

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
НИИ МЕХАНИКИ

*На правах рукописи*

**Селюцкий Юрий Дмитриевич**

**Некоторые особенности динамики тела,  
взаимодействующего с потоком сопротивляющейся среды**

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор

Самсонов Виталий Александрович

Москва — 2024

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
Общая характеристика работы . . . . .	4
Обзор литературы . . . . .	17
<b>Глава 1. Моделирование аэродинамического воздействия на тело</b>	<b>33</b>
1.1. О квазистатическом подходе . . . . .	33
1.2. Модель присоединенного осциллятора . . . . .	50
Выводы . . . . .	72
<b>Глава 2. О влиянии потенциальных и диссипативных сил на устойчи-</b> <b>вость положения равновесия</b> . . . . .	<b>74</b>
2.1. Об изменении характера устойчивости при изменении диагональ-	
ного элемента матрицы потенциальных сил . . . . .	75
2.2. Пример системы с максимально возможным числом изменений	
характера устойчивости. . . . .	79
2.3. Случай механической системы с 2 степенями свободы . . . . .	81
2.4. Двухзвенный аэродинамический маятник . . . . .	99
Выводы . . . . .	107
<b>Глава 3. Особенности динамики крыла в потоке сопротивляю-</b> <b>щейся среды в рамках линейной постановки</b> . . . . .	<b>109</b>
3.1. Поступательное движение крыла поперек потока . . . . .	109
3.2. Колебания однозвенного аэродинамического маятника . . . . .	122
Выводы . . . . .	139
<b>Глава 4. Особенности динамики малых ветроэнергетических уста-</b>	

<b>новок различных типов . . . . .</b>	<b>140</b>
4.1. Малая горизонтально-осевая автономная ветроэнергетическая установка. . . . .	140
4.2. Динамика ветроэнергетических установок колебательного типа .	180
Выводы . . . . .	232
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>234</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>239</b>

# Введение

## Общая характеристика работы

### Цель и задачи работы

Цель работы заключается в исследовании динамики механических и электромеханических систем, в состав которых входит тело, взаимодействующее с потоком сопротивляющейся среды, и выявлении особенностей их поведения, обусловленных совместным действием сил различной природы (аэродинамических, электромагнитных, упругих и т.д.). Для достижения этой цели решаются следующие задачи: анализируются различные подходы к описанию нестационарного воздействия потока среды на твердое тело и области их применимости, а также связи между этими подходами; исследуется влияние изменения потенциальных сил на устойчивость положения равновесия в присутствии диссипативных сил с неполной диссипацией и/или позиционных неконсервативных сил; строятся замкнутые математические модели малых ветроэнергетических установок различных типов и проводится параметрический анализ, направленный на изучение особенностей динамики соответствующих систем.

### Актуальность

Необходимость исследования динамики твердых тел, взаимодействующих с потоком среды, возникает в самых разных областях науки и техники. Одним из важных направлений, связанных с подобными задачами, является создание малых ветроэнергетических установок. Подобные устройства предназначены для автономной работы и питания небольшого количества потребителей. Для выявления особенностей их поведения, проведения параметрического анализа

и выбора оптимальных вариантов конструкции и управления важно исследовать замкнутые системы, включающие как механические, так и электрические компоненты системы. При этом целесообразно, по крайней мере, на начальных этапах использовать модели феноменологического типа, позволяющие составлять уравнения движения в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений и эффективно использовать методы качественного анализа. Это позволит значительно уменьшить объем вычислений и затратных ресурсов, связанных с детальным моделированием течения жидкости вокруг движущегося в ней тела и решением соответствующей сопряженной задачи.

### **Научная новизна**

Изложенные в диссертации результаты являются новыми. В работах соискателя с соавторами проведен ряд исследований особенностей динамики твердых тел, взаимодействующих с потоком сопротивляющейся среды. Установлена взаимосвязь между описанием нестационарного аэродинамического воздействия на крыло, получаемым с помощью модели присоединенного осциллятора, и описанием, в котором для учета предыстории используется интеграл Дюамеля с экспоненциальным ядром. В задаче о торможении крыла, поступательно движущегося поперек потока, исследовано поведение нормальной к хорде составляющей аэродинамической силы на этапе торможения и после останова.

Впервые исследовано влияние изменения диагонального элемента матрицы потенциальных сил на характер устойчивости тривиального равновесия линейной механической системы и показано, что характер устойчивости при этом может изменяться не более  $2s - 1$  раз, где  $s$  — число степеней свободы системы. Построен пример системы с произвольным числом степеней свободы, в которой число изменений характера устойчивости равно этому максимальному значе-

нию. Для систем с двумя степенями свободы получены условия, при которых характер устойчивости изменяется два или три раза при увеличении коэффициента жесткости по одной из обобщенных координат. Эффект потери устойчивости при увеличении коэффициента жесткости по одной из обобщенных координат экспериментально подтвержден для двухзвенного аэродинамического маятника.

Исследована динамика малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения. Построена замкнутая математическая модель соответствующей электромеханической системы. Показано, что в случае, когда электромеханическое взаимодействие является линейным, возникает гистерезис выходной мощности (и угловой скорости ветротурбины) при изменении внешней нагрузки в электрической цепи или скорости ветра. Если же электромеханическое взаимодействие является нелинейным, то семейство неподвижных точек претерпевает перестройку при увеличении скорости ветра. Если скорость ветра меньше некоторого критического значения, зависящего от коэффициента, характеризующего нелинейность электромеханического взаимодействия, то угловая скорость ветротурбины на стационарном режиме монотонно убывает при увеличении внешней нагрузки в цепи генератора от нуля до бесконечности; если же скорость больше этого критического значения, то угловая скорость ветротурбины на стационарном режиме изменяется немонотонно при увеличении нагрузки в указанном диапазоне.

Рассмотрена ветроэнергетическая установка колебательного типа с двумя подвижными телами, использующая эффект галопирования. Одно тело представляет собой прямоугольную призму, а второе тело — материальную точку, которая не взаимодействует с потоком и упруго прикреплена к неподвижному основанию и к призме. Показано, что при такой конфигурации колебания

начинаются при меньшей скорости потока, а выходная мощность увеличивается по сравнению с установкой, содержащей одну массу.

Рассмотрена динамика ветроэнергетической установки, рабочий элемент которой представляет собой однозвенный аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса. Исследованы периодические режимы и даны оценки выходной мощности. Предложено управление моментом инерции маятника, обеспечивающее гашение колебаний в случае, когда скорость потока превышает предельно допустимое значение.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Проведенные исследования расширяют представления о поведении твердых тел, взаимодействующих с потоком среды, и о возможности использования стационарных движений, возникающих в результате такого взаимодействия, для преобразования энергии потока в полезные формы.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при проектировании и анализе динамики ветроэнергетических установок различных типов, в том числе, для сравнительного анализа их эффективности. Кроме того, они могут применяться в рамках учебных курсов и при реализации научных проектов в МГУ им. М.В. Ломоносова и других научных организациях, в которых ведутся исследования в области динамики тела в потоке сопротивляющейся среды.

### **Методология и методы исследования**

Результаты, полученные в диссертации, основаны на использовании методов теоретической механики, теории устойчивости, качественных методов анализа динамических систем, а также асимптотических методов. При моделирова-

нии динамики систем используются методы численного интегрирования задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, часть результатов получена в ходе экспериментов, проведенных в дозвуковой аэродинамической трубе А6 НИИ механики МГУ.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Уравнения движения тела в потоке, полученные с помощью модели присоединенного осциллятора, приводятся к интегро-дифференциальной форме, аналогичной уравнениям, получаемым в рамках известного подхода к описанию нестационарного аэродинамического воздействия, использующего интеграл Дюамеля с экспоненциальным ядром.
2. Пусть тело типа тонкого крыла совершает медленное поступательное движения поперек потока среды, так что мгновенный угол атаки мал. Тогда при достаточно большой величине производной коэффициента нормальной силы по углу атаки коэффициент при ускорении тела, обусловленный наличием нестационарного аэродинамического воздействия, оказывается отрицательным, что дает основание говорить не о «присоединенной», а об «отсоединенной» массе.
3. При изменении диагонального элемента матрицы потенциальных сил характер устойчивости положения равновесия голономной системы с  $s$  степенями свободы может изменяться не более  $2s - 1$  раз. Для любого конечного значения  $s$  существует система, в которой число изменений характера устойчивости равно максимально возможному.
4. Для линейной голономной системы с 2 степенями свободы существуют достаточные условия того, что при увеличении жесткости по одной из



обобщенных координат от некоторого фиксированного значения (возможно, отрицательного) до бесконечности характер устойчивости равновесия изменится 3 раза (неустойчивость — асимптотическая устойчивость — неустойчивость — асимптотическая устойчивость).

