МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Гаража Александра Андреевна

Инварианты Жордана–Кронекера пары элементов алгебры Ли

Специальность 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа подготовлена на кафедре высшей алгебры механико–математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научные руководители:

Тимашёв Дмитрий Андреевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Якимова Оксана Сергеевна,
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты:

Жеглов Александр Борисович,
доктор физико-математических наук,
ФГБОУ ВО «МГУ имени М. В. Ломоносова»,
механико-математический факультет,
кафедра дифференциальной геометрии
и приложений, профессор

Талалаев Дмитрий Валерьевич,
доктор физико-математических наук,
ФГБОУ ВО «МГУ имени М. В. Ломоносова»,
механико-математический факультет,
кафедра высшей геометрии и топологии,
старший научный сотрудник

Молев Александр Иванович,
кандидат физико-математических наук,
Сиднейский университет, профессор

Защита диссертации состоится 1 марта 2024 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: vladimir.manuilov@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2836.

Автореферат разослан 1 февраля 2024 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
МГУ.011.4 ФГБОУ ВО МГУ,
доктор физико-математических наук, доцент

В. М. Мануйлов

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

Работа посвящена исследованию вполне интегрируемых бигамильтоновых систем на классических простых алгебрах Ли.

Одной из важных проблем гамильтоновой механики является поиск вполне интегрируемых гамильтоновых систем или, что то же самое, полных систем функций в инволюции. Полнота системы значит, что функции в ней алгебраически независимы и что их максимально возможное число.

Благодаря работе Магри[1] и последующим работам[2][3], стало понятно, что интегрируемость гамильтоновых систем тесно связана с их бигамильтоновой природой. Бигамильтоновость системы означает, что функции находятся в инволюции относительно не просто одной скобки Пуассона, а относительно целого пучка скобок (или, что тоже самое, относительно пары согласованных скобок Пуассона). Бигамильтоновы структуры удалось обнаружить в большинстве известных интегрируемых гамильтоновых систем.

И хотя вопрос построения биинтегрируемых систем по заданной паре согласованных скобок Пуассона активно исследуется, он до сих открыт. В некоторых частных случаях (если пучок скобок кронекеров или, наоборот, полупрост) поставленный вопрос решается довольно легко, но в общем случае — эффективного метода построения биинтегрируемой системы пока нет[4].

Более того, даже если линеаризовать пучок, то есть приблизить его парой скобок, где одна линейная, а вторая — постоянная, задача все еще будет сложной. Именно такую ситуацию мы и будем изучать. В таком случае можно считать, что одна из скобок — это скобка Ли-Пуассона на дуальном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а вторая скобка — постоянная. В качестве постоянной скобки мы будем рассматривать скобку с замороженным аргументом $\{\ ,\ \}_A$, которую можно построить по каждому элементу $A \in \mathfrak{g}^*$ (см. определение 1.2 в тексте диссертации).

В 1978 году Мищенко и Фоменко предложили замечательный и универ-

[1]Magri F. *A simple model of the integrable Hamiltonian equation* // J. Math. Phys. — 1978. — Vol. 19, no. 5. — P. 1156–1162.

[2]Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. *Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры* // Функц. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, № 4. — С. 13–30.

[3]Bolsinov A. V. *Complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko–Fomenko conjecture* //Theoretical and Applied Mechanics — 2016. — Vol. 43, no. 2. — P. 145–168.

[4]Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. *Open problems, questions and challenges in finite-dimensional integrable systems* // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2018. — Vol. 376, no. 2131. — P. 1–40.

сальный способ построения интегрируемых систем на алгебрах Ли — метод сдвига аргумента[5], являющийся обобщением конструкции Манакова[6]. Он заключается в том, что рассматривают инварианты коприсоединенного представления алгебры Ли, но подставляют в качестве аргумента не X, а $X - tA$ (то есть «сдвигают аргумент»), и рассматривают коэффициенты по t получившихся многочленов. Все полученные функции будут находиться в биинволюции, и в случае редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и регулярного элемента $A \in \mathfrak{g}^*$ полученная система функций будет полна. Подалгебра, порожденная всеми такими функциями, называется подалгеброй Мищенко-Фоменко и обозначается F_A.

