{d_p}{d_g} \right)^2 - 1} \quad (1.17)$$

Где геометрическим параметром  $A$  является координация частиц. При  $\phi = 0.4$ ,  $A = 7$  и  $d_p/d_g < 0.1$  расчетная максимальная объемная концентрация частиц, оставшихся в расщелинах, составляет менее 3%.

Существует два типа поверхностных сил, действующих на частицы вблизи стенок пор: Ван-дер-Ваальсовы и ионные силы двойного слоя ([3]). Влияние сил Ван-дер-Ваальса можно оценить, рассматривая взаимодействие между сферой и плоской поверхностью, так как радиус зерна намного больше, чем радиус коллоидной частицы. Таким образом сила, действующая на одну частицу, может быть представлена в виде:

$$F_W = \frac{h_H d_p}{12r^2}, \quad r < 0.05 \mu m \quad (1.18)$$

Где  $h_H$  - постоянная Гамакера, а  $r$  - расстояние между частицей и зерном. Диапазон действия этих сил порядка  $10^{-2}$  мкм. Для частиц, взвешенных в воде ( $h_H = 10^{-20}$  Дж), критическое расстояние между частицей и гладкой поверхностью, определяемое равенством сил плавучести и Ван-дер-Ваальса, имеет сле-

дующий вид ( $\Delta\rho$  - разность плотностей между частицей и жидкостью):

$$r^2 = \frac{h_H}{2\pi g d_p^2 \Delta\rho} \quad (1.19)$$

Расчеты показывают, что для мелких частиц ( $d_p < 1\mu m$ ) силы близкого взаимодействия доминируют над гравитацией, а для очень больших частиц ( $d_p > 10\mu m$ ) силами Ван-дер-Ваальса можно пренебречь по сравнению с гравитацией.

Мелкие частицы также подвержены броуновскому движению. Относительная важность хаотического движения частиц и дальних взаимодействий, обусловленных силами Ван-дер-Ваальса, можно оценить, сравнивая энергию притяжения частиц с их кинетической энергией. Можно показать, что для частицы размером более 0.1 мкм энергия притяжения преодолевает энергию случайного движения.

Исходя из экспериментальных данных, получено следующее выражение для коэффициента фильтрации, обусловленное притяжением Ван-дер-Ваальса:

$$\lambda \sim \frac{\mu^{1/2}}{d_g^2 u_m} \quad (1.20)$$

Ионные силы двойного слоя обычно являются отталкивающими, а их дальность действия значительно больше, чем у сил Ван-дер-Ваальса (0.1 мкм). Они ослабевают экспоненциально с расстоянием между частицей и поверхностью и линейно возрастают с увеличением диаметра частиц. Для описания динамики захвата коллоидных частиц необходимо учитывать оба поверхностных эффекта.

Исходя из приведенных выше оценок и существующих экспериментальных данных, частицы могут быть разделены на три группы с точки зрения фильтрующих свойств: крупные частицы ( $d_p > 30$  мкм), промежуточные частицы ( $\sim 1$  мкм,  $< 3$  мкм) и мелкие частицы ( $< 0.1$  мкм).

#### 1.4 Мобилизация частиц

Мобилизация (или вымывание) частиц является следствием двух процессов: химических, характерных для мелких коллоидных частиц и гидродинамических,

в основном влияющих на крупные макроскопические частицы [45].

Для крупных частиц экспериментально установлено ([2]), что существует так называемая критическая скорость мобилизации, начиная с которой в принципе возможно вымывание частиц. Если скорость потока ниже, вымывание невозможно. Коллоидные частицы имеют тенденцию отрываться, если соленость жидкости падает ниже определенного порогового значения (критическая соленость)[45]. Существующие способы уменьшения загрязнения пласта часто основаны на управлении коллоидными эффектами путем контроля ионного состава закачиваемых жидкостей.

Также мобилизацию частиц разделяют на два других типа из-за разных причин вымывания: спонтанная мобилизация и спровоцированная ([3]). Спонтанная мобилизация вызвана превышением критической скорости мобилизации или снижением солености до критического значения. Спровоцированная мобилизация - следствие резкого изменения скорости закачки жидкости. В данном случае резкое вымывание частиц происходит при каждом резком изменении скорости, причем неважно, выше или ниже критического значения скорость течения ([2]).

Для определения критической скорости мобилизации частиц необходимо решить задачу об отрыве частицы от стенок пористой среды. В качестве первого приближения рассматривается задача об отрыве сферической частицы от плоской поверхности или поверхности с препятствием/некоторой кривизной ([46]).

Задача по определению силы, действующей на сферическую частицу, находящуюся вблизи плоской стенки в сдвиговом потоке, при малых числах Рейнольдса была решена в [47], [48] (жидкость несжимаемая с постоянными вязкостью и плотностью). Случай, когда частица касается стенки был рассмотрен в работе [49].

Для определения подъемной силы, действующей на частицу, необходимо учитывать инерционные члены в уравнении Навье-Стокса. Соответствующая задача была решена в работе [50].

Сферическая частица может начать движение под действием трех механизмов: сдвиг, вращение или прямой подъем ([46], [51], [52], [53]). Задача о начале движения сферы посредством сдвига была рассмотрена, например, в работе [53]. В случае вымывания коллоидной частицы полагается, что силы адгезии состав-

ляют наибольший вклад в сопротивление частицы вымыванию, поэтому силой плавучести пренебрегают. В случае крупных частиц наоборот, учитывается сила плавучести, сила адгезии пренебрежительно мала.

Вымывание под действием вращения возможно в следующих случаях: если поверхность имеет конечную кривизну; если имеется препятствие; если сферическая частица деформируется и образуется поверхность контакта частицы и поверхности (Рис. ).

Во время фильтрации в пористой среде любые мелкие частицы, прикрепленные к поверхности, подвергаются воздействию потока (гидродинамические силы). Как следствие, мелкие частицы вблизи поверхности подвергаются воздействию силы гидродинамического сопротивления. Захват частиц в поток жидкости в основном обусловлен этой силой [54, 55]. Следовательно, критическая скорость мобилизации частиц может быть связана с критическим сдвиговым напряжением на частице, необходимым для ее отрыва. Другими факторами, способствующими динамике отрыва, являются шероховатость поверхности и локальные изменения потока жидкости, которые могут вызывать силы, действующие на одну частицу.

Сила сопротивления, действующая на сферическую частицу на плоской поверхности в сдвиговом потоке жидкости, была найдена в работе [49]. Решение было получено для течений при малом числе Рейнольдса с использованием преобразования Фурье-Бесселя (Ханкеля) и численного интегрирования. В работах [47] и [48] также было получено решение данной задачи, но при конечном расстоянии между частицей и поверхностью. Однако при экстраполяции решения [48] в случае нулевого зазора полученное решение совпадает с решением [49].

В работе [56] была решена более сложная задача: рассматривается эрозия породы, т.е. ситуация, когда частица только частично контактирует с жидкостью и окружена другими подобными частицами. Были рассмотрены разные сценарии начала движения частицы: по причине сдвига или вращения, в присутствии или отсутствии подъемной силы. В данной работе используются определения коэффициента сопротивления и коэффициента подъемной силы, значения которых могут быть получены из экспериментальных данных о движении сферической частицы в потоке жидкости, а наличие стенки учитывается в коэффициентах зависимости между сопротивлением и силой. Основным результатом работы

заключается в том, что наилучшим образом экспериментальные данные по эрозии описывает модель, учитывающая подъемную силу и турбулентный профиль скорости при больших числах Рейнольдса.

В работе [57] была рассмотрена задача отрыва сферической частицы от слоя частиц другого радиуса (гетерогенная среда). Значения для коэффициентов сопротивления также берутся из экспериментов.

Для определения подъемной силы, действующей на частицу, касающейся стенки, также были использованы три подхода: 1) аналитический ([50]); 2) полуэмпирический - коэффициент подъемной силы находится экспериментально ([57], [56]); и 3) экспериментальный ([58], [59] для частиц в турбулентном потоке). Также аналитически была получена формула для подъемной силы, действующей на частицу, на некотором расстоянии от стенки (в присутствии или отсутствии вращения) ([60]).

Обзор экспериментальных данных, связанных с мобилизацией мелких частиц в пористой среде, представлен, к примеру, в [3]. Выделяют два типа мобилизации частиц: спонтанную и провоцируемую. Спонтанная мобилизация частиц происходит из-за локальных условий течения в пористой среде, когда скорость потока на масштабе пор достаточно велика для отделения частицы от стенки пор. Спровоцированная мобилизация (*provoked mobilization*) происходит во время резкого изменения скорости фильтрации. Многочисленные эксперименты показывают, что направление этого изменения не играет существенной роли, любое быстрое изменение скорости обычно вызывает мобилизацию частиц. Спровоцированная мобилизация все еще является плохо изученным эффектом при фильтрации в пористых средах.

Спонтанная мобилизация частиц изучена в открытой литературе [45], [2], [3], [7], [8]. Согласно экспериментальным данным (например, [2]) скорость мобилизации частиц  $q_{mob}$  пропорциональна разности между локальной скоростью фильтрации и критической скоростью  $u_c$ , а также концентрации захваченных твердых частиц  $\sigma$ :

$$q_{mob} = \alpha \sigma (u - u_c) \theta(u - u_c) \quad (1.21)$$

Здесь  $\theta$  - функция Хевисайда (она принимает нулевое значение, если ар-

гумент отрицательный, и равна единице, если аргумент положительный),  $\alpha$  - свободный параметр.

Хотя зависимость параметра  $\alpha$  от физических параметров практически не изучена (обычно значения параметра находятся путем валидации модели относительно экспериментальных данных), зависимость скорости мобилизации частиц от параметров потока может быть изучена на основе моделирования на масштабе одиночной поры. В частности, ресуспензирование коллоидных частиц, находящихся в плотной упаковке крупных частиц или на жесткой поверхности является распространенной задачей теоретических исследований [43]-[61], и полученные результаты могут быть применимы к переносу частиц в породе.

Отрыв частиц с жесткой поверхности определяется балансом сил, действующих на одну частицу: плавучести, адгезии, гидродинамического сопротивления и подъемной силы. Для неколлоидных частиц ( $d_p > 30$  мкм) критическая скорость увеличивается при увеличении их диаметра, при этом силы адгезии в сравнении с силой гидродинамического сопротивления пренебрежимо малы (Рисунок 1.4), тогда как для мелких частиц критическая скорость обратно пропорциональна радиусу частиц, а силы адгезии много больше сил плавучести и гидродинамического сопротивления [61].

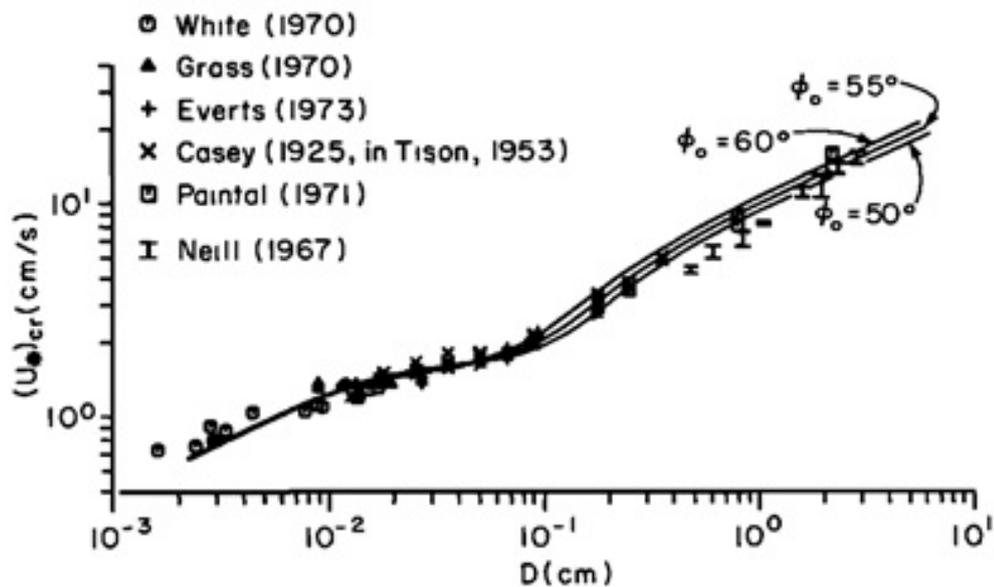


Рисунок 1.4: Типичная зависимость критической сдвиговой скорости от диаметра неколлоидных частиц [61].

## 1.5 Стохастические модели

Существует два отдельных класса моделей, основанных на вероятностном представлении процесса переноса частиц. Существуют модели, основанные на случайном процессе «рождения и смерти» (захвата и мобилизации частиц) в пористой среде [10]-[11]. Основная переменная - количество заблокированных пор в единице объема пористой среды, учитываются захват и мобилизация частиц. Событие «рождение» происходит, когда открытая пора блокируется, а «смерть» - наоборот, когда заблокированная пора становится вновь открытой из-за мобилизации частиц. Плотность вероятности блокировки пор определяется путем решения вероятностных уравнений и связана со скоростью жидкости и проницаемостью пористой среды. Модель в основном предсказывает падение давления в пористой среде после фильтрации частиц и включает в себя два свободных параметра, определяемых в экспериментах. Модели «рождения» и «смерти» не учитывают каких-либо эффектов, связанных с распределением пор и частиц по размерам и морфологией осаждения частиц. Основным недостатком использования этого подхода является то, что модель не предполагает какого-либо макроскопического переноса частиц, что не соответствует законам сохранения массы и импульса. Поэтому описывается только блокирование и разблокирование пор, что позволяет моделировать только макроскопические параметры потока - общее падение давления, скорость и общую проницаемость.

Другое семейство моделей переноса частиц в пористых средах основано на методе «сети пор» (“pore network”) [62—65]. В литературе предложены различные модели поровых сетей, основное сходство между ними состоит в представлении пористой среды набором пор (узлов) и поровых горлышек (связей). В узлах происходит перемешивание потоков на основе заданного случайного распределения диаметров пор и частиц. Общий подход основан на усреднении по нескольким реализациям модели сети пор. Моделирование потока частиц, проходящего через сеть пор в каждой реализации, протекает следующим образом. Во-первых, назначается определенное распределение связей в сети. Затем в каждом узле решаются уравнения сохранения массы жидкости и рассчитываются скорости потока через каждую из связей. Связь представляет собой круглую трубу со слоем частиц, прикрепленных к стенкам, уменьшающим ее первоначальный диаметр.

В каждой связи рассматривается течение Пуазейля, что позволяет связать перепад давления вдоль связи с расходом и диаметром связи. Частицы вводятся на входе в сеть со случайным распределением концентраций и диаметров в поровых каналах. Узлы представляют собой смесительные камеры для частиц, а вероятность того, что частица попадет в определенную связь, связанную с камерой, пропорциональна потоку жидкости в эту связь. При движении частицы по связи они прикрепляются к стенке с определенной вероятностью в зависимости от радиуса частицы, скорости потока и ионных условий. Моделирование, проведенное в рамках моделей сети пор, хорошо согласуется с экспериментами по снижению проницаемости породы коллоидными частицами.

Другой вид стохастических моделей использует комбинированную модель сети пор (для представления пористой среды) и эмпирический подход «баланса популяций» (population balance) (для моделирования переноса мелких частиц в пористой сети) [66—71]. Последний позволяет получить уравнения сохранения массы для потока суспензии внутри пористой среды с учетом распределения по размерам частиц и горловин пор. Частицы захватываются только в случае, когда их диаметр больше диаметра канала [66], [67]. В [66] модель баланса популяции также учитывает неполное закупоривание пор, механизм захвата на стенках и диффузию частиц. Влияние броуновской диффузии коллоидных частиц на динамику проницаемости проанализировано в [68—71]. Существует несколько недостатков этого подхода, которые не позволяют рекомендовать его для моделирования течения в пористых средах: 1) законы локального захвата относительно просты и не учитывают никаких новых физических эффектов по сравнению с существующими подходами эмпирического моделирования в рамках континуального подхода; 2) существующие стохастические модели не позволяют описать мобилизацию частиц; 3) локальная кинетика частиц по-прежнему требует надежных замыкающих соотношений, так же как и в эмпирических подходах; 4) модель включает дифференциальные уравнения с интегралами по радиусу частицы и поры, поэтому их численное решение требует много вычислительных ресурсов.

Таким образом, комбинированный стохастический подход не имеет существенных преимуществ по сравнению с эмпирическим подходом, но содержит существенно более сложные для численной реализации интегро-

дифференциальные уравнения. По-видимому, наиболее сбалансированный подход к разработке модели миграции частиц в пористой среде заключается во включении нескольких типов частиц (т. е. крупных частиц и мелких коллоидных частиц) в эмпирическую модель, что позволит описать различные механизмы химического и физического захвата / мобилизации включений.

## 1.6 Перенос частиц в трещине гидроразрыва и нефтенасыщенном пласте

Фильтрация суспензии и перенос частиц в пористых средах широко распространены в различных природных и технологических процессах, в том числе сопутствующих различным нефтесервисным технологиям: закачка неподготовленной воды в пласт в нагнетательных скважинах и очистка прискважинной зоны, а также миграция частиц в процессе очистки трещины гидроразрыва (Рисунок 1.6).

Одной из широко распространенных технологий интенсификации добычи нефти является система из нагнетательных и добывающих скважин (Рисунок 1.5). Нагнетательная скважина используется для закачивания воды в пласт для поддержания высокого пластового давления, что в свою очередь способствует увеличению нефтедобычи в добывающей скважине.

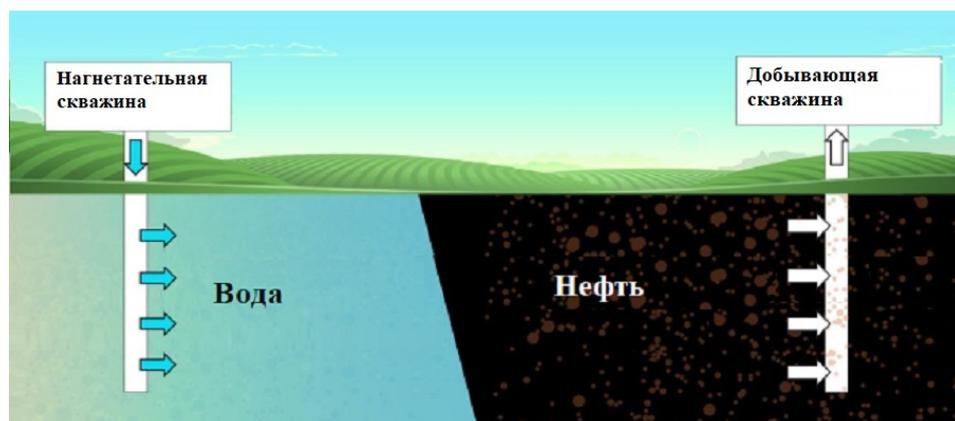


Рисунок 1.5: Схема течения в системе из нагнетательной и добывающей скважины (<https://za.pinterest.com/pin/289356344802711226/>).

Закачиваемая вода как правило содержит соли и другие твердые частицы, которые при проникновении в пласт во время процесса нагнетания могут оседать на стенках пор и забивать поровые каналы (когельматировать), что приводит к снижению проницаемости пласта [45]. Для восстановления проницае-

мости пласта нагнетательные скважины иногда переводят на режим добычи или очистки изменением направления течения (нефть начинает вытеснять воду). Во время этого процесса возможна мобилизация (вымывание) частиц, что и приводит к восстановлению проницаемости породы. Изучение этих процессов позволит минимизировать снижение расхода закачки (дебита) нагнетательных скважин ввиду загрязнения породы и оптимизировать режим их работы.

В процессах распространения и очистки трещины гидроразрыва фильтрация и перенос частиц происходят сразу в двух областях: непосредственно в трещине гидроразрыва и в окружающей ее породе (Рисунок 1.6). Во время образования трещины ГРП из скважины подается напор гидроразрывной жидкости, которая создает трещину и фильтруется в пласт через ее стенки (утечки). При очистке трещины ГРП нефть и часть гидроразрывной жидкости, попавшей в породу, начинают движение из пласта к трещине - этот процесс называется притоком из пласта. Оба процесса (утечки и приток) могут сопровождаться кольтматацией и мобилизацией частиц.

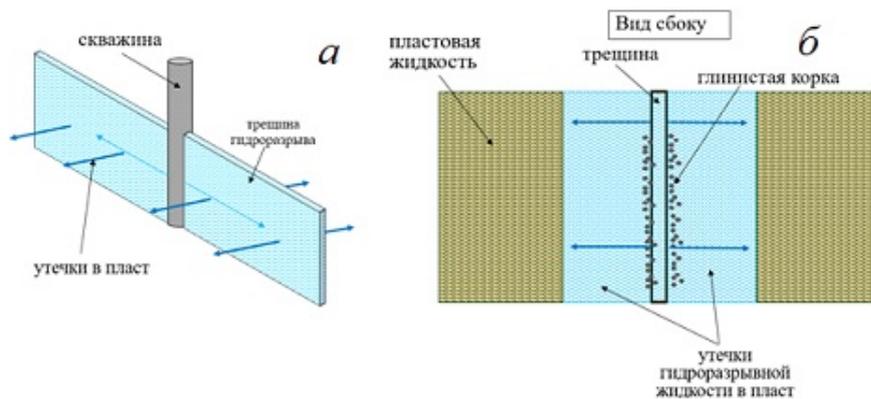


Рисунок 1.6: Схема течения в трещине гидроразрыва и пласте в окрестности трещины ГРП (а); вид сбоку на течение от трещины в пласт (утечки) (б).

В трещине, заполненной проппантом, также возможны перенос, осаждение и вымывание твердых частиц различного происхождения. Кроме переноса частиц на проницаемость трещины и пласта влияют и другие факторы. Классифицируем и обсудим каждый из них.

На снижение проводимости трещины ГРП, заполненной проппантом и породы влияют механические, химические, биологические и тепловые факторы, представленные в Таблице 1.1 [45].

Большое количество исследований посвящено химическим и физико-

Механические	Химические	Биологические	Тепловые
Миграция внутренних частиц породы; Закачка внешних частиц; Фазовые ловушки (неснижаемые насыщенности); Механическое повреждение; Геомеханические факторы	Взаимодействие жидкость-порода; Изменение смачиваемости; Взаимодействие жидкость-жидкость	Выделение полимеров; Коррозия; Окисление	Растворение; Фазовые переходы

Таблица 1.1: Классификация механизмов снижения проницаемости [45].

химическим явлениям, влияющим на эффективность (объемный расход или добычу) нефтяных скважин [72–74]. Экспериментально наблюдалось, что более высокая добыча нефти может быть получена при закачке воды, минерализация которой (массовая концентрация ионов) ниже таковой у пласта. Авторы [75] предложили модель заводнения водой низкой солености, в которой влияние солености проявляется через зависимость относительной проницаемости нефти и воды и капиллярного давления от концентрации соли. Эти зависимости были получены путем интерполяции результатов экспериментов по заводнению. Наиболее важные эффекты для моделирования повышения нефтеотдачи, включая межфазное взаимодействие, растворение/осаждение частиц и изменение смачиваемости, рассмотрены в [76].

Одним из ключевых механических факторов снижения проницаемости является перенос твердых мелких частиц [45]. Твердые частицы могут быть разделены на три группы по источнику их происхождения: внешние частицы (закачиваются в пористую среду вместе с жидкостью); внутренние частицы (частицы пористой среды, которые отрываются от поверхности и продолжают движение вместе с закачиваемой жидкостью); осадок (частицы, образующиеся в результате химических реакций: неорганический и органический осадок).

Перенос и повторное осаждение или застревание частиц являются основными причинами снижения проницаемости пласта. Так же значительны такие эффекты, как набухание глины и взаимодействие глинистых минералов с водой.

Указанные частицы (внешние, внутренние и осадок) также могут быть разделены на группы по размеру: крупные частицы - разрушенный проппант и частицы породы; мелкие коллоидные частицы глины с типичным размером ме-

нее 5мкм, вымываемые из породы при разбухании глины, а также твердый полимерный осадок, образующийся при разрушении сшитого геля (характерно для трещины ГРП).

При миграции мелких частиц в пористой среде происходят следующие процессы: коагуляция (осаждение, застревание), мобилизация (вымывание) и образование внешней глинистой корки. Последний из процессов происходит, когда диаметр частиц или агломерата частиц, попадающих в пористую среду, превышает диаметр пор, и частицы начинают образовывать внешнюю фильтрационную корку.

Большинство эффектов из Таблицы 1.1 были рассмотрены в работе [77], посвященной моделированию снижения проницаемости пласта. Предложенная модель может быть использована для описания течения суспензии в окрестности нагнетательной скважины. Такие эффекты, как внешняя и внутренняя теплопередача, неорганические и органические осадки, растворение, образование осадка, набухание и сжимаемость пласта, перенос частиц и образование внешней фильтрационной корки были включены в данную математическую модель.

В [78] была разработана математическая модель образования внутренней (коагуляция) и внешней фильтрационной корки. Модель содержит параметр времени перехода, который определяет время начала формирования внутренней корки, а также четыре свободных параметра для описания переноса частиц. Время перехода и свободные параметры могут быть получены путем сравнения модели с графиком приемистости (объемного расхода) скважины. Это позволяет определить все свободные параметры для замыкания модели, однако такой график не всегда имеется, поэтому замыкание модели возможно не всегда.

## 1.7 Моделирование притока к трещине гидроразрыва

В процессе распространения и очистки трещины ГРП наблюдается два типа течений в пласте: утечки и приток. Утечки в пласт - это течение гидроразрывной жидкости от трещины гидроразрыва в пласт, происходящее во время заполнения трещины жидкостью. Приток - это обратное течение из пласта к трещине, происходящее во время очистки трещины гидроразрыва.

Утечки в пласт и приток жидкости из пласта отличаются друг от друга

направлением движения (от трещины и к трещине) и сопутствующими процессами, связанными с переносом частиц.

В работах [79], [80] были подробно рассмотрены различные режимы притока жидкости из резервуара в пласт. В системе резервуар-трещина (вертикальная трещина, образованная около вертикальной скважины (Рисунок 1.7) выделяют 4 режима течения: линейное, билинейное, линейное в пласте и псевдо-радиальное (см. Рисунок 1.8).

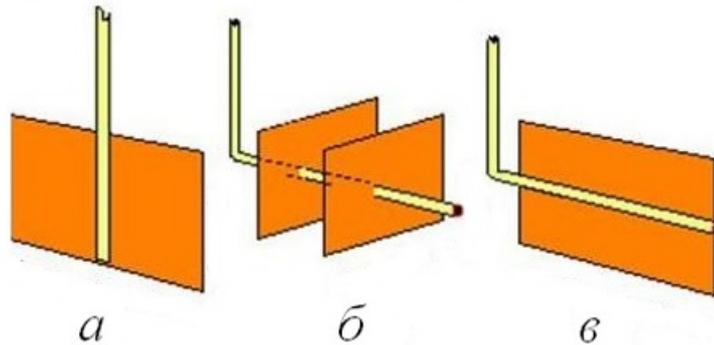


Рис. 1.7

Рисунок 1.7: Вертикальные трещины гидроразрыва: а - трещина около вертикальной скважины, б - трансверсальная трещина около горизонтальной скважины, в - продольная трещина около горизонтальной скважины.

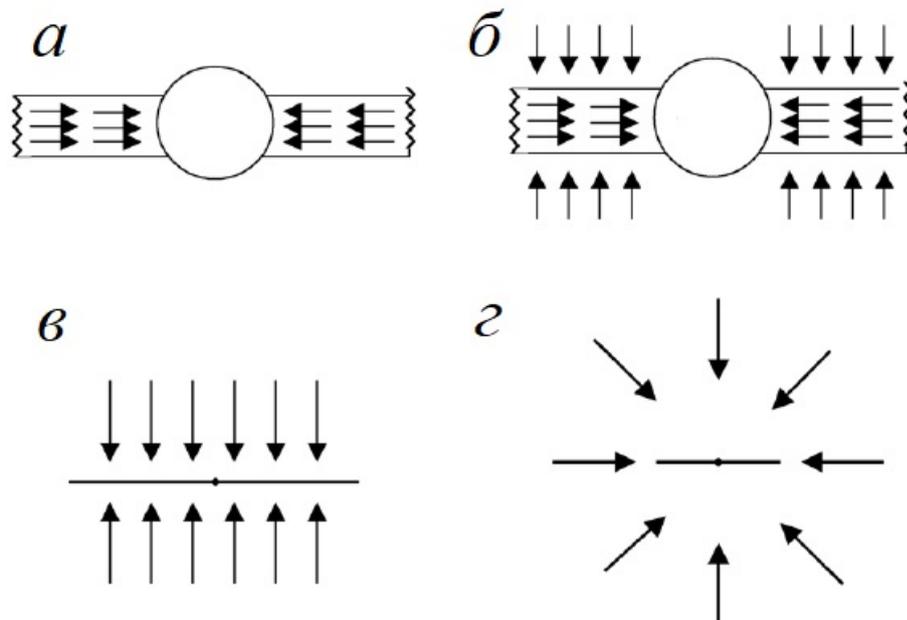


Рисунок 1.8: Режимы притока из пласта к трещине гидроразрыва около вертикальной скважины: а - линейный режим, б - билинейный, в - линейный в пласте, г - псевдо-радиальный [80].

Линейный режим течения характеризует течение гидроразрывной жидкости без притока из резервуара; билинейный - линейное течение в трещине и

перпендикулярное ему линейное течение в пласте. Линейный режим течения в пласте возможен, если проводимость трещины достаточно высока, так что потеря давления, вызванная потоком в трещине, незначительна. В этом случае поведение давления в скважине определяется линейным потоком, перпендикулярным плоскости трещины. Псевдорадиальный режим - это линейное течение в трещине и радиальное в пласте.

Для каждого из режимов определено время его начала и окончания, что дает возможность судить о продолжительности каждого из режимов для конкретной трещины гидроразрыва ([80]). Для анализа режимов течения введен параметр безразмерного времени :

$$t_D = t \frac{k_r}{\phi_r \mu_r c_t L^2} \quad (1.22)$$

Здесь  $\phi_r$ ,  $k_r$ ,  $c_t$  - пористость, проницаемость и сжимаемость пласта,  $L$  - длина трещины,  $\mu_r$  - вязкость пластовой жидкости,  $t$  - время.

Для вертикальных радиальных трещин, образованных перпендикулярно горизонтальной скважине (Рисунок 1.7 б) выделяют следующие режимы в системе трещина-пласт: радиальный, радиально-линейный и псевдорадиальный. Радиальный режим характеризует течение жидкости в трещине без притока из пласта, радиально-линейный - радиальное течение в трещине и линейный приток из пласта перпендикулярно трещине, псевдорадиальный - радиальное течение в трещине и радиальный приток из пласта. Получено, что при большинстве значений проводимости трещины гидроразрыва псевдорадиальный режим наступает в тот же момент времени, что и в случае вертикальной скважины.

Также в работе [79] была рассмотрена система горизонтальной скважины и нескольких трансверсальных трещин. Получено, что время начала псевдорадиального режима увеличивается при увеличении числа трещин, а также при увеличении расстояния между ними.

Для горизонтальных скважин с продольной трещиной (Рисунок 1.7 в) получено, что радиальный режим течения наступает позже, чем в случае трансверсальной трещины (значения безразмерного времени 10 и 3 соответственно).

С математической точки зрения билинейный и линейный режимы течения в

пласте моделируются как двухфазное вытеснение в полубесконечной области. В общем случае необходимо учитывать и эффекты двухфазия, и перенос твердых частиц, и взаимное влияние течения в трещине и течения в пласте (переменное давление на границе трещина/пласт).

### **1.8 Аналитические решения уравнения пьезопроводности для давления**

В случае билинейного режима притока фильтрация сжимаемых жидкостей в пористой среде описывается параболическим уравнением пьезопроводности (аналог уравнения теплопроводности для температуры). Для верификации численной схемы течения в трещине, а также для описания притока (или утечек) углеводородов из породы в трещину ГРП необходимо построить аналитические решения этого уравнения для различных вариантов граничных условий.

Для наиболее полного решения задачи очистки трещины гидроразрыва необходимо, в общем случае, решать трехмерную задачу фильтрации в пласте в окрестности трещины. Однако, при определенных условиях приток в трещину с высокой точностью можно описать аналитически. В данном разделе мы приведем аналитические выражения для притока в трещину гидроразрыва, полученные для различных условий течения в пласте и трещине.

Решение задачи о притоке/утечках в пласт при некоторых упрощениях было предложено в [81, 82]. Рассматривается одномерная модель течения слабосжимаемой жидкости в полубесконечной пористой среде, не учитываются такие эффекты, как двухфазность течения (пласт в начальный момент заполнен той же жидкостью, что и закачивается), перенос твердых частиц и образование внешней корки. Граничное условие на бесконечности - постоянное давление. задается начальное однородное распределение давления во всех точках, кроме границы. Получено два решения для двух динамик давления на границе: первая - давление на границе падает в нулевой момент времени и сохраняет постоянное значение, второе - давление на границе может меняться со временем.

В работе [83]: была рассмотрена задача о течении двух жидкостей (сжимаемых или несжимаемых), в работе [84] также учитывается степенная реология закачиваемой жидкости. Предполагается, что в начальный момент пласт пол-

ностью заполнен пластовой жидкостью, а при  $t > 0$  начинается ее поршневое вытеснение водой. Давление на границе трещина/пласт считается постоянным. Получены решения для профилей давления и скорости утечек/притока.

Авторы [85] также решили задачу о двухфазном вытеснении ньютоновских жидкостей в полубесконечной области, но с учетом переменного давления на границе трещина/пласт. Также были получены более простые решения для нескольких частных случаев: двухшаговое условие на давление, шаг с постоянным сдвигом и синусоидальное граничное условие.

Резервуар может быть заполнен не только нефтью, но и газом. Для описания процесса притока газа предлагается пользоваться моделью идеального газа [81] и уравнением состояния  $\rho = \rho_0 p / p_0$ , где  $\rho$  и  $\rho_0$  - текущая и начальная плотность газа. В таком случае может быть получено следующее уравнение на давление:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta p^2, \quad \kappa = \frac{k}{2\mu\phi} \quad (1.23)$$

Существует несколько решений данного уравнения, полученных при разных начальных и граничных условиях.

При начальном условии  $p(x, 0) = \delta(x)$  решение было получено в [86].

При начальных и граничных условиях  $p(x, t_0) = p(\infty, t) = 0; p(0, t) = \sigma(t - t_0)^\alpha$ , решение было получено в [81].

При конечных начальных и граничных условиях  $p(x, 0) = P_2, p(0, t) = P_1$  уравнение 1.23 может быть линеаризовано двумя способами и в обоих случаях получено решение в виде ряда [87]

## 1.9 Моделирование очистки трещины гидроразрыва

Очистка трещины ГРП представляет собой вытеснение гидроразрывной жидкости, заполняющей трещину ГРП в начальный момент времени, флюидом, притекающим через стенки трещины. Как правило, во всех существующих моделях очистки трещины ГРП пренебрегают утечками жидкости ГРП в пласт, поэтому пласт в начальный момент времени полностью заполнен пластовым флюидом. Как обсуждалось выше, на динамику проводимости трещины ГРП влияют как гидродинамические, так и геомеханические процессы.

В работе [88] предложена модель очистки трещины на самом раннем этапе,

когда еще не начался приток резервуарной жидкости из пласта. Гидроразрывная жидкость считается несжимаемой. Изменение ширины (раскрытия) трещины определяется при помощи теории контактов Герца - стенки трещины представляют собой упругие сферические частицы бесконечного радиуса, а частицы проппанта имеют конечный диаметр. Соответствующая задача была решена в работе [89], в рамках той же модели получено выражение для изменения пористости трещины [90]. Для описания проницаемости использовалась классическая формула Козени-Кармана. В работе были проведены расчеты обратного течения в трещине при агрессивном и плавном сбросе давления в скважине (граничное условие). Получено, что при быстром сбросе давления ожидается высокая скорость добычи, однако из-за вымывания проппанта снижается проводимость трещины. При медленном сбросе давления проводимость почти не снижается, однако растут утечки жидкости в пласт. Для достижения максимальной добычи необходимо найти баланс между этими двумя эффектами.

В работе [91] предложена двухфазная модель обратного течения в трещине (в отличие от предыдущей работы), в которой учитываются утечки жидкости в пласт и приток резервуарной жидкости, но не учитываются температурные и напряженные состояния резервуара. Использовалась расширенная модель двойной пористости (среда состоит из двух вложенных друг в друга пористых сред - трещин и матрицы пласта).

Авторы [92] разделили всю трещину на три области: заполненную проппантом, переходную арку и не расклиненную область. Упругая изотропная модель трещин были адаптированы для описания анизотропного пласта, пронизанного природными трещинами. Для описания деформации проппанта (вдавливание и разрушение) предполагается, что значения прочностных характеристики трещины меньше действительных. Модель многофазного течения построена в предположении, что пласт заполнен газом. Для описания движения газовой фазы используется модификация Форхаймера для закона Дарси. Свободные параметры в этом выражении, а также выражение для капиллярного давления были выбраны среди подходящих экспериментальных формул.

Множество работ посвящено процессу образования трещины ГРП (закачка суспензии с проппантом в пласт). Результаты этих работ, особенно касающиеся геомеханических свойств, могут частично использоваться в моделировании

обратного течения (очистки трещины). Например, в работе [93] для описания изменения раскрытия трещины использованы модели упругого сжатия и вдавливания пропанта. Нелинейная деформация пропантных целикров была описана в [94], подкрепленная лабораторным тестированием сжатия пропантной пачки.

## 1.10 Выводы

Для описания процесса фильтрации суспензии в пористой среде существуют два основных подхода: континуальный и стохастический. Оба подхода активно развиваются и применяются для описания различных фильтрационных процессов.

Также модели фильтрации можно разделить по подходу к моделированию на макро- и микромоделли. Макромоделирование используется для описания процессов фильтрации в целом, когда нам известны только средние и максимально общие характеристики среды и жидкостей: средние проницаемость, давление, пористость и другие параметры. Кроме того макромоделли требуют большого количества замыкающих параметров, которые могут быть получены либо при микромоделировании, либо экспериментально.

При моделировании процессов фильтрации в пласте, почве или трещине гидроразрыва используется континуальный подход, который активно развивается. Современные модели учитывают разные виды коагуляции (осаждение и застревание), разные виды мобилизации частиц (спонтанную и спровоцированную), моделируют образование не только внутренней, но и внешней фильтрационной корки. Однако в макромоделлировании все еще есть соотношения, для которых нет универсально применимого выражения - это связь между проницаемостью и концентрацией осажденных частиц, а также интенсивность коагуляции и мобилизации частиц в пористой среде. Под вопросом стоит как функциональная форма этих зависимостей, так и значения свободных параметров в этих выражениях.

Было предложено множество формул для проницаемости и интенсивностей коагуляции/мобилизации, но все они имеют ограниченную область применимости и не могут быть использованы для описания произвольного процесса

фильтрации суспензии.

Для коллоидных частиц теоретически была выведена формула (с использованием модели пористой среды при помощи ячеек Хаппеля) для свободного параметра  $\lambda$  в интенсивности кольматации. Теоретически формула подходит как для мелких, так и для крупных частиц (меньше 0.18 диаметра зерен), однако при сравнении с экспериментальными данными данная формула дает хорошее совпадение только для наночастиц.

По-видимому самым надежным представляется экспериментальный способ определения интенсивности кольматации частиц, либо прямое численное моделирование, по результатам которого определяется вид зависимости и значения свободных параметров. В литературе приведено множество результатов экспериментов по кольматации, малая часть из них соответствует неколлоидным (крупным) частицам. Кроме того, большинство экспериментов сопровождалось измерением лишь одного параметра - концентрации осажденных частиц вдоль образца или динамике концентрации частиц на выходе из образца. Таким образом описание процесса кольматации неколлоидных частиц все еще требует улучшения и уточнения.

Процесс мобилизации осажденных частиц в поток изучен мало. Было предложено только одно выражение для интенсивности мобилизации, которое содержит два свободных параметра. Один из них - это критическая скорость мобилизации частиц - скорость потока, начиная с которой частицы могут вымываться со стенок пористого скелета. В нескольких работах эта скорость была найдена при решении задачи об отрыве сферической частицы от плоской стенки или от слоя других частиц. Часть выражений опирается на экспериментальные измерения, что затрудняет их использование. Другую часть необходимо адаптировать для описания отрыва частицы в пористой среде.

Описание процессов переноса, осаждения и мобилизации твердых частиц крайне важно при моделировании течений в закрепленной трещине ГРП и нефтеносном пласте, поскольку миграция частиц является одним из самых важных факторов снижения проводимости трещины и пласта.

Приток из пласта во время обратного течения в трещине может быть описан аналитическим решением уравнения диффузии давления в полубесконечной пористой среде. Такие решения были получены для некоторых случаев тече-

ния слабосжимаемых жидкостей и газа, однако в современных симуляторах используются полуэмпирические выражения для описания утечек или формула Картера, полученная при большом количестве предположений.

В целом процесс очистки трещины ГРП (обратное течение от кончика к скважине) практически не моделируется. Есть множество работ, посвященных процессу образования трещины, часть результатов которых может быть использована для описания геомеханических эффектов. Однако существующие модели очистки, включающие и гидромеханическое, и геомеханическое описание, обычно используют модели линейной упругости проппанта и трещины, не учитывают перенос твердых частиц разрушенного проппанта и частиц пласта, сложную реологию жидкостей и приток нефти из пласта в трещину.

## Глава 2

### Однофазная фильтрация суспензии \*

#### 2.1 Система уравнений

Рассматривается изотермическая нестационарная фильтрация суспензии в пористой среде. Несущая фаза суспензии (жидкость) представляет собой вязкую ньютоновскую сжимаемую жидкость. Течение суспензии описывается в рамках многоконтинуального подхода: взвешенные частицы (твердые частицы, движущиеся вместе с потоком суспензии), осажденные (твердые частицы, осажденные на скелете пористой среды) и несущая фаза.