5. Для линейной голономной системы с 2 степенями свободы существуют достаточные условия того, что при увеличении жесткости по одной из обобщенных координат от некоторого фиксированного значения (возможно, отрицательного) до бесконечности характер устойчивости равновесия изменится 2 раза. Этот эффект возможен, в частности, в случае полной диссипации, если в системе присутствуют циркуляционные силы.
6. При равномерном торможении тонкого крыла, поступательно движущегося поперек потока среды, нормальная сила, действующая на крыло, не меняет направление, если ускорение крыла меньше определенного критического значения, и меняет направление два раза (один на фазе торможения, второй — на фазе последствия), если ускорение превышает это критическое значение. При этом на некотором интервале времени в ходе фазы торможения указанная сила препятствует торможению.
7. Для однозвенного аэродинамического маятника существует диапазон значений длины державки, в котором положение равновесия «по потоку» является асимптотически устойчивым, если момент инерции маятника относительно точки подвеса меньше определенного критического значения, и неустойчивым, если момент инерции больше этого значения.
8. Для малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения в случае, когда электромеханическое взаимодействие является линейным, существует диапазон значений внешней нагрузки (сопро-

тивления), в котором у системы имеется два притягивающих стационарных режима (один — «высокоскоростной», второй — «низкоскоростной»). При изменении внешней нагрузки возникает гистерезис выходной мощности (и угловой скорости ветротурбины).

9. Для малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения в случае, когда электромеханическое взаимодействие является нелинейным, семейство стационарных режимов претерпевает перестройку, когда величина скорости потока проходит через некоторое критическое значение. Если скорость меньше этого критического значения, то существует диапазон значений нагрузочного сопротивления, в котором стационарный «высокоскоростной» режим отсутствует; если же скорость больше этого критического значения, то стационарный «высокоскоростной» режим существует при всех значениях сопротивления.
10. Если в ветроэнергетическую установку, рабочий элемент которой представляет собой плохообтекаемое тело, совершающее галопирование в потоке среды, добавить еще одно тело (материальную точку), пружинно соединенное с первым телом и с неподвижным основанием, то при надлежащем выборе параметров критическая скорость потока, при которой возникает галопирование, уменьшится, а средняя мощность, производимая при установившихся колебаниях системы, возрастет.
11. В ветроэнергетической установке, рабочим элементом которой является упруго закрепленный аэродинамический маятник, точка подвеса которого может двигаться вдоль неподвижной прямой, перпендикулярной набегающему потоку, максимум безразмерного коэффициента выходной мощности (по нагрузке) немонотонно зависит от расстояния от точки подвеса до

центра масс: при смещении центра масс в сторону крыла этот максимум вначале возрастает, а затем начинает уменьшаться. Увеличение момента инерции маятника приводит к дестабилизации тривиального равновесия, а его уменьшение — к стабилизации этого равновесия и исчезновению предельных циклов в достаточно широком диапазоне значений скорости потока.

## **Достоверность и обоснованность**

Все положения, выносимые на защиту, получены с использованием строгих математических методов. Ряд результатов подтвержден экспериментами (натурными либо вычислительными).

## **Апробация**

Основные результаты работы прошли апробацию на ряде международных и всероссийских конференций:

1. Международная научная конференция по механике «Третьи Поляховские чтения», 2003.
2. IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 2007.
3. X Международный семинар им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», 2008.
4. Международная научная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения», 2012.

5. 9th International Conference on mathematical problems in engineering, aerospace and sciences (ICNPAA 2012), 2012.
6. Вторая международная научная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». КРСУ. Бишкек. 2013.
7. XVIII Всероссийская конференция «Современные проблемы аэрогидродинамики», 2016.
8. XI Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 2017.
9. Международная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», 2018.
10. Международная научная конференция по механике «Восьмые Поляховские чтения», 2018.
11. International Conference on Nonlinear Solid Mechanics, 2019.
12. 11th, 14th, 15th, 16th International conference «Dynamical Systems: Theory and Applications» (2011, 2017, 2019, 2021, Lodz, Poland).
13. Международная научная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», 2021.
14. XI, XII, XIII Всероссийские съезды по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, Уфа, Санкт-Петербург, 2015, 2019, 2023).
15. 9th International Congress of the Serbian Society of Mechanics, 2023.

Кроме того, результаты были представлены на следующих научных семинарах:

1. Семинар по аналитической механике и теории устойчивости под руководством проф. А.А. Зобовой и проф. Е.И. Кугушева (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова)
2. Семинар имени А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению под руководством профессора В.В. Александрова (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова)
3. Семинар отдела механики под руководством академика В.В. Козлова, академика Д.В. Трещева и чл.-корр. С.В. Болотина (Математический институт имени В.А. Стеклова РАН)
4. Семинар по механике систем им. академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем под руководством академика В.Ф. Журавлева и академика Д.М. Климова (Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН)

Исследования были проведены, в том числе, в рамках поддержанных грантами проектов, в которых соискатель выступал в качестве руководителя (РФФИ 14-08-01130, 17-08-01366, РФФИ 22-29-00472) или основного исполнителя (РФФИ 03-01-00190, 08-08-00390, 11-08-00444, 12-01-00364, 15-01-06970 и др.).

## **Публикации**

Основные результаты диссертации изложены в 32 работах, 26 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WoS, Scopus и RSCI и 1 — в журнале из списка ВАК.

## Личный вклад автора

Диссертация подготовлена на основе работ, опубликованных соискателем лично или в соавторстве. Научный консультант, проф. В.А. Самсонов, участвовал в постановке ряда задач о динамике поступательного движения крыла в потоке и обсуждении результатов. П.Р. Андронову принадлежат результаты гидродинамического моделирования динамики однозвенного аэродинамического маятника с помощью модифицированного метода дискретных вихрей. Кобрину А.И. принадлежит математическая модель электрической части этой установки в случае линейного электромеханического взаимодействия. Другие соавторы принимали участие в подготовке и проведении экспериментов, в обработке экспериментальных данных, а также в проведении расчетов на базе математических моделей, разработанных соискателем.

Вклад соискателя в работы, опубликованные в соавторстве, характеризуется следующим образом. В статьях [50, 51, 52] вклад соискателя составляет 90%; он состоит в постановке задачи (совместно с В.А. Самсоновым) и проведении всех аналитических и численных исследований. В работах [22, 23, 24] вклад соискателя составляет 70% и заключается в постановке задачи, планировании экспериментов, проведении аналитического и численного исследования динамики рассматриваемых систем. В статье [166] вклад соискателя составляет 35% и заключается в исследовании динамики горизонтально-осевой ветроэнергетической установки. В работе [171] вклад автора составляет 60% и состоит в постановке задачи, проведении аналитических исследований и численного моделирования, а также планировании вычислительного эксперимента. В статье [53] вклад соискателя составляет 90% и заключается в постановке задачи, разработке модели электромеханического взаимодействия, проведении аналитических исследований и численного моделирования. В работах [11, 12, 13, 174] вклад

соискателя составляет 30% и заключается в постановке задачи, выборе метода исследования, планировании экспериментов и обсуждении результатов. Эти статьи подготовлены в соавторстве с Голубом А.П. по результатам его диссертационной работы (соискатель являлся одним из его научных руководителей). В статье [54] вклад соискателя составляет 90%; соискателю принадлежит идея исследования, а также все аналитические и численные результаты. В работе [176] вклад соискателя составляет 40%; ему принадлежит постановка задачи, а также аналитическое и численное исследование стационарных режимов системы в случае нелинейного электромеханического взаимодействия. В статьях [175, 173] вклад соискателя составляет 50% и заключается в постановке задачи и проведении аналитических исследований.

Соискатель провел значительную работу над текстом всех статей и осуществлял переписку с редакторами и рецензентами.

## **Содержание работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения.

Во введении дана общая характеристика диссертационной работы и сформулирована ее цель, обоснована актуальность исследований и их научная новизна, приведены сведения об апробации результатов и их публикации, а также проведен детальный обзор литературы, посвященной тематике диссертационного исследования.

В первой главе рассматриваются различные подходы к описанию аэродинамического воздействия на твердое тело, движущееся в потоке. Описана модель присоединенного осциллятора и ее применение в случае угловых колебаний тела типа тонкого крыла в потоке. Установлена взаимосвязь между описанием нестационарного аэродинамического воздействия на крыло с помощью интегра-

ла Дюамеля с экспоненциальным ядром и описанием, получаемым с помощью модели присоединенного осциллятора.

Во второй главе анализируется влияние потенциальных сил на характер устойчивости равновесия. Показано, что в системе с  $s$  степенями свободы при изменении одного диагонального элемента матрицы потенциальных сил характер устойчивости может измениться не более  $2s - 1$  раз. Построен пример системы с произвольным числом степеней свободы, в которой число изменений характера устойчивости равно этому максимальному значению. Для механической системы с двумя степенями свободы получены условия, при которых характер устойчивости тривиального равновесия меняется два и три раза. В качестве примера рассмотрена задача о двухзвенном аэродинамическом маятнике.

В третьей главе рассмотрены малые колебания крыльев. Показано, что при торможении тонкого крыла, поступательно движущегося поперек потока среды, нормальная сила, действующая на крыло, не меняет направление, если ускорения крыла меньше определенного критического значения, и меняет направление два раза, если ускорение превышает это критическое значение. Исследована устойчивость положения равновесия «по потоку» однозвенного аэродинамического маятника. Полученные результаты подтверждены сравнением с результатами численного моделирования на базе модифицированного метода дискретных вихрей.

В четвертой главе рассмотрены ветроэнергетические установки различных типов. Изучены особенности динамики малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения и проанализировано влияние параметров (в частности, параметра, характеризующего нелинейность электромеханического взаимодействия) на стационарные режимы. Исследована динамика двух ветроэнергетических установок колебательного типа (использующих эф-



фект галопирования и флаттера). Даны оценки характеристик периодических режимов (в том числе, выходной мощности).