Многие годы велась активная работа по поиску методов интегрирования бигамильтоновых систем. Перечислим несколько подходов к обобщению метода сдвига аргумента Мищенко-Фоменко.

Локальный метод сдвига аргумента. Браиловым была предложена конструкция, для которой достаточно иметь лишь локальные инварианты[7]. В этом методе в качестве аргумента подставляют $A - tX$ и разлагают в ряд Тейлора по t. Подалгебра H_A, порожденная коэффициентами ряда Тейлора, содержит в себе подалгебру Мищенко-Фоменко F_A.

Формальный метод сдвига аргумента. Можно заметить, что функции, полученные локальным методом сдвига аргумента, образуют бигамильтоновы цепочки, то есть удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям с некоторым начальным условием[8]. Формальный метод сдвига аргумента заключается в итеративном нахождении таких функций. Подалгебра, порожденная этими функциями, совпадает с подалгеброй H_A.

Ещё одним способом построения полных систем функций в биинволюции является рассмотрение *предельных подалгебр Мищенко-Фоменко.* А именно, рассматривается предел $F_{A(t)}$ при $t \to 0$, где $A(t)$ регулярно при $t \neq 0$. В работах Винберга и Шувалова[9][10][11] показано, что подалгебры, построенные таким

[5] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли* // Известия АН СССР. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396–415.

[6] Манаков С. В. *Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела* // Функц. анализ и его прил. — 1976. — Т. 10, № 4. — С. 93-94.

[7] Bolsinov A. V. *Commutative families of functions related to consistent Poisson brackets* // Acta Appl. Math. — 1991. — Vol. 24, no. 3. — P. 253-274.

[8] Болсинов А. В., Зуев К. М. *Формальная теорема Фробениуса и метод сдвига аргумента* // Матем. заметки. — 2009. — Т. 86, № 1. — С. 3–13.

[9] Elashvili A. G., Kac V. G., Vinberg E. B. *On Exceptional Nilpotents in Semisimple Lie Algebras* // J. Lie Theory — 2009. — Vol. 19 — P. 371-390.

[10] Шувалов В. В. *О пределах подалгебр Мищенко—Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли* // Функц. анализ и его прил. — 2002. — Т. 36, № 4. — С. 55–64.

[11] Винберг Э. Б. *Пределы интегрируемых гамильтонианов на полупростых алгебрах Ли* // Функц. анализ и его прил. — 2014. — Т. 48, № 2. — С. 39–50.

способом, также коммутативны в смысле скобки Ли-Пуассона и имеют максимально возможную степень трансцендентности при некоторых условиях на $A(t)$.

Наконец, Садэтовым[12] была доказана гипотеза Мищенко-Фоменко о том, что на любой алгебре Ли существует полная система функций в инволюции относительно скобки Ли-Пуассона. Но конструкция, используемая в доказательстве, далека от алгебр Мищенко-Фоменко. Поэтому интересной оказывается следующая открытая гипотеза: для любого регулярного элемента $A \in \mathfrak{g}^*$ можно построить полную систему функций в биинволюции относительно скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_A$. Эта гипотеза до сих пор не опровергнута и проверена для многих типов алгебр Ли[13][14].

Одним из перспективных подходов к работе с бигамильтоновыми системами является алгебраический подход, описанный в работе Болсинова и Чжан[15]. Согласно этому подходу, скобки Пуассона $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_A$ можно рассматривать как кососимметрические билинейные формы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_A$ над полем рациональных функций $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{g})$ на пространстве $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$ рациональных векторных полей на $\mathfrak{g}$. Тогда оказывается, что многочлены $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ задают полное семейство функций в биинволюции относительно $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_A$ тогда и только тогда, когда их дифференциалы $d\varphi_1, \ldots, d\varphi_s$ составляют базис билагранжева подпространства (т.е. максимального биизотропного подпространства) относительно обеих билинейных форм $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_A$. Значит, чтобы получить полное семейство функций в биинволюции на $\mathfrak{g}^*$, достаточно найти базис билагранжева подпространства и «проинтегрировать» его по независимой переменной X.