Взвешенные частицы суспензии характеризуются объемной концентрацией  $C$  (объем взвешенных частиц относительно объема пор), плотностью  $\rho_p^{mob}$  и скоростью  $U_p^{mob}$ ; фаза осажденных частиц характеризуется объемной концентрацией  $\sigma$  (объем осажденных частиц относительно всего объема среды) и плотностью  $\rho_p^{sed}$ ; несущая фаза характеризуется скоростью  $U_f$  и плотностью  $\rho_f$ . Материал частиц характеризуется постоянной плотностью  $\rho_p^0$ , а жидкость - плотностью  $\rho_f^0$ . Многоконтинуальное описание суспензии применимо при условии наличия иерархии линейных масштабов: диаметр частиц много меньше характерного диаметра поровых каналов, но много больше длины свободного пробега молекул несущей фазы.

Твердые частицы суспензии можно разделить на два класса: мелкие (размер которых меньше размера пор) и крупные (размер которых больше размера пор). Первые частицы фильтруются в пористой среде, проникая вглубь породы; вторые осаждаются на внешней поверхности пористого образца и образуют внешнюю корку. Образующаяся корка представляет собой пористую среду с проницаемостью и пористостью, отличными от соответствующих характери-

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [18]

стик пористого образца. Суспензия с мелкими частицами фильтруется сначала через внешнюю корку (без осаждения и мобилизации частиц), затем через пористый образец (с осаждением и мобилизацией частиц). Процесс образования внешней корки будет рассмотрен ниже, в данном разделе считаем, что все взвешенные частицы меньше пор и внешняя фильтрационная корка не образуется.

Новым элементом модели фильтрации является учет конечной концентрации осажденных частиц и возможности фильтрации чистой жидкости через эту упаковку. Подход, учитывающий конечную концентрацию осажденных частиц был предложен в [9], однако в предложенной модели не учитывается возможность течения жидкости между осажденными частицами, таким образом проницаемость плотной упаковки осажденных частиц считается равной нулю.

Для описания процесса фильтрации между осажденными частицами введем два определения: крупными поровыми каналами будем называть поровое пространство, состоящее из всего порового объема, за исключением объема, занятого осажденными частицами и просветов между ними. Мелкими поровыми каналами будем называть пространство между осажденными частицами (Рисунок 2.1).

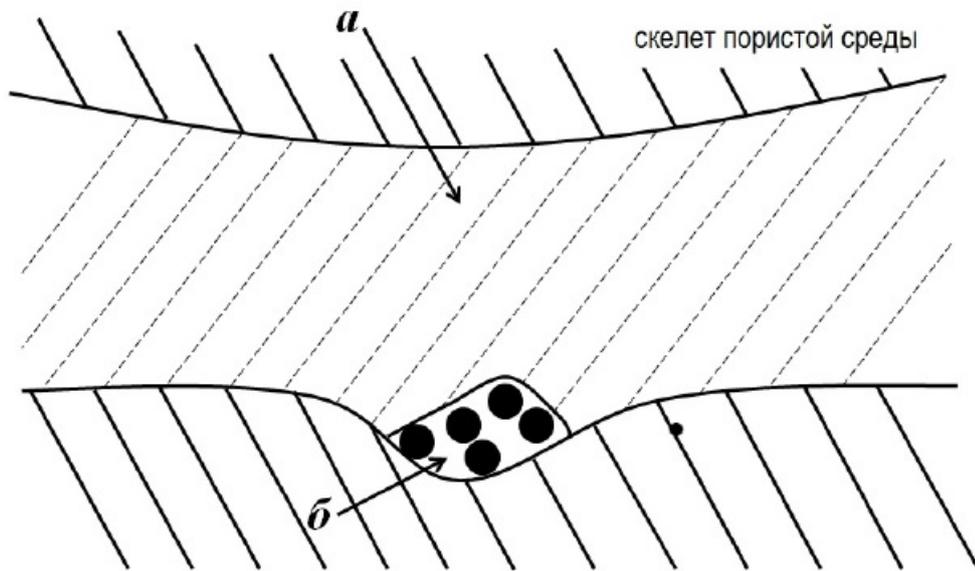


Рисунок 2.1: Схема пористой среды: (а) - крупные поровые каналы, (б) - мелкие поровые каналы (между осажденными частицами).

Введем три параметра, характеризующих пористость:  $\phi_t$  - пористость среды, образованная скелетом и осажденными частицами (крупные и мелкие каналы),  $\phi_c$  - пористость среды, образованная крупными поровыми каналами;  $\phi_0$  - на-

чальная пористость среды:

$$\phi_t = \phi_0 - \sigma, \quad \phi_c = \phi_0 - \sigma/C_{max}, \quad (2.1)$$

Здесь  $C_{max}$  - максимальная концентрация твердых сферических частиц (концентрация плотной упаковки).

Относительные плотности каждой из фаз (взвешенные, осажденные частицы и жидкость) могут быть выражены через плотности материалов, пористость и объемные концентрации следующим образом:

$$\rho_p^{mob} = \rho_{pi}^0 C \phi_c, \quad \rho_p^{sed} = \sigma \rho_p^0, \quad \rho_f = \rho_f^0 (\phi_t - C \phi_c) \quad (2.2)$$

Запишем закон сохранения массы для частиц (взвешенных и осажденных) и жидкости [95]:

$$\frac{\partial \rho_p^{mob}}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (\rho_p^{mob} U_p^{mob} r^j)}{\partial r} = q', \quad \frac{\partial \rho_p^{sed}}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (\rho_p^{sed} U_p^{sed} r^j)}{\partial r} = q', \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (\rho_f U_f r^j)}{\partial r} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь  $j = 0$  в плоском течении и  $j = 1$  в радиальном,  $q'$  - интенсивность кольматации и мобилизации частиц в поровом скелете.

В крупных поровых каналах с проницаемостью  $k(\sigma)$  движется суспензия с вязкостью  $\mu(C)$ . В мелких поровых каналах с проницаемостью  $k_s(\sigma)$  движется чистая жидкость с постоянной вязкостью  $\mu_0$ . Законы сохранения импульса (законы Дарси [9]) для несущей фазы, взвешенных частиц и суспензии в целом получаются осреднением по объему крупных и мелких поровых каналов:

$$u_l = - \frac{k(\sigma)}{\mu(C)} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad u^f = - \left[ (1 - C) \frac{k(\sigma)}{\mu(C)} + \frac{k_s(\sigma)}{\mu_0} \right] \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.5)$$

$$u = - \left[ \frac{k(\sigma)}{\mu(C)} + \frac{k_s(\sigma)}{\mu_0} \right] \frac{\partial p}{\partial r}, \quad u^p = - C \frac{k(\sigma)}{\mu(C)} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (2.6)$$

Здесь  $u_l$  - скорость фильтрации суспензии в крупных поровых каналах,

$u$  - скорость фильтрации суспензии в крупных и мелких поровых каналах,  $u^f = U_f(\phi_t - C\phi_c)$  - скорость фильтрации жидкости в крупных и мелких каналах порового пространства,  $u^p = U_p^{mob}C\phi_c$  - скорость фильтрации взвешенных частиц в крупных поровых каналах,  $p$  - давление.

Известно, что вязкость суспензии зависит от концентрации взвешенных частиц следующим образом [96]:

$$\mu(C) = \mu_0 \left(1 - \frac{C}{C_{max}}\right)^{-1.89}. \quad (2.7)$$

В Главе 1 был проведен обзор различных выражений, описывающих связь между поврежденной проницаемостью и пористостью породы. Мы будем использовать выражение, предложенное в [7], которое было подтверждено в экспериментах с переносом крупных частиц (неколлоидных):

$$k(\sigma) = k_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\phi_0 C_{max}}\right)^3. \quad (2.8)$$

Здесь  $k_0$  - проницаемость породы при отсутствии осажденных частиц.

Проницаемость породы в мелких поровых каналах [15, 81]:

$$k_s = \phi_0 k_{s0} \left(\frac{\sigma}{\phi_0 C_{max}}\right), \quad k_{s0} = 0.204 r_g^2 \phi_s^{4.58}. \quad (2.9)$$

Здесь  $k_{s0}$  - проницаемость мелких поровых каналов при полной закупорке порового пространства ( $\sigma = \phi_0 C_{max}$ ), определяемая согласно соотношению [15];  $r_g$  - радиус взвешенных частиц,  $\phi_s = 1 - C_{max}$  - пористость среды, образованной осажденными частицами.

Подстановкой выражений (2.2) и (2.6) в законы сохранения массы (2.3) и (2.4) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_f^0 (\phi_t - C\phi_c)] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_f^0 u^f) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\phi_c C)}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial(u^p r^j)}{\partial x} = -q, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = q \quad (2.12)$$

Здесь  $q = q' / \rho_p^0$ .

Если течение несжимаемое, то уравнение (2.10) делим на  $\rho_f^0$  и складываем уравнения (2.10) -(2.12). Тогда получим следующие уравнения для фильтрации несжимаемой суспензии в пористой среде:

$$\frac{\partial(\phi_c C)}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial(u^p r^j)}{\partial x} = -q, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = q, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial(ur^j)}{\partial x} = 0, \quad (2.14)$$

$$u = u^p + u^f \quad (2.15)$$

Будем использовать следующие начальные условия:

$$C(x, 0) = 0, \quad \sigma(x, 0) = \sigma_0(x), \quad p(x, 0) = P_r \quad (2.16)$$

Граничные условия модели ( $L$  - длина пористой области):

$$C(0, t) = C_0, \quad p(0, t) = P_w \text{ или } u(0, t) = U_{in}, \quad p(L, t) = P_r \quad (2.17)$$

То есть рассмотрено два варианта граничных условий: когда на входной границе задано давление и когда задана скорость.

Уравнения (2.13)-(2.15) вместе с выражениями (2.5)-(2.9), соотношением для интенсивности кольтматации и мобилизации  $q$  и начальными и граничными условиями (2.16), (2.17) образуют замкнутую систему уравнений.

## 2.2 Реология Гершеля-Балкли

В данном разделе рассмотрим случай, когда реология фильтруемой жидкости имеет неньютоновскую реологию, а именно реологию Гершеля-Балкли.

Касательные напряжения  $\tau$  в этом случае зависят от скорости сдвига  $\gamma$  сле-

дующим образом:

$$\tau = H\gamma^n + \tau_0, \quad \tau > \tau_0 \quad (2.18)$$

$$\gamma = 0, \quad \tau < \tau_0 \quad (2.19)$$

Здесь  $H$  и  $n$  – параметры псевдо-степенной зависимости,  $\tau_0$  – предел текучести.

Для нахождения зависимости скорости фильтрации от градиента давления (вместо закона Дарси для ньютоновской жидкости) предлагается использовать следующий подход: пористая среда рассматривается как множество капилляров (круглых труб) одинакового диаметра, а проницаемость пористой среды считается равной проницаемости упаковки сферических частиц.

Для начала необходимо определить вид закона движения в круглой трубе. Решение было получено в работе [17]:

$$v = -\frac{2}{H^{\frac{1}{n}} \nabla p \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \left[ \left( \frac{\nabla p R}{2} - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \tau_0 \right)^{\frac{1}{n}+1} - \left( \frac{\nabla p r}{2} - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \tau_0 \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] \quad (2.20)$$

Здесь  $v$  – скорость жидкости в направлении, перпендикулярном поперечному сечению трубы,  $R$  – радиус трубы,  $r$  – сферическая координата.

Далее определяется средняя по сечению трубы скорость  $\langle v \rangle$ :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v r dr d\theta \quad (2.21)$$

$$\langle v \rangle = -\left[ \frac{n}{1+n} R^{\frac{1}{n}} (R - R_0) - \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)R} R^{\frac{1}{n}} (R - R_0)^2 + \right. \quad (2.22)$$

$$\left. + \frac{2n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)R^2} R^{\frac{1}{n}} (R - R_0)^3 \right] \left( \frac{\nabla p}{2H} - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \frac{\tau_0}{RH} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.23)$$

Здесь  $R_0$  – радиус запираания или область, где не достигается предел текучести и скорость сдвига равна нулю (Рисунок 2.2).

Если предположить, что радиус запираания  $R_0 \ll R$ , формулу (2.23) можно переписать в виде:

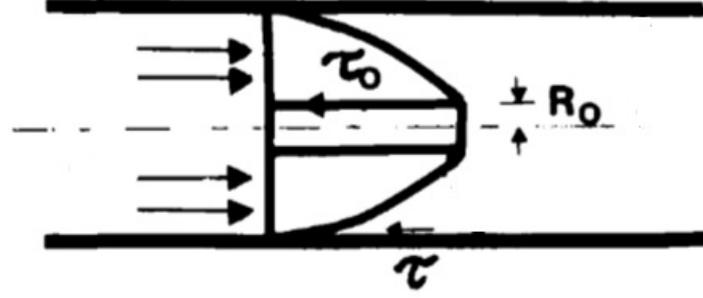


Рисунок 2.2: Схема течения жидкости с реологией Гершеля-Балкли в трубе.

$$\langle v \rangle = -\frac{n}{1+3n} R^{1+\frac{1}{n}} \left( \frac{\nabla p}{2H} - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \frac{\tau_0}{RH} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.24)$$

Для того, чтобы использовать формулу (2.24) для описания течения в пористой среде, необходимо выразить радиус трубы  $R$  через параметры пористой среды. Для этого вводится понятие гидравлического радиуса  $R_h$  – это отношение всего объема среды  $V$  к площади смоченной поверхности  $S_{wet}$ :

$$R_h = \frac{V}{S_{wet}} \quad (2.25)$$

Для круглой трубы гидравлический радиус определяется как:

$$R_h = \frac{R}{2} \quad (2.26)$$

Для пористой среды с пористостью  $\phi$ , состоящей из сферических частиц диаметра  $D_p$ :

$$R_h = \frac{\phi D_p}{6(1-\phi)} \quad (2.27)$$

Т.к. мы предположили, что пористая среда представляет собой систему капилляров с проницаемостью, равной проницаемости упаковки сферических частиц, то, приравнивания выражения (2.26) и (2.27), можем выразить радиус капилляра через параметры пористой среды:

$$R = \frac{\phi D_p}{3(1-\phi)} \quad (2.28)$$

Подстановкой выражения (2.28) в формулу (2.24) получим выражение для скорости фильтрации  $u = \phi \langle v \rangle$ :

$$u = -\frac{n\phi}{1+3n} \left( \frac{\phi D_p}{3(1-\phi)} \right)^{1+\frac{1}{n}} \left( \frac{\nabla p}{2H} - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \frac{3\tau_0(1-\phi)}{\phi D_p H} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.29)$$

Диаметр зерен пористой среды может быть выражен через пористость и проницаемость среды при помощи, например, уравнения Козени-Кармана (можно использовать любое другое соотношение):

$$k = \frac{D_p^2 \phi^3}{72C'(1-\phi)^2} \quad (2.30)$$

С учетом (2.30) выражение (2.29) можно записать в виде:

$$u = - \left[ \frac{k}{\mu_{eff}} \left( \nabla p - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \alpha \tau_0 \right) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2.31)$$

$$\mu_{eff} = \frac{H}{4} \left( 3 + \frac{1}{n} \right)^n (8C'k\phi)^{\frac{1-n}{2}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\phi C'}{2k}} \quad (2.32)$$

### 2.3 Численный алгоритм для задачи однофазной фильтрации

В данном разделе будут представлены численные алгоритмы для решения задач однофазной несжимаемой фильтрации ньютоновских и неньютоновских жидкостей (численный алгоритм для фильтрации сжимаемых жидкостей будет представлен в главе 4).

Сначала построим численную схему для фильтрации ньютоновской жидкости.

Подстановкой первого уравнения (2.6) в сумму уравнений (2.13), (2.14), (2.15), получим уравнение второго порядка относительно давления  $p$  (или первого порядка относительно функции  $f$ ):

$$f = r^j \left[ \frac{k(\sigma)}{\mu(C)} + \frac{k_s}{\mu_0} \right] \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 0. \quad (2.33)$$

Для простоты примем  $k_s = 0$  или переобозначим выражение в квадратных

скобках как  $k/\mu$ . Введем одномерную равномерную по пространству разнесенную сетку (Рисунок 2.3).

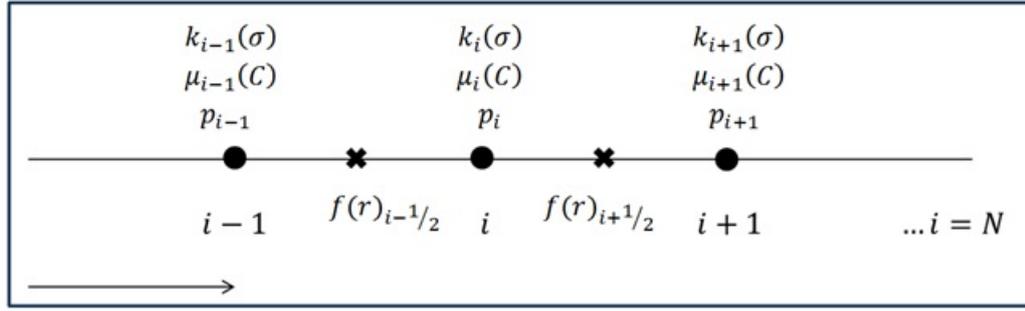


Рисунок 2.3: Одномерная разнесенная по пространству сетка.

Полученное разностное уравнение второго порядка относительно давления решено методом прогонки [97].

Аппроксимируем функцию  $f$  в центрах ячеек, а давление  $p$  - в узлах сетки:

$$f_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} \left( x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} \right)^j \quad (2.34)$$

Коэффициенты в выражении (2.34) на  $(i - 1/2)$  шаге считаем против потока: если течение с положительной скоростью, то считаем их равными коэффициентам на  $(i - 1)$  шаге, если скорость отрицательная - на  $i$  шаге.

Аппроксимация уравнения (2.33) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} &= \frac{1}{2} \frac{k_{i+\frac{1}{2}}}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x^2} \left( x_i + \frac{\Delta x}{2} \right)^j - \\ &- \frac{1}{2} \frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x^2} \left( x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} \right)^j = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} p_{i+1} \left( \frac{k_{i+\frac{1}{2}}}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \right)^j - p_i \left( \frac{k_{i+\frac{1}{2}}}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \left( x_i + \frac{\Delta x}{2} \right)^j + \frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \left( x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} \right)^j \right) + \\ + p_{i-1} \frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \left( x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} \right)^j = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Обозначим через  $A_i, B_i, C_i$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{k_{i+\frac{1}{2}}}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \left( x_i + \frac{\Delta x}{2} \right)^j &= B_i \\ \frac{k_{i+\frac{1}{2}}}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \left( x_i + \frac{\Delta x}{2} \right)^j + \frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \left( x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} \right)^j &= C_i \\ \frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \left( x_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} \right)^j &= A_i \end{aligned} \quad (2.37)$$

Тогда уравнение (2.36) можно записать следующим образом:

$$A_i p_{i-1} - C_i p_i + B_i p_{i+1} = -F_i \quad (2.38)$$

В нашем случае  $F_i = 0$ .

Граничные условия в дискретной форме имеют следующий вид:

$$p_0 = \kappa_1 p_1 + \nu_1, \quad p_N = \kappa_2 p_{N-1} + \nu_2 \quad (2.39)$$

Где  $N$  - число узлов сетки. В случае, когда и на правой (на выходе), и на левой (входной) границе задано давление ( $p(x = L, t) = P_r, p(x = x_0, t) = P_w$ ), имеем:

$$\kappa_1 = 0, \quad \nu_1 = P_w, \quad \kappa_2 = 0, \quad \nu_2 = P_r \quad (2.40)$$

Когда на входе задана скорость ( $u(x = x_0, t) = u_0$ ):

$$\kappa_1 = 1, \quad \nu_1 = \frac{u_0 \mu \Delta x}{k}, \quad \kappa_2 = 0, \quad \nu_2 = P_r \quad (2.41)$$

Далее, согласно методу прогонки, рассчитываются коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  и, наконец, давление:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \alpha_1 = \kappa_1, \quad (2.42)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \beta_1 = \nu_1, \quad (2.43)$$

$$p_N = \frac{\nu_2 + \kappa_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \kappa_2}, \quad (2.44)$$

$$p_i = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0. \quad (2.45)$$

После нахождения давления, скорость фильтрации суспензии (а затем и скорость жидкости и частиц) рассчитываются при помощи аппроксимации первого уравнения (2.6) в центрах ячеек (верхний индекс по времени опускается в случае, когда все переменные имеют одинаковый верхний индекс  $n$ ):

$$u_{i+\frac{1}{2}} = - \left[ \frac{k_{i+\frac{1}{2}}(\sigma)}{\mu_{i+\frac{1}{2}}(C)} + \frac{k_{s,i+\frac{1}{2}}(\sigma)}{\mu_{0,i+\frac{1}{2}}} \right] \frac{(p_{i+1} - p_i)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.46)$$

Концентрация осажденных частиц  $\sigma$  рассчитывается в узлах сетки (аппроксимация второго уравнения (2.13)):

$$\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n + \Delta t q_i^n + O(\Delta t) \quad (2.47)$$

Здесь верхними индексами обозначен шаг по времени. Аналогично аппроксимация первого уравнения (2.13):

$$C_i^{n+1} = \frac{\phi_{c,i}^n C_i^n}{\phi_{c,i}^{n+1}} - \frac{\Delta t^{n+1}}{\phi_{c,i}^{n+1}} q_i^n - \frac{\Delta t^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_i^{p,n} r_i^j - u_{i-1}^{p,n} r_{i-1}^j}{r_i^j \phi_{c,i}^{n+1}} \quad (2.48)$$

Известно, что решение уравнения переноса, построенное с использованием рассматриваемой схемы, устойчиво при определенном соотношении между величиной шага по сетке и по времени - при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви [98]:

$$\Delta t \leq \min \left( \frac{\phi_c \Delta x}{u} \right) \quad (2.49)$$

Однако условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви не всегда гарантирует устойчивость численной схемы. Так, если интенсивность кольматации вычисляется по формуле (1.5) (одной из самых распространенных), то правую часть уравнения переноса (2.13) можно аппроксимировать двумя способами:

$$\frac{\phi_c^{n+1} C_i^{n+1} - \phi_c^n C_i^n}{\Delta t^{n+1}} + \frac{1}{r_i^j} \frac{u_i^{p,n} r_i^j - u_{i-1}^{p,n} r_{i-1}^j}{\Delta x} = -C_i^n u_i^n \lambda \quad (2.50)$$

$$\frac{\phi_c^{n+1} C_i^{n+1} - \phi_c^n C_i^n}{\Delta t^{n+1}} + \frac{1}{r_i^j} \frac{u_i^{p,n} r_i^j - u_{i-1}^{p,n} r_{i-1}^j}{\Delta x} = -C_i^{n+1} u_i^n \lambda \quad (2.51)$$

В работе [99] показано, что при соблюдении условия (2.49) схема (2.51) устойчива, обусловлена и асимптотически устойчива. Схема (2.50) слабо устойчива и у

неё нет асимптотической устойчивости. Поэтому в случае, когда интенсивность кольтматации содержит объемную концентрацию взвешенных частиц, будем использовать схему (2.51).

Сформулируем полный алгоритм численного решения системы (2.1), (2.5) - (2.12) с начальными (2.16) и граничными условиями (2.17). На каждом шаге по времени вычисляются следующие параметры:

- 1) Давление  $p$  из уравнений (2.33);
- 2) Скорость суспензии  $u$  из уравнения (2.46);
- 3) Концентрация осажденных частиц из уравнения (2.47);
- 4) Пористости  $\phi_t$  и  $\phi_c$  из соотношений (2.1);
- 5) Интенсивность кольтматации и мобилизации  $q$ ;
- 6) Концентрация взвешенных частиц  $C$  из уравнения (2.48);
- 7) Вязкость  $\mu$  и проницаемости  $k$  и  $k_s$  из соотношений (2.7), (2.8), (2.9).
- 8) Вычисление шага по времени при помощи (2.49) и повтор шагов 2) - 8), пока время не достигнет значения  $t_{max}$ .

Кроме того, специфика кольтматации такова, что большинство частиц осаждаются вблизи входной границы ( $x = x_0$ ), следовательно мельчение шага вблизи этой границы обеспечит более точное моделирование.

Для расчетов будем использовать три вида сеток:

1. Равномерная сетка  $g = x$ ;
2. Экспоненциальная сетка  $g = e^x$ ;
3. Обратная сетка  $g = 1/x$ ;

Для внедрения неравномерной сетки необходимо заменить все производные по  $x$  на производные сложной функции  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$ .

Сравнение расчетов на различных сетках будет проведено в следующем разделе.

В случае фильтрации жидкости с реологией Гершеля-Балкли, проведем замену переменных в формуле (2.31) и запишем ее в виде:

$$u = -K \left( \nabla p - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \alpha \tau_0 \right), \quad K = \left( \frac{k}{\mu_{eff}} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \nabla p - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \alpha \tau_0 \right)^{\frac{1}{n}-1} \quad (2.52)$$

Заметим, что согласно уравнению (2.52) возможна ситуация, когда скорость фильтрации будет равна нулю, т.е. когда  $\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha \tau_0$ . Для того чтобы описывать течение в областях с положительной, отрицательной и нулевой скоростью при помощи одного численного алгоритма, предлагается ввести следующую регуляризацию [100]:

$$u = -K \left( \nabla p - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \alpha \tau_0 \right), \quad |\nabla p| > \alpha \tau_0 + \varepsilon \quad (2.53)$$

$$u = -K' \varepsilon, \quad K' = \left( \frac{k}{\mu_{eff}} \right)^{\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{1}{n}-1}, \quad |\nabla p| \leq \alpha \tau_0 + \varepsilon \quad (2.54)$$

Таким образом в областях, где предельный градиент давления не достигается, предполагается, что разность градиента давления и предельного градиента не обращается в ноль, а равна достаточно малой величине  $\varepsilon$ .

Аналогично уравнению (2.33), получим уравнение на давление в случае фильтрации неньютоновской жидкости:

$$\frac{\partial \left( K \frac{\partial p}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial (K \alpha \tau_0)}{\partial x}. \quad (2.55)$$

Уравнение (2.55) может быть решено методом прогонки. Поскольку коэффициент  $K$  также зависит от градиента давления, предлагается в методе прогонки использовать значение коэффициента на предыдущем шаге, но воспользоваться методом простой итерации для достижения сходимости решения.

## 2.4 Аналитическое решение задачи о фильтрации суспензии

Аналитическое решение для задачи однофазной несжимаемой фильтрации (2.13)-(2.15) было найдено, например, в [6, 30].

Аналитическое решение получено в предположении постоянной пористости образца и малой объёмной доли взвешенных частиц.

Введем безразмерные переменные  $r^*, t^*, U^*, \Lambda$ :

$$r = Lr^*, \quad t = t^* L/U_0, \quad U = U_0 U^*, \quad \lambda = \Lambda/L. \quad (2.56)$$

Здесь  $U_0$  - скорость на входной границе образца. Для простоты изложения, опустим индекс  $*$ . Тогда безразмерные системы уравнений будут иметь тот же вид, что и размерные, но в правых частях уравнений переноса будет стоять безразмерный коэффициент кольтматации  $\Lambda$ . Тогда система (2.13)-(2.15) в безразмерной форме примет вид:

$$\phi_0 \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r^j} \frac{\partial(CU r^j)}{\partial r} = -CU\Lambda \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = CU\Lambda \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial(U r^j)}{\partial r} = 0 \quad (2.59)$$

Рассмотрим сначала радиальное осесимметричное течение ( $j = 1$ ).

Решением уравнения (2.59) является  $U = r_0/r$ , где  $r^0 = r_0^*/L$ . Преобразуем уравнения (2.57) - (2.59):

$$\phi_0 \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{r_0}{r^j} \frac{\partial C}{\partial r} = -\frac{Cr_0\Lambda}{r}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = CU\Lambda, \quad U = \frac{r_0}{r^j}. \quad (2.60)$$

Первые два уравнения (2.60) решаются методом характеристик. Характеристические кривые в радиальном случае задаются уравнениями:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r_0}{\phi_0 r}, \quad t = \frac{\phi_0}{2r_0} (r^2 - r_0^2) + const.$$

Введем новую переменную  $\eta = \eta(t, r)$ , которая является константой вдоль

каждой характеристической кривой:

$$\eta = t - \frac{\phi_0}{2r_0} (r^2 - r_0^2) \quad (2.61)$$

В переменных  $(\eta, r)$  первые два уравнения (2.60) примут вид:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = -C\Lambda, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = C\Lambda \frac{r_0}{r}. \quad (2.62)$$

При  $t = 0$  и  $r > r_0$ :  $\eta < 0$ ; при  $t > 0$  и  $r = r_0$ :  $\eta > 0$ . Имеем граничные условия:

$$C(\eta, r_0) = \begin{cases} C_0, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

Решение уравнений (2.62) с граничными условиями (2.63):

$$C(\eta, r) = \begin{cases} C_0 \exp\{\Lambda(r_0 - r)\}, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

$$\sigma(\eta, r) = \begin{cases} C_0 r_0 \frac{\Lambda}{r} \exp\{\Lambda(r_0 - r)\} \eta, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Координату  $r$  в момент скачка концентрации можно определить из уравнения (2.61) при  $\eta = 0$ .

На Рисунок 2.4,а представлено сравнение аналитического решения (2.64) и результатов расчета профиля концентрации взвешенных частиц  $C$  в рамках модели (2.13)-(2.15). Показано, что в различные моменты времени совпадают как профили концентраций, так и глубина проникновения раствора вглубь пористой среды. Рисунок 2.4, б демонстрирует сеточную сходимость численного моделирования к аналитическому решению: при увеличении числа узлов сетки, профиль стремится к аналитическому решению и, начиная с сетки с числом узлов  $10^4$ , перестает сильно зависеть от размеров сетки.

Также мы сравнили концентрации осажденных частиц, полученных числен-

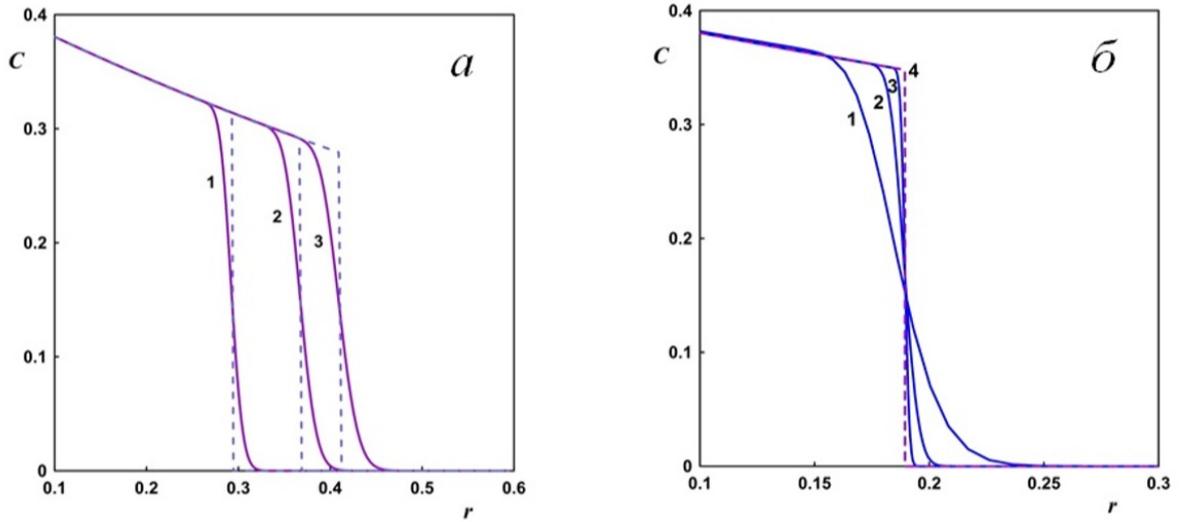


Рисунок 2.4: Профиль концентрации взвешенных частиц в радиальном случае при постоянных  $k, \mu, \phi_t = \phi_c = \phi_0 = 0.4, L = 1, \lambda = 1, C_0 = 0.4$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют моментам времени 0.05, 0.1, 0.2 (а), числу узлов обратной сетки  $10^2, 10^3, 10^4$  (б); пунктиром обозначено аналитическое решение (2.64).

но и при помощи решения (2.65) (см. Рисунок 2.5).

Наиболее близкий к аналитическому результат расчетов достигается на обратной сетке, поэтому в дальнейшем моделирование кольматации будет проводиться с использованием этой сетки.

Теперь рассмотрим линейное одномерное течение ( $j = 0$ ).

Из уравнения (2.59) имеем  $U = 1$ , константа вдоль каждой характеристической кривой:

$$\eta = t - \phi_0(r - r_0). \quad (2.66)$$

Уравнения (2.57), (2.58) в новых координатах  $(\eta, r)$  примут вид:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = -C\Lambda, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = C\Lambda. \quad (2.67)$$

Окончательно, решение системы (2.67):

$$C(\eta, r) = \begin{cases} C_0 \exp\{\Lambda(r_0 - r)\}, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

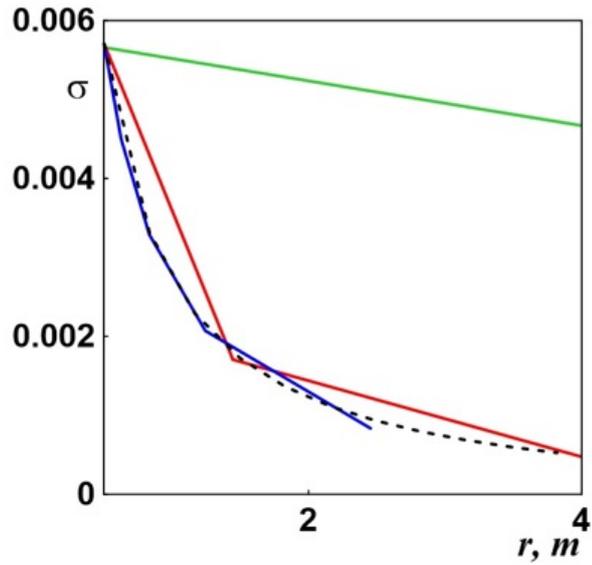


Рисунок 2.5: Профили концентрации осажденных частиц: черная кривая – аналитическое решение (2.65), зеленая кривая – численный расчет с использованием однородной сетки, красная кривая – с использованием экспоненциальной сетки, синяя – обратной сетки.  $\lambda = 1$  м<sup>-1</sup>,  $t = 1.5$  дня,  $C_0 = 10^{-5}$ ,  $U_0 = 5.7 \cdot 10^{-4}$ .

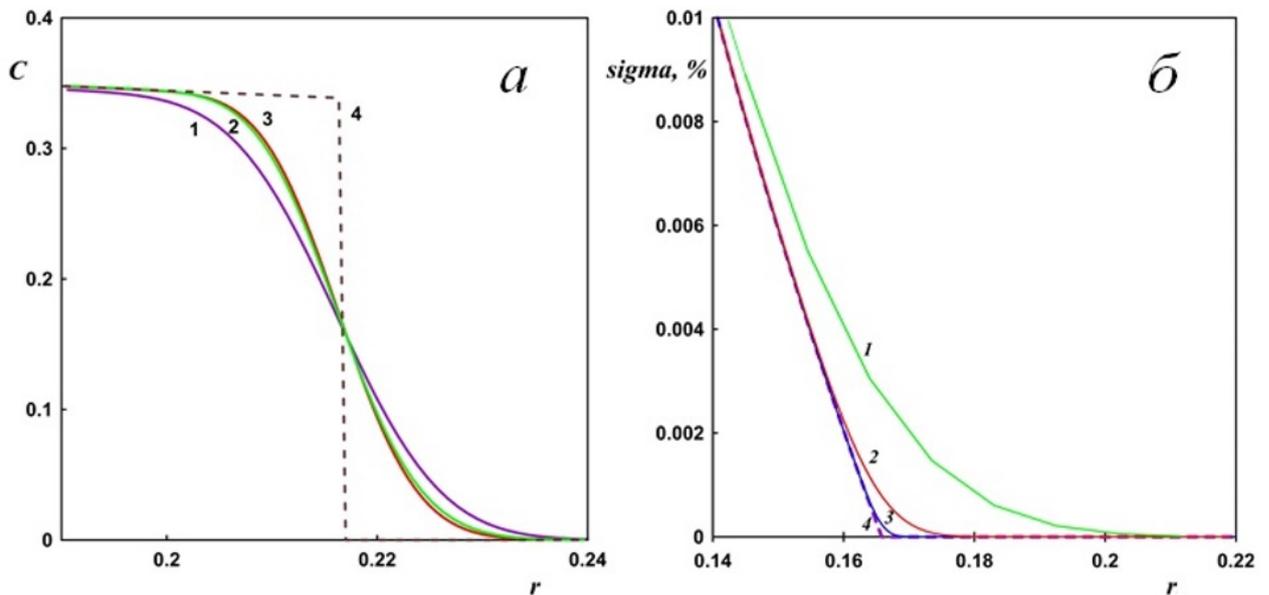


Рисунок 2.6: Профиль концентрации взвешенных частиц для линейного течения,  $\lambda = 1$ ,  $10^3$  узлов, кривые 1 – 3 соответствуют равномерной, экспоненциальной и обратной сетке (а), осажденных частиц,  $\lambda = 2$ , обратная сетка, кривые 1 – 3 соответствуют числу узлов  $10^2, 10^3, 10^4$  (б); 4 - аналитическое решение.  $t = 0.02$ ,  $U_0 = 1$ ,  $C_0 = 0.4$ .

$$\sigma(\eta, r) = \begin{cases} C_0 \Lambda \exp\{\Lambda(r_0 - r)\} \eta, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Для линейного случая также получено совпадение профилей концентрации и глубины проникновения раствора. Показана сеточная сходимость численных расчетов профиля концентрации осажденных (Рисунок 2.6, б) частиц к аналитическому решению. Расчеты на обратной сетке показали лучшее совпадение с аналитическим решением для взвешенных частиц (Рисунок 2.6, а).

## 2.5 Критическая скорость мобилизации частиц

Как уже обсуждалось в Главе 1, экспериментально установлено, что при наличии осажденных частиц во время фильтрации жидкости существует так называемая критическая скорость мобилизации частиц - скорость, начиная с которой, вымывание частиц в принципе возможно. В данном разделе мы найдем выражение для критической скорости мобилизации частиц.

Выражение для критической скорости мобилизации  $u_c$  можно получить, решив задачу об отрыве твердой частицы от поверхности поры. Для упрощения задачи мы предполагаем, что частица имеет форму сферы, а пористые каналы - круглой трубы, радиус которой равен среднему радиусу пор. Отметим, что описанные упрощения используются только в микроскопической задаче для определения критической скорости мобилизации. В макроскопическом масштабе мы используем общие уравнения фильтрации Дарси, и эти предположения не требуются.

Рассмотрим достаточно мелкие частицы, влиянием на поле скорости жидкости которых можно пренебречь, и предположим, что типичный радиус кривизны поверхности пор намного больше радиуса кривизны частиц, так что поверхность является плоской стенкой в масштабе частиц [49, 53, 56, 57].

На одну частицу, прикрепленную к плоской поверхности, действуют следующие силы: сила плавучести  $F_b$ , адгезии  $F_a$ , трения  $F_f$ , подъемная сила  $F_{lift}$  и сила сопротивления потоку  $F_d$  (см. Рисунок 2.7). Выражение для силы адгезии

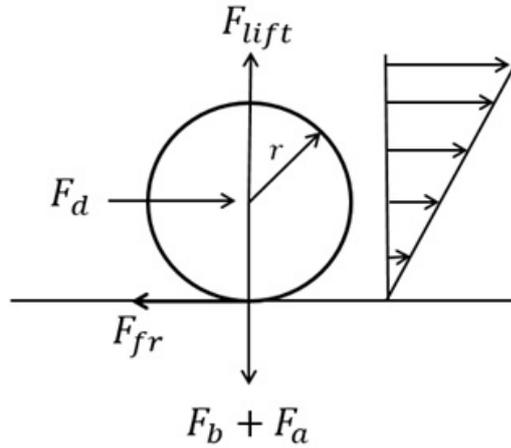


Рисунок 2.7: Силы, действующие на сферическую частицу, прикрепленную к плоской поверхности.

получено с использованием потенциала Леннарда-Джонса в[101]:

$$F_a = \frac{Ad}{12\delta^2} \quad (2.70)$$

Здесь  $A$  - постоянная Гамакера,  $d$  - диаметр частицы,  $\delta$  - расстояние между частицей и поверхностью. Поскольку значение параметра  $\delta$  обычно неизвестно, предлагаем использовать соотношение, полученное экспериментально для частиц в воде [102]:

$$F_a = c_1 d, \quad c_1 = 10^{-5} - 10^{-8} (\text{Н/м}) \quad (2.71)$$

Здесь значение коэффициента  $c_1$  зависит от материала частиц и пористой среды.

Сила сопротивления, действующая на частицу, определяется в [49]:

$$F_d = 1.7 \cdot 6\pi\mu r^2 S \quad (2.72)$$

Здесь  $S$  - скорость сдвига жидкости, определяемая на поверхности пор, а  $r$  - радиус частицы.

Как уже упоминалось выше, мы предполагаем, что поровый канал является длинной круглой трубой. Тогда в случае ламинарного течения считаем, что устанавливается профиль скорости Пуазейля. Скорость сдвига, оцененная на стенке, выражается через среднюю скорость жидкости в трубе следующим

образом:

$$S = \frac{4u_{flow}}{R} \quad (2.73)$$

Здесь  $u_{flow}$  - усредненная по сечению трубы скорость жидкости, а  $R$  - радиус трубы, который в наших предположениях совпадает с радиусом пор. Для породы с проницаемостью  $k$ , образованной частицами радиуса  $r_g$ , радиус пор можно выразить как [103]:

$$R = \sqrt{\frac{8k}{\phi^{3/2}}} \quad \text{or} \quad R = \sqrt{\frac{3\phi^3}{2.25}} r_g \quad (2.74)$$

Будем использовать выражение для подъемной силы, полученное в [50]:

$$F_l = 9.22S^2r^4\rho \quad (2.75)$$

Баланс сил, действующих на одну частицу, прикрепленную к плоской поверхности, принимает следующий вид:

$$F_d = F_{fr} = tg(\phi_0) (F_b + F_a - F_l) \quad (2.76)$$

Здесь  $F_{fr}$  - сила трения,  $\phi_0$  - это угол естественного откоса, а  $tg(\phi_0)$  - это коэффициент трения [56]. Угол естественного откоса обычно принимает значения в диапазоне  $30^\circ - 60^\circ$  [104–106]. В случае, когда размер осажденной частицы меньше размера гранул породы (в 2, 3 раза), угол естественного откоса принимает значения больше  $70^\circ$  [104]. Осаждение мелких частиц породы или разрушенного проппанта на стенки трещины гидроразрыва соответствует данному случаю.