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в рамках исследования.

## **Обзор литературы**

Тела, взаимодействующие с сопротивляющейся средой, представляют огромный интерес для науки и техники — как с точки зрения чистых исследований, так и с точки зрения приложений. Они встречаются во множестве технических систем, в частности, транспортных (различные летательные аппараты), так и энергетических (ветроэнергетические установки). Поэтому исследование различных аспектов поведения тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой, является актуальным. Особенно важное значение имеет изучение установившихся движений таких систем, в том числе, условий их устойчивости.

То, что тела под действием потока среды могут совершать периодические движения (колебательные или ротационные), известно человечеству с незапамятных времен. Эти эффекты активно использовались, например, в водяных и ветряных мельницах. С развитием науки и техники оказалось, что учитывать такие движения полезно (а часто и необходимо с точки зрения безопасности) в самых разных отраслях — в авиации (и, шире, аэрокосмической отрасли), строительстве, энергетике и т.д.

## **Описание аэродинамических сил, действующих на твердое тело со стороны потока среды**

В значительной мере, ключевым моментом в истории исследований движения тела в среде явился доклад «О парении птиц», сделанный Н.Е. Жуковским

22 октября 1891 г. на заседании Московского Математического общества (см. [26]). Именно в этой работе впервые было дано описание полета тела в воздухе, которое качественно соответствовало наблюдениям. А в работах 1905-1906 гг. Жуковский сформулировал свою теорему о подъемной силе, действующей на тело, обтекаемое плоскопараллельным потоком идеальной жидкости. Эти труды заложили основу дальнейшего развития аэродинамики летательных аппаратов.

Нужды стремительно развивающейся авиационной техники потребовали исследования нестационарного движения тел (прежде всего, крыльев) в среде. В целом ряде работ (в частности, [163], [90], [193], [117], [34], [55]) были исследованы малые колебания тонкого крыла (близкого к плоской пластине) в потоке.

Уже на этом этапе выделилось два направления в описании аэродинамики. Одно из них основано на квазистатическом подходе. При этом аэродинамические силы и моменты, действующие на крыло, считаются зависящими от мгновенного состояния движения крыла (точнее, угла, определяющего ориентацию крыла относительно потока, скорости некоторой точки крыла и его угловой скорости), причем эти зависимости предполагаются такими же, как и в случае обтекания неподвижного крыла стационарным потоком. Такое описание аэродинамики, в частности, использовалось в работах Келдыша с соавторами ([16]).

Квазистатический подход в силу своей относительной простоты нашел широкое распространение в задачах, связанных с изучением динамики объектов, ускорения и угловые скорости которых не слишком велики, в частности, некоторых типов летательных аппаратов (см., напр., [46], [9]). Целая серия работ, посвященных развитию квазистатического подхода и его применению для качественного анализа динамики тел в потоке сопротивляющейся среды, принадлежит В.А. Самсонову с соавторами (в частности, [38], [39], [48], [47], [41]). Более подробно квазистатический подход будет обсуждаться ниже, в главе 1.

Другое направление ориентировано на более детальное описание нестационарных аэродинамических сил, действующих на профиль. Так, для случая малых гармонических колебаний бесконечно тонкой пластины (вращательных и/или поступательных) Теодорсен на основе аналитического решения уравнений гидродинамики описал нестационарные аэродинамические силы с помощью функции (которая сейчас называется его именем), представляющей собой комбинацию функций Ганкеля, аргументом которых служит безразмерная круговая частота колебаний ([186], [187]). Примерно в это же время аналогичные результаты были получены М.В. Келдышем, М.А. Лаврентьевым [34] и Л.И. Седовым [55]. Этот подход широко используется (напр., [92]). Однако его непосредственное использование в случае, когда движение пластины (или тонкого крыла) не является гармоническими колебаниями (например, при описании переходных режимов), затруднительно.

В работе [193] получена функция (называемая функцией Вагнера), описывающая зависимость подъемной силы от времени при скачкообразном изменении угла атаки. Позднее было показано, что функция Вагнера связана с функцией Теодорсена с помощью преобразования Фурье. В дальнейшем был предложен подход к описанию аэродинамических функций с помощью интеграла Дюамеля с экспоненциальным ядром.

Получающиеся при этом интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра применялись для решения различных задач аэродинамики и аэроупругости в работах С.М. Белоцерковского с соавторами ([7], [6], [4], [5] и др.). Ряд работ в этой области принадлежит В.С. Сергееву (напр., [64], [65]).

С развитием вычислительной техники все большее распространение стали получать методы, основанные на численном интегрировании уравнений Навье-Стокса. Здесь можно выделить метод дискретных вихрей и различные его

модификации (в частности, [86, 17, 1]). Такие подходы позволяют получить детальное описание течения вокруг тела и распределенных сил, действующих на тело. Однако они, в силу достаточно высокой требовательности к вычислительным ресурсам, не позволяют эффективно проводить параметрический анализ, и их сложно интегрировать в контур управления.

В связи с этими обстоятельствами достаточно активно ведутся исследования в области разработки и использования различных эмпирических методов описания нестационарных аэродинамических сил, действующих на тело. Среди таких подходов нужно отметить метод, основанный на использовании вращательных аэродинамических производных (напр., [8, 66]). В его рамках аэродинамические силы и моменты представляются в виде суммы компонентов, линейно зависящих от кинематических характеристик движения крыла (угла атаки, угловой скорости и т.д.), а также их производных. Коэффициенты в этих зависимостях, вообще говоря, также зависят от состояния движения тела, и их определение для конкретного объекта является достаточно сложной задачей.

Следует также выделить подход Беддоуза-Лейшмана ([85], [143], [142]), в котором предложен эмпирический метод учета отрыва с передней и задней кромок крыла. В рамках этого подхода вводятся дополнительные переменные, описывающие нестационарные компоненты силы, и для них составляются дифференциальные уравнения. Этот подход с некоторыми модификациями используется, в частности, при моделировании аэродинамического воздействия на лопасти ветротурбин ([121], [160]).

В подходе [118] вводится дополнительная переменная, характеризующая положение точки отрыва на крыле. Ее поведение описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Развитие и модификации этого подхода предложены в [69], [195].

В работах [50, 52] для учета инерционных свойств потока предложено использовать концепцию «присоединенного осциллятора» (подробнее см. в 1 и 3 главах настоящей работы).

## **Динамика аэроупругих систем**

Пожалуй, первым вызвавшим пристальный интерес исследователей эффектом, связанным с возникновением колебаний упругой конструкции под действием потока среды, явился флаттер крыла самолета. В 30-е годы прошлого века в разных странах появилась целая серия работ ([15, 186] и проч.), в которых это явление было объяснено. При этом задача была сведена к рассмотрению плоскопараллельного движения профиля крыла (считающегося твердым телом), способного двигаться поступательно поперек потока и вращаться вокруг некоторой оси, связанной с профилем. Упругие свойства крыла (на изгиб и кручение) моделировались пружинами. Было показано, что при определенных условиях увеличение скорости потока приводит к потере устойчивости «номинального» положения равновесия, и были предложены некоторые способы избежать этого в нужном диапазоне скоростей ([16] и др.).

Таким образом было положено начало изучению так называемых аэроупругих систем (т.е. систем, динамика которых определяется взаимодействием сил аэродинамической природы и упругих сил).

Несмотря на длительную историю исследования колебаний упруго закрепленных тел в потоке среды, их интенсивное изучение продолжается и сейчас. Так, были выделены различные виды флаттера. Это классический флаттер, когда отрыв потока от поверхности движущегося тела незначителен, и амплитуда колебаний определяется, в первую очередь, нелинейностью упругих сил. В работах, посвященных этому типу флаттера, как правило, рассматривается

локальное поведение системы вблизи тривиального равновесия, анализируются зависимости амплитуды колебаний от различных параметров системы и строится закон управления, позволяющий ограничить эти амплитуды и/или предотвратить их появление [116], [182]).

Другой тип флаттера — срывной флаттер. Его возникновение связано с отрывом потока, и амплитуда колебаний определяется, в первую очередь, нелинейностью аэродинамических сил. Такому флаттеру также посвящено большое количество работ. В частности, в [78] проводится экспериментальное и аналитическое исследование колебаний, имеющих большую амплитуду. При этом показано наличие гистерезиса при изменении скорости потока. В [102] рассматриваются предельные циклы и бифуркации профиля в условиях срывного флаттера.

Методы подавления флаттерных колебаний предложены, например, в [184]. Влияние различных типов нелинейности (в частности, кубической нелинейности или люфтов) обсуждается в работах [140] и [151] (где, помимо прочего, представлены экспериментальные данные). Хаотическое поведение подобных аэроупругих систем (с одной поступательной и одной вращательной степенями свободы), а также различные схемы перехода к хаосу подробно исследованы в статье [97].

Другое важное направление в рамках исследований аэроупругих систем — изучение динамики плохообтекаемых тел, упруго закрепленных в потоке среды. Под плохообтекаемыми телами понимаются тела, отрыв потока с поверхности которых происходит при (практически) любых углах атаки. Как правило, исследуется поведение круглых цилиндров или прямоугольных призм в потоке, перпендикулярном образующей цилиндра (или длинной стороне призмы). Как показывают многочисленные эксперименты, даже в случае одной степени свободы «естественное» положение равновесия при достаточно большой скорости

потока становится неустойчивым, и в системе возникают колебания. Это может быть вызвано антидиссипативным характером статического аэродинамического воздействия — такие колебания называют галопированием. Кроме того, потеря устойчивости может быть вызвана резонансом между частотой собственных колебаний тела и частотой сходящихся вихрей (колебания, индуцированные вихрями [168], [83], [150], [126]).