Для этого можно воспользоваться классической теоремой Жордана-Кронекера о каноническом виде пары кососимметрических билинейных форм. Эта теорема говорит о том, что для любой пары кососимметрических билинейных форм $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ можно найти базис (мы будем называть его *каноническим*), в котором пара форм приводится к блочно-диагональному виду с блоками двух типов: жордановыми и кронекеровыми. Из явного вида блоков следует, что вторые половины базисов каждого блока составляют базис билагранжева подпространства (такой базис билагранжева подпространства тоже будем

[12] Садэтов С. Е. *Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко* // ДАН СССР — 2004. — Т. 397, № 6. — С. 751-754.

[13] Ворушилов К. С. *Полные наборы полиномов в биинволюции на нильпотентных семимерных алгебрах Ли* // Математический сборник — 2021. — Т. 212, № 9. — С. 3-17.

[14] Ворушилов К. С. *Инварианты Жордана - Кронекера борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли* // Чебышевский сборник — 2021. — Т. 22, № 3. — С. 32-56.

[15] Bolsinov A. V., Zhang P. *Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras* // Transformation Groups. — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 51–86.

называть каноническим). Таким образом, искомый базис распадается на две части: жорданову и кронекерову.

Для того, чтобы найти кронекерову часть канонического базиса можно воспользоваться классическим методом Кронекера. Согласно этому методу, рассматривается подмодуль $\mathcal{Z} = \mathrm{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_A)$ модуля $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$ над кольцом $\mathbb{K}[t]$ и находится его *минимальный базис* — базис, старшие коэффициенты элементов которого линейно независимы.

Таким образом, задача поиска полной системы функций в биинволюции сводится к чисто алгебраической задаче поиска канонического базиса (и последующему интегрированию).

Если применить этот подход в случае редуктивной алгебры Ли и регулярного элемента A, то мы придем к методу сдвига аргумента. Напомним, что редуктивная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть отождествлена с дуальным пространством $\mathfrak{g}^*$ при помощи инвариантного скалярного умножения. Поэтому можно считать, что $A \in \mathfrak{g}$. Если элемент A сингулярен, то вопрос о каноническом виде пары форм $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_A$ открыт даже в случае простых алгебр Ли. В настоящей работе мы применим описанный подход в случае классической простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и сингулярного элемента $A \in \mathfrak{g}$. Таким образом, можно считать, что настоящая работа посвящена обобщению метода сдвига аргумента на случай сингулярного элемента A.

Наконец, опишем известные результаты, касающиеся интересующего нас подхода. В работах[16][17] для алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ уже были построены некоторый базис подпространства, натянутого на кронекерову часть канонического базиса, и соответствующие функции в биинволюции. Однако построенный базис не является каноническим. В той же работе Молева и Якимовой было показано, что некоторые элементы полученного базиса порождают подалгебру инвариантов $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ симметрической алгебры централизатора $\mathfrak{g}_A$, что тесно связано с построением жордановой части полной системы функций в биинволюции. Аналогичные результаты были получены и для некоторых элементов A из алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$.

Цели и задачи диссертации

Целью работы является построение полной системы функций в биинволюции, соответствующей каноническому базису билагранжева подпространства,

[16]Futorny V., Molev A. *Quantization of the shift of argument subalgebras in type A* // Advances in Mathematics — 2015. — Vol. 285. — P. 1358-1375.

[17]Molev A., Yakimova O. *Quantisation and nilpotent limits of Mishchenko–Fomenko subalgebras* // Represent. Theory — 2019. — Vol. 23. — P. 350-379.

