ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Козика Игоря Александровича
на тему: «Исследование и применение связи дискретного и непрерывного времени при моделировании траекторий гауссовских процессов с учетом высоких выбросов»
по специальности
1.1.4. «Теория вероятностей и математическая статистика»

Основное содержание диссертации составляют результаты об асимптотиках больших выбросов ограниченных на решетки скалярных гауссовских процессов и полей на плоскости. Данное исследование мотивировано, в частности, тем, что численное моделирования случайных процессов с непрерывным временем требует его дискретизации и важно знать, насколько малым должен быть шаг дискретизации для достижения требуемой точности. Результаты такого рода имеют приложения в финансовой математике, теории страхования, при анализе высокочастотных временных рядов. В непрерывном времени имеется достаточно полная асимптотическая теория высоких выбросов гауссовских процессов. Она изложена и во многом развита научным руководителем диссертанта В.И. Питербаргом (источники [15, 18] в списке литературы). В дискретном времени результатов значительно меньше и развитие соответствующей теории представляется актуальным.

Основные результаты диссертации являются развитием идей В.И. Питербарга. В одномерном случае рассматривается три типа решеток, имеющих следующие названия: плотная решетка, решетка Пикандса и разреженная решетка. В двумерном случае рассматривается 6 типов решеток, соответствующих декартовым произведениям решеток указанных типов. В главе 1 рассматриваются стационарные процессы, в главе 2 – нестационарные процессы, в главе 3 – однородные гауссовские поля на плоскости. Основные результаты собраны в теоремах 1 – 3. Полученные результаты показывают, что асимптотическое поведение вероятностей больших выбросов определяется (1) для стационарных процессов поведением ковариационной функции в окрестности нуля, (2) для нестационарных процессов – поведением корреляционной функции в окрестности диагонали и поведением дисперсии в окрестности точки максимума, которая предполагается единственной, (3) для однородных полей – поведением ковариационной функции в окрестности нуля на плоскости. При сделанных достаточно общих предположениях данные результаты дают законченную картину асимптотик вероятностей больших выбросов для гауссовских процессов, ограниченных на решетки.

В главе 4 рассматриваются приложения результатов главы 2 к анализу частных случаев, связанных с фрактальным броуновским движением со сносом. Особняком стоит глава 5, где описаны численные эксперименты касающиеся динамики двумерной динамической системы, возмущенной гауссовским шумом, а также влияния на нее кусочно-постоянного управляющего воздействия. Данная система описывает активность афферентного первичного нейрона вестибулярного аппарата.

Основные результаты диссертации являются новыми. Их достоверность подтверждается строгими доказательствами в главах 1 – 4. В главе 5 проведенные численные эксперименты сопоставлялись с близкими известными результатами.

Перейдем к более подробному описанию содержания диссертационной работы.

В главе 1 рассматриваются асимптотики больших выбросов для стационарных гауссовских процессов. В лемме 1 указанные асимптотики строятся для временного интервала, уровня и решетки, зависящих от большого параметра u. При этом анализируется поведение двух первых моментов, процессов χ_u, порожденных исходным случайным процессом, и устанавливается его слабая сходимость к некоторому процессу χ, связанному с фрактальным броуновским движением. В следствии 1 и лемме 2 рассматриваются вероятности больших выбросов на двух решетках. В доказательствах здесь используются результаты третьей главы диссертации, которые касаются однородных гауссовских полей. Теорема 1 является обобщением леммы 1 и названа автором аналогом теоремы Пикандса в дискретном времени. По сравнению с леммой 1 в ней допускается более широкий класс временных интервалов. Доказательство утверждений теоремы 1 для плотной решетки и решетки Пикандса следует идеям доказательства теоремы 9.3.1 из книги В.И. Питербарга, 2015 ([18] в списке литературы). Здесь используются неравенство Бонферрони, метод двойных сумм и оценки хвостов гауссовских распределений. Для разреженной решетки доказательство не приводится и заменяется ссылкой на работу Piterbarg, 2004 ([9] в списке литературы).