Критерий, определяющий условия возникновения галопирования, впервые был получен Ден Гартогом [101]. Изучению различных аспектов галопирования посвящена обширная литература. Здесь мы сосредоточимся только на работах, в которых рассматривается динамика тел с острыми кромками (таких как прямоугольные призмы), которые могут поступательно перемещаться поперек потока. В работах [158, 159] было показано, что квазистатический подход может обеспечить достаточно точное описание данного явления для призмы квадратного сечения. В частности, в работе [159] был объяснен наблюдающийся в экспериментах гистерезис колебаний, существующий в определенном диапазоне скоростей ветра. В работе [147] проведен подробный численный анализ этого гистерезиса для чисел Рейнольдса до 1000. В работе [157] выполнено численное исследование аэродинамических сил, действующих на квадратную призму при числах Рейнольдса порядка 10000. Зависимость характеристик колебаний от удлинения призмы исследована в работе [42].

Существует множество экспериментальных работ, посвященных изучению аэродинамических сил, действующих на прямоугольные и квадратные призмы. Так, в работе [84] определялись характеристики галопирующих колебаний квадратного цилиндра и измерялась боковая (перпендикулярная набегающему потоку) сила, действующая на этот объект, при углах атаки до 18 градусов. В работе [167] исследовалось обтекание квадратной призмы с прикрепленной к ней пла-

стиной и без нее, и измерялись подъемная сила и сила лобового сопротивления во всем диапазоне углов атаки. В [152] изучается влияние ориентации призмы относительно набегающего потока на галопирующие колебания. В [113] описаны эксперименты по исследованию нестационарных аэродинамических сил при галопировании прямоугольной призмы.

Очевидная нежелательность галопирования с точки зрения прочности и износа конструкций привела к появлению целого ряда работ, в которых предлагались различные методы подавления таких колебаний. В частности, в [73] описывается использование пассивного инерционного гасителя для уменьшения амплитуды. В работах [114, 115] проведен подробный анализ бифуркаций Андронова-Хопфа в динамике системы, содержащей плохообтекаемое тело и инерционный гаситель. В [170] анализируется возможность предотвращения галопирования квадратной призмы с помощью «поглотителя энергии», представляющего собой шар, движущийся по круговой направляющей, прикрепленной к этой призме.

## **Динамика ветроэнергетических установок разных типов**

Колебания тел, обусловленные воздействием потока сопротивляющейся среды, являются вредными с точки зрения авиации и гражданского строительства, поскольку они приводят к усиленному износу и разрушению конструкций. С другой стороны, такие колебания и ротации можно рассматривать как способ отбора энергии потока для последующего преобразования ее в полезные формы (например, электричество). Поэтому одной из важных отраслей промышленности, которая стимулирует исследования в области динамики тела в потоке среды, является ветроэнергетика. В настоящее время генерация электричества с помощью ветроэлектростанций широко распространена — как



на уровне промышленных станций, так и на уровне отдельных домохозяйств. Существуют разные типы таких устройств. Наиболее широко распространены установки, рабочим элементом которых является ветротурбина с горизонтальной осью вращения.

Среди множества работ, посвященных динамике ветротурбин, можно выделить работы [68], [122], [123], [190], [181], в которых излагаются общие принципы описания различных аспектов аэродинамического воздействия на лопасти турбин. Помимо прочего, в них приводится обзор малых ветротурбин. Целый ряд исследований (в частности, [87], [189], [180], [25], [179]) посвящен экспериментальному и теоретическому изучению аэродинамических характеристик лопастей турбин и вопросам выбора оптимальной (как правило, с точки зрения вырабатываемой мощности) формы лопастей. В статьях [132], [125] рассматривается возможность повысить эффективность горизонтально-осевой ветротурбины за счет установки законцовок различных типов на лопасти.

Значительное количество работ связано с анализом поведения ветротурбин в целом (аэродинамический момент, мощность, особенности обтекания вращающейся турбины). Среди этих исследований необходимо отметить работы, в которых приведены результаты экспериментальных измерений аэродинамического момента и мощности различных конфигураций турбин пропеллерного типа (в частности, [95], [136], [141]). С увеличением быстродействия компьютеров резко возросло число работ, посвященных численному моделированию обтекания турбин путем интегрирования уравнений Навье-Стокса или с помощью различных вихревых методов ([133], [74] [183] и др.). В ряде работ для описания нестационарной аэродинамики ветротурбин используются различные упрощенные эмпирические подходы (например, в [30] — квазистатический, в [105] — подход на основе несущей линии).

В работах [99, 100] был описан гистерезис выходной мощности при изменении нагрузки в случае, когда в электрической цепи, подключенной к ветротурбине, присутствует большая индуктивность. В статьях [156, 145] анализируется поведение двойного ротора (такая схема позволяет снизить гироскопические нагрузки на основание установки). В работах [161, 138] исследуется влияние отклонения оси турбины от направления ветра на аэродинамический момент и выходную мощность.

Необходимо отметить, что в доступной литературе практически отсутствуют работы, в которых бы рассматривалась системы, описывающие как динамику малой автономной ветротурбины, так и процессы, происходящие в электрической цепи.

Однако колебания конструкций также могут служить источником энергии. Эта идея не нова. Один из первых патентов на ветроэнергетическую установку, использующую явление флаттера, был подан в 1924 году [188]. В работе [106] предложено использовать классический крутильно-изгибный флаттер для отбора энергии потока. Еще один тип, так сказать, «флаттерной» ветроэнергетической установки, представляющая собой вертикально установленное крыло, которое совершает колебания на кручение и изгиб, был предложен и экспериментально исследован в [89]. В работах [154] и [130] также изучались системы флаттерного типа и отмечено, что они обладают достаточно хорошим потенциалом с точки зрения выработки энергии. В [202] исследовано влияние неоднородности потока на функционирование подобной установки.

В последние годы возникла новая волна интереса к подобного рода устройствам. Это отчасти связано с появлением новых материалов и технологий, которые позволяют создавать легкие и очень прочные рабочие элементы, а также с разработкой компактных и эффективных устройств для генерации электроэнер-

гии. В частности, пьезоэлементы стали чрезвычайно привлекательным (как с точки зрения производительности, так и с точки зрения цены) средством преобразования механической энергии в электричество [169, 146].

В работе [71] широкий спектр аэроупругих систем обсуждается в качестве потенциальных рабочих элементов вибрационных ветроэнергетических установок. Большой обзор ветроэнергетических установок колебательного типа, использующих флаттер упругих элементов, приведен в [153]. Оценки выходной мощности системы, в которой отбор энергии потока осуществляется за счет классического флаттера, даны в [162], [96].

Устройства отбора энергии потока, основанные на флаттерных колебаниях различных конструкций и использующие пьезоэлементы, изучаются в работах [93], [72], [197], [110]. Отметим, что для эффективного анализа систем, содержащих как чисто механическую часть, так и электрическую часть (пьезоэлемент), требуется простая, но достаточно точная модель электромеханического взаимодействия. Обзор различных подходов к моделированию пьезоэлементов содержится в [108]. В работе [109] предложен упрощенный подход к описанию электромеханического взаимодействия в таких системах.

При обсуждении флаттерных колебаний предполагается, что ось вращения лежит на хорде крыла. Влияние ее положения на характеристики предельных циклов исследовано, в частности, в [182]. Однако интересно проанализировать случай, когда эта ось расположена вне крыла. Такую систему можно рассматривать как аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса.

В последнее время появляется большое количество работ, направленных на разработку и изучение колебательных ветроэнергетических установок, использующих эффект галопирования. Так, в [81] показано, что галопирующие колебания имеют достаточно хороший потенциал для такого использования. В

работе [98] исследована ветроэнергетическая установка на базе галопирования, в которой электричество вырабатывается линейным генератором на постоянном магните. Экспериментальное исследование аналогичного устройства с рабочими элементами в виде квадратной и прямоугольной призмы проведено в [124] и исследовано влияние угла между стороной призмы и направлением потока на характеристики колебаний. В [127] предложена система, состоящая из плохо обтекаемого тела и пьезоэлемента. В [194] анализируется ветроэнергетическая установка, использующая галопирование пьезоэлектрической консольно закрепленной балки и исследуется влияние геометрической формы на вырабатываемую мощность. Попытка определить оптимальную форму рабочего элемента малой ветроэнергетической установки, основанной на галопировании, описана в [199]. В работе [201] проводится экспериментальное сравнение мощности, вырабатываемой при галопировании призм с разной формой поперечного сечения (прямоугольник, треугольник и т.д.). Несколько конфигураций галопирующей ветроэнергетической установки с двумя движущимися массами рассмотрены в [192]. Показано, что некоторые конфигурации позволяют добиться увеличения выходной мощности по сравнению с системой, содержащей одну колеблющуюся массу. В [131] рассматривается галопирующая ветроэнергетическая установка с двумя подвижными массами, установленная на подвижном основании.