на классических простых алгебрах Ли.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

1. Найти кронекерову часть канонического базиса пары форм $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$, где A — произвольный элемент классической простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

2. Построить полную систему функций в бинволюции относительно скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_A$, где A — произвольный элемент классической простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

3. Исследовать связь полученных полных систем функций в бинволюции с предельными подалгебрами Мищенко-Фоменко.

Положения, выносимые на защиту

1. Полная система функций в бинволюции, соответствующая каноническому базису билагранжева подпространства, относительно скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_A$ для произвольного элемента A из алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$.

2. Кронекерова часть полной системы функций в бинволюции, соответствующей каноническому базису билагранжева подпространства, относительно скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_A$ для «хороших» и «исправимых» элементов A алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n}$ и $\mathfrak{so}_{2n+1}$ (см. определения 3.1, 3.2 и 3.3 в тексте диссертации).

3. Полная система функций в бинволюции, соответствующая каноническому базису билагранжева подпространства, относительно скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_A$ для «хороших» полупростых элементов A алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$.

4. Взаимосвязь индексов Кронекера пары $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ с пластами алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Доказательство независимости индексов Кронекера от выбора элемента A внутри пласта в случае алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$. Построение примеров пластов, для которых это неверно, в случае алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$.

5. Доказательство того факта, что для полупростых элементов $A \in \mathfrak{g}$ построенные полные системы функций в бинволюции свободно порождают некоторые предельные подалгебры Мищенко–Фоменко. (В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ на элемент A накладывается дополнительное условие: A — «хороший».)

Научная новизна

Результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно.

Методы исследования

В работе используются методы теории групп и алгебр Ли, теории инвариантов, линейной алгебры.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер.

Полученные результаты могут быть использованы для решения аналогичных задач на других алгебрах Ли. Например, можно получить интересную дополнительную информацию об исключительных алгебрах Ли, так как изучение канонического вида пары форм $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_A$ является естественным методом исследования структуры редуктивных алгебр Ли (подробнее см. раздел 1.4 текста диссертации).

Кроме того, полученные результаты могут быть интересны с точки зрения квантования коммутативных алгебр и поиска формальных предельных подалгебр Мищенко–Фоменко.

Степень достоверности

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами. Результаты других авторов отмечены соответствующими ссылками.

Апробация результатов

Результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора [1, 2, 3, 4, 5], из них 3 статьи опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по физико-математическим специальностям, 2 — в тезисах докладов.

Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция «58th Seminar Sophus Lie», Эрланген, Германия (устный доклад, 9.03.2023);
- Девятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самара, Россия (устный доклад, 24.08.2021);
- Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, Россия (постерная сессия, 9.08.2021 – 13.08.2021);
- Mini-workshop «Algebraic groups: the White Nights season», Петербург, Россия (устный доклад, 15.07.2021);
- Международная конференция «Algebraic transformation groups», Рим, Италия (постерный доклад, 29.10.2019);
- Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, Россия (устный доклад, 2.02.2017);
- Конференция «Ломоносовские чтения», Москва, Россия (устный доклад, 20.04.2017).

Результаты работы докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

- Семинар «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством Д.И. Панюшева, Д.А. Тимашёва и О.С. Якимовой, МГУ (неоднократные устные доклады: 7.12.2016, 3.05.2017, 29.09.2021);
- Семинар «Современные геометрические методы» под руководством акад. А.Т. Фоменко и проф. А.С. Мищенко, МГУ (устный доклад, 15.05.2019);
- Семинар «Современная математика», МФТИ (устный доклад, 22.10.2019).

Публикации автора

Результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора [1, 2, 3, 4, 5], из них 3 статьи опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по физико-математическим специальностям, 2 — в тезисах докладов.

Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Полный объем работы составляет 70 страниц, включая 3 рисунка. Список литературы содержит 32 наименования.