Подстановкой (2.71), (2.72) и (2.75) в (2.76), получим:

$$1.7 \cdot 6\pi\mu r^2 S = tg(\phi_0) \left( \Delta\rho g \frac{4}{3} \pi r^3 + 2c_1 r - 9.22S^2 r^4 \rho \right) \quad (2.77)$$

Квадратичное уравнение (2.77) решается для получения скорости сдвига жидкости  $S$ . В случае небольшой скорости сдвига подъемной силой можно пре-

небрежь, и решение уравнения (2.77) принимает следующий вид:

$$S = \frac{tg(\phi_0) (\Delta\rho g \frac{4}{3}\pi r + 2c_1/r)}{10.2\pi\mu} \quad (2.78)$$

Предполагая, что рассмотренная выше круглая труба представляет собой путь через пористую среду (совокупность круглых трубок), скорость сдвига  $S$  можно выразить через фактическую скорость жидкости в пористой среде  $u_{flow}$ , используя (2.73), которая, в свою очередь, связана с фильтрационной скоростью  $u$  как  $u = u_{flow}\phi$ . Поэтому для скорости мобилизации  $u_c$  получено следующее выражение:

$$u_c = \frac{\phi R tg(\phi_0) (\Delta\rho g \frac{4}{3}\pi r + 2c_1/r)}{40.8\pi\mu} \quad (2.79)$$

В результате мы уменьшили число свободных параметров в выражении для скорости мобилизации (1.21) с двух ( $\alpha$  и  $u_c$ ) до одного ( $\alpha$ ).

## 2.6 Образование внешней глинистой корки

Будем считать, что все крупные частицы участвуют в образовании корки и образуют плотную упаковку. Обозначим через  $r_w$  и  $r_o$  начало и конец образца соответственно,  $r_e$  - координату начала внешней корки;  $\Delta p$  - полный перепад давления;  $\Delta p_{mc}$  - перепад давления во внешней корке (Рисунок 2.8) [107].

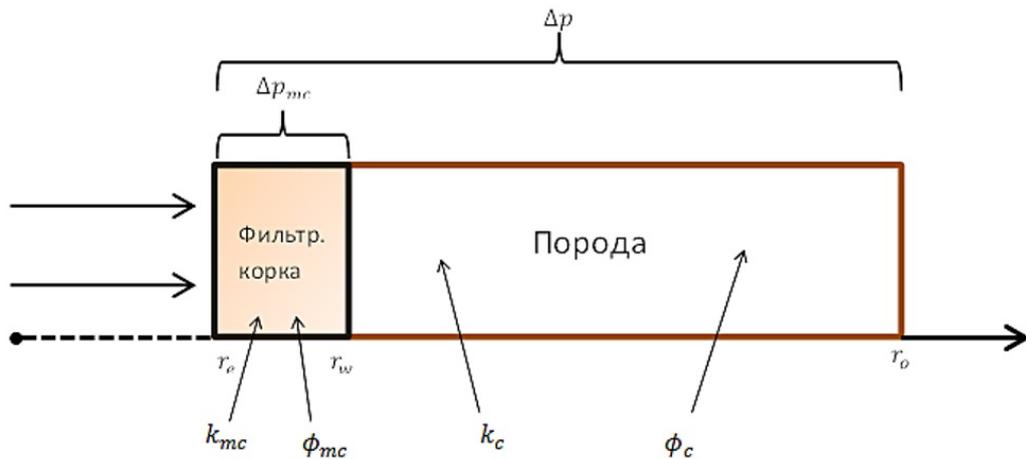


Рисунок 2.8: Схема образования внешней корки.

Запишем закон Дарси:

$$u = -\frac{k_{mc}(\Delta p_{mc})}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad r_e < r < r_w \quad (2.80)$$

$$u = -\frac{k_m \partial p}{\mu \partial r}, \quad r_w < r < r_0, \quad p(r_w) = \Delta p_{mc}, \quad p(r_0) = \Delta p \quad (2.81)$$

Здесь индексами “ $m$ ” обозначены параметры, связанные с внешней коркой, индексами “ $mc$ ” - с пористым образцом,  $u$  - скорость фильтрации во внешней корке.

Запишем закон сохранения массы для частиц и для жидкости. За промежуток времени  $dt$  все крупные частицы суспензии образуют внешнюю корку пористости  $\phi_{mc}$  и толщины  $dh$ .

$$dm_p = CUdt\rho_p = (1 - \phi_{mc})dh\rho_p \quad (2.82)$$

Здесь  $dm_p$  - масса твердых частиц, осевших на внешней границе пористой среды за время  $dt$ ,  $U$  - скорость фильтрации суспензии вне породы,  $C$  - концентрация крупных частиц.

В то же время, жидкость массы  $m_f$  проникает внутрь породы со среднеобъемной скоростью  $u$ :

$$dm_f = (1 - C)Udt\rho_f = \rho_f u dt \quad (2.83)$$

Пусть  $h = r_w - r_e$  - толщина внешней корки, тогда из уравнений (2.82), (2.83) получаем:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Cu}{(1 - C)(1 - \phi_{mc})} \quad (2.84)$$

Степенная зависимость пористости и проницаемости от перепада давления подтверждена экспериментально в [108].

$$k_{mc} = \frac{k_{mc0}}{(\Delta p_{mc})^\nu}, \quad \phi_{mc} = \frac{\phi_{mc0}}{(\Delta p_{mc})^\delta} \quad (2.85)$$

Значения параметров  $k_{mc0}$ ,  $\phi_{mc0}$ ,  $\nu$ ,  $\delta$  определяются экспериментально (см., например, [108]).

Уравнение неразрывности в радиальном случае имеет вид:

$$\frac{\partial ur^j}{\partial r} = 0 \Rightarrow u = \frac{q(t)}{r} \quad (2.86)$$

В линейном:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \Rightarrow u = const \quad (2.87)$$

### 2.6.1 Выводы

В данной главе была построена однофазная трехконтинуальная модель фильтрации суспензии с учетом переноса, осаждения и вымывания твердых частиц. Рассмотрен случай бингамовской реологии жидкости. Построен и реализован численный алгоритм.

Для задачи фильтрации, когда интенсивность кольтматации считается пропорциональной произведению скорости фильтрации и концентрации взвешенных части (коэффициент пропорциональности называется коэффициентом кольтматации), было проведено сравнение численных и аналитических результатов. Получено хорошее совпадение расчетов, показана сеточная сходимость численного решения.

Была предложена формула для определения критической скорости мобилизации (вымывания) частиц - скорости, начиная с которой в принципе возможен отрыв частиц с поверхности канала/пористой среды. Была решена задача об отрыве сферической частицы от плоской поверхности в потоке жидкости, результат был использован для определения скорости фильтрации в пористой среде.

Для предложенной в открытой литературе модели образования внешней корки (осаждение твердых частиц на входе в пористый образец из-за превышения частицами размера пор) был построен и реализован численный алгоритм.

## Глава 3

### Сравнения с экспериментальными данными\*

Для определения функциональной зависимости между скоростью кольматации частиц  $q = \partial\sigma/\partial t$  и параметрами течения/пористой среды ( $U, C_0, d_p, C, k_0, \phi_0, d_g$ ) было проведено сравнение численных расчетов с различными экспериментальными данными. При сравнении с работами, в которых было проведено достаточное количество экспериментов с фиксированным набором значений параметров потока и среды, удалось установить функциональную зависимость между этими параметрами и скоростью кольматации, а также получить функциональную зависимость между свободными параметрами модели и параметрами эксперимента. При сравнении с работами, в которых было проведено недостаточное количество экспериментов, удалось установить только возможные функциональные зависимости между  $q = \partial\sigma/\partial t$  и параметрами эксперимента, а также значения свободных параметров модели.

#### 3.1 Эксперименты по кольматации

В [109] был проведен ряд экспериментов по загрязнению пористых образцов: эксперименты GB13, BT21, BT28 и CG14. В чистый пористый образец с постоянной скоростью закачивалась суспензия. В результате экспериментов были получены данные о распределении объемной доли осажденных частиц вдоль пористого образца.

Для описания экспериментальных данных предлагается использовать выражение для интенсивности кольматации (1.5). Оно содержит всего один свободный параметр, поэтому легче найти значение этого параметра и использовать полученный результат при дальнейших исследованиях.

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [18, 19, 21, 23, 24].

Коэффициент кольтматации  $\lambda$  был найден минимизацией среднеквадратичного отклонения распределения осажденных частиц вдоль образца.

Также было проведено сравнение двух моделей фильтрации: (i) новая модель (2.1), (2.5)-(2.9), (2.13)-(2.15), учитывающая конечную концентрацию осажденных частиц и возможность фильтрации жидкости между этими частицами и (ii) классическая модель (1.1)-(1.4), не учитывающая фильтрацию жидкости между осажденными частицами.

Утверждается, что новая модель лучше описывает профиль концентрации осажденных частиц в окрестности входного сечения. Описание профиля концентрации вблизи входной границы имеет большое значение, потому что именно там происходит резкое падение проницаемости пористого образца.

В эксперименте GB13 в пористый образец при постоянном расходе закачивалась взвесь частиц с объемной концентрацией 0.15% в воде. Глубина проникновения частиц составляет 4 мм. Расчеты, проведенные в рамках новой модели, показали хорошее соответствие с экспериментальными данными. Получено значение коэффициента кольтматации  $\lambda = 6600$  при минимальном среднеквадратичном отклонении 0.516. При данных параметрах численное моделирование хорошо описывает эксперимент вблизи входной границы (0.2 мм). При  $\lambda = 3000$  среднеквадратичное отклонение составляет 0.688. В данном случае среднеквадратичная ошибка больше, чем в предыдущем, но численный результат хорошо соответствует экспериментальным данным на расстоянии 1 мм от входной границы (Рисунок 3.1).

Расчеты, проведенные в рамках классической модели с одним свободным параметром (коэффициент кольтматации  $\lambda$ ), показали меньшее соответствие численного моделирования с экспериментальными данными по сравнению с новой моделью. Минимальное среднеквадратичное отклонение 0.816 получено при  $\lambda_0 = 2600$  (Рисунок 3.2, а).

При наличии двух свободных параметров (коэффициент  $\lambda$  и параметр  $\beta$  в выражении (1.6)) минимум среднеквадратичного отклонения новой модели был найден методом градиентного спуска с дробным шагом [110]. Получено хорошее соответствие с экспериментальными данными: совпадают как профили концентрации у входной границы, так и глубина проникновения раствора вглубь пористого образца. Минимальная среднеквадратичная ошибка 0.113 достигается

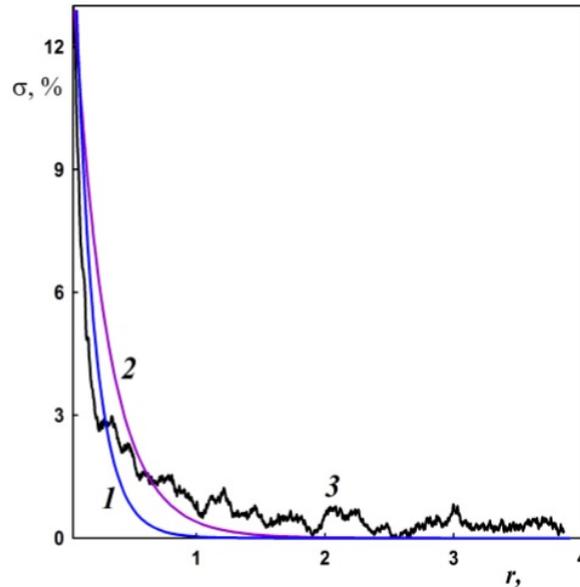


Рисунок 3.1: Профиль концентрации осажденных частиц. Кривые 1, 2 соответствуют численным расчетам в рамках новой модели и скоростью кольматации (1.5) при  $\lambda = 6600$  и  $\lambda = 3000$  соответственно, 3 - экспериментальные данные GB13.

при  $\lambda = 112$ ,  $\beta = 850$  (Рисунок 3.2, б).

Преимущество новой модели можно объяснить большим значением концентрации осажденных частиц на входной границе: новая модель тем больше отличается от классической, чем больше различие между пористостями  $\phi_t$  и  $\phi_c$  и, следовательно, чем больше объем мелких поровых каналов и концентрация осажденных частиц.

В эксперименте BT28 в пористый образец закачивалась суспензия с концентрацией частиц бентонита 2.2%, объем закачанной суспензии составляет 12.85 мл. В результате численных расчетов в рамках новой модели получено значение коэффициента кольматации  $\lambda = 200$  при минимальной среднеквадратичной ошибке 0.213 (Рисунок 3.3, а). Моделирование хорошо описывает значение концентрации осажденных частиц и резкое падение его значения вблизи входной границы. В рамках классической модели с одним свободным параметром получено значение  $\lambda = 132$ , соответствующее максимально возможному значению концентрации осажденных частиц (до наступления закупорки на входной границе) при минимальной ошибке 0.75. Данные результаты много хуже описывают имеющийся профиль осажденных частиц. Концентрация осажденных частиц на входной границе составляет 12% (Рисунок 3.3, а).

В рамках моделирования с использованием новой модели и скорости кольма-

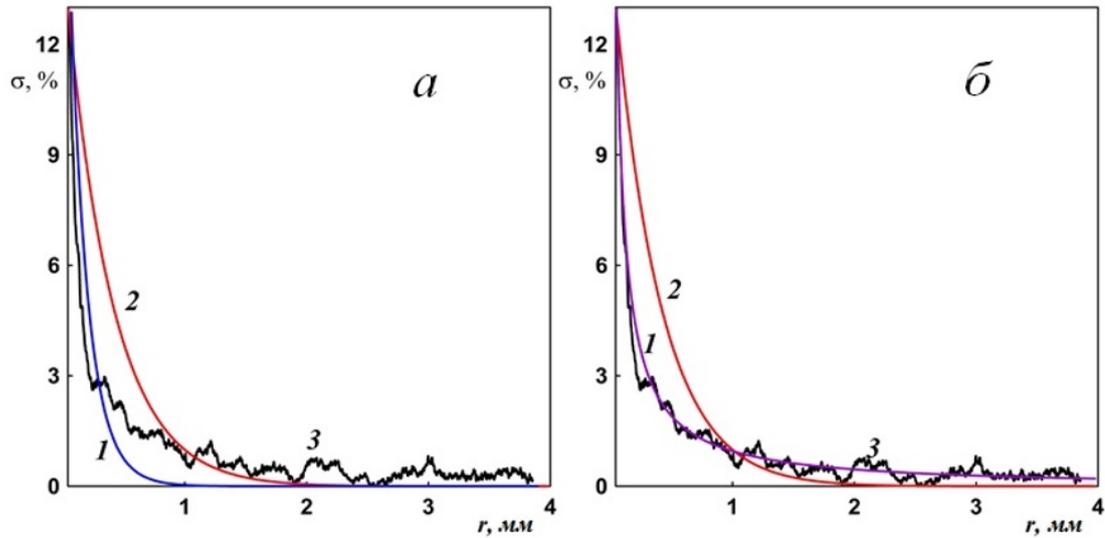


Рисунок 3.2: Профиль концентрации осажденных частиц. Кривая 1 - численное моделирование в рамках новой модели при  $\lambda = 6600$  (а), в рамках новой модели при  $\lambda = 112, \beta = 850$  (б), 2 - численное моделирование в рамках классической модели при  $\lambda = 2600$ , 3 - экспериментальные данные GB13.

тации с двумя свободными параметрами (1.6) получено значение  $\lambda = 8, \beta = 447$  при минимальной ошибке 0.117 (Рисунок 3.3, б).

В эксперименте CG14 закачивалась взвесь с концентрацией бентонита 1.1%, объем закачанной суспензии составляет 74.32 мл. В рамках новой модели получено значение коэффициента кольматации  $\lambda = 1500$  при минимальной среднеквадратичной ошибке 0.18. Данное моделирование хорошо описывает значение концентрации осажденных частиц на входной границе (13.8% при экспериментальном 11.16%) и профиль концентрации при удалении от входной границы (Рисунок 3.4, а). Также при  $\lambda = 577$  и среднеквадратичной ошибке 0.265 получено хорошее совпадение как значения  $\sigma$  на входной границе (14.6%), так и профиля концентрации вблизи границы. При моделировании в рамках классической модели получено значение  $\lambda = 158$ , соответствующее максимально возможной концентрации частиц, при ошибке 0.957. Данные результаты плохо описывают эксперимент и вблизи границы, и при удалении от нее, наблюдается совпадение только глубины проникновения частиц бентонита (Рисунок 3.4, а).

В результате расчетов в рамках двухпараметрической модели получено значение  $\lambda = 11.5, \beta = 447$  при минимальной ошибке 0.196 (Рисунок 3.4, б).

При значениях концентрации осажденных частиц в разы меньших, чем максимально возможное (соответствующее полной закупорке пор), численные рас-

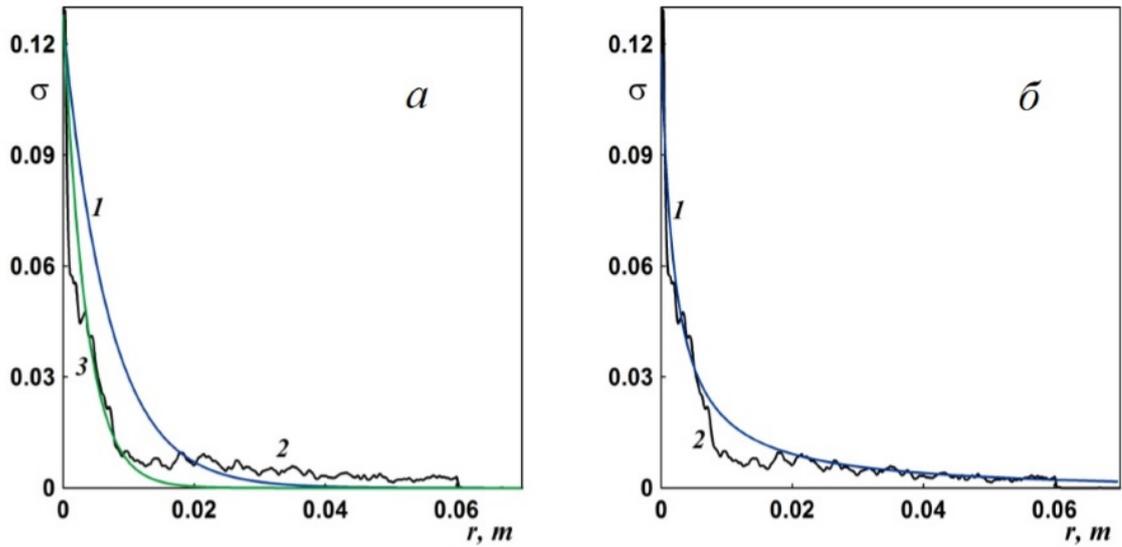


Рисунок 3.3: Профиль концентрации осажденных частиц. Кривая 1 - численное моделирование в рамках новой модели при  $\lambda = 132$ , 3 - в рамках классической модели при  $\lambda = 200$  (а), 1 - численное моделирование в рамках новой модели при  $\lambda = 8, \beta = 447$  (б), 2 - экспериментальные данные ВТ28.

четы в рамках новой и классической моделей совпадают.

В эксперименте ВТ21 в пористый образец закачивалась суспензия с концентрацией частиц бентонита 2.2%, объем закачанной суспензии составляет 30.79 мл. Используемые методы определения концентрации осажденных частиц не позволяют получить данные вблизи входной границы, где наиболее сильно отличаются расчеты в рамках новой и классической моделей. Поэтому вне окрестности входной границы численное моделирование в рамках новой модели совпадает с моделированием в рамках классической модели (Рисунок 3.5). Получено значение коэффициента кольтматации  $\lambda = 506$  при минимальной среднеквадратичной ошибке 0.18. Совпадение результатов двух моделей также можно объяснить малой концентрацией осажденных частиц (максимальная 3%).

В [7] также был проведен эксперимент по загрязнению пористого образца. Основные параметры эксперимента представлены в Таблице 3.1. Было проведено два вида измерений профиля концентрации осажденных частиц - томография и спектроскопия. При томографическом методе измерения значение концентрации осажденных частиц на входной границе  $\sigma \approx 0.16$ , а при спектроскопическом -  $\sigma \approx 0.12$ .

В [7] построены модели фильтрации с переменной пористостью, не учитывающие фильтрацию между осажденными частицами. Проведен параметри-

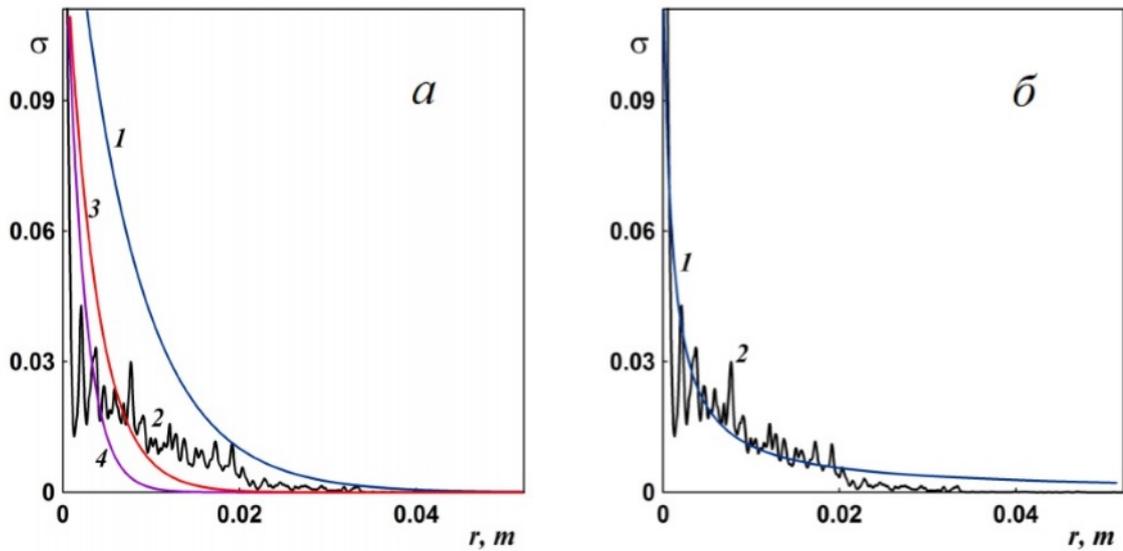


Рисунок 3.4: Профиль концентрации осажденных частиц. Кривая 2 - экспериментальные данные CG14, 1 - численное моделирование в рамках новой модели с двумя свободными параметрами при  $\lambda = 11.5, \beta = 447$  (б), с одним свободным параметром при  $\lambda = 158$ , 3 - в рамках классической модели при  $\lambda = 346$ , 4 - в рамках классической модели при  $\lambda = 577$  (а).

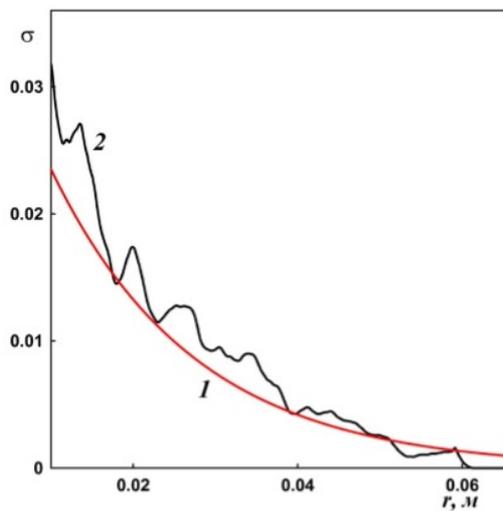


Рисунок 3.5: Профиль концентрации осажденных частиц. Кривая 1 - численное моделирование в рамках классической модели при  $\lambda = 506$ , 2 - экспериментальные данные BT21.

Параметры	Значения
Длина образца, мм	3
Диаметр частиц, мкм	29
Диаметр пор, мм	33.5
Пористость	0.17
Вязкость, мПа · с	30
Проницаемость, мД	600
Объемная концентрация взвешенных частиц	0.13
Скорость фильтрации, см/мин	0.13
Время, с	1

Таблица 3.1: Параметры экспериментов [7] .

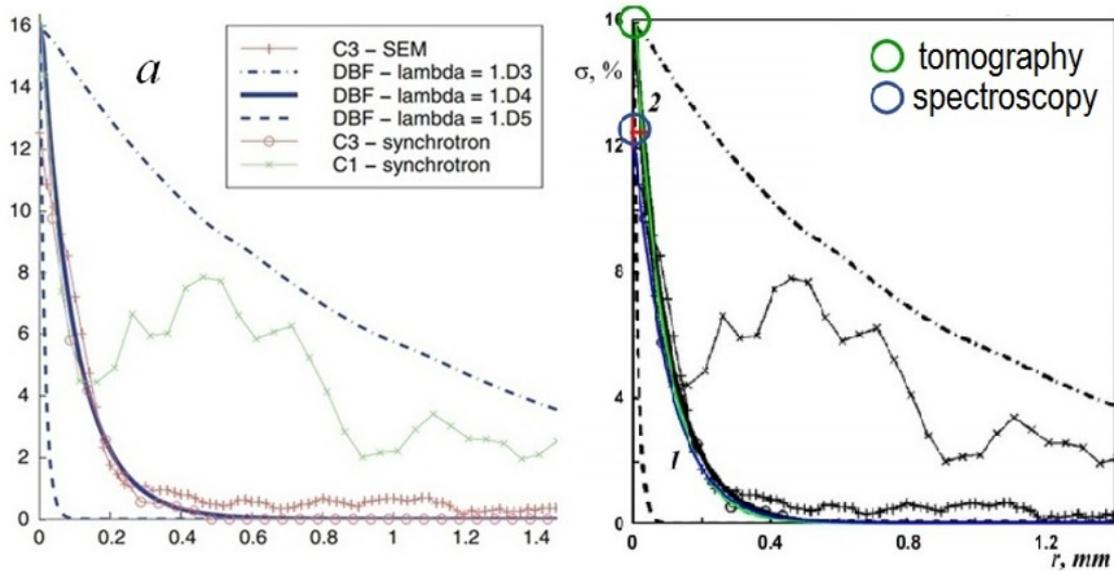


Рисунок 3.6: Профиль концентрации осажденных частиц. а) экспериментальные данные, б) кривая 1 - результаты расчетов в рамках новой модели,  $\lambda = 10^5$ , кривая 2 - расчеты в рамках классической модели,  $\lambda = 10^5$ .

ческий анализ, показывающий, что применительно к данному эксперименту для хорошего соответствия достаточно использование выражения для скорости кольматации только с одним свободным параметром  $\lambda$ . Было получено хорошее соответствие численного расчета и экспериментальных данных, полученных при томографии (Рисунок 3.6).

Численные расчеты, проведенные в рамках новой модели показали хорошее соответствие с экспериментальными данными спектрографии.

Таким образом, наиболее сильное отличие между новой и классической моделями достигается при объемной доле осажденных частиц, близкой к максимально возможной (полная закупорка). В данном случае новая модель существенно лучше классической описывает поведение профиля концентрации осажденных

частиц вблизи входной границы, а классическая модель подходит только для описания глубины проникновения раствора и профиля концентрации вдали от входной границы.

В работе [14] авторы провели ряд экспериментов по фильтрации суспензии в пористой среде. Основные параметры экспериментов представлены в Таблице 3.2.

Параметры	Значения
Диаметр частиц, мкм	0.5; 1.1; 3.1; 5.1
Диаметр зерен, мм	0.78; 0.33; 0.15; 0.12; 0.098
Пористость	0.36 – 0.37
Объемная концентрация взвешенных частиц	$1 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-4}$
Скорость фильтрации, см/мин	0.31
Длина образца, см	15
Кол-во закаченных поровых объемов	40

Таблица 3.2: Параметры экспериментов [14].

Пористая среда и фильтруемые частицы были обработаны специальным образом так, чтобы максимально снизить физико-химическое взаимодействие между частицами и поверхностью пор. Таким образом, можно считать, что в данном эксперименте частицы коагулируют в пористой среде только за счет застревания в порах, застревания между зернами пористой среды или застревания на неровностях поровых каналов; осаждением на стенках пор под действием силы адгезии можно пренебречь.

Можно сделать следующее предположение: скорость коагуляции частиц  $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$  состоит из двух слагаемых: одно отвечает за застревание частиц, другое – за осаждение. Таким образом, при сравнении численных расчетов с экспериментами [14] можно определить интенсивность застревания частиц в пористой среде.

При валидации модели относительно экспериментальных данных было подтверждено предположение, сделанное авторами [14]: застревание частиц в пористой среде может быть описано только при помощи экспоненциальной зависимости между скоростью застревания и концентрацией осажденных частиц:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \gamma C e^{-\beta \sigma} \quad (3.1)$$

Используя формулу (3.1), было проведено моделирование экспериментов [14]

для различных размеров частиц и зерен пористой среды. Результаты моделирования представлены на Рисунках 3.7, 3.8.

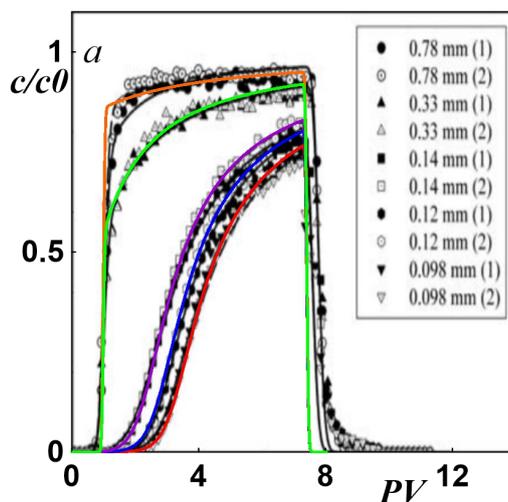


Рисунок 3.7: Зависимость нормированной концентрации взвешенных частиц на выходе из образца от количества поровых объемов. Размер частиц и 5.1 мкм. Красная, синяя, фиолетовая, зеленая, оранжевая кривые соответствуют экспериментам с размерами зерен 0.098 мм, 0.12 мм, 0.14 мм, 0.33 мм, 0.78 мм [14].

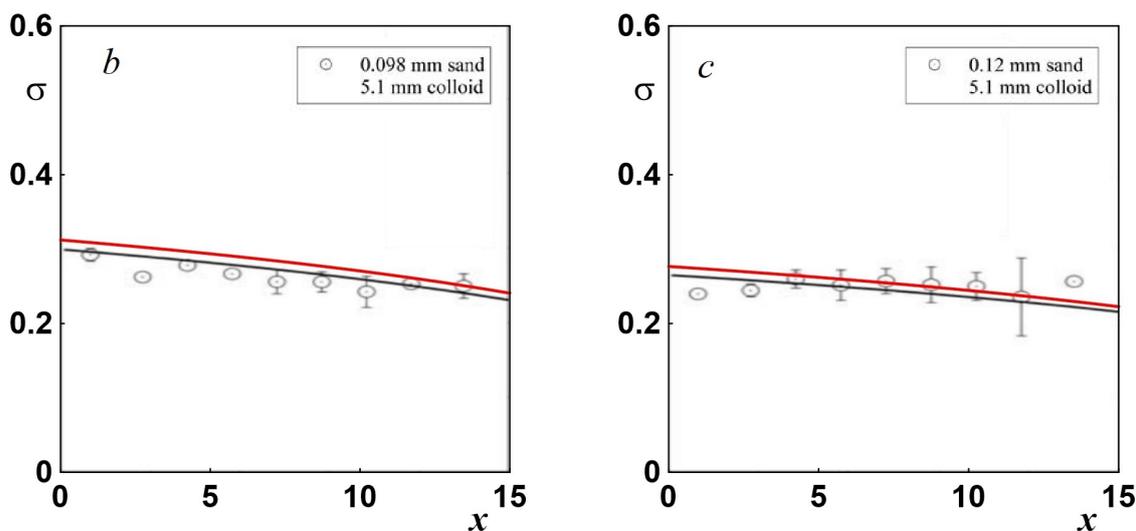


Рисунок 3.8: Концентрация осажденных частиц вдоль образца. Размер фильтруемых частиц 5.1 мкм, размер зерен 0.098 мм (а) и 0.12 мм (б). Черные точки - экспериментальные данные, черные кривые - моделирование авторами [14], красная кривая - результаты расчетов в рамках новой модели.

В Таблице 3.3 собраны значения параметров, подобранных при сравнении численных расчетов и экспериментальных данных [14].

Для определения зависимостей между свободными параметрами  $\gamma$ ,  $\beta$  и параметрами течения  $d_p$  и  $d_g$  будем использовать соответствующие им безразмерные параметры, полученные согласно операции обезразмеривания, предложенной в

$C_0 \cdot 10^5$	$d_p/d_g \cdot 10^2$	$\gamma \cdot 10^3$	$\beta \cdot 10^{-4}$	$R^2$
28.3	5.2	3.8	0.9	0.99779
28.3	4.25	3.2	1	0.9979
28.3	3.64	2.3	1	0.9365
28.3	1.55	0.2	1.7	0.9393
9.48	3.16	1.6	2.5	1
9.48	2.58	1.1	2.7	0.8733
9.48	2.21	0.59	3.2	0.999239
9.48	0.93	0.1	3.5	0.99601
9.48	1.12	0.105	13	
9.48	0.91	0.095	23	

Таблица 3.3: Параметры экспериментов [14]: объемная концентрация частиц на входе  $C_0$ , отношение диаметра частиц к диаметру зерен  $d_p/d_g$ , значения коэффициентов кольматации  $\gamma$  and  $\beta$ , подобранные в рамках новой модели с использованием выражения для скорости кольматации (3.1),  $R^2$  - коэффициент детерминации концентрации взвешенных частиц на входе.

разделе 2.4. Также за масштаб длины на микромасштабе примем диаметр зерен пористой среды  $d_g$ . Таким образом, получим 2 безразмерных свободных параметра модели  $\gamma^* = \gamma L/U_0$ ,  $\beta$  и один параметр длины на микромасштабе  $d_p/d_g$ . Минимизацией среднеквадратичного отклонения получим следующие выражения:

$$\gamma^* = 13 \cdot 10^3 \left( \frac{d_p}{d_g} \right)^{2.3244} \quad (3.2)$$

$$\beta = 134.62 \left( \frac{d_p}{d_g} \right)^{-1.394} \quad (3.3)$$

Числа в уравнениях (3.2)-(3.3), определяющие зависимость между свободными параметрами  $\gamma$  и  $\beta$  и размерами частиц и зерен  $d_p$  и  $d_g$ , вообще говоря, также являются свободными параметрами и зависят от начальной концентрации частиц, начальной пористости, начальной проницаемости и геометрических характеристик пористой среды ( $C_0, \phi_0, k_0, \alpha_i$ ). Установить формулы для данных свободных параметров можно путем сравнения численных расчетов и соотношений (3.2)-(3.3) с другими экспериментальными данными схожей конфигурации.

Авторы [13] провели серию экспериментов по загрязнению зерна со схожими с экспериментами [14] параметрами (см. Таблицу 3.4) за исключением того,

что образец и частицы не обрабатывались специальным образом, поэтому есть основания полагать, что в данных экспериментах частицы кольматируют как за счет осаждения (под действием гравитационных сил или сил адгезии), так и за счет застревания.

Параметры	Значения
Диаметр частиц, мкм	1; 3
Диаметр зерен, мм	0, 15; 0.24; 0.36
Пористость	0.26 – 0.36
Объемная концентрация взвешенных частиц	$2.11 \cdot 10^{-5}$
Скорость фильтрации, см/мин	0.08 – 0.14
Длина образца, см	10
Время закачки суспензии, мин	37 – 150
Кол-во закаченной чистой жидкости, мл	380

Таблица 3.4: Параметры экспериментов [13] .

Авторы [13] предложили использовать четыре члена для описания кольматации и мобилизации частиц (в горлышках и порах) и, соответственно, четыре свободных параметра.

После проведения анализа чувствительности было получено, что количество членов для описания интенсивности кольматации/мобилизации можно сократить с четырех до одного с одним свободным параметром  $\kappa$ :

$$q = \kappa C (1 - \phi_c) \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{max}}\right) \left(\frac{d_{50} + x}{d_{50}}\right)^{-0.432} \quad (3.4)$$

Здесь  $\sigma_{max} = C_{max}\phi_0$  - максимальная концентрация осажденных частиц.

Коэффициент кольматации  $\kappa$  из формулы (3.4) был подобран для каждого эксперимента из работы [13] (см. Таблицу 3.5). Эксперименты были проведены для разных значений концентраций частиц в суспензии, размеров взвешенных частиц и зерен пористой среды. Следовательно можно предположить, что безразмерный коэффициент кольматации  $\kappa^* = \kappa L/U_0$  зависит от этих трех параметров. При помощи интерполяции всех полученных значений свободного

$C_0 \cdot 10^5$	$d_p/d_g \cdot 10^3$	$\kappa_{exp} \cdot 10^4$	$\kappa_{calc} \cdot 10^4$	$R^2$
4.04	2.77	2.2	4.36	0.7473
2.02	2.77	2	5.83	0.455
1.01	2.77	13	7.8	0.8791
0.5	2.77	18	10.4	0.9964
4.04	4.16	6	7.54	0.3235
2.02	4.16	4	10.08	0.9778
1.01	4.16	25	13.5	0.3893
0.5	4.16	28	18.05	0.488
4.04	6.6	8.4	14.2	0.9819
2.02	6.6	20	19.02	-0.505
1.01	6.6	47	25.45	0
0.5	6.6	40	34.05	-0.00797
4.04	8.89	17.5	20.96	-1.189
2.02	8.89	17.5	28.05	-0.553
1.01	8.89	37	37.5	-0.05
0.5	8.89	27	50.2	-0.637
4.04	13.3	47	36.2	-2.13
2.02	13.3	47	48.5	-1.59
1.01	13.3	80	64.9	
0.5	13.3	80	86.8	...
4.04	21.3	80	68.35	
2.02	21.3	80	91.45	
1.01	21.3	100	122	

Таблица 3.5: Параметры экспериментов [13]: объемная концентрация частиц на входе  $C_0$  и отношения диаметра частиц к диаметру зерен пористой среды  $d_p/d_g$ ; подобранные значения  $\kappa_{exp}$  с использованием формулы (3.4); значения свободного параметра  $\kappa_{calc}$ , посчитанные при помощи полученной формулы (3.5) и коэффициент детерминации  $R^2$  при использовании  $\kappa_{calc}$  и  $\kappa_{exp}$ .

параметра для него было получена функциональная зависимость:

$$\kappa^* = 96C_0^{-0.42} \left( \frac{d_p}{d_g} \right)^{1.35} \quad (3.5)$$

Результаты моделирования экспериментов по кольматации [13] представлены на Рисунках 3.9, 3.10. Можно заметить, что в случае фильтрации в среде из небольших зерен моделирование авторов описывает экспериментальные данные по концентрации частиц на выходе лучше, чем упрощенная формула (3.4); в случае фильтрации в пористой среде из более крупных зерен наоборот: упрощенная модель описывает эксперимент лучше, чем предложенная в оригинальной работе.

Также при анализе экспериментов [13] был обнаружен следующий эффект: частицы одинакового размера в одной и той же пористой среде осаждаются

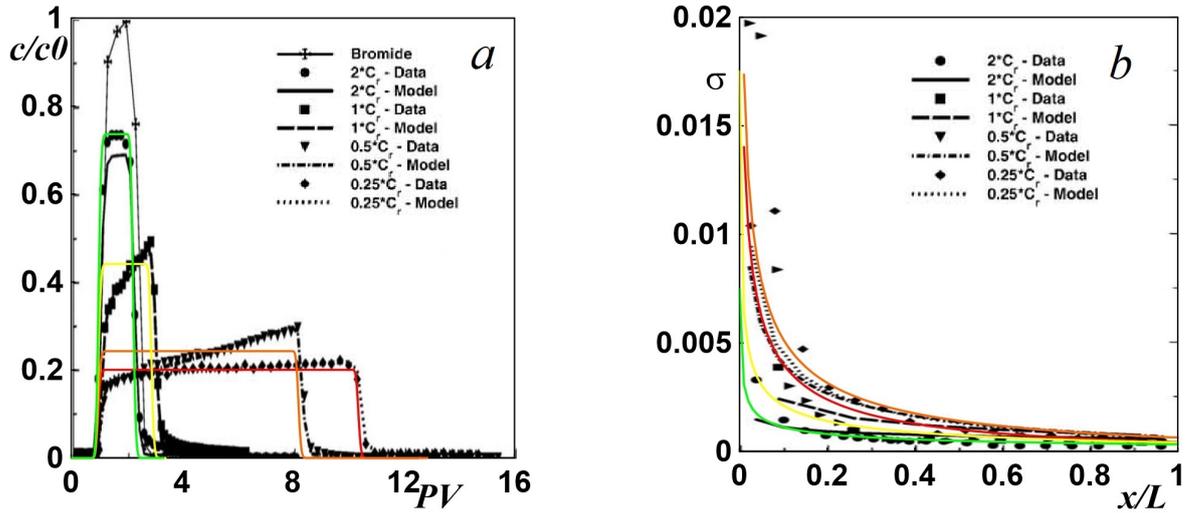


Рисунок 3.9: Объемная концентрация частиц на выходе из образца в зависимости от количества поровых объемов (a) и концентрация осажденных частиц вдоль пористого образца (b). Черные символы обозначают экспериментальные измерения: круги –  $C_0 = 4.04 \cdot 10^{-5}$ , квадраты –  $C_0 = 2.02 \cdot 10^{-5}$ , треугольники –  $C_0 = 1.01 \cdot 10^{-5}$ , ромбы –  $C_0 = 0.505 \cdot 10^{-5}$ . Цветные кривые обозначают результаты численного моделирования при  $C_0 = 4.04 \cdot 10^{-5}$  (зеленая),  $C_0 = 2.02 \cdot 10^{-5}$  (желтая),  $C_0 = 1.01 \cdot 10^{-5}$  (оранжевая),  $C_0 = 0.505 \cdot 10^{-5}$  (красная). Диаметр частиц 1 мкм, диаметр зерен  $150 \mu\text{m}$ .