В статье [82] изучается возможность использовать для генерации энергии колебания кругового цилиндра, индуцированные вихрями, и описано влияние демпфирования на выходную мощность. Оригинальная конструкция колебательной ветроэнергетической установки предложена в работе [2].

В настоящее время ощущается необходимость в систематическом исследовании различных конфигураций ветроэнергетических установок колебательно-го типа, выявлении особенностей их динамики, поиске оптимальных (прежде

всего, с точки зрения преобразования энергии потока) конфигураций, а также изучении возможностей управления (в частности, с целью предотвращения разрушения установки при очень больших скоростях потока).

## **Вопросы влияния сил различных типов на характер устойчивости**

При изучении динамики тел в потоке сопротивляющейся среды (в том числе, ветроэнергетических установок различных типов) одним из важнейших этапов анализа является исследование устойчивости положений равновесия и/или стационарных движений.

В структуре уравнений малых колебаний механических систем традиционно выделяют диссипативные, гироскопические, позиционные потенциальные и позиционные неконсервативные (или циркуляционные) силы. Исследованию различных аспектов влияния этих сил на устойчивость тривиального равновесия посвящено большое количество работ (некоторые классические результаты представлены, например, в [70, 44]).

В настоящее время исследования в этой области активно продолжаются. В частности, вопросы устойчивости и стабилизации системы общего вида в случае, когда потенциальная энергия в равновесии имеет максимум, рассматриваются в работе [77]. В [28] анализируется влияние структуры матриц соответствующих сил на форму колебаний вблизи равновесия.

Позиционные неконсервативные силы являются одним из типичных источников неустойчивости (см., например, [137, 149]). В то же время, хорошо известно, что эти силы в некоторых ситуациях способны стабилизировать положение равновесия, неустойчивое в их отсутствие.

В [134] описаны типичные перестройки характеристических кривых в циркуляционных системах, зависящих от нескольких параметров, и поведение соб-

ственных значений в окрестности точек пересечения/касания таких кривых на основе информации о системе в этих точках.

Критерии слабой устойчивости неконсервативных упругих систем обсуждаются в [144, 112].

В статье [31] теоремы Томсона–Гэта–Четаева обобщены для случая систем с неконсервативными позиционными силами.

Известна теорема Меркина о том, что добавление сколь угодно малых циркуляционных сил к устойчивой потенциальной системе, все частоты которой совпадают, приводит к потере устойчивости. Эта теорема обобщена в работе [191], в которой показано, что если в потенциальной системе совпадают две или более частоты, то существуют такие сколь угодно малые циркуляционные силы, которые дестабилизируют ее.

Диссипативные силы с полной диссипацией, как правило, оказывают стабилизирующее воздействие на систему. Однако, как показывает хорошо известный парадокс Циглера, такие силы могут при определенных условиях привести к потере устойчивости равновесия. Эффект дестабилизации под действием диссипативных сил подробно обсуждается, в частности, в [135]. В [155] показано, что силы, зависящие от скоростей (диссипативные и гироскопические) также могут оказывать дестабилизирующее влияние на системы с бесконечным числом степеней свободы.

Влияние малых диссипативных сил и диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость в системах с двумя степенями свободы при наличии всех типов сил анализируется, в частности, в работе [128]. В ней показано, что такое влияние может быть как стабилизирующим, так и дестабилизирующим. Важность учета структуры матрицы диссипативных сил для анализа устойчивости и возникновения самовозбуждающихся колебаний обсуждается в [119].

В работе [79] рассматривается ситуация, когда матрица диссипативных сил является положительно полуопределенной, и анализируются вопросы стабилизации равновесия гироскопическими силами.

Дестабилизация диссипативными силами в циркуляционных системах обсуждается в [148] в терминах концепции «модельного демпфирования», и показано, что влияние на устойчивость оказывает знак проекции диссипативной силы на собственный вектор двойственного базиса.

В работе [75] показано, что увеличение коэффициента демпфирования по одной из обобщенных координат может сопровождаться несколькими изменениями характера устойчивости (так сказать, «чередованием» устойчивости).

Присутствие в системе антидиссипации (т.е. наличие отрицательных собственных чисел у матрицы диссипативных сил) также является источником неустойчивости (хотя, разумеется, устойчивость возможна и в этой ситуации).

В механических системах, описывающих технические объекты, зачастую трудно или невозможно (в силу технических причин) изменять параметры, определяющие позиционные неконсервативные силы. В то же время, параметры, характеризующие потенциальные силы, в ряде случаев можно изменять относительно легко (например, изменяя жесткость элементов конструкции). Поэтому представляется интересным описать влияние таких изменений на устойчивость равновесия в случае, когда в системе присутствуют позиционные неконсервативные силы и/или диссипативные силы с неполной диссипацией.

Известна теорема Рэля (Арнольд), дающая оценку изменения частот в потенциальной системе при изменении жесткости. Она была обобщена на случай гироскопических систем [27]. Однако в [29] было показано, что эту теорему нельзя обобщить на случай, когда в системе присутствуют позиционные неконсервативные силы.

Отметим, что аэродинамические силы являются естественным источником как позиционных неконсервативных сил, так и диссипативных сил с неполной диссипацией (или, так сказать, с антидиссипацией). Соответственно, анализ влияния отдельных элементов матрицы потенциальных сил на устойчивость может быть полезным, в частности, в контексте изучения поведения механических систем, содержащих твердое тело,двигающееся в потоке среды, например, аэроупругих систем.



## Глава 1

# Моделирование аэродинамического воздействия на тело

### 1.1. О квазистатическом подходе

Рассмотрим твердое тело, неподвижно закрепленное (или совершающее равномерное поступательное движение) в потоке среды, имеющем постоянную скорость. Из многочисленных экспериментов известно, что аэродинамическая сила  $F_a$  и момент  $M_a$ , действующие при этом на тело, пропорциональны квадрату скорости тела относительно среды и, кроме того, зависят от угла атаки, т.е. угла между некоторым фиксированным направлением в теле и скоростью набегающего потока.

Вообще говоря, даже при таком стационарном обтекании  $F_a$  и  $M_a$  в ряде случаев (в частности, когда с поверхности тела сходят вихри) оказываются, кроме того, явными функциями времени. Однако зачастую этим эффектом можно пренебречь.

Если же движение тела относительно потока не является равномерным и поступательным, то картина обтекания оказывается тем более сложной.

Основной принцип, лежащий в основе квазистатического подхода к описанию аэродинамического воздействия среды на тело, заключается в предположении о том, что аэродинамическое воздействие зависит только от мгновенного состояния движения тела. При этом структура аэродинамической силы и момента принимается такой же, что и при стационарном обтекании. Величины  $F_a$  и  $M_a$  считаются пропорциональными квадрату скорости некоторой «характерной» точки тела и, кроме того, зависят от величины, называемой мгновенным

углом атаки, причем зависимость эта такая же, что и зависимость от угла атаки в случае стационарного обтекания тела. Такой подход позволяет, с одной стороны, использовать хорошо известные из экспериментов статические аэродинамические характеристики тел, а с другой стороны, описать динамику тела в среде с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим вначале случай, когда тело совершает в среде (или в потоке среды) плоскопараллельное движение, причем обтекание можно считать двумерным.

В рамках варианта квазистатического подхода, предложенного и использованного в работах [38, 39, 30], аэродинамическое воздействие на тело, совершающее плоско-параллельное движение в среде, сводится к силе  $\mathbf{F}_a$ , приложенной в некоторой точке  $A$  тела (центр давления). Центр давления представляет собой точку пересечения линии действия силы  $F_a$  и некоторой прямой  $\ell$ , связанной с телом (для крыльев это прямая, проходящая через две наиболее удаленные друг от друга точки профиля крыла; отрезок, соединяющий эти точки, называется хордой профиля крыла). Кроме того, предполагается, что величина  $F_a$  имеет следующую структуру:

$$F_a = \frac{\rho S}{2} V_A^2 C_a(\alpha),$$

где  $V_A$  — скорость центра давления относительно среды (воздушная скорость),  $\rho$  — плотность среды,  $S$  — характерная площадь тела,  $C_R$  — безразмерный коэффициент, а  $\alpha$  — угол атаки, т.е. угол между  $V_A$  и прямой  $\ell$ . Зависимость  $C_R$  от  $\alpha$  принимается такой же, как и при обтекании неподвижного тела стационарным потоком.

Угол атаки определяется кинематическими соотношениями, представляющими собой систему двух нелинейных алгебраических уравнений.

Применение этого подхода сталкивается с определенными трудностями.

Вообще говоря, система алгебраических уравнений, используемая для определения угла атаки и воздушной скорости, имеет неединственное решение [40]. Это приводит к необходимости выработки процедуры выбора требуемого значения  $\alpha$  (такая процедура была предложена в [40]).

Помимо этого, данный подход не обеспечивает достаточно хорошего описания аэродинамики в случае, когда тело вращается в потоке среды относительно неподвижной оси, расположенной вблизи центра давления.

Еще одна проблема возникает в ситуации, когда тело не имеет плоскости симметрии (например, крыло с несимметричным профилем). Известно, что при некоторых углах атаки центр давления для таких тел формально находится в бесконечности (поскольку при определенном значении  $\alpha$  аэродинамическая сила оказывается параллельна прямой  $\ell$ , а аэродинамический момент при этом отличен от нуля).