Содержание работы

Во **введении** описываются цели работы, кратко формулируются основные результаты, а также освещается место данных результатов в современной теории интегрируемых систем и алгебр Ли.

В разделе 1.1 **первой главы** вводятся необходимые обозначения и определения. Далее формулируются классические результаты линейной алгебры: теорема Жордана–Кронекера и метод Кронекера поиска канонического базиса. В разделе 1.2.3 доказано, что в случае кососимметрических билинейных форм $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$ можно явно выписать порождающие модуля, исследуемого в методе Кронекера. Далее, в разделе 1.3 показано, как в случае редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и регулярного элемента $A \in \mathfrak{g}$ из описанных классических теорем следует метод сдвига аргумента. В том же разделе сформулированы известные результаты, касающиеся регулярных элементов классических алгебр Ли. Наконец, в разделе 1.4 показана связь между индексами Кронекера пары форм $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$ и пары кососимметрических билинейных форм b_B, b_A на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, которые соответствуют присоединенным операторам $\mathrm{ad}(B), \mathrm{ad}(A)$, где элемент A фиксирован, а элемент B — общего положения.

Вторая глава посвящена построению кронекеровой части канонического базиса билагранжева подпространства и соответствующей полной системы функций для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$.

В начале главы индуктивно определяются многочлены $q_n, \ldots, q_0 \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n][t, z]$ и $r_k \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n][t]$ с помощью формул

$$\begin{aligned} &q_n(z) := \chi_{X-tA}(z), \\ &q_{k+1}(z) = (z + \mu_k t) q_k(z) + r_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\chi_X(z)$ обозначает характеристический многочлен матрицы X, а $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ — собственные числа матрицы A, упорядоченные специальным образом. Также для матрицы A комбинаторно определяются числа $m_0, \ldots, m_{n-1}$. А именно, построим диаграмму Юнга, длины строк которой равны степеням инвариантных множителей матрицы A. Пронумеруем клетки диаграммы числами от 0 до $n-1$ слева направо и сверху вниз и обозначим через p_i количество строк над клеткой с номером i. Тогда положим

$$m_i = i - p_i \tag{2}$$

Для краткости обозначим через I следующий набор индексов:

$$I = \begin{cases} \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1\}, & \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \\ \{1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, n-1\}, & \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n \\ \{1,\, 3,\, 5,\, \ldots,\, 2n-1\}, & \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n},\ \mathfrak{so}_{2n},\ \mathfrak{so}_{2n+1} \end{cases}$$

Далее доказываются следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть многочлены q_i, r_i и числа m_i определены по формулам* (1) *и* (2)*. Тогда для любой матрицы $A \in \mathfrak{gl}_n$ выполнено:*

(i) Индексы Кронекера пары форм $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ равны $\{m_i \,|\, i \in I\}$.

(ii) Многочлены $\{q_i(X - tA) \,|\, i \in I\}$ составляют минимальный базис модуля $\mathcal{Z}$.

(iii) Коэффициенты многочленов $\{q_i(X-tA) \,|\, i \in I\}$ по переменной t составляют кронекерову часть канонического базиса пары форм $(\mathcal{B},\, \mathcal{B}_A)$.

(iv) Коэффициенты многочленов $\{r_i(t) \,|\, i \in I\}$ составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции, причем $dr_k = -q_k(X - tA)$.

Первые два утверждения следуют из комбинаторной леммы (которая доказана там же в разделе 2.2.1) и предложения о степенях многочленов $\deg_t q_k(X-tA)$. В разделе 2.2.2 задача сводится к случаю полупростого элемента A, и в разделе 2.2.3 доказывается предложение о степенях многочленов $\deg_t r_k(t)$. Наконец, в разделе 2.2.4 дается явный вид многочленов $r_k(t)$ и $q_k(X - tA)$ и доказывается, что $dr_k = -q_k(X - tA)$. Таким образом, предложение о степенях многочленов $q_k(X - tA)$ также оказывается верным, и все четыре утверждения доказаны.