В главе 2 рассматривается случай нестационарного гауссовского процесса. Предполагается, что (1) он является локально стационарным, т.е. корреляционная функция в малой окрестности диагонали с точностью до величин более высокого порядка малости зависит только от разности аргументов, (2) дисперсия имеет единственную точку максимума, в окрестности которой справедливо степенное разложение. Из [18, гл. 10] известно, что в этих условиях асимптотика высоких выбросов определяется соотношением между показателями степеней в разложениях корреляционной функции в окрестности диагонали и дисперсии в окрестности ее точки максимума. Если корреляция более существенна, чем дисперсия, то асимптотика высоких выбросов будет выглядеть примерно так же, как в случае стационарного процесса. В противоположном случае важно лишь поведение хвоста распределения в точке максимума дисперсии. Имеется также пограничный случай. Как показывает теорема 2, эта картина сохраняется и при ограничении процесса на решетки. Схема ее доказательства также весьма схожа со схемой доказательства теоремы 10.1 из [18]. В частности, здесь снова используется неравенство Бонферрони и метод двойных сумм. Дополнительно требуется рассмотреть три типа указанных выше решеток и, в частности, учесть влияние ограничения процесса на эти решетки на асимптотическое поведение слагаемых в суммах, возникающих после применения неравенства Бонферрони. Технически непростой анализ такого рода и составляет новизну проделанной работы.

В главе 3 рассматриваются асимптотики больших выбросов однородных гауссовских полей на плоскости, ограниченных на решетки. Рассматриваются шесть решеток, полученных в результате декартовых произведений одномерных решеток указанных выше трех типов. Предварительный анализ, проведенный в «локальной» лемме 4 близок к тому, который был проведен в лемме 1. Он показывает, что при сделанных предположениях об асимптотическом поведении ковариационной функции в нуле асимптотика отличается от одномерного случая лишь видом констант Пикандса. Доказательство аналога теоремы Пикандса в дискретном времени (теорема 3) в целом также похоже на доказательство соответствующей теоремы 2 из главы 1, но технически существенно более сложно. Оценка слагаемых в двойных суммах требует тонких рассуждений с привлечением результатов из монографии Piterbarg, 2019 ([15] в списке литературы).

В небольшой главе 4 полученные результаты применяются к вычислению асимптотики вероятности больших выбросов фрактального броуновского движения и оценки вероятности разорения страховой компании, капитал которой описывается фрактальным броуновским движением со сносом. Во втором случае строится асимптотика вероятности разорения при стремлении начального капитала компании к бесконечности. В обоих случаях рассматриваются все три описанных типа решеток и ключевую роль играет теорема 2. Полученные в утверждениях 1 и 2 результаты, касающиеся рассматриваемых частных случаев, являются новыми, в том числе и для винеровского процесса, и служат хорошей иллюстрацией основного результата главы 2.

В главе 5 проводится численный анализ двумерной динамической системы, описывающей активность афферентного первичного нейрона (АПН) вестибулярного аппарата. Раздел 5.1 посвящен общей истории вопроса и содержит описание упрощенной модель Ходжкина-Хаксли с модификацией Сото-Александрова: система (5.3). Ее исследование в дальнейшем проводится при значениях параметров, обеспечивающих наличие асимптотически устойчивого фокуса и асимптотически устойчивого предельного цикла, разделенных неустойчивым предельным циклом. С точки зрения биофизики устойчивый предельный цикл соответствует передаче информации по нейронной сети с помощью колебательного процесса. Устойчивое равновесие соответствует отсутствию передачи информации. В разделе 5.2 в модель добавлен случайный процесс, аппроксимирующий гауссовский шум. Как показывают численные эксперименты, это приводит к случайным переходам системы из области притяжения точечного аттрактора в область притяжения периодического аттрактора и обратно. В разделе 5.3 в систему добавлена кусочно-постоянная функция, моделирующая кратковременную стимуляцию с помощью гальванического тока. При отсутствии шума и малом шуме такая стимуляция позволяет перевести систему из области притяжения равновесия в область притяжения периодического аттрактора. Большой шум может как подавлять стимуляцию, так и служить стимулятором указанного перехода. Таким образом, при большом шуме контроль над системой утрачивается. В работе указано, что результаты данных численных экспериментов связаны с пониманием целесообразности проведения космического эксперимента по применению гальванической стимуляции вестибулярного аппарата космонавта.