В связи с указанными обстоятельствами, использование этого варианта квазистатического подхода представляется целесообразным в ситуациях, когда центр давления во все время движения остается достаточно далеко от мгновенного центра скоростей тела и, кроме того, перемещением центра давления можно пренебречь по сравнению с характерными длинами, фигурирующими в задаче.

В исследованиях по динамике летательных аппаратов часто используется несколько другой подход. Аэродинамическое воздействие на тело представляется в виде следующего набора сил, приложенных в некоторой точке  $C$  тела, и моментов относительно этой точки (вновь ограничимся только случаем плоскопараллельного движения):  $\mathbf{F}_1$  — подъемная сила, направленная перпендикулярно воздушной скорости  $V_C$  точки  $C$ ,  $\mathbf{F}_d$  — сила лобового сопротивления, направленная против этой скорости,  $M_a$  — аэродинамический момент. Структу-

ра этих величин определяется следующими выражениями:

$$F_l = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_l(\alpha), \quad F_d = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_d(\alpha), \quad M_a = \frac{\rho S}{2} L V_C^2 C_m(\alpha)$$

Здесь  $L$  — некоторый характерный размер,  $C_l(\alpha)$ ,  $C_d(\alpha)$ ,  $C_m(\alpha)$  — безразмерные коэффициенты подъемной силы, силы лобового сопротивления и аэродинамического момента, соответственно. Под углом атаки  $\alpha$  понимается угол между некоторым выделенным направлением в теле и скоростью  $V_C$ .

Зависимости аэродинамических коэффициентов от угла атаки принимаются такими же, как и при обтекании неподвижного тела стационарным потоком. Из статических экспериментов известно, что  $C_d(\alpha) > 0$  для любых значений  $\alpha$ ; коэффициенты  $C_l(\alpha)$  и  $C_m(\alpha)$  могут менять знак.

Если тело с достаточно большой «средней» угловой скоростью вращается вокруг оси, проходящей через точку  $C$ , то этот набор часто дополняется силой и моментом Магнуса, а также демпфирующим аэродинамическим моментом. Эти величины являются нестационарными, их невозможно измерить в рамках статических испытаний, поэтому информация о них достаточно скудна. В дальнейшем мы будем ограничиваться рассмотрением ситуаций, когда угловая скорость тела не слишком велика, так что этими величинами можно пренебречь.

Очевидно, что проблема ухода центра давления в бесконечность в случае несимметричных тел и неединственности решения уравнений, определяющих положение центра давления, в рамках этого подхода не возникает.

Необходимо отметить, что данный вариант квазистатического подхода также не позволяет учесть влияние угловой скорости тела на аэродинамику в том случае, когда тело в стационарном потоке вращается с относительно небольшой угловой скоростью вокруг неподвижной оси, проходящей через точку  $C$ .

Кроме того, имеет место неопределенность с выбором точки  $C$ . Часто ее помещают в центр масс тела, что представляется неоправданным, поскольку

аэродинамика зависит от формы тела, но не от распределения масс.

Впрочем, если размеры тела достаточно малы по сравнению с расстоянием до оси вращения, то зачастую выбор точки  $C$  (как и учет перемещения центра давления) достаточно слабо влияет на результаты моделирования.

Зависимости аэродинамических коэффициентов  $C_d$ ,  $C_l$  и  $C_m$  от угла атаки представляют собой нелинейные функции. В качестве примера на рис. 1.1 и 1.2 приведены такие зависимости для тел различной формы (данные получены в ходе экспериментов, описанных в работах [178] и [167]). На первом из этих рисунков изображены коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления и момента (относительно точки, расположенной на расстоянии одной четверти хорды от носика крыла) для крыла с симметричным профилем NASA 0015.

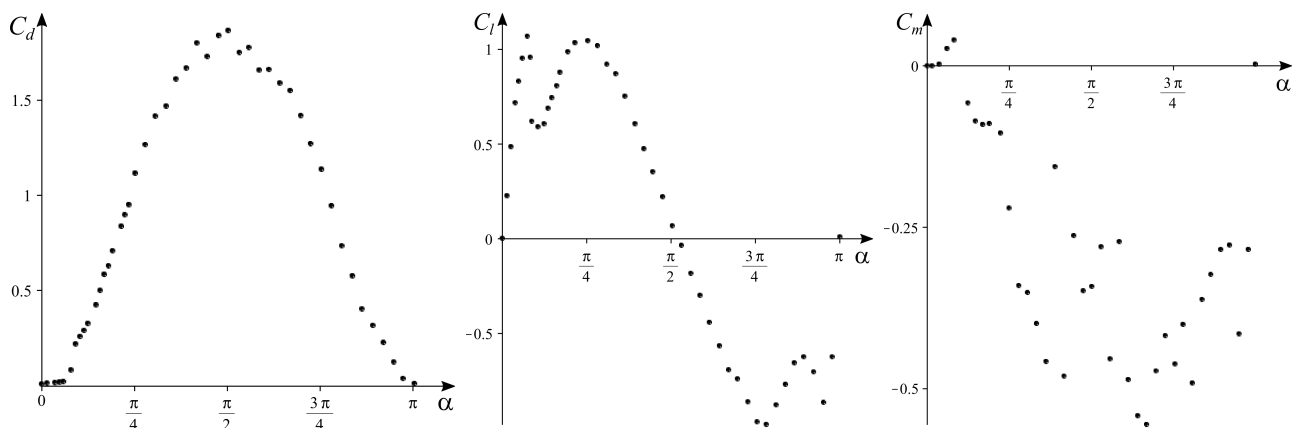


Рис. 1.1. Аэродинамические коэффициенты симметричного профиля NASA 0015.

На втором рисунке приведены данные для призмы квадратного сечения, обтекаемой потоком, перпендикулярным длинной стороне призмы.

Как и следовало ожидать, коэффициент лобового сопротивления для призмы больше, чем для крыла (особенно в диапазоне малых углов атаки). Интересной особенностью также является то, что производные коэффициента подъемной силы по углу атаки для рассматриваемых тел имеют разные знаки в области

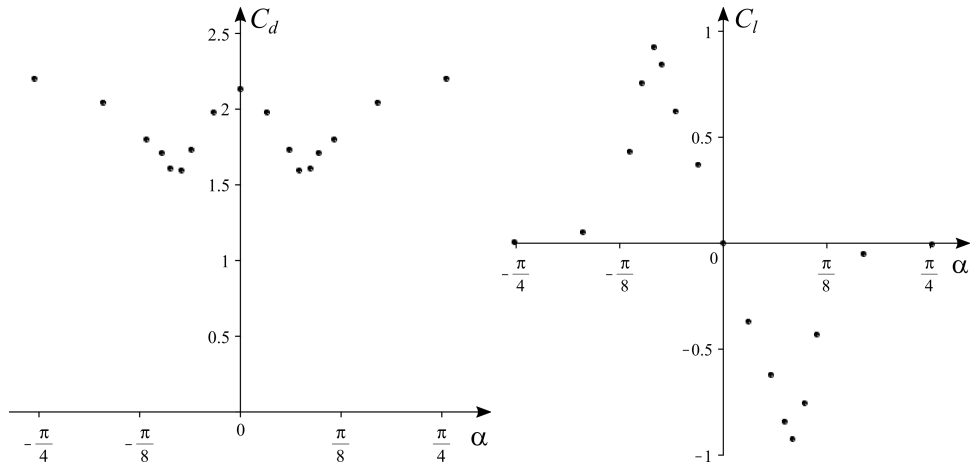


Рис. 1.2. Аэродинамические коэффициенты квадратной в сечении призмы.

малых  $\alpha$ . Это приводит к существенно разному поведению объектов (в частности, к возникновению эффекта галопирования, который несколько подробнее будет обсуждаться в главе 4).

Обсудим теперь ситуацию, когда обтекание тела не является двумерным (например, если тело совершает пространственное движение в среде). При этом в рамках квазистатического описания аэродинамики в теле также выбирается некоторая характерная точка  $C$  (часто центр масс), в которой считаются приложенным главный вектор аэродинамических сил и относительно которой вычисляется главный момент этих сил. В качестве скорости набегающего потока используется воздушная скорость этой точки  $\mathbf{V}_C$ . Ориентация вектора  $\mathbf{V}_C$  относительно тела определяется двумя углами, поэтому безразмерные коэффициенты аэродинамических сил оказываются функцией двух углов, а не одного, как в рассмотренном выше случае: угла атаки  $\alpha$  и угла скольжения  $\beta$ . Под углом атаки понимается угол между проекцией вектора скорости на некоторую плоскость, связанную с телом (например, плоскость симметрии, если таковая имеется), и некоторым выделенным направлением в теле. Под углом скольжения понимается угол между  $\mathbf{V}_C$  и этой плоскостью.

Впрочем, для осесимметричных тел ситуация несколько упрощается, и безразмерные аэродинамические коэффициенты считаются функциями только угла атаки, понимаемого как угол между  $\mathbf{V}_C$  и осью симметрии.

Рассмотрим один важный частный случай трехмерного обтекания: тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, помещено в стационарный поток среды, скорость которого параллельна этой оси. Примером такого объекта может служить горизонтально-осевая ветротурбина (в ситуации, когда она ориентирована на ветер). Ясно, что в этом случае аэродинамические силы не зависят от угла поворота тела вокруг оси вращения (мы, как обычно в рамках квазистатического подхода, пренебрегаем влиянием предыстории и сходящих вихрей).