В конце главы (раздел 2.3) рассматривается частный случай нильпотентного элемента A и полученные результаты формулируются в терминах метода сдвига аргумента. А именно, если в качестве базисных инвариантов взять коэффициенты характеристического многочлена, то все ненулевые многочлены, полученные методом сдвига аргумента, составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции.

Наконец, в разделе 2.4 приведен пример построения кронекеровой части полной системы функций в биинволюции для конкретной матрицы $A \in \mathfrak{gl}_n$.

Третья глава посвящена построению кронекеровой части канонического базиса билагранжева подпространства и соответствующей полной системы функций для простых классических алгебр Ли. В разделе 3.1 вводятся необходимые обозначения, а в разделе 3.2 результаты предыдущей главы переносятся на случай классических алгебр Ли. А именно, так же как и в случае $\mathfrak{gl}_n$ для каждой матрицы A можно определить многочлены q_k и r_k и подставить матрицу $X - tA$ в многочлены $q_k(z)$ в качестве аргумента z. Обозначим через N размер матриц в $\mathfrak{g}$, тогда $q_k(X - tA) \in \mathfrak{gl}_N \otimes \mathbb{K}[t]$. Таким образом, $q_k(X - tA)$ могут не лежать в $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$. Поэтому обозначим через π ортогональную проекцию $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$ на $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$ и положим

$$h_i(X - tA) = \pi(q_i(X - tA)). \tag{3}$$

Тогда для любых элементов $A \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ или $\mathfrak{sp}_{2n}$, выполнены все утверждения теоремы 1, если в них заменить многочлены q_i на h_i.

На алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$ полученные результаты можно перенести только для некоторых элементов $A \in \mathfrak{g}$. Назовем элемент A *хорошим*, если в соответствующей диаграмме Юнга верхняя строка нечетной длины, а все остальные строки (кроме, быть может, последней) разбиваются на пары одинаковой четности. Тогда для хороших элементов из алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ тоже верен аналог теоремы 1.

В случае алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n}$ одним из базисных инвариантов является пфаффиан, поэтому многочлен r_{2n-1} не подходит, так как его степень в 2 раза больше необходимой. Но несложно проверить, что для хороших элементов из многочлена r_{2n-1} можно извлечь корень и получить пфаффиан матрицы $X - tA$. Итак, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ переопределим элементы с индексом $2n - 1$:

$$r_{2n-1}(t) = \mathrm{Pf}(X - tA), \qquad h_{2n-1}(X - tA) = -dr_{2n-1}, \qquad m_{2n-1} = n - 1. \tag{4}$$

Тогда для многочленов h_i, r_i и чисел m_i, определенных по формулам (1)-(4), и для хороших элементов $A \in \mathfrak{so}_{2n}$ выполнены все утверждения теоремы 1, если в них заменить многочлены q_i на h_i.

В разделе 3.3 рассматриваются «исправимые» элементы алгебр Ли — это такие нильпотентные элементы, диаграмма Юнга которых получается из хорошей диаграммы добавлением сверху четного прямоугольника. Для таких элементов удалось построить полную систему функций в биинволюции, подправив коэффициенты характеристического многочлена, и доказать аналог теоремы 1 (теоремы 3.4 и 3.5).

Наконец, в разделе 3.4 исследуется зависимость индексов Кронекера от элемента A. А именно, для алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ показано, что индексы Кронекера пары $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ одинаковы для всех элементов A из одного пласта. Для алгебр $\mathfrak{so}_{2n}$ и $\mathfrak{so}_{2n+1}$ показано, что, с одной стороны, внутри пластов, содержащих хороший полупростой элемент, индексы Кронекера одинаковы, а с другой стороны — приведены примеры пластов, на которых индексы Кронекера не постоянны.

Четвертая глава посвящена построению жордановой части канонического базиса билагранжева подпространства и соответствующей полной системы функций.