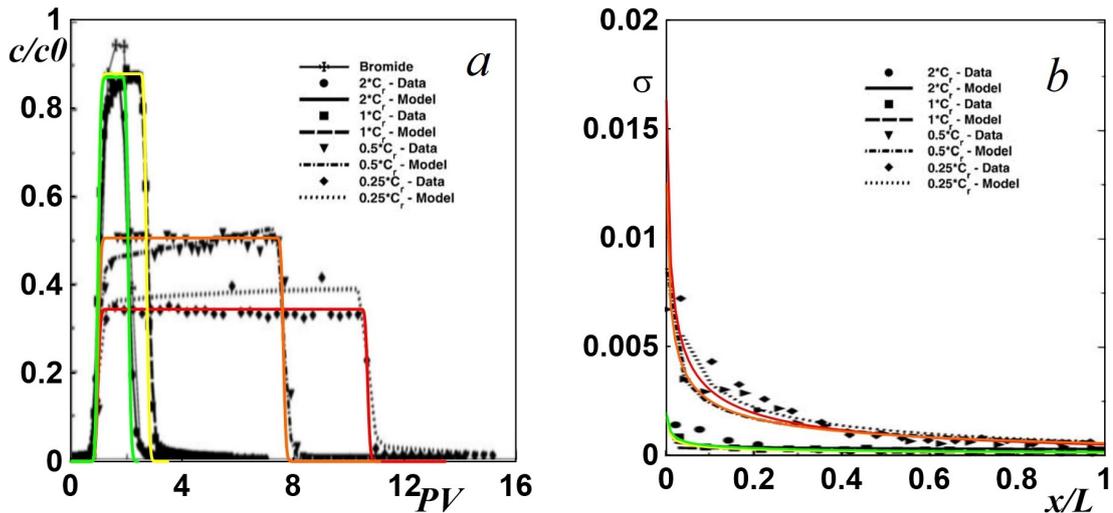


Рисунок 3.10: Объемная концентрация частиц на выходе из образца в зависимости от количества поровых объемов (a) и концентрация осажденных частиц вдоль пористого образца (b). Черные символы обозначают экспериментальные измерения: круги –  $C_0 = 4.04 \cdot 10^{-5}$ , квадраты –  $C_0 = 2.02 \cdot 10^{-5}$ , треугольники –  $C_0 = 1.01 \cdot 10^{-5}$ , ромбы –  $C_0 = 0.505 \cdot 10^{-5}$ . Цветные кривые обозначают результаты численного моделирования при  $C_0 = 4.04 \cdot 10^{-5}$  (зеленая),  $C_0 = 2.02 \cdot 10^{-5}$  (желтая),  $C_0 = 1.01 \cdot 10^{-5}$  (оранжевая),  $C_0 = 0.505 \cdot 10^{-5}$  (красная). Диаметр частиц 1 мкм, диаметр зерен  $360 \mu\text{m}$ .

интенсивнее при малых концентрациях. Объяснить этот эффект можно следующим образом: при больших концентрациях частицы могут «слипаться», следовательно, их масса увеличивается и силам адгезии сложнее осадить их на поверхности пор. При малых концентрациях частицы не «слипаются» и легче

осаждаются под действием физико-химических сил. Поскольку данный эффект в настоящий момент в модели фильтрации не учтен, то полу-эмпирическая формула для коэффициента  $\kappa$  (3.5) была получена только для больших концентраций.

Еще один подход к описанию экспериментов [13] - использование аналитической формулы (2.68) для концентрации частиц на выходе  $C_{eff}$ :

$$\lambda = \frac{1}{L} \ln \left( \frac{C_0}{C_{eff}} \right) \quad (3.6)$$

Значения коэффициента  $\lambda$ , полученного при помощи формулы (3.6) представлены в Таблице 3.6. При использовании этой формулы получаем хорошее совпадение с графиком концентрации частиц на выходе (особенно в случае, когда величина концентрации сохраняет постоянное значение и не возрастает со временем). Профиль осажденных частиц описывается значительно хуже, чем в случае с использованием формулы (3.4) - совпадает только объем осевших частиц, но не форма кривой и значение на входе в образец (см. Рисунок 3.11 - 3.13).

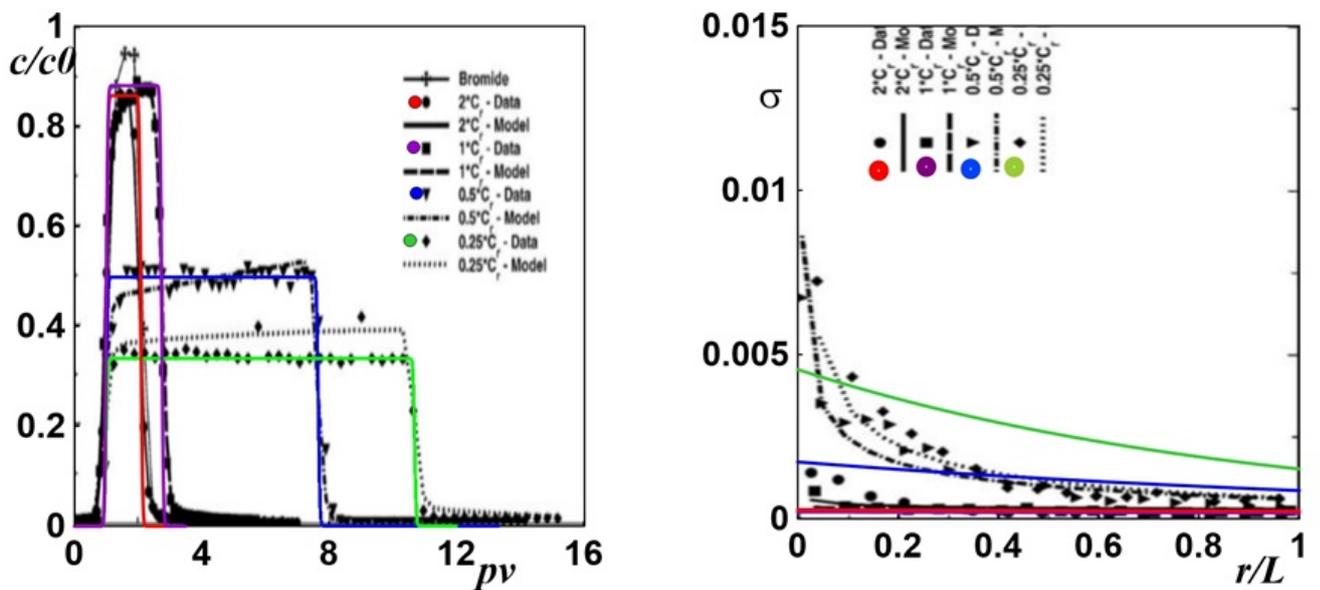


Рисунок 3.11: Зависимость отношения взвешенных частиц на выходе к количеству взвешенных частиц на входе от количества поровых объемов (а), профиль концентрации осажденных частиц в конце эксперимента (б). Размер фильтруемых частиц 1 мкм, размер зерен пористой среды 0.36 мм, пористость 0.27-0.34; красная, фиолетовая, синяя и зеленая кривые – численные расчеты при начальной концентрации  $4.046 \cdot 10^{-5}$ ,  $2.023 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.01 \cdot 10^{-5}$ ,  $0.5 \cdot 10^{-5}$ .

$C_{eff}/C_{in}$	$d_p/d_g$	$\lambda, 1/m$
0,86	0,002778	1,51
0,88	0,002778	1,02
0,50	0,002778	6,93
0,34	0,002778	10,79
0,76	0,004167	2,74
0,81	0,004167	1,69
0,35	0,004167	10,50
0,27	0,004167	13,09
0,74	0,006667	3,01
0,40	0,006667	7,33
0,23	0,006667	14,70
0,20	0,006667	16,09
0,42	0,008889	8,68
0,33	0,008889	8,87
0,10	0,008889	23,03
0,14	0,008889	19,66
0,14	0,013333	19,66
0,10	0,013333	18,16
0,01	0,013333	46,05
0,02	0,013333	39,12
0,07	0,021333	26,59
0,03	0,021333	36,89
0,00	0,021333	0,00
0,00	0,021333	0,00

Таблица 3.6: Параметры экспериментов [13] (отношение концентрации на выходе к концентрации на входе  $C_{eff}/C_{in}$ , отношение диаметров частиц и зерен  $d_p/d_g$ , коэффициент коагуляции  $\lambda$ , полученный аналитически при помощи формулы (3.6).

Таким образом, можно сделать следующий вывод: если концентрация частиц на выходе из образца растет со временем, то эксперимент хорошо описывается формулой (3.1) (3.2)-(3.3). Если концентрация на выходе сохраняется свое значение после прокачки одного порового объема, то аналитическая формула (3.6) позволяет описать форму кривой концентрации частиц на выходе и суммарный объем осажденных частиц (в случае, если концентрация частиц на выходе известна). Формулы (3.4) и (3.5) хорошо описывают и концентрацию на выходе, и профиль осажденных частиц, но только в заданном диапазоне отношений диаметров частиц и зерен и других параметров фильтрации.

Авторы [111] провели ряд экспериментов по фильтрации крупных частиц (около 100 мкм) в пористой среде. Основные параметры экспериментов представлены в Таблице 3.7.

Поскольку фильтруемые частицы достаточно крупные, то можно сделать

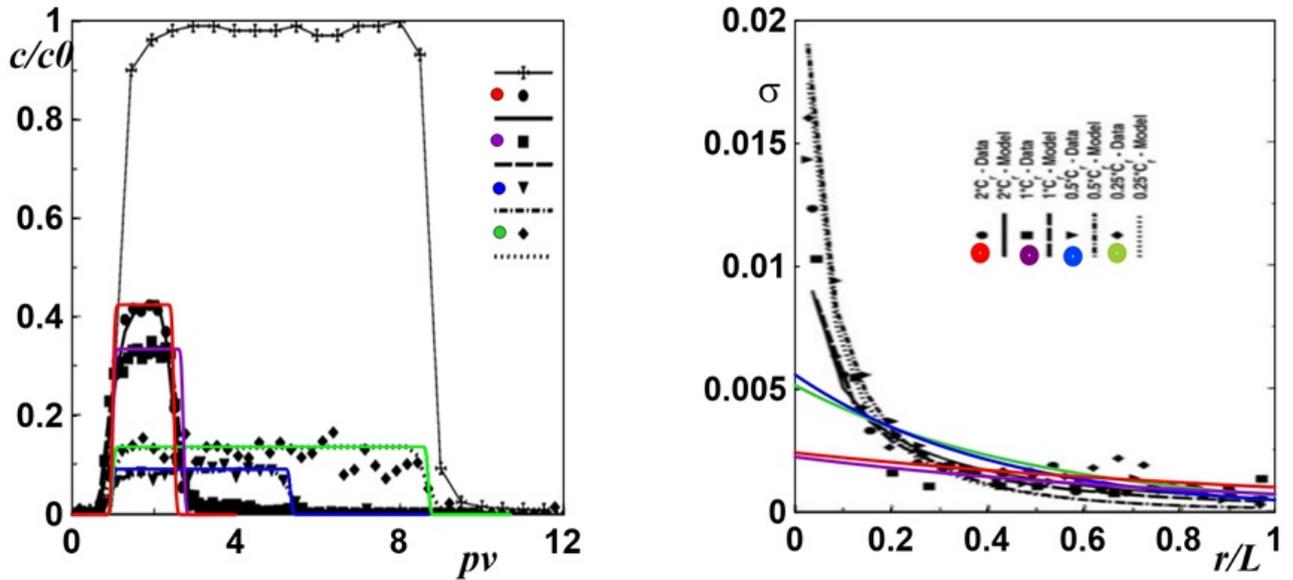


Рисунок 3.12: Зависимость отношения взвешенных частиц на выходе к количеству взвешенных частиц на входе от количества поровых объемов (а), профиль концентрации осажденных частиц в конце эксперимента (б). Размер фильтруемых частиц 3.2 мкм, размер зерен пористой среды 0.36 мм, пористость 0.3-0.34; красная, фиолетовая, синяя и зеленая кривые – численные расчеты при начальной концентрации  $4.046 \cdot 10^{-5}$ ,  $2.023 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.01 \cdot 10^{-5}$ ,  $0.5 \cdot 10^{-5}$ .

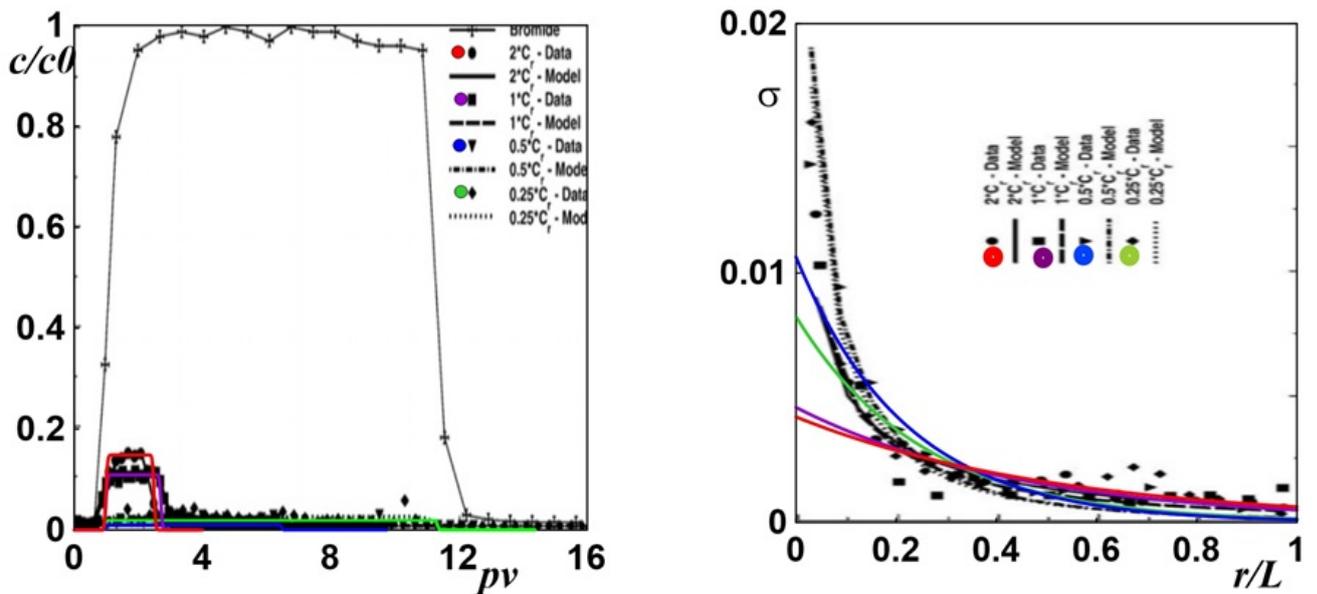


Рисунок 3.13: Зависимость отношения взвешенных частиц на выходе к количеству взвешенных частиц на входе от количества поровых объемов (а), профиль концентрации осажденных частиц в конце эксперимента (б). Размер фильтруемых частиц 3.2 мкм, размер зерен пористой среды 0.24 мм, пористость 0.29-0.34; красная, фиолетовая, синяя и зеленая кривые – численные расчеты при начальной концентрации  $4.046 \cdot 10^{-5}$ ,  $2.023 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.01 \cdot 10^{-5}$ ,  $0.5 \cdot 10^{-5}$ .

предположение, что колюматируют они только за счет застревания, а не за счет осаждения, аналогично экспериментам [14]. Поэтому для скорости осаждения будем использовать формулу (3.1). Используя соотношения (3.2)-(3.3), полу-

Параметры	Значения
Диаметр частиц, мкм	78 – 106
Диаметр зерен, мм	0.8 – 1.2
Пористость	0.4
Объемная концентрация взвешенных частиц	0.01; 0.03; 0.05
Скорость фильтрации, см/мин	17.7

Таблица 3.7: Параметры экспериментов [111] .

чим следующие значения свободных параметров:  $\gamma = 0.008$ ,  $\beta = 36.7$ . Результаты численного моделирования с полученными значениями коэффициентов  $\gamma$  и  $\beta$  представлены на Рисунке 3.14 (зеленая кривая). Получено совпадение со средним значением концентрации осажденных частиц, но не с профилем всей кривой.

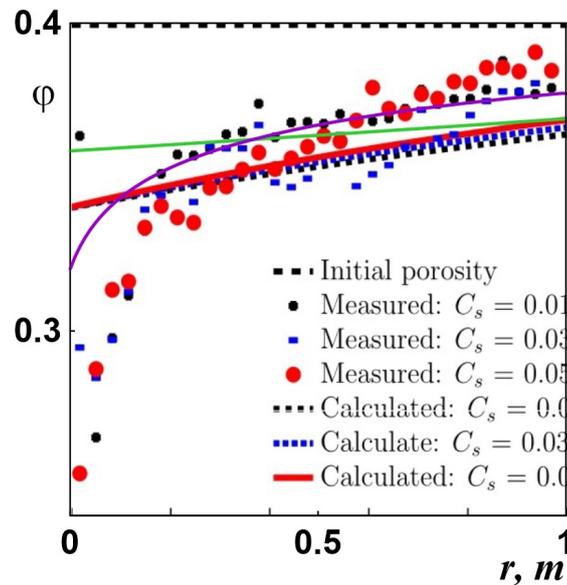


Рисунок 3.14: Профиль пористости образца в экспериментах [14]. Черные, синие и красные символы – результаты экспериментов с начальной концентрацией 0.01, 0.03 и 0.05 соответственно; кривые соответствующих цветов – результаты моделирования [14]. Зеленая и фиолетовая кривые – результаты собственных численных расчетов с использованием формулы (3.1) при  $\gamma = 0.008$ ,  $\beta = 36.7$  и  $\gamma = 0.002$ ,  $\beta = -40$  соответственно.

Предположим, что скорость кольтматации описывается следующей формулой, где  $\beta$  – положительное число:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \gamma C e^{\beta \sigma} \quad (3.7)$$

Свободные параметры формулы (3.7) были подобраны для наилучшего описания экспериментальных данных:  $\gamma = 0.002$ ,  $\beta = 40$ . Результаты моделирова-

ния представлены фиолетовой кривой на Рисунке 3.14.

Также было проведено моделирование со скоростью кольматации, представленной формулой (1.6). Данная модель может описывать как монотонное возрастание пористости вдоль длины образца, так и резкое возрастание пористости вблизи входной границы. Результаты моделирования для трех разных начальных концентраций (0.01, 0.03 и 0.05) представлены на Рисунке 3.15. Для концентрации 0.05 также представлены данные моделирования пористости вблизи входной границы. Эта кривая демонстрирует, что формула (1.6) может быть использована как вместе с моделью образования внешней корки (сама формула (1.6) не описывает малую окрестность входной границы порядка 10 процентов длины образца), так и самостоятельно, моделируя профиль пористости вдоль всего образца.

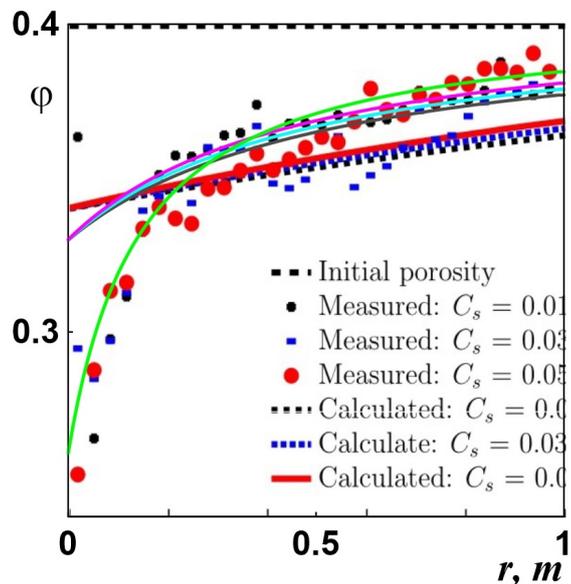


Рисунок 3.15: Серая, голубая и фиолетовая кривые – результаты численных расчетов с использованием формулы (1.6) при  $C_0 = 0.01, 0.03, 0.05$  соответственно,  $\lambda = 0.35, \beta = 235$ . Зеленая кривая – моделирование при  $C_0 = 0.05, \lambda = 0.1, \beta = 1550$ .

Другие эксперименты по кольматации были проведены в [21]. Пористые образцы были созданы искусственно из частиц размера 300 – 400 и 400 – 600 мкм, частицы суспензии имеют размеры от 25 до 40 мкм. Параметры экспериментов представлены в Таблице 3.8.

При обработке экспериментов было обнаружено, что не все твердые частицы суспензии проникают в пористый образец. Вероятно часть из них оседает еще в трубке, подводящей суспензию к пористому образцу, часть оседает на входе в пористый образец. Для моделирования процесса фильтрации было решено

Параметры	Эксп. 1	Эксп. 2	Эксп. 3	Эксп. 4
Диаметр частиц, мкм	25 – 40	25 – 40	25 – 40	25 – 40
Диаметр зерен, мкм	300 – 400	300 – 400	400 – 600	400 – 600
Пористость	0.235	0.237	0.242	0.25
Проницаемость, Д	10.3	15.16	50.99	60
Длина образца, см	2.665	3.048	2.844	2.668
Скорость фильтрации, мм/сек	0.5	0.5	0.5	0.5
Время фильтрации, сек	240	660	720	330
Объемная концентрация взвешенных частиц, лаб.	100	25	50	75
Объемная концентрация взвешенных частиц, факт.	4.4	3	12	24.1
$\lambda$ , 1/м	404	110	225	310
$\Lambda$	10.76	3.353	6.4	8.27
$\beta$ , 1/м	144	395	0	0
$R^2$ , 1/м	0.962	0.969	0.985	0.975

Таблица 3.8: Параметры экспериментов [21] .

пересчитать значения начальной концентрации взвешенных частиц, используя графики концентрации осажденных частиц. Объем осажденных частиц считается как площадь под графиком, а объем закаченных частиц - это  $C_0 t u$ , где  $C_0$  - фактическое значение концентрации взвешенных частиц,  $t$  - время закачки и  $u$  - скорость фильтрации. Приравнивая эти два выражения можно найти фактическое значение концентрации взвешенных частиц (результаты представлены в Таблице 3.8).

Для описания интенсивности кольтматации было решено использовать формулу (1.6). Свободные параметры  $\lambda$  и  $\beta$  находились при помощи метода градиентного спуска. Значения параметров также представлены в Таблице 3.8, результаты моделирования представлены на Рисунке 3.16.

Для разных пористых сред были получены разные зависимости параметра кольтматации  $\Lambda$  от концентрации взвешенных частиц:

$$\Lambda = 1.78 \cdot 10^{11} C_0^{3.04}, \quad \frac{d_p}{d_g} = 0.092 \quad (3.8)$$

$$\Lambda = 75.84 C_0^{0.37}, \quad \frac{d_p}{d_g} = 0.065 \quad (3.9)$$

Про коэффициент  $\beta$  можно только сказать, что он равен нулю при большей

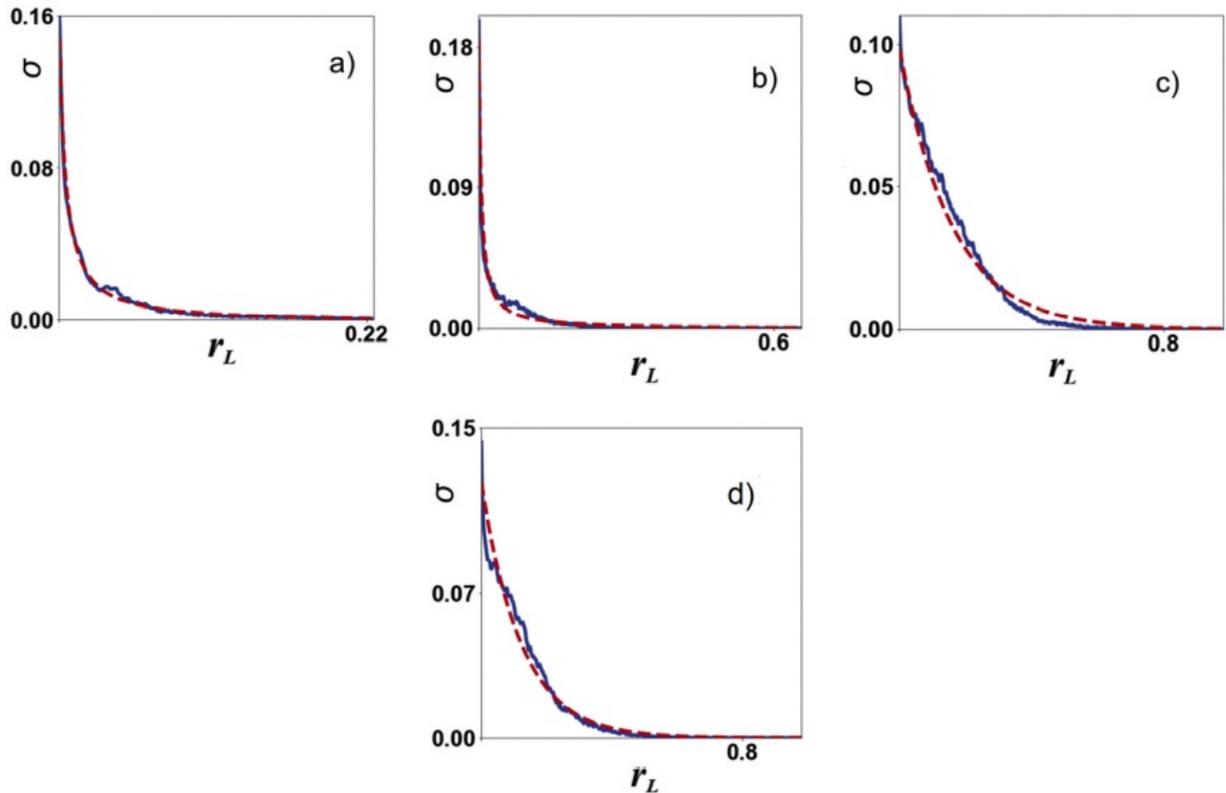


Рисунок 3.16: Концентрация осажденных частиц вдоль пористого образца. а) эксперимент 1 из работы [21], б) - эксперимент 2, в) - эксперимент 3, д) - эксперимент 4 (см. Таблицу 3.8).

проницаемости пористого образца (50 – 60 Д) и больше нуля (100 – 400) при меньших проницаемостях (10 – 15 Д).

### 3.2 Эксперименты по самокольтматации

Самокольтматацией частиц называется процесс вымывания собственных частиц породы и их повторное застревание в поровых каналах (эрозия частиц с последующей кольтматацией). Предполагается, что в начальный момент вдоль всего образца имеется некоторая однородная ненулевая начальная концентрация частиц породы, доступных для вымывания.

Для описания данного процесса предлагается ввести два континуума неподвижных частиц: минеральные частицы, находящиеся в породе изначально, которые могут только вымываться из образца при определенных условиях, с объемной долей  $\sigma_e$  (например, на стенках крупных пор) и частицы, которые застревают в поровых каналах в ходе фильтрации с объемной долей  $\sigma$ . Похожий подход к описанию фильтрации суспензии был предложен в [2]. Первый континуум частиц является источником взвешенных частиц, которые мобилизуются в

соответствии с (1.21). После отрыва от стенок пор, частицы переносятся вдоль образца и закупоривают узкие каналы (переходят в континуум осажденных частиц второго типа) согласно (1.5). Тогда в системе уравнений (2.13)-(2.15), (2.5)-(2.9) можно заменить уравнения (2.13) и (2.1) на:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} = -\alpha \sigma_e (u - u_c) \Theta(u - u_c) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = C u \lambda \quad (3.11)$$

$$\phi_c = \phi_0 - \sigma - \sigma_e \quad (3.12)$$

В работе [112] были проведены эксперименты по самокольтматации. В результате экспериментов было измерено относительное изменение проницаемости образца  $a$ :

$$a = 1 - \frac{k}{k_0} \quad (3.13)$$

Где  $k_0$  – проницаемость образца в начальный момент времени,  $k$  – проницаемость образца в конечный момент времени. Далее, используя выражение для снижения проницаемости пористой среды при накоплении осажденных частиц (2.8), получим оценку для концентрации частиц, закупоривающих горлышки пор  $\sigma^*$  (концентрация осажденных частиц в конце эксперимента):

$$a = \frac{k_0 - k_0 \left(1 - \frac{\sigma^*}{\phi_0}\right)^3}{k_0} = 1 - \left(1 - \frac{\sigma^*}{\phi_0}\right)^3 \quad (3.14)$$

$$\sigma^* = \phi_0 \left(1 - \sqrt[3]{1 - a}\right) \quad (3.15)$$

При анализе экспериментов было замечено, что проницаемость образца во время фильтрации выходит на некоторое постоянное значение. Можно предположить, что проницаемость образцов достигает некоторого постоянного значения при фиксированной скорости фильтрации. Например, это соответствует вымыванию всех частиц со стенок пористой среды при заданной критической скорости мобилизации частиц. С учетом того, что пористая среда однородна, в конце эксперимента концентрация осажденных частиц будет однородна в большей части пористого образца (за исключением области вблизи входной границы, где частицы будут преимущественно вымываться ввиду закачки флюида

без частиц). Поэтому в качестве оценки для начальной концентрации частиц на стенках пор  $\sigma_e$  можно использовать значение  $\sigma^*$  (3.15).

Таким образом, модифицированная модель фильтрации суспензии содержит два свободных параметра, описывающих мобилизацию частиц на стенках пор  $\alpha$  и закупорку узких каналов  $\lambda$ . Значения свободных параметров, полученные для каждого из экспериментов [112], представлены в таблице 3.9. Результаты расчетов динамики снижения проницаемости пористой среды приведены на Рисунке 3.17.

Эксперимент	$\lambda$	$\alpha$	$\sigma_{e0}$	$\sigma^*$
1	180	30	0.01	0.0095
2	100	2, 3.5	0.1	0.0351
3	130	16	0.013	0.0118

Таблица 3.9: Значения свободных параметры модели, найденные в ходе моделирования экспериментов [112].

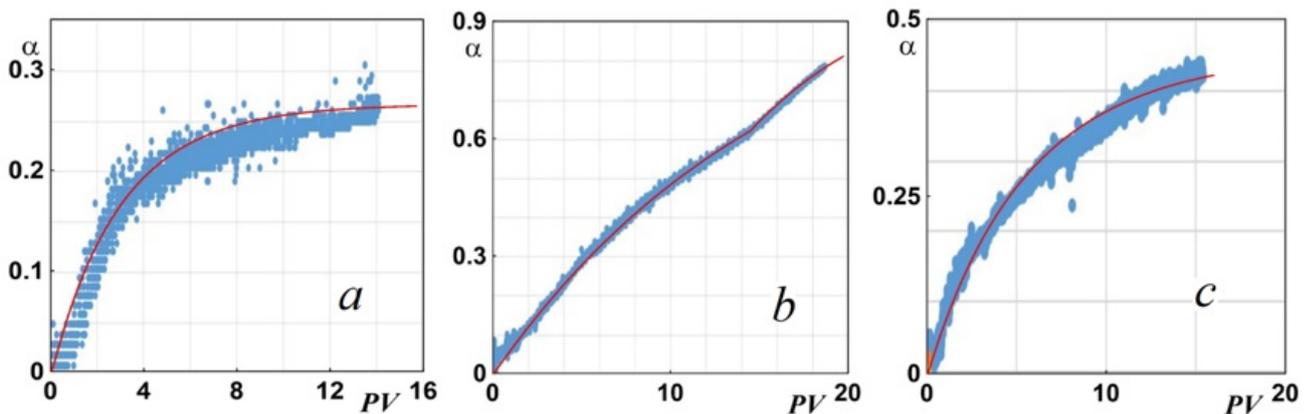


Рисунок 3.17: Данные моделирования относительного снижения проницаемости пористой среды  $a$  (3.13), соответствующие экспериментам 1 (а), 2 (б) и 3 (с). Результаты моделирования показаны сплошными кривыми, данные экспериментов – кругами.

В эксперименте 2 после прокачки около 15 поровых объемов наблюдается увеличение интенсивности кольтматации образца (Рисунок 3.17, б). Это можно объяснить тем, что в этот момент произошло какое-то разрушение образца, что спровоцировало более интенсивное вымывание частиц. Для моделирования этого эффекта, в момент времени, соответствующий 15 поровым объемам, на один шаг по времени был увеличен коэффициент мобилизации ( $\alpha = 3.5$ ), а затем уменьшен до прежнего значения ( $\alpha = 2$ ).

### 3.3 Эксперименты по мобилизации

Выражение для скорости мобилизации частиц (2.79) было использовано для описания процесса мобилизации частиц в прямоугольных трубках ([57]). Результаты сравнения приведены на Рисунке 3.18. Расхождение между моделями (2.79) и [57] связано с разными выражениями силы сопротивления и пренебрежением силой адгезии в модели [57], в то время как последнее предположение не оправдано для мобилизации коллоидных частиц. Мы получили хорошее совпадение с экспериментами в случае малых чисел Рейнольдса по сдвигу. Для лучшего описания фильтрации при больших числах Рейнольдса необходимо использовать другую корреляцию между скоростью сдвига и средней скоростью жидкости, как обсуждалось в [57].

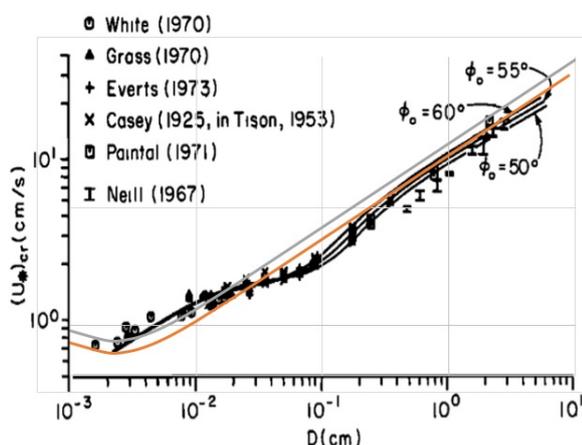


Рисунок 3.18: Критическая скорость мобилизации в зависимости от диаметра частиц в экспериментах по мобилизации частиц в прямоугольных трубках. Серая кривая - при использовании формулы 2.79 ( $\phi_0 = 55^\circ$ ) и оранжевая -  $\phi_0 = 45^\circ$ , черные символы и кривые - результаты экспериментов и моделирования [57]

Эксперименты по определению скорости мобилизации частиц в пористой среде были проведены в [2]. Чистая жидкость прокачивалась через упаковку песка, которая предварительно была «загрязнена» стеклянными частицами. В ходе эксперимента проводились измерения концентрации взвешенных частиц на выходе из пористого образца. Эксперименты были проведены для двух жидкостей с вязкостями 1 и 10 мПа·с (см. Рисунок 3.19).

Результаты сравнения экспериментально полученных значений скорости мобилизации и результатов расчетов при помощи формулы представлены в Таблице 3.10. Хорошее совпадение при фильтрации жидкости с вязкостью 1 мПа·с было получено при использовании углов естественного откоса величиной в

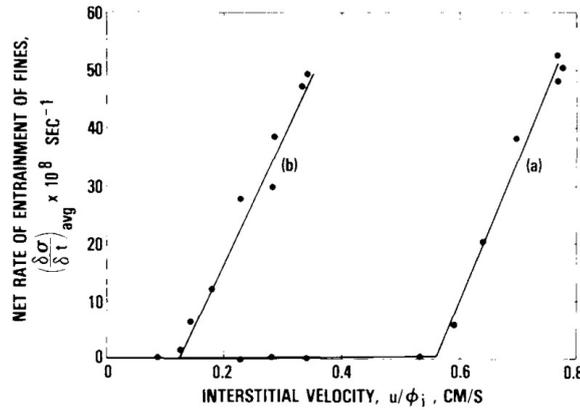


Рисунок 3.19: Скорость вымывания частиц в зависимости от скорости фильтрации. а) - вязкость закачиваемой жидкости 1 мПа, б) - 10 мПа.

Вязкость, $mPa \cdot s$	$\phi_0$	$U_{calc}, mm/s$	$U_{exp}, mm/s$
1	$50^\circ$	5.32	5.7
1	$55^\circ$	6.3	5.7
10	$55^\circ$	0.636	1.25
10	$70^\circ$	1.22	1.25

Таблица 3.10: Экспериментальные и посчитанные при помощи формулы (2.79) величины критической скорости мобилизации частиц в пористой среде [2].

$50^\circ - 55^\circ$ . В случае фильтрации более вязкой жидкости (10 мПа·с) получили меньшее совпадение между экспериментальными значениями и вычисленными по формуле. Это может быть связано с тем, формула для силы адгезии получена экспериментально для воды (для жидкости с вязкостью 1 мПа·с).

Полученное значение скорости мобилизации было использовано для моделирования течения в загрязненном пористом образце (Рисунок 3.20). В ходе эксперимента фиксировалась концентрация вымытых частиц на выходе из образца с течением времени. Скорость фильтрации менялась в течении эксперимента для наблюдения за спонтанной и спровоцированной мобилизацией: спонтанная мобилизация - вымывание частиц только при достижении критической скорости мобилизации, спровоцированная - кратковременное вымывание частиц при резкой смене скорости потока. Экспериментальные данные удалось описать только при учете и мобилизации, и кольтматации частиц. Параметры мобилизации и кольтматации ( $\alpha$  и  $\lambda$ ) были подобраны при моделировании фильтрации со скоростью 0.75 см/с методом минимизации среднеквадратичного отклонения. Затем полученные значения использовались при моделировании фильтрации со скоростью 0.92 см/с. Было получено хорошее совпадение между эксперимен-

тальными данными и численными расчетами (Рисунок 3.20, красная сплошная кривая).

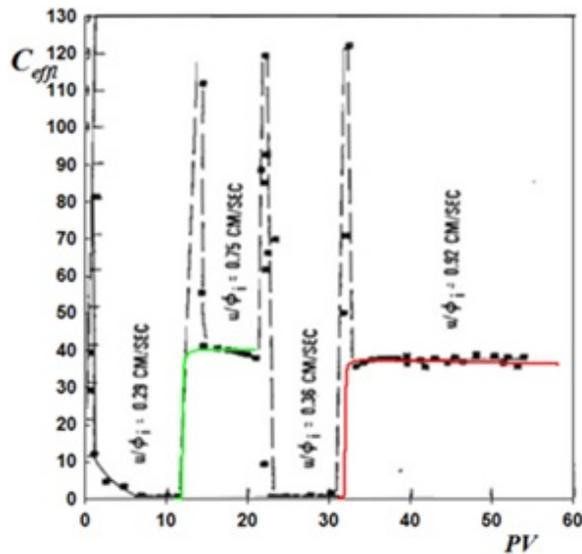


Рисунок 3.20: Концентрация взвешенных частиц на выходе из пористого образца ( $\cdot 10^6$ ) в зависимости от прокачанных поровых объемов. Черные кривые – эксперимент [2], зеленая сплошная кривая – численные расчеты, проведенные для нахождения свободных параметров модели; красная сплошная кривая – численные расчеты, проведенные с найденными ранее значениями свободных параметров.

### 3.4 Эксперименты по образованию внешней глинистой корки

Для тестирования численной схемы роста внешней корки, были проведены расчеты с параметрами эксперимента [108]: начальная проницаемость внешней корки  $k_{mc0} = 0.003$  мД и пористость  $\phi_{mc0} = 0.59$ , показатели степеней  $\nu = 0.63$  и  $\delta = 0.063$  в формулах (2.85), проницаемость породы  $k_c = 0.1$  мД, вязкость жидкости  $\mu_c = 10^{-3}$  Па·с, длина образца  $L = r_0 - r_w = 6.35 \cdot 10^{-3}$  м, начальная концентрация частиц  $C = 0.231$ , перепад давления вдоль всего образца  $\Delta p = 2.07 \cdot 10^6$  Па ( $t < 30$  мин),  $\Delta p = 6.9 \cdot 10^6$  Па ( $30 < t < 60$  мин).

В следствие особенностей экспериментальной реализации процесса изменения давления, при численных расчетах нельзя считать перепад давления постоянным. Была проведена серия расчетов с различными значениями перепада давления (мало отличающимися от начальных). Наиболее близкие к экспериментальным данным результаты представлены на Рисунке 3.21. Достаточное совпадение с экспериментальными данными подтверждает предсказательную способность построенной модели образования внешней корки.