Вопрос о выборе «репрезентативной» точки  $C$  в теле в этом случае также является непростым. Казалось бы, что, по крайней мере для тел, для которых ось вращения является осью динамической симметрии, эту точку из соображений симметрии следовало бы выбрать на оси вращения. Но такой выбор оказывается неприемлемым: воздушная скорость этой точки оказалась бы всегда направленной строго против скорости набегающего потока, и угол атаки был бы постоянным и никак не характеризовал бы состояние движения тела.

Поэтому точку  $C$  необходимо выбирать на некотором расстоянии от оси вращения — например, точку, наиболее удаленную от этой оси.

Другой возможный подход заключается в том, чтобы выделить в теле отдельные элементы и описывать аэродинамические силы для каждого из них по отдельности. Правда, при этом необходимо сделать дополнительное предположение о том, что возмущения, вносимые в поток каждым из этих элементов, слабо влияют на остальные элементы.

В любом случае, угол атаки зависит только от угловой скорости тела (и,

разумеется, параметров системы). Соответственно, можно считать, что и аэродинамические характеристики являются функциями угловой скорости (точнее, безразмерной угловой скорости  $\Omega = \omega l/V$ , где  $l$  — характерный размер).

Экспериментальное определение зависимости аэродинамических характеристик от угловой скорости сопряжено с достаточно существенными техническими трудностями. Тем не менее, есть ряд работ, в которых такая информация приводится. Одна из методик измерения аэродинамического момента относительно оси вращения тела (ветротурбины) описана в главе 4.

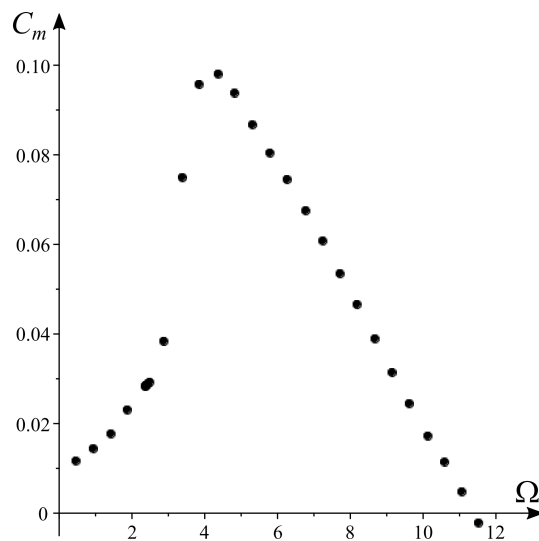


Рис. 1.3. Пример зависимости коэффициента аэродинамического момента, действующего на горизонтально-осевую ветротурбину, от безразмерной угловой скорости.

Пример зависимости безразмерного коэффициента момента, действующего на горизонтально-осевую ветротурбину, от безразмерной угловой скорости  $\Omega$  приведен на рис. 1.3 на основе экспериментальных данных [138]. Видно, что зависимость эта нелинейная. Это дает основания ожидать, что в механических (или электромеханических) системах, содержащих такую ветротурбину в качестве элемента, возможно наличие нескольких стационарных режимов.

Подводя итоги рассмотрения подходов квазистатического типа, отметим,



что они описывают динамику тела тем точнее, чем меньше движение тела отличается от поступательного, равномерного и прямолинейного. Соответственно, представляется естественным использовать их при описании достаточно медленного движения тела вблизи положения равновесия. Вначале проанализируем структуру аэродинамических сил, описываемых в рамках квазистатического подхода, в окрестности положения равновесия.

### 1.1.1. О структуре аэродинамических сил в окрестности положения равновесия

Рассмотрим механическую систему с  $s$  степенями свободы. Предположим, что связи, наложенные на нее, таковы, что система совершает плоскопараллельное движение. Пусть система помещена в поток среды, скорость которого на бесконечности постоянна и равна  $V$ . Введем в плоскости движения неподвижную систему координат, ось абсцисс которой направим вдоль скорости потока.

Предположим, что аэродинамическое воздействие на систему сводится к аэродинамической силе  $\mathbf{F}_a$ , приложенной в некоторой точке  $C$  этой системы, и аэродинамическому моменту  $M_a$  относительно этой точки. Учитывая направление и структуру подъемной силы и силы лобового сопротивления, нетрудно показать, что справедливо следующее выражение:

$$\mathbf{F}_a = -\frac{\rho S}{2} V_C^2 C_d(\alpha) \mathbf{e}_{\parallel} + \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_l(\alpha) \mathbf{e}_{\perp}$$

Здесь  $\alpha$  — некоторый мгновенный угол атаки,  $\mathbf{e}_{\parallel}$  — единичный вектор, сонаправленный с вектором  $\mathbf{V}_C$ , а  $\mathbf{e}_{\perp}$  — перпендикулярный ему единичный вектор.

Обозначим координаты точки  $C$  через  $x_C$  и  $y_C$ . Ясно, что они представляют собой некоторые функции обобщенных координат  $q_i$  системы ( $i = 1..s$ ).

Тогда вектор воздушной скорости можно записать следующим образом:

$$\mathbf{V}_C = \left\{ -V + \sum_{i=1}^s \frac{\partial x_C}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \sum_{i=1}^s \frac{\partial y_C}{\partial q_i} \dot{q}_i \right\}$$

Для сокращения записи введем обозначения:

$$\frac{\partial x_C}{\partial q_i} = a_i, \quad \frac{\partial y_C}{\partial q_i} = b_i$$

Вектора  $\mathbf{e}_{\parallel}$  и  $\mathbf{e}_{\perp}$  определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{e}_{\parallel} = \frac{1}{V_C} \left\{ -V + \sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i \quad \sum_{i=1}^s b_i \dot{q}_i \right\}, \quad \mathbf{e}_{\perp} = \frac{1}{V_C} \left\{ -\sum_{i=1}^s b_i \dot{q}_i \quad -V + \sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i \right\}$$

Как правило, угол атаки зависит от ориентации объекта, взаимодействующего с потоком. Обозначим обобщенную координату, определяющую эту ориентацию, через  $q_1$ . Соответственно, если все обобщенные скорости равны нулю, то  $\alpha$  не зависит от  $q_2, \dots, q_s$ . Это значит, что

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \right|_{\dot{q}_i=0} = 0, \quad 2 \leq i \leq s. \quad (1.1)$$

Кроме того, угол атаки, вообще говоря, зависит от всех обобщенных скоростей. Поскольку он является безразмерной величиной, то обобщенные скорости требуется нормировать. Естественно использовать для этого величины  $L$  и  $V$ . Таким образом,  $\alpha$  оказывается некоторой функцией этих параметров.

Запишем работу аэродинамической силы и момента на возможном перемещении:

$$\delta A_a = -\frac{\rho S}{2} V_C^2 C_d(\alpha) \mathbf{e}_{\parallel} \delta \mathbf{r}_C + \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_l(\alpha) \mathbf{e}_{\perp} \delta \mathbf{r}_C + \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_m(\alpha) L \delta q_1 \quad (1.2)$$

Очевидно, что

$$\delta \mathbf{r}_C = \left\{ \sum_{i=1}^s a_i \delta q_i \quad \sum_{i=1}^s b_i \delta q_i \right\}$$

Соответственно, получаем:

$$\begin{aligned} \delta A_a = \frac{\rho S}{2} V_C \left[ C_d(\alpha) V \sum_{i=1}^s a_i \delta q_i - C_d(\alpha) \left( \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j \right) \left( \sum_{i=1}^s a_i \delta q_i \right) - \right. \\ \left. - C_d(\alpha) \left( \sum_{i=1}^s b_i \dot{q}_i \right) \left( \sum_{i=1}^s b_i \delta q_i \right) - C_l(\alpha) \left( \sum_{j=1}^s b_j \dot{q}_j \right) \left( \sum_{i=1}^s a_i \delta q_i \right) - \right. \\ \left. - C_l(\alpha) V \left( \sum_{i=1}^s b_i \delta q_i \right) + C_l(\alpha) \left( \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j \right) \left( \sum_{i=1}^s b_i \delta q_i \right) + V_C C_m(\alpha) L \delta q_1 \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда обобщенные силы, связанные с аэродинамикой, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} Q_i = \frac{\rho S}{2} V_C \left[ C_d(\alpha) V a_i - C_l(\alpha) V b_i - C_d(\alpha) a_i \left( \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j \right) - \right. \\ \left. - C_d(\alpha) b_i \left( \sum_{i=1}^s b_i \dot{q}_i \right) - C_l(\alpha) a_i \left( \sum_{j=1}^s b_j \dot{q}_j \right) + \right. \\ \left. + C_l(\alpha) b_i \left( \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j \right) + V_C C_m(\alpha) L \delta_{1i} \right], \quad i = 1..s \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\delta_{1i}$  — дельта Кронекера.

Предположим, что у системы существует положение равновесия:

$$q_i = q_{*i} \equiv const$$

Без ограничения общности можно считать, что  $q_{*i} = 0$ . Обозначим величину угла атаки в положении равновесия через  $\alpha_0$ .