В разделе 4.1 доказывается, что для алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ некоторые из многочленов, построенных в предыдущей главе (а именно, старшие коэффициенты многочленов r_k) являются базисными инвариантами централизатора $\mathfrak{z}(A)$ элемента A (лемма 4.3). Далее доказывается, что для построения жордановой части полной системы функций в биинволюции достаточно применить метод сдвига аргумента к описанным базисным инвариантам. Более формально, определим многочлены $f_{k,i}$ и $g_{k,i}$ по формулам:

$$r_k(t) = f_{k,0}(X) + f_{k,1}(X)t + \ldots + f_{k,m_k}(X)t^{m_k}. \tag{5}$$

$$f_{k,m_k}(X - sB) = g_{k,0}(X) + g_{k,1}(X)s + \ldots + g_{k,d_k}(X)s^{d_k}, \tag{6}$$

Тогда основная теорема о полной системе функций в биинволюции заключается в следующем:

Теорема 2. *Функции* $\{f_{k,l} | \, k \in I, \, l = 0, \ldots, m_k\}$*, определенные в* (5)*, и функции* $\{g_{i,j} | \, i \in I, \, j = 1, \ldots, d_i - 1\}$*, определенные в* (6)*, составляют соответственно кронекерову и жорданову части полной системы функций в биинволюции относительно скобок* $\{\, , \,\}$ *и* $\{\, , \,\}_A$ *для любого элемента* $A \in \mathfrak{g}$ *для* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ *или* $\mathfrak{sp}_{2n}$.

В разделе 4.2 все полученные результаты переносятся на случай хороших полупростых элементов алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$.

Наконец, в разделе 4.3 исследуется связь построенных полных систем функций в биинволюции и предельных подалгебр Мищенко-Фоменко. А именно, в разделе 4.3.1 вводятся необходимые определения и формулируется теорема Шувалова: если элемент $A(s) = A_0 + A_1 s + \ldots + A_r s^r$ регулярен при достаточно малых $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и все A_i принадлежат одной фиксированной картановской подалгебре $\mathfrak{h}$, то алгебра $\lim_{s \to 0} F_{A(s)}$ свободна. В качестве ее свободных порождающих можно взять объединение некоторых наборов производных базисных инвариантов алгебр $\mathfrak{z}(A_0) \cap \ldots \cap \mathfrak{z}(A_{k-1})$ вдоль A_k $(k = 0, \ldots, r)$ и произвольного базиса подпространства $\mathfrak{h}$.

Далее рассматривается линейный случай $A(s) = A + Bs$ и доказывается (теорема 4.10), что если элемент $A + Bs$ регулярен при достаточно малых $s \neq 0$ и элементы A, B лежат в одной картановской подалгебре, то наборы функций, построенные ранее, свободно порождают подалгебру $\lim\limits_{s \to 0} F_{A+Bs}$.

Заключение

Работа посвящена исследованию вполне интегрируемых бигамильтоновых систем на классических простых алгебрах Ли. А именно, в ней изучается вопрос построения полных систем функций в биинволюции, соответствующих каноническому базису билагранжева подпространства, на классических простых алгебрах Ли.

В случае алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ поставленную задачу удалось решить полностью: для произвольного элемента $A \in \mathfrak{g}$ найдена искомая полная система функций в биинволюции. Кронекерова часть этой системы построена в разделе 3.2.1, а жорданова — в разделе 4.1.

В случае алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ поставленная задача полностью решена для всех полупростых элементов $A \in \mathfrak{g}$, а в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ — для всех полупростых «хороших» элементов $A \in \mathfrak{g}$. Кронекеровы и жордановы части этих систем построены в разделах 3.2.2 и 4.2 соответственно.

В разделе 4.3 показано, что в случае полупростого элемента A построенные полные системы функций в биинволюции свободно порождают некоторые предельные подалгебры Мищенко–Фоменко. (В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ на элемент A накладывается дополнительное условие: A — «хороший».)