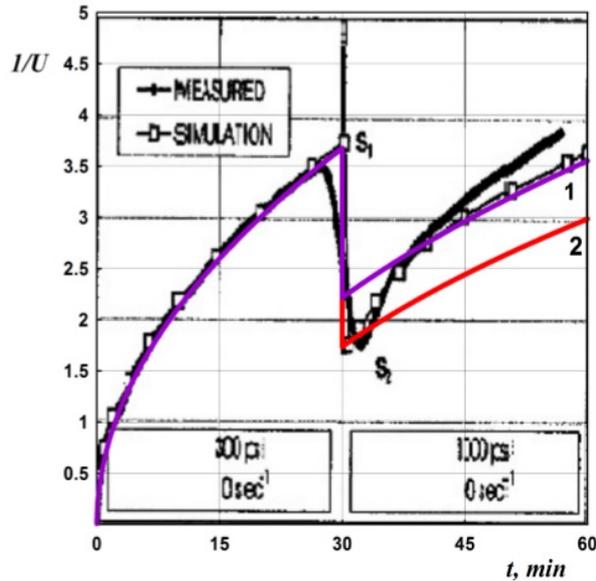


Рисунок 3.21: Зависимость обратной скорости ( $1/U$ ) от времени: 1 - численное решение при  $\Delta p = 1.24 \cdot 10^6$  Па ( $t < 30$  мин) и  $\Delta p = 4.82 \cdot 10^6$  Па ( $30 < t < 60$  мин); 2 - численное решение при  $\Delta p = 1.24 \cdot 10^6$  Па ( $t < 30$  мин) и  $\Delta p = 9.3 \cdot 10^6$  Па ( $30 < t < 60$  мин).

### 3.5 Лабораторные данные по фильтрации жидкости Гершеля-Балкли

В работе [113] были проведены эксперименты по фильтрации жидкости Гершеля-Балкли в цилиндрическом пористом образце. Использовались разные жидкости (растворы нефти с разным процентным соотношением воска), фильтрация проводилась при разных температурах в двух типах образцов (параметры экспериментов представлены в Таблице 3.11).

На входе в пористый образец устанавливалось фиксированное давление. После 12 часов фильтрации наблюдалось установление скорости. Установившиеся значения скорости были определены для разных перепадов давления и представлены на графиках.

Коэффициент  $k/\mu_{eff}$  в формуле (2.31) и значение предельного градиента давления  $\alpha\tau_0$  были подобраны авторами статьи [113] (см. Таблицу 3.11). Эти значения можно использовать для расчета скорости фильтрации аналитически при помощи уравнения:

$$u = - \left[ \frac{k}{\mu_{eff}} \left( \frac{P_0 - P_L}{L} - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \alpha\tau_0 \right) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (3.16)$$

Параметры	Значения
Температура жидкости	$10^{\circ}C$
Показатель степени $n$	0.93
Проницаемость $k$	$0.6 \cdot 10^{-6} cm^2$
Эффективная вязкость $\mu_{eff}$	$3.917 \text{ Па} \cdot c^n \cdot m^{1-n}$
Перепад давления вдоль образца $P_0 - P_L$	1.68 – 300 кПа
Длина образца $L$	0.91 м
Предельный градиент $\tau_0$	0.0233 Па
$\alpha\tau_0$	1.846 кПа/м
$(P_0 - P_L)/L$	1.846 – 330 кПа/м

Таблица 3.11: Параметры экспериментов [113] (для нефти с содержанием воска в 2.5%).

Число узлов расчетной сетки $N$	$Q \cdot 10^4$ , мл/с
10	9.105
$10^2$	13.68
$10^3$	13.2
$2 \cdot 10^3$	13.18
$5 \cdot 10^3$	13.167
Аналитическое решение	13.158

Таблица 3.12: Результаты численного расчета объемной скорости фильтрации  $Q$  при изменении количества узлов расчетной сетки  $N$ ; аналитическое значение, полученное при помощи (3.16) (параметры моделирования представлены в Таблице 3.11, [113],  $\Delta p = 10$  кПа)

Где  $P_0$  и  $P_L$  – известные давления на входе и выходе из образца,  $L$  – длина образца.

В Таблицах 3.12 и 3.13 представлены результаты численных расчетов с использованием параметров из Таблицы 3.11. Получена численная сходимость расчетов объемной скорости фильтрации  $Q$  к аналитическому решению (3.16). Также на Рисунке 3.22 продемонстрировано совпадение между численными расчетами и экспериментальными измерениями зависимости объёмной скорости фильтрации от перепада давления вдоль образца.

### 3.6 Выводы

В данной главе было проведено сравнение с экспериментами по определению критической скорости мобилизации частиц, с экспериментами по кольматации, самокольматации и мобилизации частиц.

В экспериментах по кольматации было проведено сравнение новой модели фильтрации (2.1), (2.5)-(2.9), (2.13)-(2.15), учитывающей конечную концентрацию осажденных частиц и возможность фильтрации жидкости между этими

Число узлов расчетной сетки $N$	$Q \cdot 10^2$ , мл/с
10	6.253
$10^2$	6.179
$10^3$	6.177
$2 \cdot 10^3$	6.1769
$5 \cdot 10^3$	6.1768
Аналитическое решение	6.1768

Таблица 3.13: Результаты численного расчета объемной скорости фильтрации  $Q$  при изменении количества узлов расчетной сетки  $N$ ; аналитическое значение, полученное при помощи (3.16) (параметры моделирования представлены в Таблице 3.11,  $\Delta p = 300$  кПа)

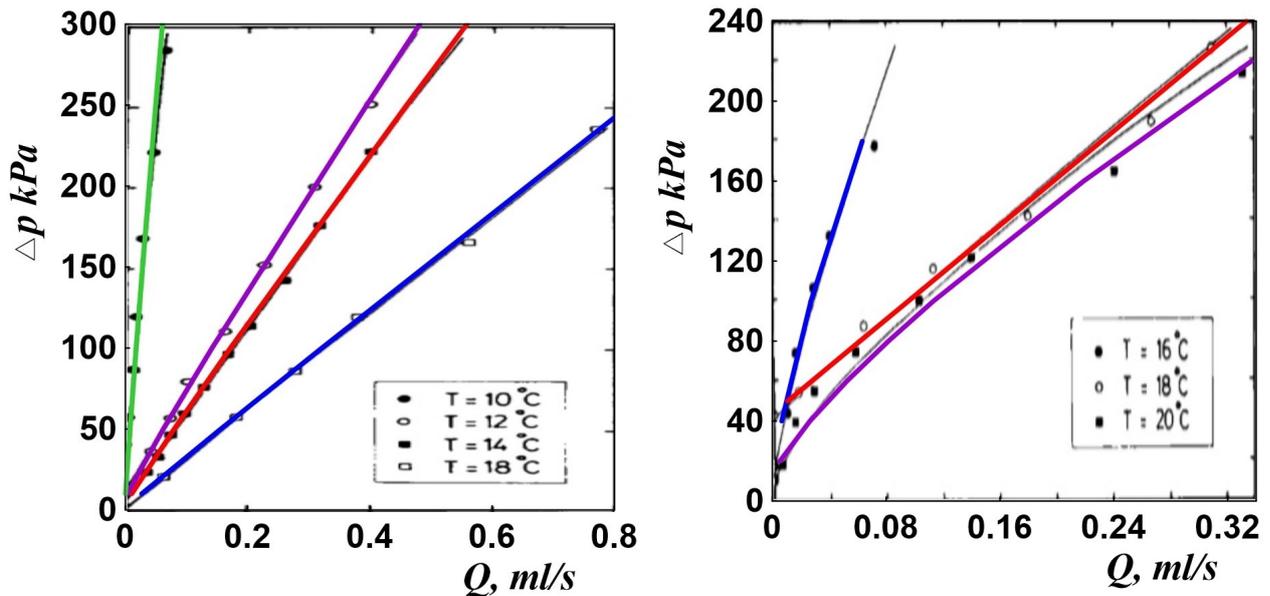


Рисунок 3.22: Зависимость перепада давления  $\Delta p$ , КПа вдоль пористого образца от объёмной скорости фильтрации  $Q$ , мл/с. а – 2.5% раствор парафина, б – 5% раствор парафина в нефти. Параметры экспериментов приведены в Таблице 3.11. Круги и квадраты – экспериментальные измерения, черные сплошные кривые – аналитическое решение, цветные кривые – результаты численного моделирования (разные цвета соответствуют разным температурам).

частицами и классической модели (1.1)-(1.4), не учитывающей фильтрацию между осажденными частицами.

Получено, что при использовании классической формулы для интенсивности коагуляции частиц (1.5) различие между этими двумя моделями велико, когда концентрация осажденных частиц близка к максимально возможной, потому что различие между двумя моделями значительное, когда велика доля осевшего коагулянта. Наилучшее совпадение с экспериментальными данными было достигнуто при использовании выражения, описывающего интенсивность коагуляции, включающего два свободных параметра.

В экспериментах, в которых осаждение под действием физико-химических

сил искусственно минимизировано, лучше всего подходит формула для интенсивности кольтматации (3.1). Только она может описать монотонный профиль осажденных частиц и возрастающую со временем концентрацию взвешенных частиц на выходе. Кроме того, для экспериментов [14] были получены формулы для свободных параметров в формуле (3.1).

Для описания экспериментов, в которых возможно и застревание, и осаждение частиц, подходит формула (3.4). Она содержит один свободный параметр, выражение для которого было получено для экспериментов [13]. Формула хорошо описывает и профиль осажденных частиц, и концентрацию частиц на выходе из образца.

В случае, когда имеются данные о концентрации взвешенных частиц на выходе из образца, можно использовать аналитическую формулу (3.6). Данная формула хорошо описывает концентрацию частиц на выходе из образца, но не описывает профиль осажденных частиц (только суммарный объем).

Формула для критической скорости мобилизации (2.79), полученная в главе 2, была использована для описания мобилизации частиц в прямоугольных каналах. При малых числах Рейнольдса по сдвигу получено хорошее соответствие между формулой и экспериментальными данными. При больших числах Рейнольдса совпадение хуже, но приемлемо. При сравнении с критической скоростью мобилизации в пористой среде хорошее совпадение между формулой и экспериментальным значением наблюдалось только при фильтрации воды, поскольку в данном случае использовалась экспериментальная формула для силы адгезии в воде. Однако при фильтрации жидкости более высокой вязкости получено совпадение порядков величин аналитической и экспериментальной скорости фильтрации.

Было проведено сравнение с экспериментами по мобилизации в пористой среде, в которых измерялась концентрация взвешенных частиц на выходе из образца. Для экспериментов [2] оказалось, что экспериментальные значения концентрации можно корректно описать, только учитывая и кольтматацию, и мобилизацию. Причем значения свободных параметров кольтматации и мобилизации, полученные для одной скорости фильтрации, точно смоделировали концентрацию взвешенных частиц на выходе при другой скорости фильтрации.

Также было проведено моделирование процесса самокольтматации - процес-

са, когда частицы самой пористой среды могут вымываться в поток и повторно застревать в поровых каналах. Было введено два континуума осажденных частиц, кольматация и мобилизация описывались формулами (1.5) и (1.21). В экспериментах проводились измерения только проницаемости, поэтому об эффективности моделирования можно судить только по этому параметру. Свободные параметры модели были подобраны для каждого из экспериментов.

## Глава 4

### Двухфазная фильтрация суспензии\*

#### 4.1 Система уравнений

Рассматривается изотермическая фильтрация сжимаемых ньютоновских жидкостей, содержащих твердые частицы, в пористой среде. Течение описывается в рамках модели взаимопроникающих континуумов, каждая из суспензий представляется в виде несущей фазы (жидкости) и дисперсной фазы (континуума взвешенных твердых частиц).

В модели используется предположение, что объемная концентрация (в относительном объеме, занятом одной из фаз) взвешенных частиц  $C_i$  пропорциональна насыщенности суспензии  $s_i$ , то есть  $C_i = C s_i$ . Соответственно, в уравнениях переноса фигурирует только одна переменная  $C$  (суммарная концентрация взвешенных частиц в двух фазах), отвечающая за фазу взвешенных частиц.

Сжимаемость жидкостей учитывается путем введения зависимости между давлением и плотностью жидкости. В случае слабосжимаемых жидкостей можно использовать соотношение:

$$\rho_i = \rho_{i,0} (B_i(p_i - p_{i,0}) + 1) \quad (4.1)$$

Где  $B_i$  - коэффициент сжимаемости,  $\rho_i$  - плотность жидкости,  $\rho_{i,0}$  - начальная плотность жидкости,  $p_i$  - давление жидкости,  $p_{i,0}$  - давление, соответствующее плотности  $\rho_{i,0}$ .

Аналогично уравнениям неразрывности в случае однофазной фильтрации (2.10)-(2.12) уравнения двухфазной фильтрации сжимаемых жидкостей имеют

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [22].

вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_i s_i (\phi_t - C\phi_c)] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho_i u_i^f] = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.2)$$

Здесь  $u_i^f$  - скорость фильтрации жидкости. Уравнения неразрывности для взвешенных частиц:

$$\frac{\partial}{\partial t}[s_i C\phi_c] + \frac{\partial}{\partial x}[u_i^p] = q_{i,m} - q_{i,c}, \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

Здесь  $u_i^p$  - скорость фильтрации частиц,  $q_{i,m}$ ,  $q_{i,c}$  - интенсивности мобилизации и коагуляции частиц. Уравнение неразрывности для осажденных частиц имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sum_i (q_{i,c} - q_{i,m}), \quad (4.4)$$

Где  $\sigma$  - концентрация осажденных частиц.

Аналогично однофазной модели, скорость фильтрации суспензии  $u_i$  состоит из двух слагаемых: скорость фильтрации в крупных каналах  $u_i^l$  и скорость фильтрации в мелких каналах  $u_i^s$  (между осажденными частицами):

$$u_i = u_i^l + u_i^s \quad (4.5)$$

$$u_i^l = -\frac{k(\sigma)k_i(s_i)}{\mu_i(C)} \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad (4.6)$$

$$u_i^s = -\frac{k_s(\sigma)k_i(s_i)}{\mu_{i,0}(C)} \frac{\partial p_i}{\partial x} \quad (4.7)$$

$$u_i^p = C u_i^l, \quad u_i^f = (1 - C) u_i, \quad (4.8)$$

Здесь  $k_i$  - относительная фазовая проницаемость,  $k_s$  - проницаемость упаковки осажденных частиц:

$$k = k_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\phi_0 C_{max}}\right)^3, \quad k_s = k_{s0} \left(\frac{\sigma}{\phi_0 C_{max}}\right), \quad k_{s0} = \frac{(1 - C_{max})^3 d_p^2}{180 C_{max}^2} \quad (4.9)$$

Где  $d_p$  - диаметр осажденных частиц. Будем использовать следующую зависимость между относительной фазовой проницаемостью и насыщенностью

фазы ([114]):

$$k_1 = k_1^0 S_1^{m_1}, \quad k_2 = k_2^0 S_2^{m_2} \quad (4.10)$$

$$S_i = \frac{s_i - s_{i,ir}}{1 - s_{1,ir} - s_{2,ir}} \quad (4.11)$$

Здесь  $k_i^0$  - коэффициент относительной фазовой проницаемости,  $s_{i,ir}$  - неснижаемая насыщенность фазы. Зависимость пористости от концентрации осажденных частиц:

$$\phi_t = \phi_0 - \sigma, \quad \phi_c = \phi_0 - \frac{\sigma}{C_{max}} \quad (4.12)$$

Зависимость вязкости суспензии  $\mu_i$  от концентрации взвешенных частиц:

$$\mu_i = \mu_{i,0} \left( 1 - \frac{C s_i}{C_{max}} \right)^{-1.89} \quad (4.13)$$

Где  $\mu_{i,0}$  - вязкость жидкости без частиц.

В общем случае существует рассогласование между давлениями в двух фазах:

$$p_1 - p_2 = P_c(s_i) \quad (4.14)$$

Где  $P_c$  - капиллярное давление.

Начальные и граничные условия модели:

$$C(x, t = t_0) = 0, \quad \sigma(x, t = t_0) = \sigma_0, \quad s_i(x, t = t_0) = s_{i,0} \quad (4.15)$$

$$p(x = x_0, t) = P_w \text{ или } u_i(x = x_0, t) = u_{i,0} \text{ и } p(L, t) = P_r \quad (4.16)$$

Здесь  $x_0$  и  $L$  - начальная и конечная координата по  $x$ . Для замыкания модели также необходимо выбрать выражения для интенсивности мобилизации и кольматации.

## 4.2 Численный алгоритм

Сложим уравнения неразрывности (4.2)-(4.4) (предварительно разделив уравнения (4.2) на плотности  $\rho_i$ ). Для простоты примем  $k_s = 0$ , то есть будем учитывать объем мелких каналов между осажденными частицами, но будет счи-

тать, что жидкость в них неподвижна. Давление  $p_2$  выразим через давление  $p_1$ :  $p_2 = p_1 - P_c = p - P_c$ . Получим уравнение на давление  $p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} \left[ (\phi_t - C\phi_c) \left( \frac{s_1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial p} + \frac{s_2}{\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial p} \right) \right] - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_1 K_1 (1 - C) \right] \frac{\partial p}{\partial x} - \\ \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_2 K_2 (1 - C) \right] \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_1 C \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_2 C \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \\ = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_2 K_2 (1 - C) \right] \frac{\partial P_c}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_1 C \frac{\partial P_c}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_2 C \frac{\partial P_c}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь  $K_i = (kk_i)/\mu_i$ .

Введем переменную  $f$  следующим образом:

$$f_i = \rho_i K_i \alpha_j \frac{\partial p}{\partial x}, \alpha_1 = C, \alpha_2 = 1 - C \quad (4.18)$$

Где  $j = 1$  для взвешенных частиц,  $j = 2$  - для жидкостей. Здесь индекс  $i$  относится к фазам. Далее построим численную схему для задачи двухфазной фильтрации и индекс  $k$  будем использовать для обозначения шага по пространству. Аппроксимируем функцию  $f$  следующим образом:

$$f_{k+1/2} = \rho_{i,k+1/2} K_{i,k+1/2} \alpha_{k+1/2} \frac{p_{k+1} - p_k}{\Delta x_k} = X_{i,k+1/2} \frac{p_{k+1} - p_k}{\Delta x_k} \quad (4.19)$$

$$\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k} = \frac{f_{k+1/2} - f_{k-1/2}}{\Delta x_k} = p_{k+1} \left[ \frac{X_{k+1/2}}{\Delta x_k} \right] - p_k \left[ \frac{X_{k+1/2}}{\Delta x_k} + \frac{X_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1}} \right] + p_{k-1} \left[ \frac{X_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1}} \right] \quad (4.20)$$

Здесь и далее используем замену переменных для упрощения:

$$X_{k+1/2} = \rho_{i,k+1/2} K_{i,k+1/2} (1 - C_i) \quad (4.21)$$

$$T_k = \left[ (\phi_t - C\phi_c) \left( \frac{s_1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial p} + \frac{s_2}{\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial p} \right) \right]_k \quad (4.22)$$

Тогда численная схема для аппроксимации уравнения (4.17) принимает вид (также приведем подобные слагаемые для давления в узлах  $(k-1)$ ,  $k$  и  $(k+1)$  и сделаем замену переменных, индекс  $n-1$  используем для обозначения предыдущего шага по времени, если шаг по времени текущий ( $n$ ), индекс по времени

для простоты записи опускаем):

$$-p_{k-1}A_k + p_k \left( \frac{T_k}{\Delta t_k} + A_k + B_k \right) - p_{k+1}B_k = p_k^{n-1} \frac{T_k}{\Delta t_k} - P_{c,k+1}D_k - P_{c,k}E_k \quad (4.23)$$

Где

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\rho_{1,k}} \left[ \frac{X_{k+1/2}}{\Delta x_k} \right] + \frac{1}{\rho_{2,k}} \left[ \frac{Y_{k+1/2}}{\Delta x_k} \right] + \left[ \frac{(K_1C)_{k+1/2}}{\Delta x_k} \right] + \left[ \frac{(K_2C)_{k+1/2}}{\Delta x_k} \right] \\ A_k &= \frac{1}{\rho_{1,k}} \left[ \frac{X_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1}} \right] + \frac{1}{\rho_{2,k}} \left[ \frac{Y_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1}} \right] + \left[ \frac{(K_1C)_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1}} \right] + \left[ \frac{(K_2C)_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1}} \right] \\ D &= \frac{1}{\rho_{2,k}} \left[ \frac{Y_{k+1/2}}{\Delta x_k} \right] + \left[ \frac{(K_1C)_{k+1/2}}{\Delta x_k} \right] + \left[ \frac{(K_2C)_{k+1/2}}{\Delta x_k} \right] \\ E_k &= \frac{1}{\rho_{2,k}} \left[ \frac{Y_{k+1/2}}{\Delta x_k} + \frac{Y_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1}} \right] + \left[ \frac{(K_1C)_{k+1/2}}{\Delta x_k} + \frac{(K_1C)_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1}} \right] + \\ &\quad + \left[ \frac{(K_2C)_{k+1/2}}{\Delta x_k} + \frac{(K_2C)_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1}} \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Уравнение на давление (4.23) может быть решено методом прогонки аналогично уравнению на давление в случае однофазной фильтрации.

Уравнения для скоростей фильтрации (4.6) и (4.7) аппроксимируются с первым порядком точности:

$$u_{i,k+1/2} = - \frac{k_{k+1}(\sigma)k_{i,k+1}(s_i) p_{i,k+1} - p_{i,k}}{\mu_{i,k+1}(C) \Delta x_k} \quad (4.25)$$

Насыщенности вычисляются с помощью аппроксимации уравнений (4.2):

$$\begin{aligned} s_{i,k}^{n+1} &= \frac{1}{\rho_{i,k}^{n+1} s_{i,k}^{n+1} (\phi_{t,k} - C_k \phi_{c,k})^{n+1}} \left[ \rho_{i,k}^n s_{i,k}^n (\phi_{t,k} - C_k \phi_{c,k})^n - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta t^{n-1}}{\Delta x_{k-1}} \left( \rho_{i,k}^n u_{i,k}^{f,n} - \rho_{i,k-1}^n u_{i,k-1}^{f,n} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для вычисления концентрации взвешенных частиц сложим уравнения (4.3) и

аппроксимируем с первым порядком точности:

$$C_k^{n+1} = \frac{1}{\phi_{c,k}^{n+1}} \left[ C_k^n \phi_{c,k}^n - \frac{\Delta t^{n-1}}{\Delta x_{k-1}} \left( u_{1,k}^{p,n} + u_{2,k}^{p,n} - u_{1,k-1}^{p,n} + u_{2,k-1}^{p,n} \right) + \right. \\ \left. 2\Delta t^{n-1} \left( q_{1,m,k}^n + q_{2,m,k}^n - q_{1,c,k}^n - q_{2,c,k}^n \right) \right] \quad (4.27)$$

В случае, когда интенсивность коагуляции определяется формулой (1.5), используем другую схему:

$$C_k^{n+1} = \frac{1}{\phi_{c,k}^{n+1} + \Delta t u_1 \lambda_1 + \Delta t u_2 \lambda_2} \left[ C_k^n \phi_{c,k}^n - \right. \\ \left. - \frac{\Delta t^{n-1}}{\Delta x_{k-1}} \left( u_{1,k}^{p,n} + u_{2,k}^{p,n} - u_{1,k-1}^{p,n} + u_{2,k-1}^{p,n} \right) 2\Delta t^{n-1} \left( q_{1,m,k}^n + q_{2,m,k}^n \right) \right] \quad (4.28)$$

Концентрация осажденных частиц, используя уравнение (4.4):

$$\sigma_k^{n+1} = \sigma_k^n - 2\Delta t^{n-1} \left( q_{1,m,k}^n + q_{2,m,k}^n - q_{1,c,k}^n q_{2,c,k}^n \right) \quad (4.29)$$

Или если используем выражение (1.5):

$$\sigma_k^{n+1} = \sigma_k^n - 2\Delta t^{n-1} \left( q_{1,m,k}^n + q_{2,m,k}^n - q_{1,c,k}^{n+1} q_{2,c,k}^{n+1} \right) \quad (4.30)$$

Шаг по времени находится из условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви:

$$\Delta t = \min \left( \frac{\phi_c \Delta x}{u_1 + u_2} \right) \quad (4.31)$$

Сформулируем полный численный алгоритм решения системы (4.1)-(4.16):

1. Задание начальных и граничных условий для всех переменных;
2. Нахождение профиля давления  $p$  из уравнения (4.23) и давления  $p_2$  из уравнения (4.14);
3. Обновление значений плотностей  $\rho_i$ ;
4. Вычисление скоростей фильтрации  $u_i$  при помощи уравнений (4.25) и скоростей жидкости  $u_i^f$  и частиц  $u_i^p$  из соотношений (4.8);
5. Вычисление нового шага по времени при помощи (4.31);

6. Повторение шагов 2)-5), пока относительная ошибка по давлению (между значением давлений на текущей и предыдущей итерации) не станет меньше некоторого заданного  $\varepsilon$ ;
7. Обновление значений интенсивности мобилизации  $q_{i,m}$  и кольтматации  $q_{i,c}$ ;
8. Нахождение концентрации осажденных частиц  $\sigma$  при помощи (4.29);
9. Вычисление насыщенностей фаз  $s_i$  при помощи (4.26);
10. Обновление значений проницаемости пласта  $k$ , относительных фазовых проницаемостей  $k_i$  и вязкостей суспензий  $\mu_i$  при помощи (4.9) и (4.13);
11. Повтор шагов 2) - 10), пока время не достигнет значения  $t_{max}$ .

Описанный выше численный алгоритм реализован на языке программирования С.

### 4.3 Аналитическое решение

Рассмотрим задачу о фильтрации двух жидкостей без частиц [115]. Пусть пористость породы постоянна ( $\phi_t = \phi_c = \phi_0$ ). Тогда уравнения неразрывности можно записать в виде:

$$\phi_0 \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \phi_0 \frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (4.32)$$

Сложением уравнений неразрывности получим:

$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 = w(t). \quad (4.33)$$

Здесь  $w(t)$  - первый интеграл, далее для простоты будем считать его константой.

Используя соотношения (4.10) , (4.11) и (4.6), получим:

$$\frac{u_1}{w} = \frac{k_1(s)}{k_1(s) + k_2(s)\eta} = f(s), \quad \eta = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4.34)$$

Здесь  $f(s)$  - функция Баклея-Левретта. Выразим скорости фильтраций фаз

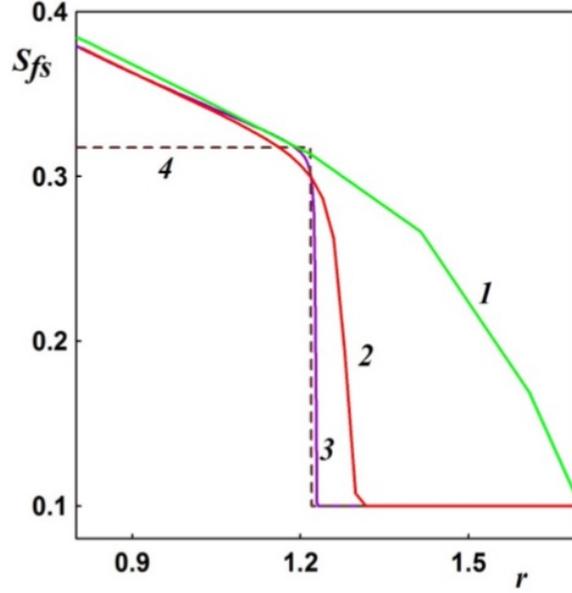


Рисунок 4.1: Профиль насыщенности  $s_1$  при  $s_{1,ir} = 0.1, L = 2, t = 0.1, s_1(x = x_0) = 0.9$ . Кривые 1-3 соответствуют расчетам на сетках с  $N = 10, 10^2$  и  $10^3$  узлов соответственно, кривая 4 - решение Баклея-Левретта.

через эту функцию:

$$u_1 = f(s)w, \quad u_2 = w(1 - f(s)). \quad (4.35)$$

Подставим полученное выражение для  $u_1$  в первое уравнение (4.32), используем соотношение (4.11) ( $s_1$  обозначим за  $s$ ) и правило производной сложной функции. Получим уравнение относительно  $s$ :

$$\phi_0(1 - s_{1,ir} - s_{2,ir}) \frac{\partial s}{\partial t} + w f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (4.36)$$

Используя метод характеристик, получим:

$$x = \frac{w}{\phi_0(1 - s_{wi} - s_{or})} f'(s)t + r_0. \quad (4.37)$$

Далее найдем значение  $f'(s)$ , используя соотношения (4.10) и (4.34):

$$f'(s) = \frac{2s\eta(1-s)}{(s^2 + \eta(1-s)^2)^2}. \quad (4.38)$$

Из условия сохранения массы на скачке насыщенности, имеем соотношение

для скорости распространения фронта насыщенности  $s_c$ :

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{w}{\phi_0(1 - s_{wi} - s_{or})} \frac{f(s_c) - f(s_0)}{s_c - s_0}. \quad (4.39)$$

Из уравнения (4.37) при независимом от времени значении  $s_c$  получим:

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{w}{\phi_0(1 - s_{1,ir} - s_{2,ir})} f'(s_c). \quad (4.40)$$

Приравнивая выражения (4.39) и (4.40), получим:

$$f'(s) = \frac{f(s_c) - f(s_0)}{s_c - s_0}. \quad (4.41)$$

Считаем, что вытеснение происходит в пористой среде, в которой  $s_1 = s_{1,ir}$ ,  $s_0 = 0$ . Тогда, приравнивая соотношения (4.38) и (4.40), получаем уравнение для нахождения значения величины  $s_c$ :

$$s_c = \sqrt{\frac{\eta}{\eta + 1}}. \quad (4.42)$$

На Рисунке 4.1 представлено сравнение численного решения в окрестности фронта вытеснения для насыщенности фазы 1 на различных сетках и решение Баклея-Левретта для значения насыщенности на скачке. Получена сеточная сходимость численного решения к решению Баклея-Левретта.

#### 4.4 Выводы

В данной главе была построена двухфазная трехконтинуальная модель фильтрации суспензии. Учитывались перенос, осаждение и вымывание твердых частиц в потоке жидкости. Построен численный алгоритм, который был реализован на языке программирования С.

Численные результаты были проверены на аналитическом решении для двухфазной фильтрации жидкостей без твердых частиц. Получена численная сходимость расчетов к значения насыщенности на скачке.



суспензия закачивается в пласт, предполагается, что закачиваемые взвешенные частицы могут только осаждаться внутри пористой среды или застревать в поровых горлышках. На втором этапе моделирования резервуарная жидкость (нефть) начинает вытеснять закаченную в пласт воду, направление течения меняется от пласта к скважине за счет смены давления в скважине. Предполагаем, что предварительно осевшие частицы могут быть вымыты (мобилизованы) обратно в поток только закачиваемой жидкостью (водой), кольматация отсутствует.

## 5.2 Анализ эффективности очистки прискважинной области

Для описания динамики прискважинной области будем использовать два параметра: скин-фактор  $S$  и приемистость  $I$ :

$$S = \left( \frac{k_0}{k_{av}} - 1 \right) \ln \left( \frac{r_f}{r_w} \right), \quad I = \frac{U(x = r_w, t)}{U(x = r_w, t = 0)}$$

Здесь  $k_{av}$  - средняя проницаемость прискважинной зоны (среднее арифметическое),  $r_f$  - радиус поврежденной породы (области со сниженной проницаемостью за счет кольматации, или радиус области, куда проникли частицы),  $r_w$  - радиус скважины,  $U$  - скорость жидкости в скважине.

Скорость кольматации частиц описывается соотношениями (3.4) и (3.5), откалиброванными на экспериментальных данных [13]. Параметры частиц (а именно, концентрация частиц  $C_0$  и отношение диаметров частиц к зернам  $d_p/d_g$ ) находятся в диапазоне значений параметров, при которых проводились эксперименты [13], а параметры течения и породы (проницаемость породы  $k_0$ , пористость  $\phi_0$ , перепад давления  $\Delta p$ ) типичны для полевых условий (см. Таблицу 5.1).

Моделирование заводнения было проведено при фиксированном значении  $d_p/d_g = 0.05$  для трех различных значений объемной концентрации частиц на входе ( $10^{-6}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$ ). Результаты представлены на Рисунке 5.2. Наименьшее время полной закупорки (время, за которое проницаемость породы снижается практически до нуля), достигается, когда концентрация частиц является наибольшей ( $C_0 = 10^{-4}$ ) и коэффициент кольматации  $\kappa = 0.014$  является наименьшим. Наибольшее время закупорки достигается в случае наименьшей концен-

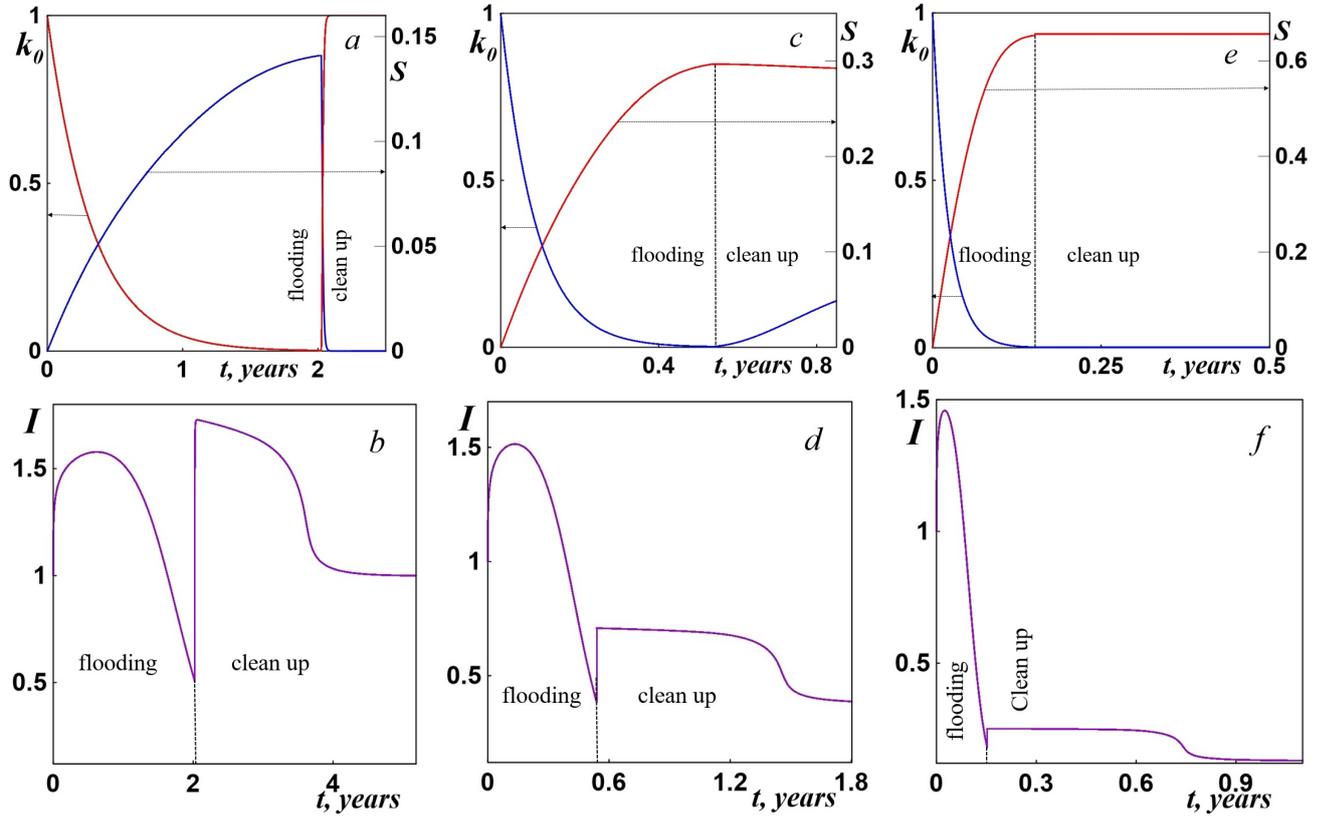


Рисунок 5.2: Проницаемость входной зоны  $k_0$  (левая ось) и скин-фактор  $S$  (правая ось) - графики (a, c, e); графики (b, d, f) - изменение приемистости  $I$  со временем. Входные параметры для моделирования приведены в Таблице 5.1.  $C_0 = 10^{-6}$ ,  $L = 750$  м,  $\kappa = 0.102$ , время заводнения  $t_f = 2.02$  года, время очистки  $t_c = 1.35$  месяцев (a, b);  $C_0 = 10^{-5}$ ,  $L = 400$  м,  $\kappa = 0.038$ ,  $t_f = 6.45$  месяцев,  $t_c = 5.85$  месяцев (c, d);  $C_0 = 10^{-4}$ ,  $L = 170$  м,  $\kappa = 0.014$ ,  $t_f = 1.82$  месяцев (e, f).

Параметры	Значения
$k_0$ , мД	10
$d_p/d_g$	0.05
$\Delta p$ , ат	400
$\phi_0$	0.3
$C_0$	$10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}$
$\kappa$ , 1/s	0.102, 0.038, 0.014
$\alpha$	0.1
$U_{crit}$ , мм/с	0.0348

Таблица 5.1: Параметры при моделировании заводнения и очистки на Рисунках 5.2 и 5.3.

трации твердых частиц ( $C_0 = 10^{-6}$ ) и наибольшего значения коэффициента кольтматации  $\kappa = 0.102$ .

Для моделирования процесса очистки мы зафиксировали критическую скорость мобилизации в  $3.48 \cdot 10^{-5}$  (м /с) с целью демонстрации трех различных режимов очистки, а именно: полной, частичной и отсутствия очистки. Также мы зафиксировали значение коэффициента мобилизации  $\alpha = 0.1$ .

В первом случае, показанном на Рисунке 5.2 а, общая проницаемость была наименее повреждена (получено минимальное значение скин-фактора), так как скорость фильтрации во время очистки превышала критическую скорость мобилизации в течение всего периода очистки. Следовательно, проницаемость породы восстанавливается до ее первоначального значения. Во втором режиме очистки, показанном на Рисунке 5.2 с, повреждение проницаемости на этапе заводнения было более выраженным, а скорость фильтрации на этапе очистки была меньше, чем в первом случае. Скорость фильтрации превышает критическую скорость мобилизации только в течение короткого периода времени, так что проницаемость восстанавливается до определенного значения, меньшего по сравнению с его первоначального значения. В третьем случае (Рисунок 5.2 е) повреждение пласта было наиболее серьезным, а скорость мобилизации при очистке всегда была ниже критической скорости мобилизации. Следовательно, частицы не были мобилизованы в поток и проницаемость породы не восстановлена.

На Рисунке 5.2 b, d, f мы построили кривую приемистости для всех трех случаев заводнения/очистки, описанных выше. На начальной стадии заводнения приемистость увеличивается из-за вытеснения нефти менее вязкой водой. На следующем этапе заводнения приемистость уменьшается из-за снижения проницаемости в результате осаждения мелких частиц.

Во время процесса очистки приемистость быстро увеличивается по мере восстановления проницаемости. Затем приемистость начинает уменьшаться, поскольку менее вязкая вода вытесняется более вязкой нефтью. Это немонотонное поведение позволяет нам определить соответствующий временной интервал очистки как условие, при котором приемистость скважины восстанавливается до значений, достигнутых на этапе заводнения. Обращаем внимание, что пик приемистости на этапе очистки в случае полной очистки (Рисунок 5.2 b) выше, чем на этапе заводнения.

В случае полной очистки (Рисунок 5.2 а, b), когда приемистость падает и достигает некоторого постоянного значения, продолжение очистки неэффективно. Приемистость выравнивается, когда вода полностью вытесняется нефтью (Рисунок 5.2 b, d, f).

Также было проведено моделирование заводнения с теми же параметрами,

что и на Рисунке 5.2 а, b, но с разными значениями коэффициента мобилизации  $\alpha = 0.01$  и  $0.001$  (см. Рисунок 5.3). В случае  $\alpha = 0.01$  (Рисунок 5.3 а, b) все частицы были мобилизованы, и проницаемость восстанавливается медленнее из-за меньшей скорости мобилизации частиц, так что время полной очистки примерно в 5 раз больше. В случае меньшего коэффициента мобилизации  $\alpha = 0.001$  проницаемость восстанавливается еще медленнее, так что не все частицы успевают мобилизоваться во время вытеснения воды в породе (Рисунок 5.3 с, d). Пик приемистости на Рисунке 5.3 d намного меньше, чем на Рисунке 5.3 b из-за более медленного роста приемистости.

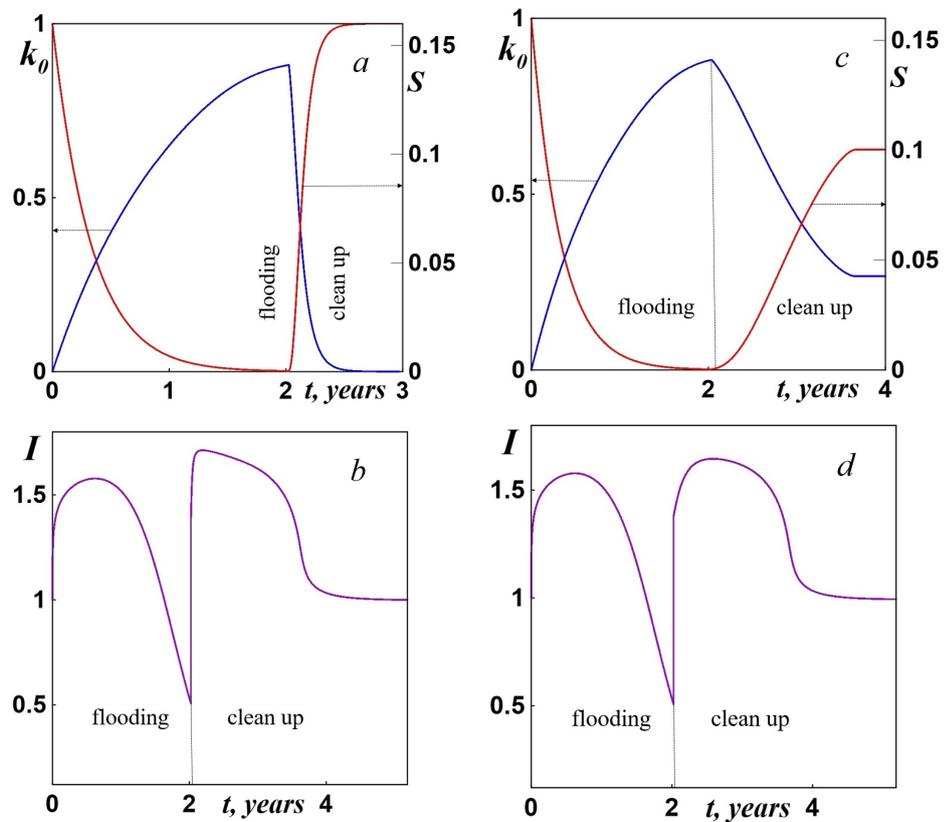


Рисунок 5.3: Проницаемость породы на входной границе  $k_0$  (левая ось) и скин-фактор  $S$  (правая вертикальная ось) (a, c), а также приемистость  $I$  (b, d) во время заводнения/очистки, аналогичного Рис. 5.2 (a, c), но с разными значениями коэффициента мобилизации частиц  $\alpha = 0.01$  (a, b) и  $\alpha = 0.001$  (c, d). Параметры моделирования представлены в таблице 5.1.  $C_0 = 10^{-6}$ ,  $L = 750$  м,  $\kappa = 0.102$ ,  $t_f = 2.02$  года,  $t_c = 7$  месяцев (a, b),  $t_c = 1.64$  года (частичная очистка) (c, d).