По работе имеются следующие замечания.

1. Глава 5 несколько выпадает их общего контекста. Приведенные в ней (интересные) результаты слабо связаны с остальным содержанием диссертации.
2. Из литературных источников, касающихся асимптотик больших выбросов гауссовских процессов на решетках автор упоминает почти исключительно работы В.И.Питербарга и соавторов. Хотя В.И.Питербарг, конечно, является лидером в этом направлении, следовало бы упомянуть и другие работы в рамках обзора. Укажем, например,

   Dębicki K., Jasnovidov G. Extremes of reflecting Gaussian processes on discrete grid //Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2024. – Т. 532. – №. 1. – С. 127952.

   Dębicki K., Hashorva E., Michna Z. On the continuity of Pickands constants //Journal of Applied Probability. – 2022. – Т. 59. – №. 1. – С. 187-201.
3. В ряде случаев изложение слишком сжато, что затрудняет его понимание. В частности, на с.15 (3 строка снизу) сделана ссылка на один из результатов [18], который служит основой дальнейших рассуждений. Но явно данный результат не формулируется. Далее, доказательство третьего утверждение теоремы 1 заменяется ссылкой (на с.24) на лемму 2 работы Piterbarg, 2004 ([9] в списке литературы). Но там результат сформулирован в других обозначениях. Поэтому здесь требуется больше пояснений. Еще один пример: на с. 55 схема появления множеств $[T+\sqrt{T}, 2T] \times [0, T]$ в первой большой формуле на этой странице никак не поясняется, хотя и делается ссылка на монографию [15].

4. Не пояснено, почему в теореме 3 рассматривается только 4 решетки из 6, а в доказательстве явно рассматривается подробно только одна решетка: декартово произведение решетки Пикандса и плотной решетки.

Остальные замечания являются мелкими:

5. с. 12. В замечании 1 говорится: “при $\gamma < 0$ шаг решетки увеличивается”. Но тогда получается, что это возможно для плотной решетки.
6. с. 27, строки 4-5 снизу. Данные неравенства тривиальным образом верны для всех u, а не только для больших.
7. с. 45, строка 6 сверху. “соответственно (3.1) или (3.1)” во втором случае должно быть (3.2).
8. с. 53, строка 7 снизу: вместо “по лемме 6” должно быть “по лемме 4”.
9. с. 54 строка 2. “Как и в монографиях [3] ...”: [3] не является монографией.
10. с. 70, строка перед формулой (5.1). В формуле для p_∞ вместо λ должно быть λ_{01}.
11. с. 71 в формулах в двух последних строках вместо v должно быть V. То же с. 84, формулы (5.11), (5.12).

Сделанные замечания не умаляют достоинств диссертационного исследования и не влияют на его общую положительную оценку. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам такого рода. Ее содержание соответствует специальности 1.1.4 «Теория вероятностей и математическая статистика», а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Результаты диссертации опубликованы в четырех печатных работах, в изданиях индексируемых Scopus (2 работы) и РИНЦ (2 работы).

Таким образом, соискатель Козик Игорь Александрович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4. «Теория вероятностей и математическая статистика».

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук,
профессор
Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И, Воровича
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования "Южный федеральный университет"

Рохлин Дмитрий Борисович

Подпись профессора Рохлина Д.Б. удостоверяю 28.05.2024 (Сыченков О.А.)

Контактные данные:
тел.: +7(908)5032072, e-mail: dbrohlin@sfedu.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:
344090 ЮФО, Ростовская область, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А
Южный федеральный университет, Институт математики, механики и
компьютерных наук им. И.И, Воровича
Тел.: +7(863)263-31-58; e-mail: dbrohlin@sfedu.ru