Кроме того, для некоторых типов элементов $A \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ или $\mathfrak{so}_{2n}$, была найдена кронекерова часть полной системы функций в биинволюции. А именно, в разделе 3.2.2 кронекерова часть построена для «хороших» элементов $A \in \mathfrak{g}$, а в разделе 3.3 — для «исправимых» элементов $A \in \mathfrak{g}$.

Из описанных результатов видно, что случаи алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$ оказались сложнее, чем случаи $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$. Это подтверждается и результатами раздела 3.4, в котором доказано, что для алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ индексы Кронекера постоянны для всех элементов A внутри пласта, а для случаев $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$ это неверно.

Кроме того, можно заметить, что случай $\mathfrak{so}_{2n}$ оказался сложнее, чем $\mathfrak{so}_{2n+1}$. Это также согласуется с результатами раздела 3.4 в котором показано что для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ индексы Кронекера постоянны внутри пластов содержащих полупростой элемент, а в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ это не так.

В качестве направлений дальнейших исследований можно выделить следующие:

- Исследовать, возможно ли построить кронекерову часть для произвольных элементов A из алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$.
- Исследовать, возможно ли дополнить построенную кронекерову часть до полной системы функций в биинволюции.
- Исследовать поставленную задачу для исключительных простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность Эрнесту Борисовичу Винбергу за постановку интересных задач, многочисленные обсуждения, воодушевляющие беседы и доброе и внимательное отношение. Также автор благодарен своим научным руководителям Дмитрию Андреевичу Тимашёву и Оксане Сергеевне Якимовой за постоянное внимание к работе, неоценимую помощь и поддержку. Автор признателен сотрудникам кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ за доброжелательную и творческую атмосферу.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

1. Garazha A. Kronecker's method and complete systems of functions in bi-involution on classical Lie algebras // Journal of Lie Theory. — 2023. — Vol. 33, no. 2. — P. 663-686.
   Журнал индексируется в WOS, Scopus. IF: WOS 2022 — 0,376, SJR 2022 — 0,353.

2. Гаража А. А. О каноническом базисе пары согласованных скобок Пуассона на алгебре матриц // Математический сборник — 2020. — Т. 211, № 6. — С. 95-106.
DOI: https://doi.org/10.4213/sm9282
Входит в перечень ВАК РФ, двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2022 – 0,860.

Английская версия: Garazha A. A. A canonical basis of a pair of compatible poisson brackets on a matrix algebra // Sbornik Mathematics. — 2020. — Vol. 211, no. 6. — P. 838–849.
DOI: https://doi.org/10.1070/SM9282
Журнал индексируется в WOS, Scopus. IF: WOS 2022 — 1,274, SJR 2022 — 0,571.

3. Гаража А. А. О каноническом базисе пары согласованных скобок Пуассона на симплектической алгебре Ли // Успехи математических наук. — 2022. — Т. 77, № 2. — С. 199-200.
DOI: https://doi.org/10.4213/rm10035
Входит в перечень ВАК РФ, двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2022 – 0,554.

Английская версия: Garazha A. A. On a canonical basis of a pair of compatible poisson brackets on a symplectic lie algebra // Russian Mathematical Surveys. — 2022. — Vol. 77, no. 2. — P. 375–377.
DOI: https://doi.org/10.1070/RM10035
Журнал индексируется в WOS, Scopus. IF: WOS 2022 — 1,21, SJR 2022 — 0,45.

Тезисы докладов

4. Гаража А. А. Об индексах Кронекера присоединённых операторов пары матриц // Шестая школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов. Москва, Россия, 30 января – 4 февраля 2017 г. Тезисы докладов. — 96 с. — Москва: Москва, 2017. — С. 22–23.

5. Гаража А. А. О полных системах функций в биинволюции на алгебрах Ли // Девятая школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов. Самара, Россия, 21-26 августа 2021 г.: тезисы докладов. — 66 с. — Самара: Издательство Самарского университета, 2021. — С. 20–21.