### 5.3 ВЫВОДЫ

В данной главе было проведено моделирование течений в пласте около нагнетательной скважины.

Использовались выражения для интенсивностей мобилизации и коагуляции, полученные в главе 3.

Были проанализированы степень повреждения породы из-за осаждения твердых частиц во время заводнения и степень очистки породы в процессе очистки за счет мобилизации ранее осевших частиц. Рассмотрены разные случаи восстановления проницаемости породы: полное, частичное и отсутствие восстановления. При помощи анализа параметра приемистости на первых моментах очистки породы можно предсказать степень очистки породы: если приемистость в начале очистки превышает максимальное значение приемистости при заводнении - полная очистка породы очень вероятна; чем меньше скачок приемистости в начале процесса очистки, тем меньше очистится приквасинная зона.

Кроме того приемистость выходит практически на константу, когда нефть полностью вытесняет воду. Последующее течение может быть эффективно с точки зрения добычи нефти, но не эффективно с точки зрения восстановления проницаемости породы. Если целью является очистка приквасинной зоны, то процесс очистки можно остановить после того, как приемистость перестает значительно меняться.

## Глава 6

### Течения в трещине гидроразрыва и пласте\*

#### 6.1 Введение

Трещина гидроразрыва представляет собой пористую среду (ширина которой много меньше длины) около скважины в пласте. Трещина гидроразрыва заполнена пропантом (часто песком или керамическими частицами), таким образом формируя среду с более высокой проницаемостью, чем окружающий пласт (см. Рисунок 1.6).

При образовании трещины гидроразрывная жидкость закачивается в пласт из скважины под большим давлением, таким образом формируя трещину. В процессе жидкость может утекать в окружающий трещину пласт. Твердые частицы породы, оставшиеся в скважине или вымытые из стенок трещины могут переноситься в потоке жидкости осаждаться и повторно вымываться. Сама гидроразрывная жидкость может содержать нерастворимые соли и другие примеси, которые также могут застревать в порах.

Очистка трещины гидроразрыва - это обратное течение от кончика трещины к скважине и приток нефти, газа и резервуарной воды из пласта в трещину за счет снижения давления в скважине. В обзоре литературы были рассмотрены различные режимы притоков и утечек, мы же будем моделировать билинейный и линейный режим течения в пласте, когда приток или утечки представляют собой линейное течение в пласте перпендикулярно трещине гидроразрыва.

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [17, 20, 26–28].

## 6.2 Вывод уравнений

В данном разделе представим вывод уравнений, описывающих двухфазное течение в системе трещина/пласт - течение гидроразрывной жидкости и нефти. Аналогично может быть получена четырехфазная система уравнений (жидкость ГРП, нефть, газ, пластовая вода).

Считаем, что гидроразрывная жидкость имеет реологию Гершеля-Балкли, резервуарная жидкость (нефть) является ньютоновской.

Для вывода уравнений фильтрации в трещине гидроразрыва необходимо осреднить двумерные уравнения фильтрации:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \mathbf{V} = -K \nabla p, \quad \mathbf{V} = (U, V). \quad (6.1)$$

Где  $\rho$  - плотность фазы,  $\mathbf{V}$  - скорость фильтрации фазы,  $k$  - проницаемость трещины гидроразрыва,  $\mu$  - вязкость жидкости,  $p$  - давление,

$$K = \frac{k}{\mu}, \quad (6.2)$$

если жидкость ньютоновская, и

$$K = \left( \frac{k}{\mu_{eff}} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \nabla p - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \alpha \tau_0 \right)^{\frac{1}{n}-1}, \quad (6.3)$$

если жидкость имеет реологию Гершеля-Балкли (как в уравнении (2.52)).

В трещине гидроразрыва толщина  $w_f$  всегда много меньше длины трещины  $L$ :

$$w_f = w_f(r, t) \ll L, \quad \frac{\partial w_f}{\partial x} \ll 1. \quad (6.4)$$

На стенках трещины гидроразрыва заданы граничные условия на скорость:

$$y = \pm \frac{w_f}{2} : \quad U = 0, \quad V = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial w_f}{\partial t} \mp q_r. \quad (6.5)$$

Здесь  $q_r$  - приток или утечки резервуарной жидкости.

Введем новые функции, осредненные поперек трещины:

$$\langle h(x, t) \rangle = \frac{1}{w_f} \int_{-w_f/2}^{w_f/2} h(x, y, t) dy. \quad (6.6)$$

Осредним уравнения (6.1) по ширине трещины:

$$\frac{1}{w_f(x, t)} \int_{-w_f/2}^{w_f/2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dy + \frac{1}{w_f(x, t)} \int_{-w_f/2}^{w_f/2} \left[ \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} \right] dy = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{w_f(x, t)} \int_{-w_f/2}^{w_f/2} U dy = -\frac{1}{w_f(x, t)} \int_{-w_f/2}^{w_f/2} K \frac{\partial p}{\partial x} dy, \quad (6.8)$$

$$\frac{1}{w_f(x, t)} \int_{-w_f/2}^{w_f/2} V dy = -\frac{1}{w_f(x, t)} \int_{-w_f/2}^{w_f/2} K \frac{\partial p}{\partial y} dy. \quad (6.9)$$

Используем формулу производной интеграла с переменными пределами интегрирования:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(y, t) dy = b' f(b, t) - a' f(a, t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dy. \quad (6.10)$$

Используя (6.9), (6.10) и (6.5), получим осредненные уравнения:

$$\frac{\partial(w_f \langle \rho \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial(w_f \langle \rho U \rangle)}{\partial r} = 2 \langle \rho \rangle q_r, \quad \langle U \rangle = -K \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6.11)$$

Аналогично выводу уравнений двухфазной фильтрации выразим относительные плотности через насыщенности и концентрации, получим осредненные уравнения для течения двух суспензий в трещине гидроразрыва (для удобства

изложения опустим символы осреднения " $\langle \rangle$ "):

$$\frac{\partial [w_f s_2 (\phi_t - C \phi_c)]}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (w_f u_{f,2} r^j)}{\partial r} = 2q_r, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial [w_f s_1 (\phi_t - C \phi_c)]}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (w_f u_{f,1} r^j)}{\partial r} = 0, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial [w_f s_1 \phi_c C]}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (w_f u_{p,1} r^j)}{\partial r} = -w_f q_1, \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial [w_f s_2 \phi_c C]}{\partial t} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial (w_f u_{p,2} r^j)}{\partial r} = -w_f q_2, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial (w_f \sigma)}{\partial t} = w_f (q_1 + q_2). \quad (6.16)$$

Для удобства выпишем еще раз уравнения движения (пренебрегаем наличием "мелких" поровых каналов между осажденными частицами):

$$u_2 = -\frac{k(\sigma) k_2(s_2)}{\mu_2(C)} \frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad (6.17)$$

$$u_1 = -k_1(s_1) \left[ \frac{k}{\mu_{1,eff}} \left( \nabla p_1 - \frac{\nabla p_1}{|\nabla p_1|} \alpha \tau_0 \right) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (6.18)$$

$$\mu_{1,eff} = \frac{H}{4} \left( 3 + \frac{1}{n} \right)^n (8C' k \phi_c)^{\frac{1-n}{2}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\phi_c C'}{2k}} \quad (6.19)$$

Начальные и граничные условия задачи:

$$\begin{aligned} C(x, t = t_0) = 0, \quad \sigma(x, t = t_0) = \sigma_0, \quad s_i(x, t = t_0) = s_{i,0}, \quad p(x, t = t_0) = Pr \\ p(x = x_0, t) = P_w \text{ или } u_i(x = x_0, t) = u_{i,0} \text{ и } u(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Уравнения (6.12)-(6.19) вместе с уравнениями (4.8)-(4.14) и начальными и граничными условиями (6.20) образуют замкнутую систему уравнений (при условии, что заданы выражения для скорости кольматации, мобилизации частиц и скорость утечек или притока из пласта).

### 6.3 Учет геомеханических свойств

При моделировании течений в реальных условиях, например, в трещине гидроразрыва, кроме гидромеханических эффектов необходимо учитывать и геомеханические факторы. В данном разделе будут рассмотрены две модели снижения проводимости трещины при ее очистке из-за влияния геомеханических факторов: 1) вдавливание проппанта в стенки трещины и 2) изменение фильтрационных свойств упаковки проппанта (пористости, проницаемости и раскрытия) при действии сдвигающих напряжений породы (сжатие проппанта). Эти факторы будут внедрены в модель многофазной фильтрации в трещине гидроразрыва, сформулированной выше, и позволят решить полную задачу о снижении проводимости трещины в процессе очистки.

Задача о вдавливании сферической частицы в стенку трещины гидроразрыва была решена в [116]. Предполагается, что зерно проппанта представляет собой упругую сферу, которая вдавливается в упругопластическое полупространство.

Введена переменная  $\Delta p_s$ , которая связана с давлением жидкости в трещине гидроразрыва  $p_f$  и давлением гидроразрыва  $p_h$  (давление, необходимое для поддержания раскрытия трещины ГРП) следующим образом:

$$\Delta p_s = p_h - p_f \quad (6.21)$$

Получено следующее выражение для перепада давления  $\Delta p_s$ :

$$\Delta p_s = \left( \frac{A}{C} [p_h + (c \cot \phi - p_r)] - B \right) / \left( \frac{L^2}{2\pi r^2} + \frac{A}{C} \right) \quad (6.22)$$

$$A = \left[ e^{2\theta_0 \tan \phi} (2 \tan \phi \cos^3 \theta_0 + 3 \cos^2 \theta_0 \sin \theta_0) + \frac{4 \tan^2 \phi + 3}{4 \tan^2 \phi + 1} e^{\tan \phi \pi} - \frac{4 \tan^2 \phi + 3}{4 \tan^2 \phi + 1} e^{2\theta_0 \tan \phi} (2 \tan \phi \cos \theta_0 + \sin \theta_0) \right]$$

$$B = \frac{1}{3} c \cot \phi \sin \phi (1 - \sin^3 \theta_0)$$

$$C = (1 - \sin \phi)(4 \tan^2 \phi + 9).$$

Здесь  $\theta_0$  - угол вдавливания,  $c$  - коэффициент когезии,  $\phi$  - угол внутреннего трения,  $p_r$  - поровое давление.

Выражение 6.22 обеспечивает связь между углом вдавливания  $\theta_0$  и приложенным перепадом давления  $\Delta p_s$ , тогда как выражение для глубины вдавливания в терминах угла  $\theta_0$  имеет следующий вид:

$$\theta_0 = \arcsin \sqrt{1 - \frac{e_0}{r}} \quad (6.23)$$

Здесь  $r$  - радиус сферической частицы,  $e_0$  - глубина вдавливания. Для расчета давления гидроразрыва будем использовать формулу [117]:

$$p_h = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\sigma_{11}^0 + p_r) + p_r. \quad (6.24)$$

Здесь  $\sigma_{11}^0$  - главные тектонические напряжения в пласте.

Таким образом, при помощи уравнения (6.22), используя выражения (6.23)-(6.24), для каждой пары давлений в трещине гидроразрыва и пласте можно получить величину вдавливания частицы в стенку трещины  $e_0$ . Заметим, что частицы могут вдавливаться в обе стенки трещины. Тогда выражение для изменения раскрытия (ширины) трещины имеет следующий вид ( $w_0$  - начальная ширина трещины,  $r_g$  - радиус зерен проппанта):

$$w = w_0 - 2r_g e_0 \quad (6.25)$$

Далее была рассмотрена задача о сжатии проппантной пачки. Получена зависимость между неупругой деформацией проппантной пачки и сдавливающими напряжениями, приложенными к ней в рамках упругопластической модели с внутренним трением и дилатансией:

$$\varepsilon_{33} = \frac{3}{2A} \sqrt[3]{9(1 - \nu^2)^2 \frac{\Delta p_s^2}{E^2}}. \quad (6.26)$$

$$A = \left[ 1 - \frac{2}{3 + 2\alpha\Lambda} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha \right) \right]. \quad (6.27)$$

Здесь параметр  $\alpha$  - коэффициент трения,  $\Lambda$  - коэффициент дилатансии, равный  $-0.378$ .

Также в [116] была решена задача о сжатии проппантой пачки с учетом разрушения проппанта и его перекомпоновки. Для этого был введен параметр поврежденности, учитывающий, что при крошении уменьшается эффективная

площадь поперечного сечения пропантной пачки и изменяется эффективное напряжение. Получены следующие выражения для связи сдвливающих напряжений и деформаций:

$$\Delta p_s = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{2A}{3} \varepsilon_{33} \left[ 1 - \frac{B}{n+1} \varepsilon_{33}^n \right] \right)^{3/2} \quad (6.28)$$

Параметры  $n$  и  $B$  подбираются для каждого вида пропанта. Для керамического пропанта получены значения  $n = 2$ ,  $B = 56$ .

Используя выражение (6.28), нельзя получить явную зависимость  $\varepsilon_{33}(\Delta p_c)$ , поэтому был предложен следующий численный алгоритм: в начале работы программы создаются массивы данных, содержащие некоторое количество значений давления в трещине  $p_f$  и соответствующие им деформации  $\varepsilon_{33}$ , и такие массивы создаются для каждого значения давления в пласте  $p_r$ . В ходе работы программы для конкретных значений давления в трещине и пласте определяется соответствующая им деформация пропантной пачки.

Пористость может быть вычислена следующим образом ( $\phi_0^0$  - начальная пористость):

$$\varphi_0 = \varphi_0^0 - \varepsilon_{33} \quad (6.29)$$

Раскрытие трещины с учетом сжатия и вдавливания (6.25):

$$w = w_0(1 - \varepsilon_{33}) - 2r_g e_0 \quad (6.30)$$

Проницаемость пропантной пачки  $k_0$  может быть выражена через пористость среды  $\phi_0$  и радиус зерен пропанта  $r_g$  согласно [118]:

$$k_0 = 0.204 r_g^2 \phi_0^{4.58} \quad (6.31)$$

Для решения сопряженной гидро- и геомеханической задачи также необходимо определить давление в пласте  $p_r$ . Сделать это можно либо аналитически ([81], [82]), либо моделируя течение в пласте. Оба способа будут подробно рассмотрены в следующем разделе, посвященном притоку из пласта.

Кроме того, иногда может быть доступен так называемый "паспорт пропанта" - таблица, в которой значениям сдвливающих напряжений соответствуют значения раскрытия и проницаемости. Пример такой зависимости для керами-

Сдавливающие напряжения, атм	Раскрытие, мм	Проницаемость, Д
136	5.56	879
272	5.34	646
408	5.06	318
544	4.77	151
680	4.56	72

Таблица 6.1: Паспорт проппанта (зависимость проницаемости и раскрытия от сдавливающих напряжений).

ческого проппанта представлен в Таблице 6.1. При расчетах будем вычислять значения раскрытия и проницаемости при помощи линейной интерполяции.

В численном алгоритме решения сопряженной гидро- и геомеханической задачи необходимо обновить схему для расчета давления. Достаточно добавить в выражении (4.22) производные пористости и раскрытия от давления:

$$T_i = \left[ (\phi_t - C\phi_c) \left( \frac{s_1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial p} + \frac{s_2}{\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial p} \right) + w \frac{\partial \phi_0}{\partial p} + \phi_0 \frac{\partial w}{\partial p} \right]_i \quad (6.32)$$

Относительное влияние геомеханических эффектов будет определено в следующем разделе, посвященном моделированию течений в трещине ГРП.

#### 6.4 Описание притока жидкости из пласта в процессе очистки трещины ГРП

В процессе очистки трещины ГРП давление на одной из её границ (в скважине) снижается, что провоцирует снижение давления вдоль всей трещины. Соответственно в пласте также появляется перепад давления (между начальным давлением в пласте и текущим давлением в трещине) и образуется течение, направленное к трещине.

Рассмотрим билинейный режим течения в системе трещина/пласт или линейный режим течения в пласте (течение в пласте перпендикулярно трещине гидроразрыва).

В начальный момент времени пласт может быть заполнен не только нефтью: в процессе ГРП часть гидроразрывной жидкости может утек в пласт. Таким образом, некоторая область около трещины может быть полностью или частично заполнена гидроразрывной жидкостью, за этой областью пласт занимает только нефть. Также в пласте может находиться газообразный или растворен-

ный газ.

В данной работе было предложено три варианта описания притока из пласта: 1) при помощи аналитической формулы Картера, не учитывающей изменение давления в трещине; 2) при помощи интегральной аналитической формулы, учитывающей изменение давления в трещине; и 3) при помощи прямого численного моделирования многофазного течения в пласте.

### 6.4.1 Приток по формуле Картера

Решение задачи о притоке/утечках в пласт при некоторых упрощениях было предложено в [81], [82]. Рассматривается одномерная модель течения слабосжимаемой жидкости в полубесконечной пористой среде.

Основные предположения данной модели:

1) Движение изотермическое; 2) Плотность, вязкость, пористость, проницаемость - функции давления; 3) Вязкость и плотность меняются слабо; 4) Выполняется закон Дарси.

Система из уравнения неразрывности и закона Дарси сводится в таком случае к уравнению пьезопроводности (или диффузии) давления:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \kappa = \frac{k}{\mu\phi} \left( \frac{1}{K_\phi} + \frac{1}{K_\rho} \right)^{-1} \quad (6.33)$$

Здесь  $\kappa$  - коэффициент пьезопроводности,  $k, \mu, \phi$  - проницаемость, вязкость и пористость среды,  $p$  - давление в пласте,  $K_\phi, K_\rho$  - коэффициенты сжатия,  $x$  - координата вдоль пористой среды.

Сначала была решена задача при постоянном давлении на границе трещина/пласт ( $x = 0$ ):

$$p(x, 0) = P_r, \quad (6.34)$$

$$p(0, t) = P_f, \quad (6.35)$$

$$p(\infty, t) = P_r. \quad (6.36)$$

В начальный момент времени давление  $P_r$  во всем резервуаре однородно.

В стационарном случае (если распределение давления вдоль пласта не ме-

няется со временем) и в пласте конечной длины  $L$  получим:

$$p = \frac{P_r - P_f}{L}x + P_f \quad (6.37)$$

Скорость утечек/притока  $q$  – скорость течения на границе трещина/пласт  $x = 0$ . Тогда:

$$q(0) = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (6.38)$$

$$q(0) = -\frac{k}{\mu} \frac{P_r - P_f}{L} \quad (6.39)$$

Предположение о стационарности давления удовлетворяет только линейному режиму течения в пласте, для билинейного режима это предположение невыполнимо. Поэтому далее было предложено решение для нестационарного распределения давления, но с постоянным давлением  $P_f$  на границе трещина/пласт и давлением  $P_r$  на бесконечности. С помощью преобразования Лапласа получено решение:

$$p - P_r = (P_f - P_r) \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \quad (6.40)$$

$$q(0) = -\frac{k}{\mu} \frac{P_r - P_f}{\sqrt{\kappa t \pi}} \quad (6.41)$$

Данное решение может быть использовано в двух случаях: во-первых, для описания течения в пласте бесконечной длины в любой момент времени; во-вторых, для описания течения в резервуаре конечной длины при очень малых временах ( $\kappa t \ll L^2$ ). Выражение (6.41) носит название формулы Картера.

Для сравнения численных и аналитических результатов для начала рассмотрим задачу о течении только в пласте. Будем использовать модель фильтрации, представленную в разделе 5.2, для моделирования течения в пласте и сравним полученные результаты с аналитическими формулами.

Результаты сравнения численного решения в случае постоянного граничного давления и аналитического решения (6.40) представлены на Рисунке 6.1. Построены профили давления в три различных момента времени. Получено хорошее соответствие между численным моделированием и аналитическими ре-

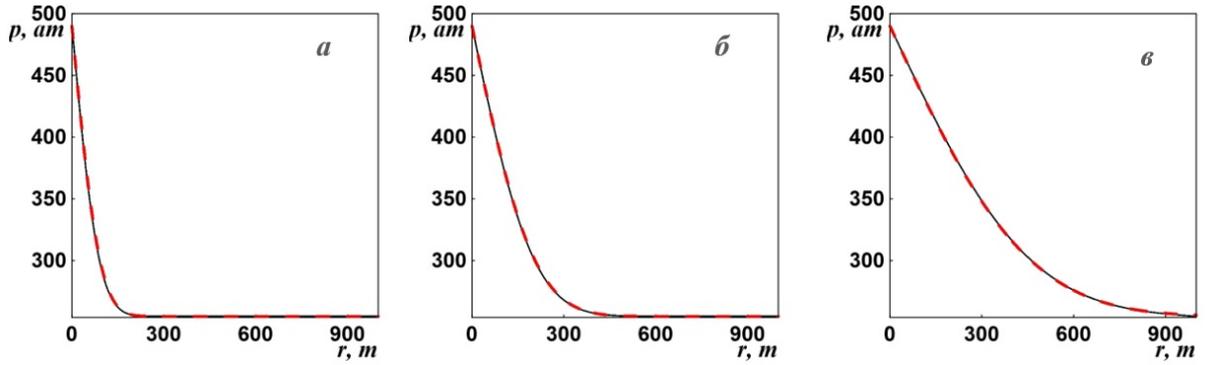


Рисунок 6.1: Профиль давления вдоль пласта. Черная кривая – численное решение, красная пунктирная – аналитическое решение Картера (6.40). Начальное давление в пласте – 254 ат, давление на границе трещина/пласт – 490 ат. Проницаемость - 100 Д, длина расчетной области – 1000м.  $t = 50$  мин (а),  $t = 83$  мин (б),  $t = 7$  ч (в).

зультатами (в предположении  $\kappa t \ll L^2$ ).

### 6.4.2 Интегральный приток из пласта

Снова рассмотрим задачу о течении в полубесконечной пористой среде. В случае переменного давления на границе трещина/пласт ( $P_f = P_f(t)$ ), используя решение (6.40) и интеграл Дюамеля, было получено решение ([81]):

$$p - P_r = \int_0^t \frac{dP_f(t)}{d\tau} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} \right) d\tau \quad (6.42)$$

$$q(0) = -\frac{k}{\mu\sqrt{\kappa\pi}} \int_0^t \frac{dP_f(t)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (6.43)$$

Для дальнейшего удобства вычислений запишем выражение (6.43) в виде:

$$q(0) = -\frac{2k}{\mu\sqrt{\kappa\pi}} \int_0^t \frac{dP_f(t)}{d\tau} d(\sqrt{t-\tau}) \quad (6.44)$$

Для решения полной сопряженной задачи о течении в трещине и пласте необходимо разработать численную схему для описания интегрального притока (6.44).

Для вычисления интеграла в формуле (6.44) будем использовать метод трапеций:

$$\left[ \frac{P_f}{d\tau} \right]_i = \frac{[P_f]_i - [P_f]_{i-1}}{\Delta t} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned}
q_1 &= \sum_{i=1}^{N-1} \left( \left[ \frac{dP_f}{d\tau} \right]_{i-1} + \left[ \frac{dP_f}{d\tau} \right]_i \right) \left( \sqrt{t_N - t_i} - \sqrt{t_N - t_{i-1}} \right) \\
q_2 &= q_1 - \left( \left[ \frac{dP_f}{d\tau} \right]_N + \left[ \frac{dP_f}{d\tau} \right]_{N-1} \right) \sqrt{t_N - t_{N-1}} \\
q &= \frac{kq_2}{\mu\sqrt{\kappa\pi}}
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Аналогично (4.17), сложением уравнений (6.12)-(6.16) получаем уравнение на давление:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t} \left[ (\phi_t - C\phi_c) w \left( \frac{s_1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial p} + \frac{s_2}{\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial p} \right) \right] - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_1 K_1 w (1 - C) \right] \frac{\partial p}{\partial x} - \\
\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_2 K_2 w (1 - C) \right] \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_1 w C \right] \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_2 w C \right] \frac{\partial p}{\partial x} = \\
= 2q \tag{6.47}
\end{aligned}$$

Аналогично выражениям (4.20)-(4.24), используя (6.46), получим следующий численный алгоритм для вычисления давления:

$$-p_{i-1}A + p_i \left( \frac{T_i}{\Delta t} + A + B \right) - p_{i+1}B = p_i^{n-1} \frac{T_i}{\Delta t} + 2q_i \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}
-p_{i-1}A + p_i \left( \frac{T_i}{\Delta t} + A + B \right) - p_{i+1}B = p_i^{n-1} \frac{T_i}{\Delta t} + \\
+ \frac{2k_{r,i}}{\mu_{r,i}\sqrt{\kappa_{r,i}\pi}} \left[ q_1 - \left( \left[ \frac{dP_f}{d\tau} \right]^n + \left[ \frac{dP_f}{d\tau} \right]^{n-1} \right) \sqrt{t^n - t^{n-1}} \right] \tag{6.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-p_{i-1}A + p_i \left( \frac{T_i}{\Delta t} + A + B + \frac{2k_r}{\mu_r\sqrt{\kappa_r\pi}\sqrt{t^n - t^{n-1}}} \right) - p_{i+1}B = p_i^{n-1} \frac{T_i}{\Delta t} + \\
+ \frac{2k_{r,i}}{\mu_{r,i}\sqrt{\kappa_{r,i}\pi}} \left[ q_1 - \left( \frac{p^{n-1} - p^{n-2}}{t^{n-1} - t^{n-2}} - \frac{p^{n-1}}{t^n - t^{n-1}} \right) \Delta t \right] \tag{6.50}
\end{aligned}$$

Отметим, что для реализации численного притока (6.43) необходимо в каждый момент времени заново вычислять интеграл с нулевого момента времени по текущий, что требует больших объемов памяти и занимает достаточно много времени. Поэтому предлагается вычислять приток не на каждом шаге по времени, а с некоторой частотой (каждый второй, десятый, сотый шаг). Это

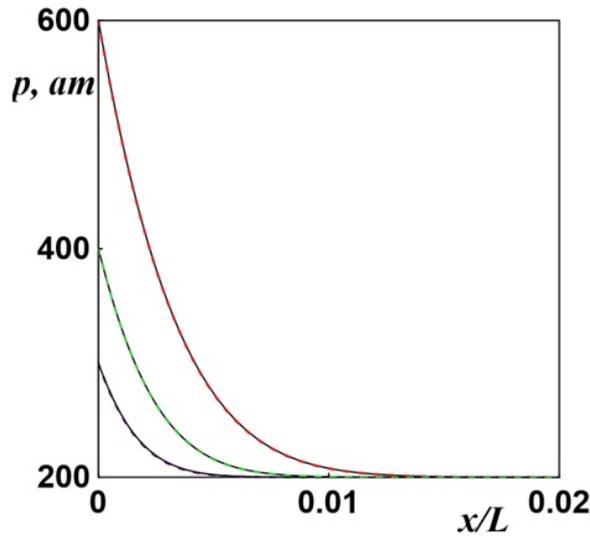


Рисунок 6.2: Профиль давления вдоль пласта. Черные кривые – численное решение, цветные – аналитическое решение (6.42). Начальное давление в пласте – 200 ат, давление на границе трещина/пласт меняется от 200 до 600 ат. Проницаемость - 0.1 Д, длина расчетной области –  $10^7$  м.  $t = 5.8$  дней (фиолетовая кривая),  $t = 11.6$  дней (зеленая),  $t = 23.3$  дня (красная).

упрощение значительно повышает скорость численных расчетов.

Для проверки численного алгоритма фильтрации суспензии с интегральным притоком ((6.45), (6.46) и (6.50)) сравним численные и аналитические результаты в некоторых частных случаях. Во-первых, будем моделировать течение только в пласте (не моделируем течение в трещине, давление в трещине в данном случае - граничное давление для пласта). Сравним численный и аналитический (6.42) профили давления (см. Рисунок 6.2). Давление на границе возрастает линейно с 200 атм до 600 атм за 24 дня. Профиль давления вдоль пласта в различные моменты времени совпадает с аналитическим решением.

Далее вернемся к сопряженной задаче о течении в трещине и пласте. Рассмотрим течение вблизи скважины, поскольку это единственная область трещины, где давление не вычисляется, а задается в качестве граничного условия. Это позволяет нам сравнить численные результаты и аналитические решения уравнения (6.43).

Рассмотрим несколько частных случаев граничного давления (давления в скважине). Если давление на границе падает линейно ( $P_f = a + \tau b$ ), то, согласно (6.43), приток на границе трещины вычисляется как:

$$q_0 = -Ca\sqrt{t - t_0}, \quad (6.51)$$

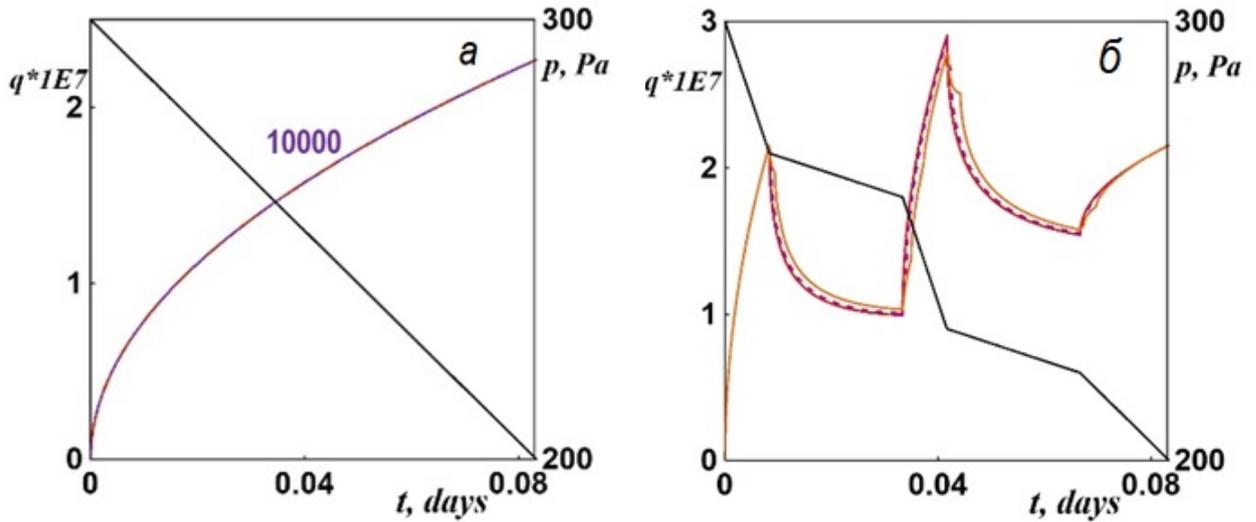


Рисунок 6.3: Изменение со временем давления на границе (черные кривые, правая ось) и приток резервуарной жидкости к границе (цветные кривые, левая ось). Красная кривая - аналитическое решение (6.51), фиолетовая - численное решение, давление сохраняется на каждом 10000 шаге (а). Красная кривая - аналитическое решение(6.53), фиолетовая - численное решение с сохранением давления каждые 30 шагов, оранжевая - 100 шагов (б).

Где  $C = \frac{2k}{\mu\sqrt{\kappa\pi}}$ . Предположим, что  $a = -10^5/72, b = 3 \cdot 10^7$ .

Теперь рассмотрим случай кусочно-линейного падения давления на границе:

$$P_f = \begin{cases} a_1\tau + b_1 & t \leq t_1 \\ a_i\tau + b_i & t_{i-1} \leq t \leq t_i, i = 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad (6.52)$$

Пусть  $a_i = \{-4166; -462.9; -4166; -462.9; -1388.9\}, b_i = \{3 \cdot 10^7; 2.73 \cdot 10^7; 3.8 \cdot 10^7; 2.46 \cdot 10^7; 3 \cdot 10^7\}, t_i = \{12\text{мин}; 48\text{мин}; 1\text{ч}; 1.6\text{ч}; 2\text{ч}\}$ .

Тогда, согласно формуле (6.43), приток может быть вычислен как:

$$q_0 = C \sum_{i=1}^k a_i (\sqrt{t - t_i} - \sqrt{t - t_{i-1}}) \quad (6.53)$$

Результаты сравнения аналитических решений (6.51) и (6.53) с численными расчетами вблизи скважины представлены на Рисунок 6.3. В случае линейного падения давления на границе получено хорошее соответствие с аналитическим решением даже в случае сохранения давления вдоль трещины каждые 10000 шагов. В случае кусочно-линейного паления давления хорошее совпадение достигается при сохранении давления с частотой менее 100 шагов.

Далее сравним суммарную добычу нефти при использовании формулы Картера (6.41) и интегральной формулы (6.43). Пусть давление в скважине падает

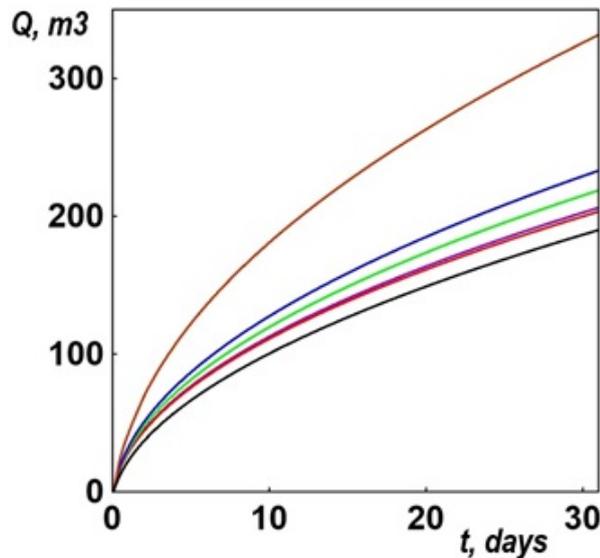


Рисунок 6.4: Суммарная добыча нефти за 30 дней. Черная кривая – с использованием притока по Картеру (а), красная – с использованием улучшенной модели притока с сохранением давления на каждом шаге по времени, фиолетовая – с частотой сохранения 10 во время падения давления на забое (первые 2 часа) и 100 после, зеленая – с частотой сохранения 10 и 1000, синяя – 10 и 2000, оранжевая – 10 и 10<sup>4</sup>.

линейно с 300 атм до 200 атм практически мгновенно за 2 часа. Суммарная добыча нефти за 30 дней представлена на Рисунок 6.4.

В случае интегрального притока было рассмотрено несколько вариантов вычисления интеграла с использованием численного алгоритма (6.46). Во время падения давления в скважине (первые 2 часа) предлагается вычислять приток достаточно часто (на каждом шаге по времени или каждый десятый шаг), по прошествии первых двух часов - реже (каждый 10<sup>3</sup>, 2·10<sup>3</sup>, 10<sup>4</sup> шаг по времени).

Анализируя результаты на Рисунке 6.4, можно сделать два главных вывода: 1) использование формулы Картера значительно (порядка 10%) недооценивает суммарную добычу нефти, полученную с использованием интегральной формулы; 2) максимально возможная частота вычисления притока в данном случае - каждые 10 шагов во время падения граничного давления и каждые 100 шагов после его установления (преувеличение добычи на 3%).

Все предыдущие расчеты проводились без учета геомеханических свойств проппанта и породы (сжатие проппантной пачки и вдавливание проппанта в стенки). Далее проведем расчеты с учетом геомеханических свойств.

Все параметры моделирования представлены в Таблице 6.2.

Рассмотрим три динамики падения давления на забое (в скважине): за 2, 20

Объект	Параметр	Значение	Единица измерения
Жидкость ГРП	вязкость	0.4	мПа · с
	сжимаемость	$1 \cdot 10^{-10}$	Па <sup>-1</sup>
Нефть	вязкость	1.35	мПа · с
	сжимаемость	$8.9 \cdot 10^{-9}$	Па <sup>-1</sup>
Трещина ГРП	длина	132	м
	высота	36	м
	начальное раскрытие	6.5	мм
Проппант	размер зерен	1	мм
	проницаемость	436	Д
Порода	пористость	0.18	
	проницаемость	0.9	мД
	модуль Юнга	$1.8 \cdot 10^{10}$	Па
	коэффициент Пуассона	0.29	
	коэффициент когезии	$5.87 \cdot 10^{10}$	Па
	угол внутреннего трения	62.2	Град
	главные тектонические напряжения	683	атм
Скважина	динамика давления	с 325 до 260	атм

Таблица 6.2: Параметры для моделирования добычи нефти.

и 100 часов и разные частоты вычисления интегрального притока при помощи алгоритма (6.46). Результаты расчета суммарной добычи нефти представлены на Рисунке 6.5.

Получено, что чем медленнее падает давление на забое, тем реже можно вычислять приток (если давление в скважине падает за 10 или 100 часов, то приток можно вычислять каждые 1000 и 10000 шагов по времени; если за 2 часа, то каждые 100 и 1000 шагов). Стоит отметить, что эти выводы применимы только к конкретному моделированию с параметрами из Таблицы 6.2, при других параметрах течения и пласта результаты могут отличаться.

Сравним также суммарную добычу нефти при использовании формулы Картера (6.41) и интегральной формулы (6.43) (Рисунок 6.6). Наибольшее различие в результатах с использованием формулы Картера и улучшенной формулы притока достигается при медленном сбросе давления на забое (100 часов), поскольку улучшенная модель притока описывает нестационарное падение давления на забое, и чем дольше наблюдается нестационарное давление, тем больше различие между формулой Картера и улучшенной формулой.

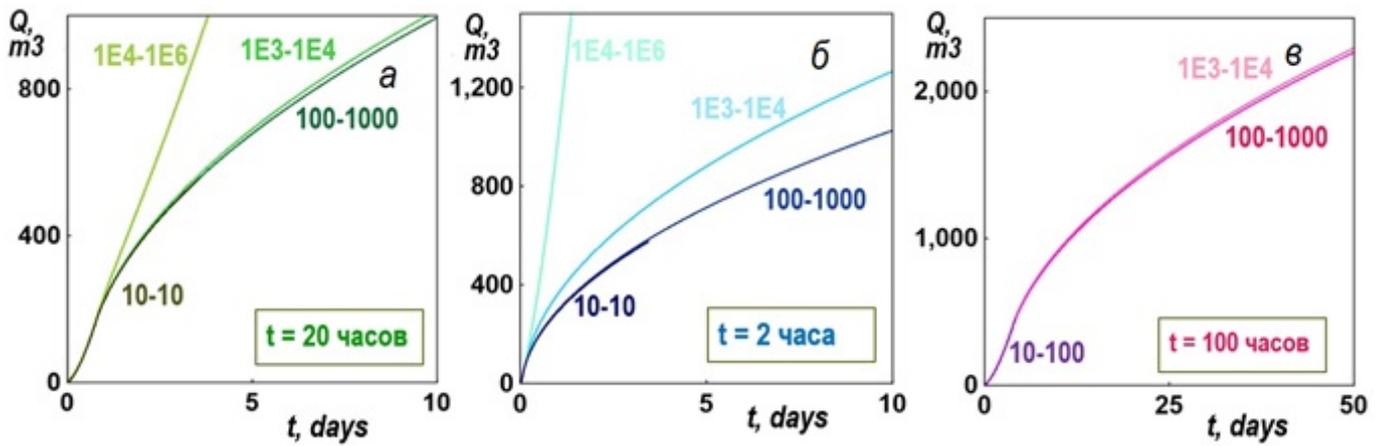


Рисунок 6.5: Суммарная добыча нефти за 10 дней (а, б) и 50 дней (в). Давление в скважине падает за 20 часов (а), за 2 часа (б) и 100 часов (в). Разными цветами обозначены расчеты с разной частотой сохранения давления.

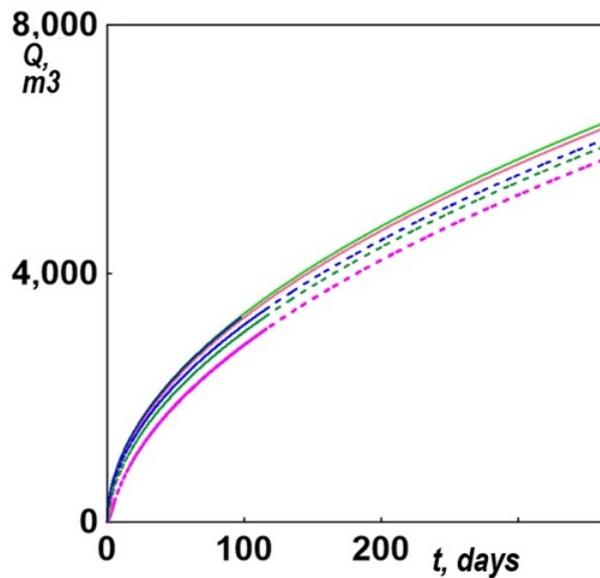


Рисунок 6.6: Суммарная добыча нефти при трех режимах сброса давления (2 (синие кривые), 20 (зеленые) и 100 часов (розовые)). Сплошные линии – использовалась улучшенная модель притока, пунктирные – формула Картера. Давление в трещине сохраняется каждые 1000 и 10000 шагов (зеленая и розовая кривая) и каждые 100 и 1000 шагов (синяя кривая).

### 6.4.3 Другие аналитические решения задачи фильтрации в полубесконечной области

В работе [83] была рассмотрена задача о течении двух жидкостей (либо сжимаемых, либо несжимаемых), в работе [84] также учитывается степенная реология закачиваемой жидкости. Предполагается, что в начальный момент пласт полностью заполнен пластовой жидкостью, а при  $t > 0$  начинается ее поршневое вытеснение водой. Давление на границе трещина/пласт считается постоянным. Введены две функции давления для двух разных жидкостей:  $p_1$  для воды и  $p_2$  для пластовой жидкости:

$$p(x, t) = \begin{cases} p_1(x, t), & x < a(t) \\ p_2(x, t), & x > a(t) \end{cases} \quad (6.54)$$

$$(6.55)$$

Уравнение на давление неньютоновской жидкости имеет следующий вид [84]:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial p_1}{\partial x} \right]^{(1-n)/n} = c_1 \phi \left( \frac{\mu_{eff}}{k} \right)^{1/n} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (6.56)$$

Здесь  $\mu_{app}$  - кажущаяся вязкость,  $n$  показатель степени в реологии степенной жидкости.

$$p(0, t) = P_f, \quad t > 0$$

$$p(x, 0) = P_r, \quad x \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x, t) = P_r, \quad t < \infty$$

Условие на подвижной границе  $x = a(t)$ :

$$\phi \frac{da}{dt} = -\frac{k}{\mu_i} \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad p_1 = p_2$$

Решение задачи, в случае течения двух сжимаемых жидкостей:

$$p_1 = P_f + \frac{\sqrt{\pi} c_1}{2} \operatorname{erf}(\xi), \quad p_2 = P_r + \frac{\sqrt{\pi} c_2}{2} \operatorname{erfc}(\varsigma) \quad (6.57)$$

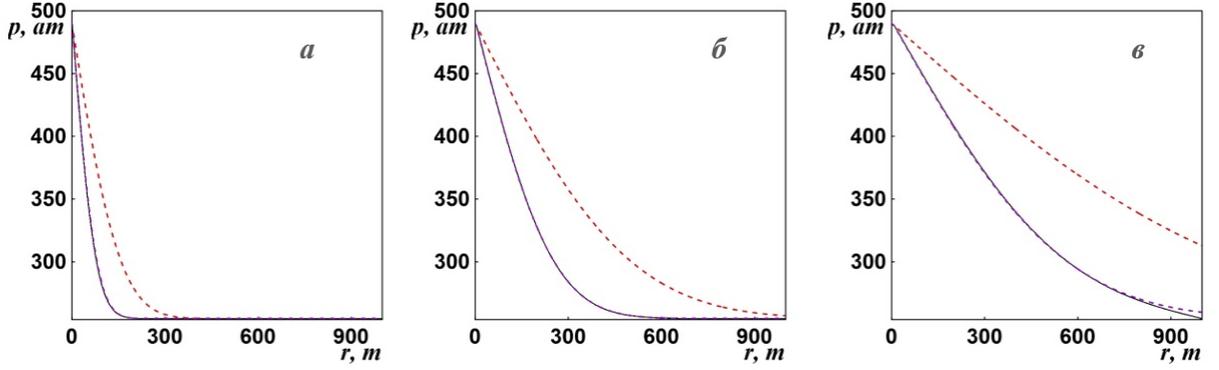


Рисунок 6.7: Профиль давления вдоль пласта. Черная кривая – численное решение, красная – аналитическое решение (6.40), фиолетовая – формула (6.57). Начальное давление в пласте – 254 ат, давление на границе трещина/пласт – 490 ат. Проницаемость - 100 Д, длина расчетной области – 1000м.  $t = 16$  мин (а),  $t = 5.5$  ч (б),  $t = 14$  ч (в).

$$c_1 = -\frac{\phi\eta\mu_{app}\sqrt{\alpha_1}}{k} e^{\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)^2}, \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}, \quad \alpha_1 = \frac{k}{\phi\mu_{app}c_t} \quad (6.58)$$

$$c_2 = -\frac{\phi\eta\mu_r\sqrt{\alpha_2}}{k} e^{\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\alpha_2}}\right)^2}, \quad \varsigma = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}, \quad \alpha_2 = \frac{k}{\phi\mu_r c_t} \quad (6.59)$$

$$q(0) = -\frac{\phi\eta e^{\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)^2}}{2\sqrt{t}} \quad (6.60)$$

Здесь  $\eta$  - параметр, который находится из предположения  $a(t) = \eta\sqrt{t}$ ,  $\mu_r$  - вязкость резервуарной жидкости.

$$\mu_{app} = n\mu_{eff} \left(\frac{1}{u}\right)^{1-n} \quad (6.61)$$

$$\mu_{eff} = \frac{K'}{12} \left(9 + \frac{3}{n}\right)^n (150k\phi)^{\frac{1-n}{2}} \quad (6.62)$$

Здесь  $K'$  - показатель консистенции флюида,  $u$  - скорость.

Было проведено сравнение решения (6.57) и результатов численного расчетов двухфазной модели фильтрации (см. Рисунок 6.7). Также на графиках представлено решение однофазной задачи для демонстрации того, что двухфазные эффекты оказывают значительное влияние на течение уже на самых начальных временах.

Далее рассмотрим однофазное течение идеального газа в полубесконечной области. Подставляя уравнение состояния идеального газа  $\rho = \rho_0 p/p_0$  в урав-

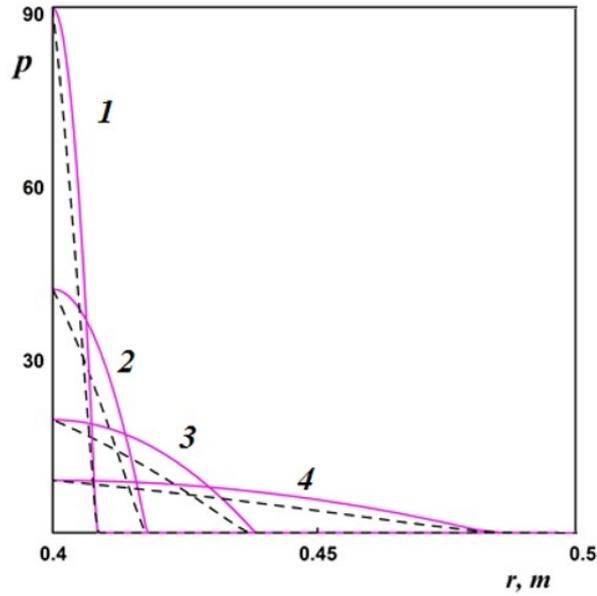


Рисунок 6.8: Профиль давления газа в различные моменты времени. Пунктирная линия - численное моделирование, сплошная кривая - аналитическое решение (6.64). Кривые 1-4 соответствуют моментам времени  $t = 10^3, 10^4, 10^5$ ;  $\Delta p = 90$  Па,  $L = 0.5$  м,  $N = 4 \cdot 10^3$ ,  $\mu = 0.001$  Па·с,  $k = 39$  Д.

нения неразрывности и законы Дарси (2.5)-(2.12), получим:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta p^2, \quad \kappa = \frac{k}{2\mu\phi} \quad (6.63)$$

Пусть в начальный момент времени  $p(x, 0) = \delta(x)$ . Тогда можно получить решение [86]:

$$p(\xi, t) = \begin{cases} t^{-1/3} (C - \xi^2/6\chi), & \xi^2 \leq 6\kappa C \\ 0, & \xi^2 > 6\kappa C \end{cases} \quad (6.64)$$

Где  $C = 6^{1/3}/(4\kappa)$ ,  $\xi = xt^{-1/3}$ . Недостаток данного решения в том, что граничные условия для численного расчета необходимо подбирать вручную для совпадения с аналитическим решением; решение подходит только для случаев  $p(x, 0) \ll 1 (x \neq 0)$ , что приводит к неустойчивости в решении уравнений переноса. Решение дает хорошее совпадение длины фронта проникновения, полученной численно и аналитически (см. Рисунок 6.8).

Решение задачи течения идеального газа с начальными и граничными условиями

$$p(x, t_0) = p(\infty, t) = 0; \quad p(0, t) = \sigma(t - t_0)^\alpha, \quad (6.65)$$

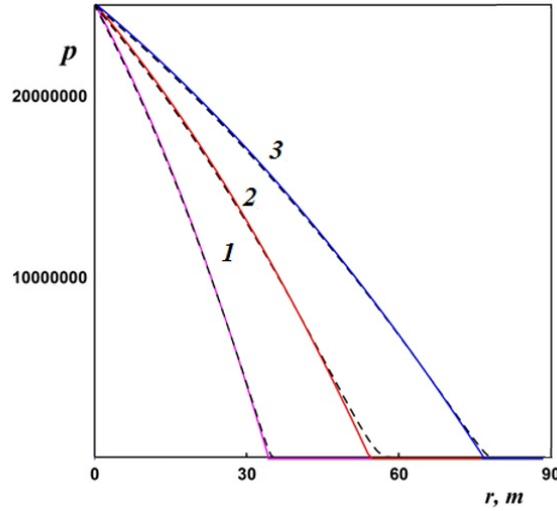


Рисунок 6.9: Профиль давления в различные моменты времени. Сплошная кривая - аналитическое решение (6.66), пунктирная кривая - численное моделирование. Кривые 1-3 соответствуют моментам времени  $t = 10^3, 10^3, 2 \cdot 10^4$  с;  $\mu = 10^{-5}$  Па·с,  $k = 36$  Д.

было представлено в [81]. Решение имеет вид:

$$p(\xi, t) = \begin{cases} \sigma/\mu^2 \Phi(\mu\xi, \lambda), & \xi < \xi_0 \\ 0, & \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (6.66)$$

$$\Phi(\xi, \lambda) = \frac{1}{4}(1 - \xi) + C_1(1 - \xi)^2 + C_2(1 - \xi)^3, \quad (6.67)$$

$$C_1 = \frac{2\lambda - 1}{16}, \quad C_2 = \frac{2}{9}(\lambda - 1 - 12C_1), \quad (6.68)$$

$$\xi = x \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\kappa\sigma(t - t_0)^{\alpha+1}}}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \mu = \sqrt{\Phi(0, \lambda)}. \quad (6.69)$$

Длина и скорость распространения фронта:

$$x_0(t) = \xi_0 \sqrt{\frac{\kappa\sigma(t - t_0)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}}, \quad \xi_0 = \frac{1}{\mu_0} \quad (6.70)$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\xi_0 \sqrt{\kappa\sigma(t - t_0)^{\alpha-1}(\alpha + 1)} \quad (6.71)$$

Недостаток решения в том, что оно подходит только для очень малых начальных значений давления. Данное решение описывает положение фронта и профиль давления лучше, чем решение (6.64) (см. Рисунок 6.9).

Решение для течения идеального газа с конечными начальными и гранич-

ными условиями

$$p(x, 0) = P_2, \quad p(0, t) = P_1. \quad (6.72)$$

было получено в [87].

Уравнение (6.63) может быть линеаризовано двумя способами.

1) Давление  $p$  выносится за знак производной и принимается равным  $p = p_{av}$ , где  $p_{av}$  - некоторое среднее давление:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a\Delta p, \quad a = \kappa p_{av}. \quad (6.73)$$

Решение найдено в виде  $p = p_{av}u$ , где  $u = 1 + lu_1 + l^2u_2 + \dots$

2) Проводится замена переменной  $u = p^2$  и  $\sqrt{u} = p_{av}$ , после чего получено следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u, \quad a = \kappa p_{av}. \quad (6.74)$$

Решение уравнения (6.74) найдено в виде  $p = p_{av}\sqrt{v}$ , где  $v = 1 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots$ . Значение  $p_{av}$  также было выбрано двумя способами:  $p_{av} = P_1$  и  $p_{av} = P_2$ . Выражения для  $u_i, v_i, \lambda$  и  $l$  получены в [87]. Недостаток решения заключается в том, что оно работает только для малых времен.

Мы получили лучшее соответствие с численным моделированием в случае второй линеаризации и  $p_{av} = P_1$ , потому что в нашем случае важнее совпадение давления на входной границе. Результат сравнения показан на Рисунке 6.10.

#### 6.4.4 Численное моделирование притока из резервуара

Как было показано выше, учет двухфазного течения в пласте (Рисунок 6.7) и изменения давления в трещине (Рисунок 6.6) оказывают значительное влияние на моделирование добычи нефти при помощи технологии ГРП. Соответственно, при моделировании необходимо учитывать оба упомянутых эффекта.

Аналитическое решение данной задачи было получено в [85]. Данное решение содержит интегралы по времени, которые необходимо вычислять заново на каждом моменте времени. Как было замечено выше, даже без учета двухфазия (решение (6.43)) вычисление интеграла в формуле для притока - очень долгий в вычислительном плане процесс, даже при вычислении интеграла на каждом  $10^3$  или  $10^4$  шаге по времени. Есть основания полагать, что численное вычисление

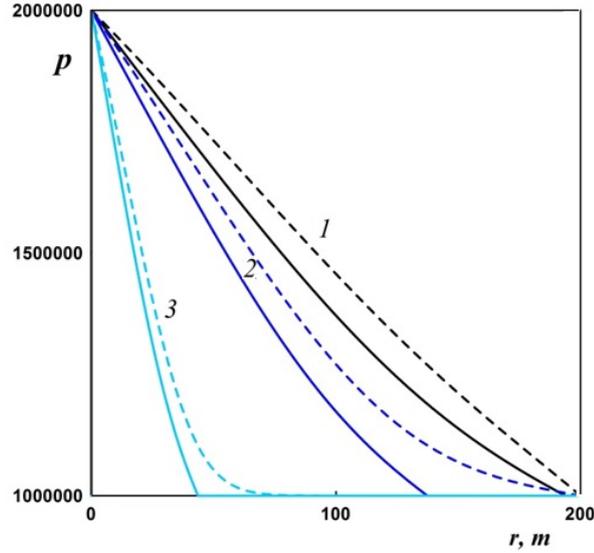


Рисунок 6.10: Профиль давления в различные моменты времени. Сплошная кривая - аналитическое решение [87], пунктирная кривая - численное моделирование. Кривые 1-3 соответствуют моментам времени  $t = 10^3, 10^4, 10^5$  с;  $\Delta p = 10^6$  Па,  $L = 200$  м,  $N = 4 \cdot 10^3$ ,  $\mu = 0.1$  Па·с.

притока, полученного в [85], будет крайне медленным процессом.

Поэтому предлагается моделировать течение в пласте численно. Полная система уравнений представлена ниже (моделируем только течение жидкостей без твердых частиц):

$$\frac{\partial w \rho_i s_i \phi}{\partial t} + \frac{\partial w \rho_i u_i}{\partial x^j} = 2 \rho_i q_i^j, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2; \quad (6.75)$$

$$q_1^1 = u_1^2(x^2 = 0); \quad q_2^1 = u_2^2(x^2 = 0); \quad q_i^2 = 0$$

$$u_1^1 = - \left[ \frac{k k_1}{m_{eff,1}} \left( \nabla p - \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \alpha \tau_1 \right) \right]^{\frac{1}{n_1}} \quad (6.76)$$

$$\mu_{eff,1} = \frac{H}{4} \left( 3 + \frac{1}{n} \right)^n (8 C' k \phi)^{\frac{1-n}{2}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\phi C'}{2k}} \quad (6.77)$$

$$u_i = - \frac{k k_i}{\mu_i} \nabla p, \quad i = 1, 2, j = 2; \quad i = 2, j = 1 \quad (6.78)$$

$$k_i = k_0 s_i' \quad (6.79)$$

$$s_i' = \frac{s_i - s_{i,ir}}{1 - s_{1,ir} - s_{2,ir}} \quad (6.80)$$

$$\phi = \phi_0 - \varepsilon_{33} \quad (6.81)$$

$$k = 0.204 r_g^2 \phi^{4.58} \quad (6.82)$$

$$w = w_0(1 - \epsilon_{33}) - 2e_0 \quad (6.83)$$

Здесь индекс  $i = 1$  относится к гидроразрывной жидкости,  $i = 2$  - к нефти; индекс  $j = 1$  относится к трещине,  $j = 2$  - к пласту;  $x$  - координата;  $q_2$  - приток нефти из пласта в трещину;  $u$  - скорость фильтрации;  $w$  - раскрытие трещины;  $\rho$  - относительная плотность жидкости;  $s$  - насыщенность фазы;  $\phi$  - пористость трещины;  $k_i$  - относительная фазовая проницаемость;  $k$  - абсолютная проницаемость трещины ГРП;  $\mu_{eff}$  - эффективная вязкость жидкости ГРП;  $H$  и  $n$  - параметры реологии Гершеля-Балкли;  $C' = 25/12$  - константа Козени-Кармана;  $s_{(i,ir)}$  - неснижаемая фазовая насыщенность;  $\phi_0$  - начальная пористость трещины ГРП;  $\epsilon_{33}$  - относительное сжатие пропантной пачки;  $r_g$  - радиус пропанта;  $w_0$  - начальное раскрытие трещины;  $e_0$  - глубина вдавливания пропанта в стенки трещины.

Для ускорения расчетов будем моделировать течение в пласте не для каждой расчетной точки трещины, а только для нескольких. В остальных точках трещины приток из пласта будем рассчитывать при помощи кусочно-линейной интерполяции между двумя соседними точками, в которых проводились расчеты притока (см. Рисунок 6.11):

$$q_i = a_k p_i + b_k, x_i \in (x_{k-1}, x_k), k = 0, 1, \dots, K, i = 0, \dots, N \quad (6.84)$$

$$a_k = \frac{q_k - q_{k-1}}{p_k - p_{k-1}}, b_k = q_{k-1} - a_k p_{k-1} \quad (6.85)$$

Здесь индексом  $i$  обозначается номер расчетной ячейки вдоль трещины,  $q$  - приток жидкости (нефти или воды) из пласта,  $K$  - количество точек вдоль трещины, в которых численно рассчитывается приток жидкостей из пласта,  $N$  - число расчетных точек вдоль трещины.

При численном моделировании притока давление в трещине находится итерационно: сначала моделируется течение в пласте, результатом которого являются скорость на границе трещина/пласт. Затем полученная скорость (приток из пласта) используется для расчета течения в трещине. Процесс повторяется до тех пор, пока расчетное давление на границе трещина-пласт не будет совпадать при моделировании в трещине и пласте. Алгоритм схематически представлен на Рисунке 6.12 (Flowback - программа расчета течения в пористой среде (трещи-



Рисунок 6.11: Схема численного моделирования в системе трещина-пласт.

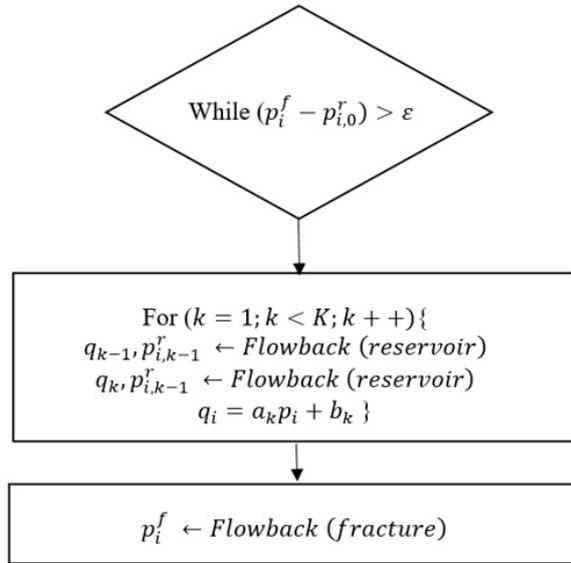


Рисунок 6.12: Итерационная схема расчетов в системе трещина/пласт.

на или пласт),  $p_i^{\text{тр}}$  — давление в  $i$ -той точке трещины,  $p_{(i,0)}^{\text{пл}}$  — давление в пласте на границе с трещиной).

Для проверки корректности работы программы сравним результаты, полученные при помощи численного моделирования притока с результатами при использовании аналитической формулы (6.43). Зададим нестационарное граничное условие: давление в скважине меняется ступеньками (всего 24 ступеньки) в течение 10 дней, далее давление сохраняет постоянное значение. В данном случае ожидается полное совпадение результатов расчетов с использованием численной модели притока и интегральной аналитической формулы (см. Рисунок 6.13). Действительно, при использовании 300 расчетных точек в пласте и при сохранении профиля давления каждый 5 шаг по времени (при вычислении аналитического притока) мы получили практически полное совпадение результатов.

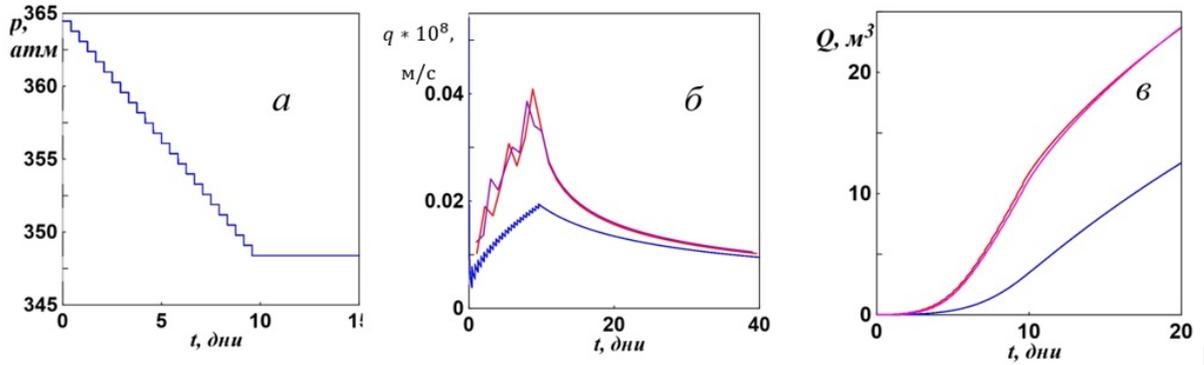


Рисунок 6.13: а) Динамика падения давления в скважине; б) скорость притока из пласта; в) суммарная добыча нефти, синие кривые – приток по Картеру, фиолетовые – интегральная формула притока, красные – численное моделирование притока.

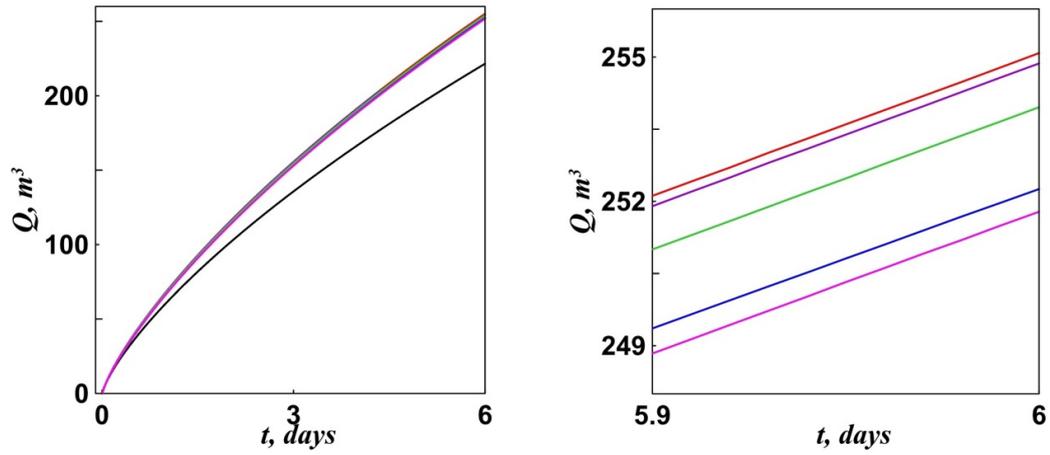


Рисунок 6.14: Суммарная добыча нефти. Давление в скважине падает мгновенно. Красная кривая - 200 точек в пласте и 100 точек в трещине для вычисления притока; фиолетовая - 200 и 10; синяя - 100 и 10 ; зеленая - 200 и 4; розовая - 200 и 2.

В дальнейшем для ускорения расчетов будем использовать неоднородную экспоненциальную сетку в пласте (см. раздел 2.3). Результаты расчетов при разном количестве расчетных точек в пласте и разном количестве точек вдоль трещины для расчета притока представлены на Рисунках 6.14, 6.15 и Таблицах 6.3 и 6.4 (число точек в трещине фиксировано и равно 100). Было проведено две серии расчетов с разной скоростью сброса давления в скважине (на границе трещины) - мгновенно (Таблица 6.3, Рисунок 6.14) и в течение 4 дней (Таблица 6.4, Рисунок 6.15).

Сформулируем основные выводы: 1) для достижения высокой точности важнейшее количество расчетных точек в пласте, чем количество точек в трещине, в которых считается приток; 2) чем быстрее падает давление в скважине, тем больше нужно использовать расчетных точек в пласте и трещине; 3) для дости-

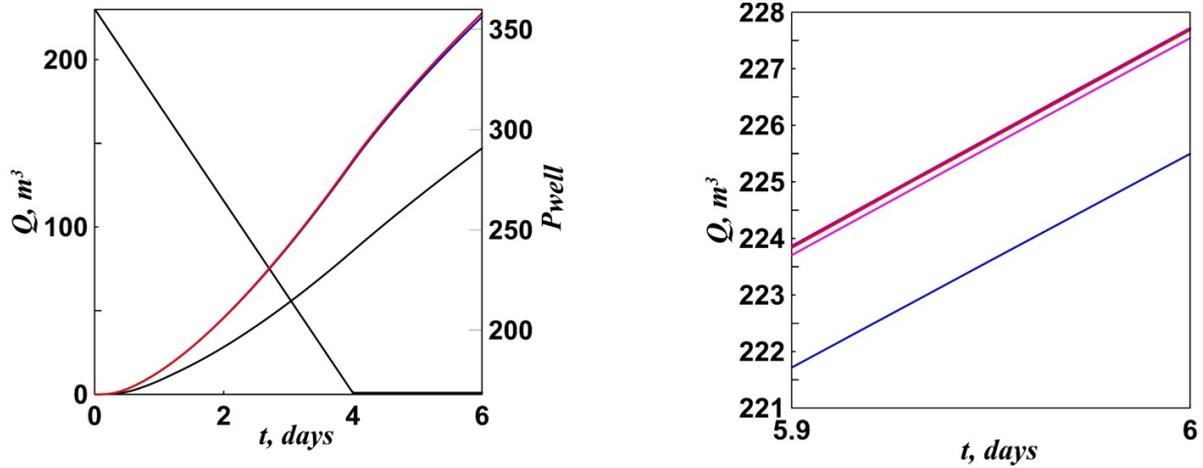


Рисунок 6.15: Суммарная добыча нефти (левая ось) и динамика давления (правая ось, серная кривая). Красная кривая - 200 точек в пласте и 100 точек в трещине для вычисления притока; фиолетовая - 200 и 10; синяя - 100 и 10 ; зеленая - 200 и 4; розовая - 200 и 2.

Точек в пласте	Точек для расчета притока	Суммарная добыча нефти, м <sup>3</sup>	Отклонение от макс. точного решения
200	100	255.0821	100%
200	10	254.867	-0.084%
100	10	252.25	-1.1%
200	4	253.95	-0.44%
200	2	251.78	-1.29%

Таблица 6.3: Суммарная добыча нефти при разном количестве расчетных точек в пласте и точек вдоль трещины, где вычисляется приток. Давление в скважине падает мгновенно.

жения отклонения от точного решения в пределах 1% достаточно использовать 200 расчетных точек в пласте и 10 или 2 точки в трещине для расчета притока при быстром и медленном падении давления соответственно.

## 6.5 Относительное влияние геомеханических эффектов на очистку трещины ГРП

Для понимания и предсказания изменения проводимости трещины ГРП определим относительное влияние геомеханических эффектов. Проведем серию расчетов, используя полную модель очистки трещины ГРП с учетом численного притока из пласта.

Будем оценивать динамику изменения свойств трещины, используя следующие параметры: безразмерную проводимость  $C_{FD}$  и суммарную добычу нефти  $Q$ :

Точек в пласте	Точек для расчета притока	Суммарная добыча нефти, м <sup>3</sup>	Отклонение от макс. точного решения
200	100	227.78	100%
200	10	227.67	-0.049%
100	10	225.833	-0.85%
200	4	227.792	0.0039%
200	2	227.61	-0.076%

Таблица 6.4: Суммарная добыча нефти при разном количестве расчетных точек в пласте и точек вдоль трещины, где вычисляется приток. Давление в скважине падает в течение 4 дней.

$$C_{FD} = \frac{k_{av}w_{av}}{k_r L} \quad (6.86)$$

Здесь  $k_{av}$  и  $w_{av}$  - проницаемость и ширина трещины, усредненные по длине трещины.

Параметры моделирования представлены в Таблице 6.5. Пусть давление в скважине падает согласно трем сценариям: за 2 часа, 1 день и 1 неделю. Проведем расчеты без учета каких-либо геомеханических эффектов; с учетом только сжатия согласно формуле (6.28); с учетом только сжатия, используя паспорт пропанта (Таблица 6.1); с учетом только вдавливания согласно (6.22)-(6.24); с учетом сжатия по формуле и вдавливания; сжатия по паспорту и вдавливания. Результаты представлены на Рисунках 6.16 - 6.18.

При падении давления в скважине за 2 часа можно заметить (Рисунок 6.16), что при использовании паспорта пропанта максимальный (после случая, не учитывающего геомеханические эффекты) CFD достигается при учете сжатия, однако максимальная добыча достигается при учете только вдавливания. Этот эффект можно объяснить тем, что при меньшем CFD (в нашем случае при меньшем раскрытии трещины) увеличивается величина притока из пласта. И в некоторых случаях величина притока превосходит уменьшение раскрытия по влиянию на добычу нефти и в итоге получаем большую суммарную добычу нефти. Таким образом, конечное значение CFD не всегда определяет, в каком случае будет большая или меньшая добыча. Исследование этого эффекта будет проведено в данной главе чуть позже.

В остальных случаях (при падении давления за 1 день (Рисунок 6.17) и за неделю (Рисунок 6.18)) максимальная и минимальная добыча нефти согласу-

Параметры	Величины
Плотность жидкости ГРП, кг/м <sup>3</sup>	1000
Вязкость жидкости ГРП, мПа·сек	0.4
Неснижаемая насыщенность жидкости ГРП в пласте	0.39
Неснижаемая насыщенность нефти в пласте	0.32
Начальное давление в трещине и пласте, атм	355
Конечное давление в скважине, атм	255
Длина трещины гидроразрыва, м	156
Высота трещины, м	16
Начальное раскрытие трещины, мм	5
Проницаемость трещины, Д	1097
Начальная пористость	0.426
Пористость пласта	0.7
Время очистки, дни	10
Сжимаемость жидкости ГРП, 1/Па	$4.4 \cdot 10^{-10}$
Сжимаемость нефти, 1/Па	$1 \cdot 10^{-9}$
Коэффициент Пуассона пласта	0.2575
Коэффициент Пуассона пропанта	0.22
Модуль Юнга пласта, гПа	16,75
Модуль Юнга пропанта, гПа	41
Главные тектонические напряжения, атм	-681
Угол внутреннего трения пропанта	45
Угол внутреннего трения пласта	62.2
Коэффициент трения пропанта	0.25
Коэффициент трения пласта	0.25
Коэффициент когезии	36000
Коэффициент дилатансии	-0.378
Радиус пропанта, мм	0.5
Проницаемость пласта, мД	1

Таблица 6.5: Параметры для моделирования очистки трещины гидроразрыва.

ется с максимальным или минимальным CFD.

Также отметим, что при любой скорости сброса давления в случае использования паспорта пропанта сжатие всегда оказывает большее влияние на CFD, чем вдавливание. При расчете геомеханических свойств по формулам получаем обратный результат: вдавливание всегда оказывает большее влияние на проводимость трещины.

Заметим, что данные выводы сделаны при моделировании течения с определенными параметрами (Таблица 6.5) и могут меняться при изменении этих параметров. Например, на Рисунке 6.18 видно, что при использовании формул для расчета геомеханики сжатие оказывает большее влияние на CFD, чем вдавливание, первые 6.5 дней (результаты зависят также от времени моделирования добычи). Однако в Таблице 6.5 представлены параметры, приближенные к ре-

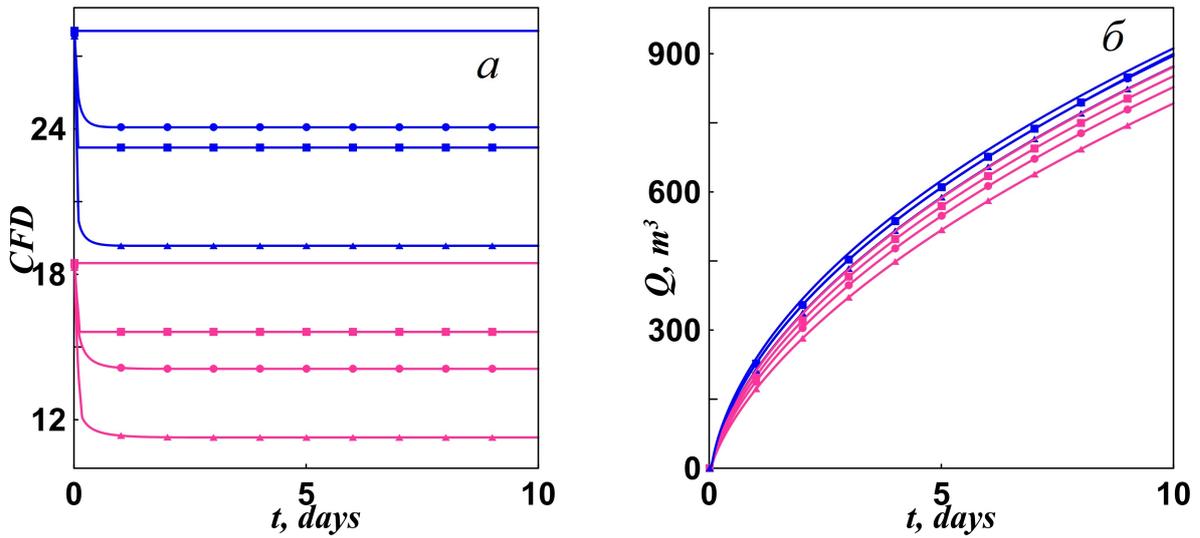


Рисунок 6.16: Безразмерная проводимость (*a*) и суммарная добыча нефти (*б*) при сбросе давления в скважине в течение 2х часов. Розовые кривые - с использованием формул, синие - с использованием паспорта пропантанта. Сплошные кривые - расчет деформированного состояния только в первый момент, круги - учет только сжатия, квадраты - только вдавливания, треугольники - и сжатия, и вдавливания.

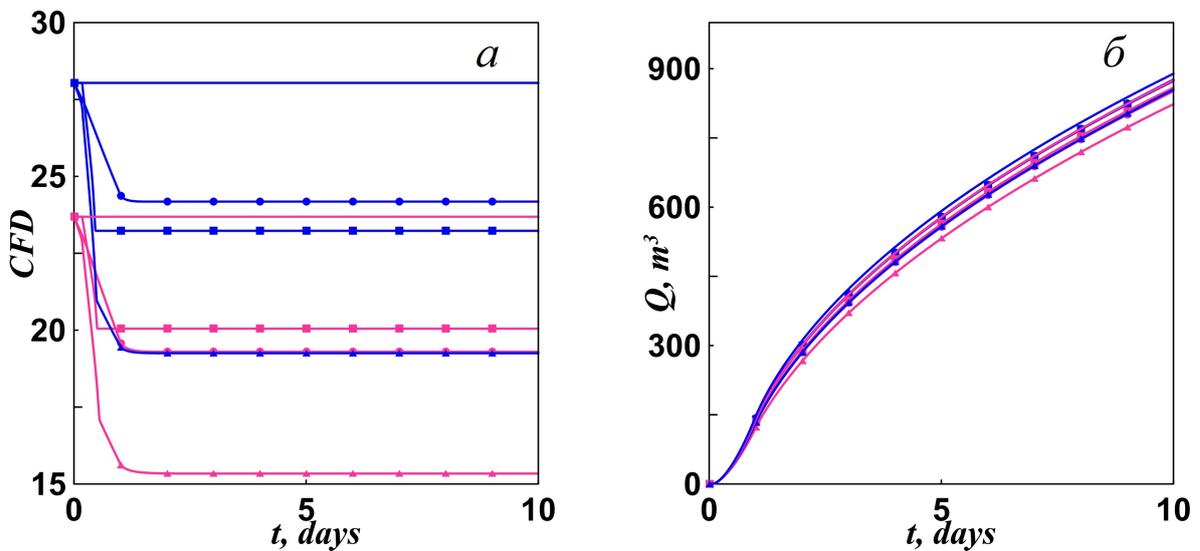


Рисунок 6.17: Безразмерная проводимость (*a*) и суммарная добыча нефти (*б*) при сбросе давления в скважине в течение 1 дня. Розовые кривые - с использованием формул, синие - с использованием паспорта пропантанта. Сплошные кривые - расчет деформированного состояния только в первый момент, круги - учет только сжатия, квадраты - только вдавливания, треугольники - и сжатия, и вдавливания.

альным, поэтому на данном этапе будет использовать выводы, полученные при данном моделировании.

При всех сценариях сброса давления при использовании формул для расчета геомеханических свойств проводимость трещины падает значительно сильнее, чем при использовании паспорта пропантанта.

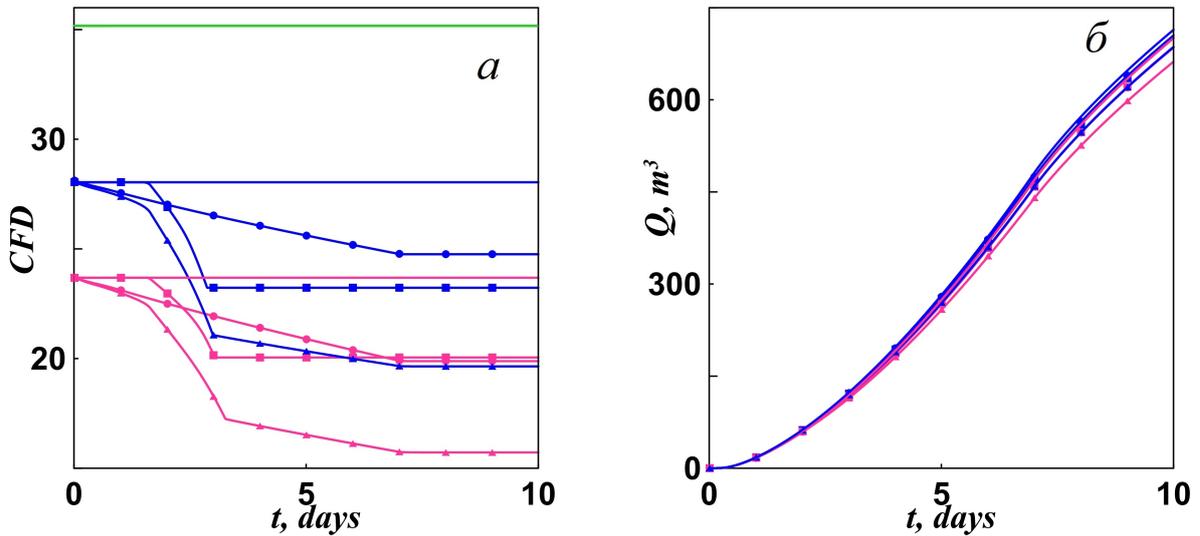


Рисунок 6.18: Безразмерная проводимость (*a*) и суммарная добыча нефти (*б*) при сбросе давления в скважине в течение 7 дней. Розовые кривые - с использованием формул, синие - с использованием паспорта проппанта, зеленая - без учета начального деформированного состояния. Сплошные кривые - расчет деформированного состояния только в первый момент, круги - учет только сжатия, квадраты - только вдавливания, треугольники - и сжатия, и вдавливания.

Учет двух эффектов одновременно (сжатия и вдавливания) всегда значительно снижает проводимость трещины, чем учет каждого из эффектов по отдельности.

## 6.6 Моделирование различных режимов очистки трещины гидроразрыва

Цель исследований, проведенных в данном разделе, заключается в определении оптимальной динамики сброса давления на границе трещины (в скважине), обеспечивающей наибольшую добычу нефти.

Рассмотрим полную гидро- и геомеханическую задачу с учетом численного притока, предела текучести жидкости ГРП и геомеханических эффектов. Параметры моделирования представлены в Таблице 6.5, однако часть параметров мы будем варьировать: проницаемость пласта, длину трещины, начальное раскрытие трещины, предел текучести и скорость сброса давления на забое (в скважине). Сжатие проппанта будет определяться при помощи таблиц паспорта проппанта.

Для определения оптимального режима сброса давления на забое введем величину, характеризующую изменение суммарной добычи нефти при увеличении

периода сброса давления на забое  $\Delta Q$  (относительная добыча нефти):

$$\Delta Q = \frac{Q_{2h}}{Q_{1d/7d}} \cdot 100\% \quad (6.87)$$

Где  $Q_a$  - суммарная добыча нефти при сбросе давления в скважине за время  $a$  (2 часа, 1 день или 7 дней).

Было проведено 72 расчета, параметры варьировались в следующих диапазонах: длина трещины - 157 или 250 м, начальное раскрытие трещины 5 или 3 мм, проницаемость пласта - 0.01, 0.1, 1, 10, 100 и 1000 мД, предел текучести 0 или 1 Па, время сброса давления на забое - 2 часа, 1 день или 7 дней.

Для начала определим оптимальную динамику сброса давления для различных начальных значений безразмерной проводимости  $C_{FD}$ :

$$C_{FD} = \frac{k_f w_0}{k_r L} \quad (6.88)$$

Безразмерная проводимость - часто используемая характеристика месторождения, поэтому зависимость динамики сброса от этого параметра может быть полезна при работе с реальными месторождениями. Зависимость относительной добычи нефти  $\Delta Q$  от  $C_{FD}$  представлена на Рисунках 6.19 и 6.20.

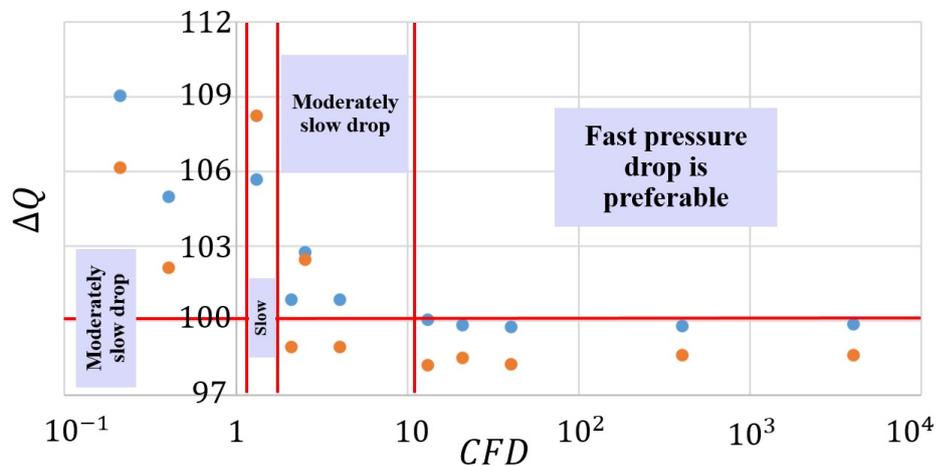


Рисунок 6.19: Относительная добыча нефти  $\Delta Q$  при различных значениях безразмерной проводимости  $C_{FD}$ . Синие точки - относительная добыча при сбросе давления за 1 день, оранжевые - за 7 дней. Предел текучести жидкости ГРП равен нулю.

Получено, что и в случае, когда предел текучести жидкости ГРП равен 0 (Рисунок 6.19), и в случае 1 Па (Рисунок 6.20) графики могут быть разделены на 4 области в зависимости от предпочтительного режима сброса давления на границе.

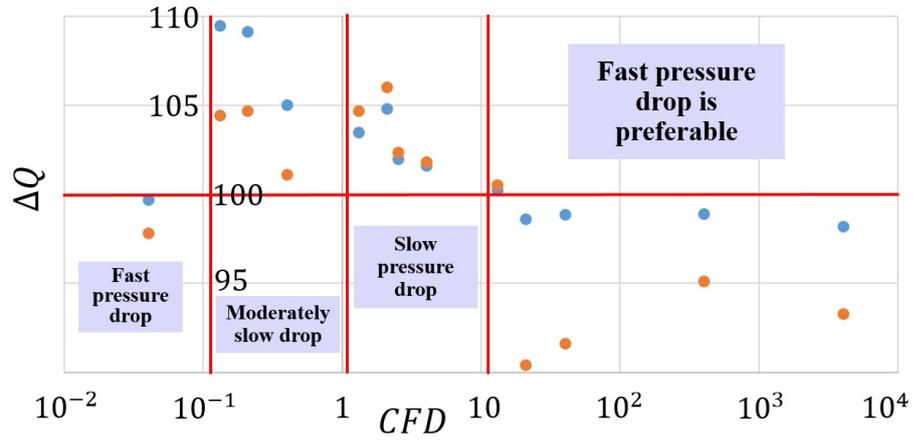


Рисунок 6.20: Относительная добыча нефти  $\Delta Q$  при различных значениях безразмерной проводимости  $C_{FD}$ . Синие точки - относительная добыча при сбросе давления за 1 день, оранжевые - за 7 дней. Предел текучести жидкости ГРП равен 1 Па.

Если предел текучести равен 0, то для всех  $C_{FD} > 13$  предпочтителен самый быстрый сброс давления (2 часа); для  $2 < C_{FD} < 13$  умеренно медленный сброс (1 день) является оптимальным. Если  $1.3 < C_{FD} < 2$ , предпочтителен самый медленный сброс (7 дней); и если  $C_{FD} < 1.3$ , умеренно медленный сброс давления (1 день) является предпочтительным с точки зрения максимальной добычи нефти.

В случае, когда предел текучести равен 1 Па (Рис. 6.20), для всех  $C_{FD} > 13$  быстрый сброс давления (2 часа) является оптимальным; для  $1.3 < C_{FD} < 13$  предпочтителен медленный режим сброса (7 дней); если  $0.13 < C_{FD} < 1.3$  оптимален умеренно медленный сброс (1 день); если  $C_{FD} < 0.13$ , наибольшая добыча нефти достигается при самом быстром сбросе давления (2 часа).

Отметим, что в случае моделирования численного притока (сопряженная задача о течении в пласте и трещине), проводимость не является безразмерным параметром модели. В данном случае выделим 4 безразмерных параметра, описывающих гидромеханические свойства (остальные безразмерные параметры, характеризующие гидро- и геомеханику не меняются в ходе проводимого параметрического исследования):

$$K = \frac{k_r}{k_{f0}}, \quad X = \frac{L}{w_0}, \quad N_y = \frac{\alpha \tau_y L}{\Delta p}, \quad Sh = \frac{T}{T_{drop}} \quad (6.89)$$

Где  $\Delta p$  - полный перепад давления на границе трещины (в скважине),  $T_{drop}$  - время сброса давления в скважине;  $T$  - масштаб времени;  $K$  - отношение

проницаемости трещины к проницаемости пласта,  $X$  - отношение длины трещины к начальному раскрытию трещины ( $CFD = 1/(KX)$ ),  $N_y$  - безразмерный критический градиент давления, определяемый пределом текучести, и  $Sh$  - число Струхала, определяющее отношение масштаба времени, посчитанного с использованием масштаба скорости и длины, к масштабу времени, определяемому динамикой сброса давления к скважине. Параметры (6.89) определяют безразмерную модель фильтрации, соответствующую системе уравнений (6.75) - (6.83), полученную с использованием следующей процедуры: в качестве масштаба раскрытия трещины  $w^*$  используем начальное раскрытие трещины  $w_0$ , в качестве масштаба давления  $p^*$  - максимальный перепад давления в скважине  $\Delta p$  ( $p_w$  - конечное давление в скважине), масштаба скорости  $u$  - скорость фильтрации  $U$ , определяемую согласно закону Дарси для фильтрации нефти и масштаб времени, определяемый при помощи масштаба скорости и длины трещины:

$$p = \frac{p^* - p_w}{\Delta p}, \quad U = \frac{k_{f0} \Delta p}{\mu_2 L}, \quad T = \frac{\phi_{f0} L}{U} = \frac{\phi_{f0} L^2 \mu_2}{k_{f0} \Delta p}. \quad (6.90)$$

Построим графики зависимости относительной добычи нефти от безразмерного параметра  $K$  (Рисунки 6.21, 6.22).

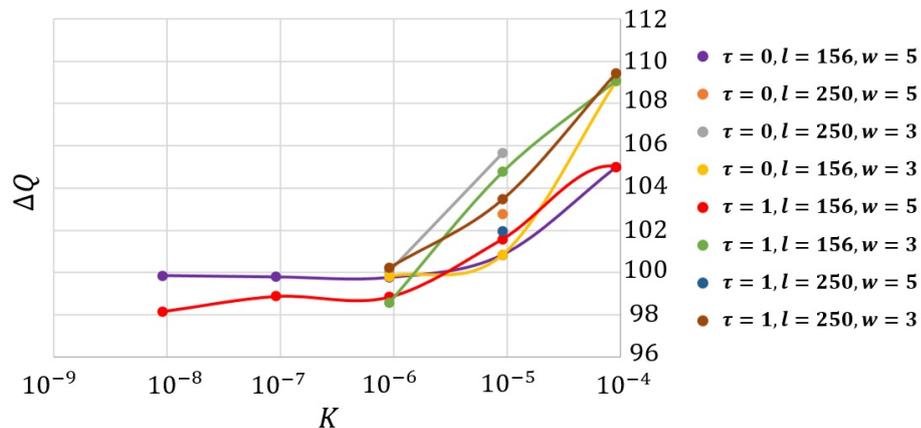


Рисунок 6.21: Относительная добыча нефти  $\Delta Q$  при различных значениях безразмерного параметра  $K$ . Давление на границе трещины сбрасывалось в течение 1 дня.

Получили, что при  $K \leq 10^{-6}$  для достижения наибольшей добычи нефти предпочтителен быстрый режим сброса давления в скважине; для  $K > 10^{-5}$  предпочтителен умеренно медленный сброс (1 день) и для  $K$  между  $10^{-6}$  и  $10^{-5}$  медленный режим сброса (7 дней) всегда предпочтителен в случае предела те-

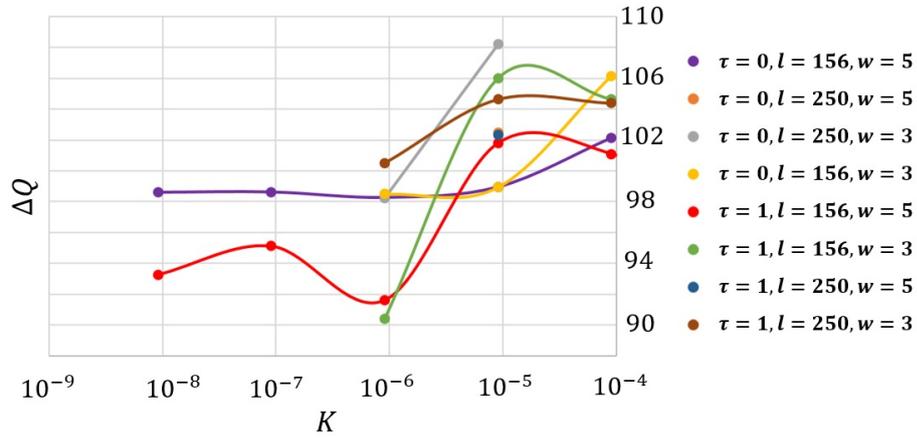


Рисунок 6.22: Относительная добыча нефти  $\Delta Q$  при различных значениях безразмерного параметра  $K$ . Давление на границе трещины сбрасывалось в течение 7 дней.

кучести жидкости ГРП, равного 1 Па.

Далее для каждого значения безразмерного параметра  $K$  построим графики зависимости относительной добычи нефти  $\Delta Q$  от безразмерного параметра  $X$  (Рисунки 6.23, 6.24).

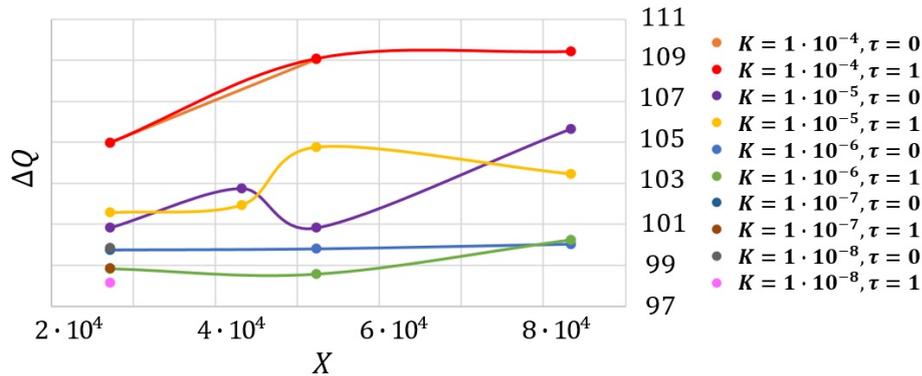


Рисунок 6.23: Относительная добыча нефти  $\Delta Q$  при различных значениях безразмерного параметра  $X$ . Давление на границе трещины сбрасывалось в течение 1 дня.

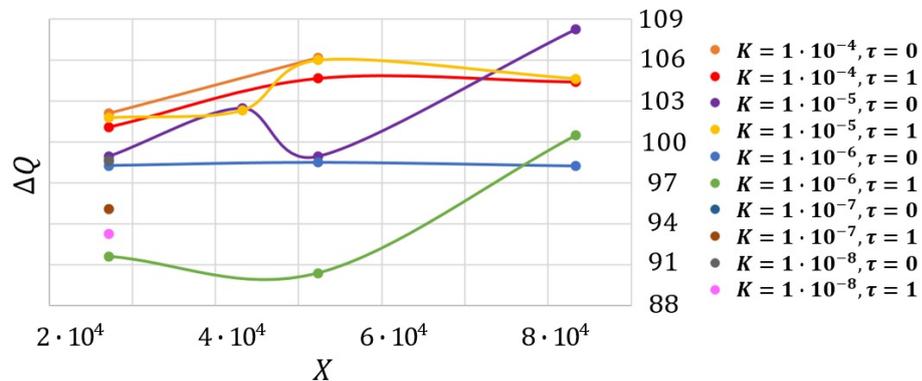


Рисунок 6.24: Относительная добыча нефти  $\Delta Q$  при различных значениях безразмерного параметра  $X$ . Давление на границе трещины сбрасывалось в течение 7 дней.

В случае нулевого предела текучести, если  $K = 10^{-6}$ , умеренно медленный сброс давления (1 день) предпочтителен, когда  $X \leq 5.2 \cdot 10^4$ , и медленный сброс (7 дней) предпочтителен, когда  $X > 5.2 \cdot 10^4$ .

Для объединения всех результатов, полученных при анализе Рисунков 6.21 - 6.24, была построена блок-схема для определения оптимального режима сброса давления для различных параметров течения и месторождения (см. Рисунок 6.25).

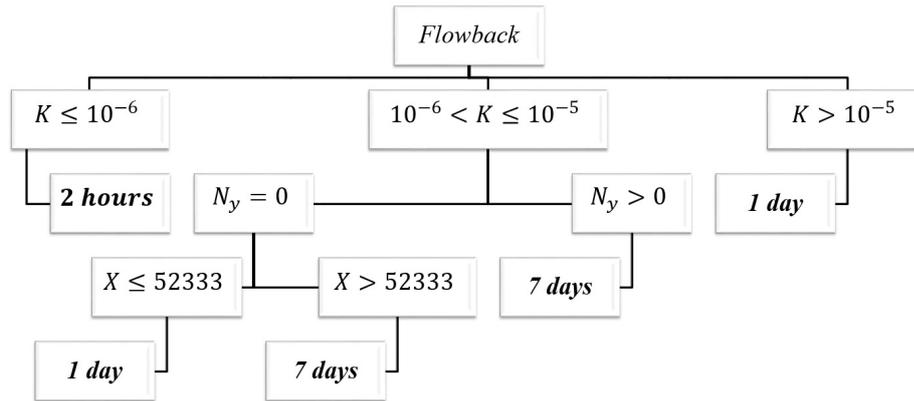


Рисунок 6.25: Схема для определения оптимальной динамики сброса давления в скважине для достижения максимальной добычи нефти при помощи технологии гидроразрыва пласта.

## 6.7 Выводы

В данной главе путем осреднения по высоте и ширине трещины была получена многофазная модель фильтрации жидкостей в трещине гидроразрыва пласта. Построен и реализован численный алгоритм.

Изучены различные аналитические формулы, пригодные для описания линейного притока из пласта в трещину: формула Картера (не учитывающая изменение давления в трещине) и интегральная формула (учитывающая нестационарность давления в трещине). Также были изучены другие аналитические решения задачи о притоке газа, проведено сравнение численных и аналитических результатов для выявления наибольшего совпадения.

Также была решена задача о сопряженном течении в пласте и трещине. В данном случае приток из пласта моделировался численно. Получено совпадение с аналитическими формулами, когда их использование возможно. Получено, что нестационарность давления в трещине сильно влияет на результаты добычи нефти, особенно при долгом снижении давления в скважине (на гра-

нице трещины). Также получено, что двухфазные эффекты течения в пласте оказывают значительное влияние на характер течения. Кроме того численная модель притока значительно увеличивается скорость расчетов.

Проведен численный анализ сопряженной задачи. Получено, что для сохранения точности результатов достаточно использовать много расчетных точек в пласте (200) и только 2 или 10 в трещине, в зависимости от скорости падения давления на границе.

При построении модели течения в трещине также учитывались геомеханические свойства проппанта: сжатие с учетом крошения и перекомпановки и вдавливание проппанта в стенки трещины. Был проведен анализ этих эффектов. Получено, что сжатие проппанта оказывает большее влияние на проводимость трещины, чем вдавливание при использовании паспорта проппанта (когда сжатие считается не по формулам, а по имеющимся таблицам зависимости сдвигающих напряжений и раскрытия/проницаемости). Если считать сжатие по аналитическим формулам, вдавливание оказывает большее влияние. Кроме того, большее значение проводимости не всегда означает большее значение добычи, поскольку при быстром сбросе давления увеличивается градиент давления, но уменьшается проводимость за счет геомеханики.

Для анализа последнего эффекта было проведено большое параметрическое исследование различных режимов течения в трещине ГРП. Варьировались параметры течения, влияющие на проводимость, время сброса давления, передел текучести жидкости ГРП. Построена схема, с помощью которой, зная безразмерные параметры модели, можно определить оптимальную динамику сброса давления на границе (в скважине) для достижения максимальной добычи нефти.

## Заключение

В диссертации были развиты модели фильтрации суспензии, которые использовались для моделирования течений в прискважинной зоне и трещине гидро-разрыва.

- Развита модель фильтрации суспензии с одной жидкой фазой с учетом переноса, осаждения и вымывания твердых частиц. Новым элементом модели является учет течения жидкости внутри упаковки твердых частиц. Результаты численного моделирования совпали с существующими аналитическими решениями. Было проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными по загрязнению пористых образцов. Получено, что учет течения жидкости между осажденными частицами необходим в случае достаточно большой концентрации осажденных частиц.
- На основании сравнения результатов численного моделирования и результатов экспериментов из открытых источников была составлена база замыкающих соотношений для описания интенсивности захвата частиц. Выбор замыкающих соотношений зависит от отношения размера частиц к размеру зерен пористой среды и от возможности частиц осесть на стенках пор под действием сил ближнего взаимодействия.
- Было получено полуэмпирическое соотношение для определения критической скорости мобилизации частиц в поток жидкости. Формула показала хорошее совпадение с экспериментами в трубах и пористой среде.
- Была построена модель фильтрации с двумя жидкими фазами. В качестве замыкающих соотношений для захвата и вымывания частиц были выбраны ранее найденные выражения. Построенная модель была использована для моделирования заводнения и очистки прискважинной области. Ана-

лизируя графики проницаемости и скорости суспензии вблизи скважины, предложен алгоритм определения интенсивности и оптимальной скорости очистки прискважинной зоны.

- Была построена сопряженная гео- и гидромеханическая модель очистки трещины гидроразрыва. Были учтены такие эффекты как сжатие и вдавливание проппанта, двухфазный приток из пласта, неньютоновская реология и сжимаемость жидкости гидроразрыва. Получено, что в типичных пластовых условиях наибольшее влияние на снижение проводимости трещины оказывает сжатие проппанта.
- Для заданного диапазона параметров месторождения был проведен параметрический анализ очистки трещины гидроразрыва. Установлено, что гео- и гидромеханические факторы по разному реагируют на скорость снижения давления на границе. В зависимости от значений входных параметров для каждого из случаев была определена оптимальная скорость снижения давления в скважине.

Построенные модели фильтрации могут использоваться и для описания других процессов, например, течения магмы, закачки и добычи газа. Построенная сопряженная гео- и гидромеханическая модель очистки трещины гидроразрыва может стать частью симулятора, моделирующего течение во всей системе скважина-трещины-пласт. Результаты по распределению пористости, проницаемости, раскрытия и других параметров могут использоваться в качестве входных параметров для двумерных моделей очистки трещины гидроразрыва.

### Список литературы

- [1] T. Iwasaki, «Some notes on sand filtration» // Journal-American Water Works Association, т. 29, № 10, с. 1591—1597, 1937.
- [2] C. Gruesbeck, R. Collins и др., «Entrainment and deposition of fine particles in porous media» // Society of Petroleum Engineers Journal, т. 22, № 06, с. 847—856, 1982.
- [3] J. Herzig, D. Leclerc и P. L. Goff, «Flow of suspensions through porous media—application to deep filtration» // Industrial & Engineering Chemistry, т. 62, № 5, с. 8—35, 1970.
- [4] H. Fallah и S. Sheydai, «Drilling Operation and Formation Damage» // 2013.
- [5] A. Dabiri, M. Afkhami и H. Fallah, «Reservoir formation damage due to mud filtration» // AJCHE, т. 1, с. 1—5, 2013.
- [6] R. G. Guedes, F. A. Al-Abduwani, P. Bedrikovetsky, P. K. Currie и др., «Deep-bed filtration under multiple particle-capture mechanisms» // SPE Journal, т. 14, № 03, с. 477—487, 2009.
- [7] E. S. Boek, C. Hall и P. M. Tardy, «Deep bed filtration modelling of formation damage due to particulate invasion from drilling fluids» // Transport in porous media, т. 91, № 2, с. 479—508, 2012.
- [8] A. Lohne и др., «Formation-damage and well-productivity simulation» // SPE Journal, т. 15, № 03, с. 751—769, 2010.
- [9] Ю. М. Шехтман, Фильтрация малоконцентрированных суспензий. Изд-во Академии наук СССР, 1961.
- [10] J. Litwiniszyn, «Colmatage considered as a certain stochastic process» // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech, т. 11, № 3, с. 81, 1963.

- [11] L. Fan, R. Nassar, S. Hwang и S. T. Chou, «Analysis of deep bed filtration data: Modeling as a birth-death process» // *AIChE Journal*, т. 31, № 11, с. 1781–1790, 1985.
- [12] A. Zamani и B. Maini, «Flow of dispersed particles through porous media—deep bed filtration» // *Journal of Petroleum Science and Engineering*, т. 69, № 1-2, с. 71–88, 2009.
- [13] S. A. Bradford и M. Bettahar, «Concentration dependent transport of colloids in saturated porous media» // *Journal of Contaminant Hydrology*, т. 82, № 1-2, с. 99–117, 2006.
- [14] S. Xu, B. Gao и J. E. Saiers, «Straining of colloidal particles in saturated porous media» // *Water Resources Research*, т. 42, № 12, 2006.
- [15] A. Osiptsov, «Fluid Mechanics of Hydraulic Fracturing: a Review» // *J. Petr. Sci. and Eng.*, т. 156, с. 513–535, 2017.
- [16] E. Detournay, «Mechanics of hydraulic fractures» // *Annual Review of Fluid Mechanics*, т. 48, с. 311–339, 2016.
- [17] S. Boronin и др., «Integrated modeling of fracturing-flowback-production dynamics and calibration on field data: Optimum well startup scenarios» // *Petroleum Science*, 2022.
- [18] S. Boronin, A. Osiptsov и K. Tolmacheva, «Multi-fluid model of suspension filtration in a porous medium» // *Fluid Dynamics*, т. 50, № 6, с. 759–768, 2015.
- [19] K. Tolmacheva, S. Boronin и A. Osiptsov, «Formation damage and cleanup in the vicinity of flooding wells: Multi-fluid suspension flow model and calibration on lab data» // *Journal of Petroleum Science and Engineering*, т. 178, с. 408–418, 2019.
- [20] A. Osiptsov, I. Garagash, S. Boronin, K. Tolmacheva, K. Lezhnev и G. Paderin, «Impact of Flowback Dynamics on Fracture Conductivity» // *Journal of Petroleum Science and Engineering*, т. 188, с. 106 822, 2020.

- [21] E. Redekop, S. Boronin, K. Tolmacheva, A. Burukhin, A. Osiptsov и E. Belonogov, «Effects of salinity and rock clogging on injectivity dynamics of flooding wells: Experiments, modeling and validation on field data» // Journal of Petroleum Science and Engineering, т. 202, с. 108 504, 2021.
- [22] S. Boronin и др., «Damage to formation surrounding flooding wells: modelling of suspension filtration with account of particle trapping and mobilization» // в Journal of Physics: Conference Series, IOP Publishing, т. 925, 2017, с. 012 009.
- [23] K. Tolmacheva, S. Boronin и A. Osiptsov, «Multi-fluid model for suspension filtration in porous media: effects of particle trapping and mobilization» // Computation and Experimental Methods in Multiphase and Complex Flow IX, 2017.
- [24] S. Boronin и др., «Modelling of injection well capacity with account for permeability damage in the near-wellbore zone for oil fields in western siberia (Russian)» // в SPE Russian Petroleum Technology Conference, Society of Petroleum Engineers, 2017.
- [25] A. Osiptsov, S. Boronin, K. Tolmacheva, B. Belozerov, E. Belonogov и A. Yakovlev, «Improving Well Injectivity by Interchanging Injection and Production When Flooding to Maintain Reservoir Pressure» // в Saint Petersburg 2018, European Association of Geoscientists & Engineers, т. 2018, 2018, с. 1—5.
- [26] A. Osiptsov и др., «Towards Field Testing of the Flowback Technology for Multistage-Fractured Horizontal Wells: Modeling-Based Design and Practical Implications» // в SPE Russian Petroleum Technology Conference, OnePetro, 2019.
- [27] A. Vainshtein и др., «Field Testing of the Flowback Technology for Multistage-Fractured Horizontal Wells: Test Results and Primary Interpretation of the Results» // в SPE Russian Petroleum Technology Conference, OnePetro, 2020.
- [28] A. Vainshtein и др., «Field Testing of the Flowback Technology for Multistage-Fractured Horizontal Wells: Generalization to Find an Optimum Balance

Between Aggressive and Smooth Scenarios» // в SPE Russian Petroleum Technology Conference, OnePetro, 2021.

- [29] Г. Падерин и др., «Патент № 2745684 Способ сохранения безопасного диапазона проводимости трещины при выводе на режим скважины с ГРП: Заявка № 2020134094. Приоритет изобретения 16.10.2020. Дата гос. регистрации 30.03.2021.»
- [30] A. Suri, M. M. Sharma и др., «Strategies for sizing particles in drilling and completion fluid» // SPE Journal, т. 9, № 01, с. 13–23, 2004.
- [31] P. Bedrikovetsky, F. D. Siqueira, C. A. Furtado и A. L. S. Souza, «Modified particle detachment model for colloidal transport in porous media» // Transport in porous media, т. 86, № 2, с. 353–383, 2011.
- [32] P. Bedrikovetsky, A. Zeinijahromi, F. D. Siqueira, C. A. Furtado и A. L. S. de Souza, «Particle detachment under velocity alternation during suspension transport in porous media» // Transport in Porous Media, т. 91, № 1, с. 173–197, 2012.
- [33] E. van Oort, J. Van Velzen, K. Leerlooijer и др., «Impairment by suspended solids invasion: testing and prediction» // SPE Production & Facilities, т. 8, № 03, с. 178–184, 1993.
- [34] P. Bedrikovetsky, D. Marchesin, F. Shecaira, A. Souza, P. Milanez и E. Rezende, «Characterisation of deep bed filtration system from laboratory pressure drop measurements» // Journal of Petroleum Science and Engineering, т. 32, № 2-4, с. 167–177, 2001.
- [35] P. Bedrikovetsky и др., «Damage characterization of deep bed filtration from pressure measurements» // в International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control, Society of Petroleum Engineers, 2002.
- [36] L. A. Spielman, «Particle capture from low-speed laminar flows» // Annual review of fluid mechanics, т. 9, № 1, с. 297–319, 1977.
- [37] L. Song и M. Elimelech, «Dynamics of colloid deposition in porous media: Modeling the role of retained particles» // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, т. 73, с. 49–63, 1993.

- [38] G. Chauveteau, L. Nabzar, J. Coste и др., «Physics and modeling of permeability damage induced by particle deposition» // в SPE Formation Damage Control Conference, Society of Petroleum Engineers, 1998.
- [39] C. Roque, G. Chauveteau, M. Renard, G. Thibault, M. Bouteica, J. Rochon и др., «Mechanisms of formation damage by retention of particles suspended in injection water» // в SPE European Formation Damage Conference, Society of Petroleum Engineers, 1995.
- [40] J. Veerapen, B. Nicot, G. Chauveteau и др., «In-depth permeability damage by particle deposition at high flow rates» // в SPE European Formation Damage Conference, Society of Petroleum Engineers, 2001.
- [41] J. Happel, «Viscous flow in multiparticle systems: slow motion of fluids relative to beds of spherical particles» // AIChE journal, т. 4, № 2, с. 197—201, 1958.
- [42] A. C. Payatakes, C. Tien и R. M. Turian, «A new model for granular porous media: Part I. Model formulation» // AIChE Journal, т. 19, № 1, с. 58—67, 1973.
- [43] R. Rajagopalan и C. Tien, «Trajectory analysis of deep-bed filtration with the sphere-in-cell porous media model» // AIChE Journal, т. 22, № 3, с. 523—533, 1976.
- [44] B. Mirshekari, M. Dadvar, H. Modarress и B. Dabir, «Modelling and simulation of multiphase flow formation damage by fine migration including the multilayer deposition effect» // International Journal of Oil, Gas and Coal Technology, т. 6, № 6, с. 624—644, 2013.
- [45] F. Civan, «Reservoir Formation Damage. Gulf Professional Publishing» // 2007.
- [46] M. A. Hubbe, «Theory of detachment of colloidal particles from flat surfaces exposed to flow» // Colloids and Surfaces, т. 12, с. 151—178, 1984.
- [47] A. J. Goldman, R. G. Cox и H. Brenner, «Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall—I Motion through a quiescent fluid» // Chemical engineering science, т. 22, № 4, с. 637—651, 1967.

- [48] A. Goldman, R. Cox и H. Brenner, «Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall—II Couette flow» // Chemical engineering science, т. 22, № 4, с. 653—660, 1967.
- [49] M. O’neill, «A sphere in contact with a plane wall in a slow linear shear flow» // Chemical Engineering Science, т. 23, № 11, с. 1293—1298, 1968.
- [50] D. Leighton и A. Acrivos, «The lift on a small sphere touching a plane in the presence of a simple shear flow» // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, т. 36, № 1, с. 174—178, 1985.
- [51] G. Ziskind, «Particle resuspension from surfaces: revisited and re-evaluated» // Reviews in Chemical Engineering, т. 22, № 1-2, с. 1—123, 2006.
- [52] M. R. King и D. T. Leighton Jr, «Measurement of the inertial lift on a moving sphere in contact with a plane wall in a shear flow» // Physics of Fluids, т. 9, № 5, с. 1248—1255, 1997.
- [53] M. Phillips, «A force balance model for particle entrainment into a fluid stream» // Journal of physics D: Applied physics, т. 13, № 2, с. 221, 1980.
- [54] K. C. Khilar, H. S. Fogler и др., «Water sensitivity of sandstones» // Society of Petroleum Engineers Journal, т. 23, № 01, с. 55—64, 1983.
- [55] C. D. Wehunt и др., «Well performance with operating limits under reservoir and completion uncertainties» // В SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Society of Petroleum Engineers, 2003.
- [56] S. Miedema, «Constructing the Shields Curve: Part A Fundamentals of the Sliding, Rolling and Lifting Mechanisms for the Entrainment of Particles» // Journal of dredging engineering, т. 12, № 1, с. 1—49, 2012.
- [57] P. L. Wiberg и J. D. Smith, «Calculations of the critical shear stress for motion of uniform and heterogeneous sediments» // Water resources research, т. 23, № 8, с. 1471—1480, 1987.
- [58] D. Hall, «Measurements of the mean force on a particle near a boundary in turbulent flow» // Journal of Fluid Mechanics, т. 187, с. 451—466, 1988.
- [59] A. Mollinger и F. Nieuwstadt, «Measurement of the lift force on a particle fixed to the wall in the viscous sublayer of a fully developed turbulent boundary layer» // Journal of Fluid Mechanics, т. 316, с. 285—306, 1996.

- [60] P. Cherukat и J. B. McLaughlin, «The inertial lift on a rigid sphere in a linear shear flow field near a flat wall» // Journal of Fluid Mechanics, т. 263, с. 1—18, 1994.
- [61] S. White, «Plane bed thresholds of fine grained sediments» // Nature, т. 228, № 5267, с. 152, 1970.
- [62] A. C. Todd, J. Somerville, G. Scott и др., «The application of depth of formation damage measurements in predicting water injectivity decline» // в SPE Formation Damage Control Symposium, Society of Petroleum Engineers, 1984.
- [63] S. Rege и H. S. Fogler, «A network model for deep bed filtration of solid particles and emulsion drops» // AIChE Journal, т. 34, № 11, с. 1761—1772, 1988.
- [64] A. Imdakm и M. Sahimi, «Computer simulation of particle transport processes in flow through porous media» // Chemical engineering science, т. 46, № 8, с. 1977—1993, 1991.
- [65] M. Sahimi и A. Imdakm, «Hydrodynamics of particulate motion in porous media» // Physical review letters, т. 66, № 9, с. 1169, 1991.
- [66] M. M. Sharma и Y. Yortsos, «Transport of particulate suspensions in porous media: model formulation» // AIChE Journal, т. 33, № 10, с. 1636—1643, 1987.
- [67] A. Santos и P. Bedrikovetsky, «A stochastic model for particulate suspension flow in porous media» // Transport in Porous Media, т. 62, № 1, с. 23—53, 2006.
- [68] A. Shapiro, P. Bedrikovetsky, A. Santos и O. Medvedev, «A stochastic model for filtration of particulate suspensions with incomplete pore plugging» // Transport in Porous Media, т. 67, № 1, с. 135—164, 2007.
- [69] P. Bedrikovetsky, «Upscaling of stochastic micro model for suspension transport in porous media» // Transport in Porous Media, т. 75, № 3, с. 335—369, 2008.

- [70] A. Shapiro и P. Bedrikovetsky, «A stochastic theory for deep bed filtration accounting for dispersion and size distributions» // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, т. 389, № 13, с. 2473–2494, 2010.
- [71] Z. You, A. Badalyan, P. Bedrikovetsky и др., «Size-exclusion colloidal transport in porous media—stochastic modeling and experimental study» // *SPE Journal*, т. 18, № 04, с. 620–633, 2013.
- [72] P. Jadhunandan и N. Morrow, «Spontaneous imbibition of water by crude oil/brine/rock systems» // *In Situ;(United States)*, т. 15, № 4, 1991.
- [73] P. Jadhunandan, N. R. Morrow и др., «Effect of wettability on waterflood recovery for crude-oil/brine/rock systems» // *SPE reservoir engineering*, т. 10, № 01, с. 40–46, 1995.
- [74] J. Sheng, «Critical review of low-salinity waterflooding» // *Journal of Petroleum Science and Engineering*, т. 120, с. 216–224, 2014.
- [75] G. R. Jerauld, K. J. Webb, C.-Y. Lin, J. Seccombe и др., «Modeling low-salinity waterflooding» // в *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Society of Petroleum Engineers, 2006.
- [76] C. T. Q. Dang, L. X. Nghiem, Z. J. Chen, Q. P. Nguyen и др., «Modeling low salinity waterflooding: ion exchange, geochemistry and wettability alteration» // в *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Society of Petroleum Engineers, 2013.
- [77] F. Civan и др., «A Multi-purpose formation damage model» // в *SPE Formation Damage Control Symposium*, Society of Petroleum Engineers, 1996.
- [78] P. G. Bedrikovetsky и др., «Well-history-based prediction of injectivity decline during seawater flooding» // в *SPE European Formation Damage Conference*, Society of Petroleum Engineers, 2005.
- [79] L. Larsen, T. Hegre и др., «Pressure transient analysis of multifractured horizontal wells» // в *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Society of Petroleum Engineers, 1994.
- [80] K. G. Nolte и M. J. Economides, *Reservoir stimulation*. John Wiley & Sons Chichester, NY, 2000.

- [81] Г. Баренблатт, В. Ентов и В. Рыжик, «Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа» // Недрa, т. 2, 1972.
- [82] R. Carter, «Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area» // Appendix I of “Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension,” Drilling and Production Practice, GC Howard and CR Fast, New York, New York, USA, American Petroleum Institute, с. 261—269, 1957.
- [83] R. Dean и S. Advani, «An exact solution for pistonlike leak-off of compressible fluids» // Journal of energy resources technology, т. 106, № 4, с. 539—542, 1984.
- [84] Y. Fan, M. J. Economides и др., «Fracturing fluid leakoff and net pressure behavior in frac & pack stimulation» // в International Meeting on Petroleum Engineering, Society of Petroleum Engineers, 1995.
- [85] S. Advani, J. Torok и J. Lee, «General solutions for pistonlike displacement of compressible fluids in porous media» // Journal of energy resources technology, т. 107, № 4, с. 523—526, 1985.
- [86] Е. А. Кузнецов и Д. А. Шапиро, Методы математической физики. Новосибирский гос. ун-т, 2011.
- [87] P. Polubarinova-Kochina, «Theory of Flow of Ground Water» // Publisher” Nauka”, Moscow, т. 660, 1977.
- [88] Y. Cai, A. Dahi Taleghani и др., «Pursuing Improved Flowback Recovery after Hydraulic Fracturing» // в SPE Eastern Regional Meeting, Society of Petroleum Engineers, 2019.
- [89] E. Sotelo, Y. Cho и R. L. Gibson Jr, «Compliance estimation and multiscale seismic simulation of hydraulic fractures» // Interpretation, т. 6, № 4, T951—T965, 2018.
- [90] A. F. Gangi, «Variation of whole and fractured porous rock permeability with confining pressure» // в International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, Elsevier, т. 15, 1978, с. 249—257.

- [91] D. O. Ezulike, H. Dehghanpour, R. Hawkes и др., «Understanding flowback as a transient 2-phase displacement process: an extension of the linear dual-porosity model» // в SPE Unconventional Resources Conference Canada, Society of Petroleum Engineers, 2013.
- [92] Y. Liu, J. Y. Leung, R. Chalaturnyk и др., «Geomechanical simulation of partially propped fracture closure and its implication for water flowback and gas production» // SPE Reservoir Evaluation & Engineering, т. 21, № 02, с. 273–290, 2018.
- [93] J. Wang и D. Elsworth, «Role of proppant distribution on the evolution of hydraulic fracture conductivity» // Journal of Petroleum Science and Engineering, т. 166, с. 249–262, 2018.
- [94] H. Zhu, Y.-P. Zhao, Y. Feng, H. Wang, L. Zhang, J. D. McLennan и др., «Modeling of fracture width and conductivity in channel fracturing with nonlinear proppant-pillar deformation» // SPE Journal, 2019.
- [95] Л. Седов, «Механика сплошной среды. Т. 1, Наука» // 1970.
- [96] K. J. Scott, Hindered Settling of a Suspension of Spheres: Critical Evaluation of Equations Relating Settling Rate to Mean Particle Diameter and Suspension Concentrate. Chemical Engineering Research Group, CSIR, 1984.
- [97] А. А. Самарский, Теория разностных схем. "Наука," Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1989.
- [98] А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов и А. Ю. Семенов, Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Физматлит М., 2001, т. 607.
- [99] Н. Н. Калиткин, Численные методы. 2 изд. БХВ-Петербург, 2011.
- [100] S. Boronin, A. Osipov и J. Desroches, «Displacement of yield-stress fluids in a fracture» // International Journal of Multiphase Flow, т. 76, с. 47–63, 2015.
- [101] J. N. Israelachvili, Intermolecular and surface forces. Nauchny mir, 2011.
- [102] A. D. Zimon, Adhesion of dust and powder. Springer Science и Business Media, 2012.

- [103] P. Glover и E. Walker, «Grain-size to effective pore-size transformation derived from electrokinetic theory» // *Geophysics*, т. 74, № 1, E17—E29, 2008.
- [104] R. L. Miller и R. J. Byrne, «The angle of repose for a single grain on a fixed rough bed» // *Sedimentology*, т. 6, № 4, с. 303—314, 1966.
- [105] M. Kirkby и I. Statham, «Surface stone movement and scree formation» // *The Journal of Geology*, т. 83, № 3, с. 349—362, 1975.
- [106] P. Naden, «An erosion criterion for gravel-bed rivers» // *Earth Surface Processes and Landforms*, т. 12, № 1, с. 83—93, 1987.
- [107] J. Dewan и M. Chenevert, «Novel Procedures Accurately Measure Drilling Mud Dynamic Filtration» // в *SPWLA/CWLS Symposium*, Calgary, 1993, с. 13—16.
- [108] M. Chenevert и J. Dewan, «A model for filtration of water-base mud during drilling: determination of mudcake parameters» // *Petrophysics*, т. 42, № 03, 2001.
- [109] Д. Михайлов, Н. Рыжиков и В. Шако, «Комплексный экспериментальный подход к определению параметров зоны кольматации продуктивных пластов» // *Вестник ЦКР Роснедра*, № 1, с. 7—11, 2014.
- [110] Н. Бахвалов, Н. П. Жидков и Г. М. Кобельков, *Численные методы*. М.: наука, 1987, т. 600.
- [111] M. Mirabolghasemi, M. Prodanović, D. DiCarlo и H. Ji, «Prediction of empirical properties using direct pore-scale simulation of straining through 3D microtomography images of porous media» // *Journal of Hydrology*, т. 529, с. 768—778, 2015.
- [112] S. Boronin и др., «Modelling of Injection Well Capacity with Account for Permeability Damage in the Near-Wellbore Zone for Oil Fields in Western Siberia (Russian)» // в *SPE Russian Petroleum Technology Conference*, Society of Petroleum Engineers, 2017.
- [113] T. Al-Fariss и K. Pinder, «Flow through porous media of a shear-thinning liquid with yield stress» // *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, т. 65, № 3, с. 391—405, 1987.

- [114] M. A. Proett, W. C. Chin, M. Manohar, R. Sigal, J. Wu и др., «Multiple factors that influence wireline formation tester pressure measurements and fluid contacts estimates» // в SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Society of Petroleum Engineers, 2001.
- [115] К. Басниев, И. Кочина и В. Максимов, «Подземная гидромеханика. Недр» // 1994.
- [116] A. Osiptsov, S. Boronin, I. Garagash и К. Tolmacheva, «Coupled geomechanics-fluid mechanics phenomena during injection and flowback and their impact on hydraulic fracture conductivity in shales» // в Sixth EAGE Shale Workshop, 2019.
- [117] J. Desroches и Т. Bratton, «Formation Characterization: Well Logs» // Economides, M. & Nolte, K.(2000). Reservoir Stimulation, Third Edition. Wiley, 2000.
- [118] А. А. Оси́птов, «Hydraulic fracture conductivity: effects of rod-shaped proppant from lattice-Boltzmann simulations and lab tests» // Advances in water resources, т. 104, с. 293—303, 2017.