Обусловленные аэродинамикой обобщенные силы в положении равновесия описываются следующими выражениями:

$$Q_i = \frac{\rho S}{2} V^2 (C_{d0} a_{i0} - C_{l0} b_{i0} + C_{m0} L \delta_{1i}), \quad i = 1..s \quad (1.5)$$

Здесь

$$a_{i0} = a_i|_{q_j=0, j=1..s}, \quad b_{i0} = b_i|_{q_j=0, j=1..s},$$

$$C_{d0} = C_d(\alpha_0), \quad C_{l0} = C_l(\alpha_0), \quad C_{m0} = C_m(\alpha_0)$$

Линеаризуем обобщенные силы в окрестности указанного положения равновесия. Обозначим отклонения обобщенных координат, обобщенных скоростей и обобщенных сил от их значений в положении равновесия через  $\Delta q_i$ ,  $\Delta \dot{q}_i$  и  $\Delta Q_i$ , соответственно. Тогда, учитывая (1.1), имеем:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha = \alpha_0 + \left. \frac{\partial\alpha}{\partial q_1} \right|_{q_1=0, \dot{q}_i=0} \Delta q_1 + \sum_{i=1}^s \left. \frac{\partial\alpha}{\partial \dot{q}_i} \right|_{q_1=0, \dot{q}_i=0} \Delta \dot{q}_i$$

$$C_d(\alpha) = C_{d0} + C_d^\alpha \Delta\alpha, \quad C_l(\alpha) = C_{l0} + C_l^\alpha \Delta\alpha, \quad C_m(\alpha) = C_{m0} + C_m^\alpha \Delta\alpha$$

Здесь

$$C_d^\alpha = \left. \frac{dC_d}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}, \quad C_l^\alpha = \left. \frac{dC_l}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}, \quad C_m^\alpha = \left. \frac{dC_m}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\alpha'_{q_1} = \left. \frac{\partial\alpha}{\partial q_1} \right|_{q_1=0, \dot{q}_i=0}, \quad \alpha'_i = \left. \frac{\partial\alpha}{\partial \dot{q}_i} \right|_{q_1=0, \dot{q}_i=0}$$

Кроме того, необходимо учесть, что

$$a_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^s a_{ij} \Delta q_j, \quad b_j = b_{j0} + \sum_{j=1}^s b_{ij} \Delta q_j,$$

где

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \right|_{q_j=0}, \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial b_i}{\partial q_j} \right|_{q_j=0}.$$

Подставим эти соотношения в выражения для обобщенных сил (1.4):

$$\begin{aligned}
Q_i = \frac{\rho S}{2} \left( V - \sum_{j=1}^s a_{j0} \Delta \dot{q}_j \right) & \left[ C_{d0} V a_{i0} + C_{d0} V \sum_{j=1}^s a_{ij} \Delta q_j + C_d^\alpha V a_i \Delta \alpha - \right. \\
& - C_{d0} a_{i0} \left( \sum_{j=1}^s a_{j0} \Delta \dot{q}_j \right) - C_{d0} b_{i0} \left( \sum_{i=1}^s b_{i0} \Delta \dot{q}_i \right) - C_{l0} a_{i0} \left( \sum_{j=1}^s b_{j0} \Delta \dot{q}_j \right) - \\
& - C_{l0} V b_{i0} - C_{l0} V \sum_{j=1}^s b_{ij} \Delta q_j - C_l^\alpha V b_{i0} \Delta \alpha + C_{l0} b_{i0} \left( \sum_{j=1}^s a_{j0} \Delta \dot{q}_j \right) + \\
& \left. + \left( V - V^{-1} \sum_{j=1}^s a_{j0} \Delta \dot{q}_j \right) (C_{m0} + C_m^\alpha \Delta \alpha) L \delta_{1i} \right], \quad i = 1..s
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Учитывая соотношения (1.5) и ограничиваясь в (1.6) первым приближением, получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta Q_i = \frac{\rho S}{2} & \left[ C_{d0} V^2 \sum_{j=1}^s a_{ij} \Delta q_j - 2 C_{d0} V a_{i0} \left( \sum_{j=1}^s a_{j0} \Delta \dot{q}_j \right) - \right. \\
& - C_{d0} V b_{i0} \left( \sum_{j=1}^s b_{j0} \Delta \dot{q}_j \right) + C_d^\alpha V^2 a_{i0} \left( \alpha'_{q1} \Delta q_1 + \sum_{j=1}^s \alpha'_j \Delta \dot{q}_j \right) - \\
& - C_{l0} V a_{i0} \left( \sum_{j=1}^s b_{j0} \Delta \dot{q}_j \right) - C_{l0} V^2 \sum_{j=1}^s b_{ij} \Delta q_j + \\
& + 2 C_{l0} V b_{i0} \sum_{j=1}^s a_{j0} \Delta \dot{q}_j - C_l^\alpha V^2 b_{i0} \left( \alpha'_{q1} \Delta q_1 + \sum_{j=1}^s \alpha'_j \Delta \dot{q}_j \right) + \\
& \left. + \left( -2 V C_{m0} \sum_{j=1}^s a_{j0} \Delta \dot{q}_j + C_m^\alpha V^2 \left( \alpha'_{q1} \Delta q_1 + \sum_{j=1}^s \alpha'_j \Delta \dot{q}_j \right) \right) L \delta_{1i} \right], \quad i = 1..s
\end{aligned} \tag{1.7}$$

В структуре  $\Delta Q_i$  можно выделить силы, зависящие от скоростей, и позиционные силы:

$$\Delta \mathbf{Q} = -\frac{\rho S}{2} (\mathbf{H} \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{P} \Delta \mathbf{q})$$

Здесь

$$\Delta \mathbf{Q} = \left( \Delta Q_1 \quad \dots \quad \Delta Q_s \right)^T, \quad \Delta \mathbf{q} = \left( \Delta q_1 \quad \dots \quad \Delta q_s \right)^T,$$

$\mathbf{H} = \{h_{ij}\}$ ,  $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$  — матрицы размера  $s \times s$ .

Используя формулы (1.7), запишем выражения для компонентов этих матриц:

$$h_{ij} = (C_{d0}b_{i0} + C_{l0}a_{i0})Vb_{j0} + (2C_{d0}a_{j0} - C_d^\alpha V\alpha'_j)Va_{i0} - \\ - (2C_{l0}a_{j0} - C_l^\alpha V\alpha'_j)Vb_{i0} + (2C_{m0}a_{j0} - C_m^\alpha V\alpha'_j)VL\delta_{1i} \quad (1.8)$$

$$p_{ij} = -C_{d0}V^2a_{ij} + C_{l0}V^2b_{ij} + (C_l^\alpha b_{i0} - C_d^\alpha a_{i0} - C_m^\alpha L\delta_{1i})\delta_{1j}\alpha'_{q1}V^2$$

Отметим, что  $a_{ij} = a_{ji}$  и  $b_{ij} = b_{ji}$ . С учетом этого из формул (1.8) видно, что матрица  $\mathbf{P}$  в общем случае не является симметричной, т.е. аэродинамические силы содержат как потенциальную, так и позиционную неконсервативную часть.

Представим  $\mathbf{P}$  в виде суммы  $\mathbf{P} = \mathbf{K} + \mathbf{N}$ , где  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ ,  $\mathbf{N} = -\mathbf{N}^T$ . Нетрудно видеть, что, поскольку  $a_{ij} = a_{ji}$  и  $b_{ij} = b_{ji}$ , в матрице  $\mathbf{N}$  отличными от нуля могут быть только элементы в первом столбце и в первой строке, причем, как нетрудно получить из (1.8),

$$n_{1j} = \frac{\alpha'_{q1}V^2}{2} (C_d^\alpha a_{j0} - C_l^\alpha b_{j0}), \quad j = 2..s$$

Выделим некоторые частные случаи, когда позиционные неконсервативные силы, обусловленные аэродинамикой, отсутствуют:

1. Если  $a_{j0} = 0$ ,  $b_{j0} = 0$  ( $j = 1..s$ ). Это означает, что в положении равновесия  $\delta \mathbf{r}_C = 0$  (т.е. эта точка является положением равновесия независимо от величины и направления сил, приложенных в точке  $C$ ). Подобные ситуации подробно проанализированы в работе [Mikhalev]. В [Mijhalev-Selyutskiy] рассмотрена ветроустановка колебательного типа, в которой также возникает данный эффект.
2. Если  $\alpha'_{q1} = 0$ , т.е. угол атаки не зависит от ориентации объекта, взаимодействующего с потоком. Это возможно, в частности, если этот объект

представляет собой круглый цилиндр или если он совершает поступательное движение. Кроме того, как это обсуждалось выше, такая ситуация имеет место для лопастей пропеллера (турбины), вращающегося в стационарном потоке, параллельном оси пропеллера.

3. Если  $a_{j0} = 0$  ( $j = 1..s$ ) и  $C_l^\alpha = 0$ . Это означает, что в положении равновесия абсцисса точки  $C$  имеет экстремум, и подъемная сила также имеет экстремум при угле атаки, отвечающем равновесию.
4. Если  $b_{j0} = 0$  ( $j = 1..s$ ) и  $C_d^\alpha = 0$ . Это означает, что в положении равновесия ордината точки  $C$  имеет экстремум, а сила лобового сопротивления имеет экстремум при угле атаки, отвечающем равновесию.

Отметим, что в первых двух случаях все элементы матрицы  $\mathbf{N}$  равны нулю при любых значениях коэффициентов аэродинамических сил.

Тем не менее, в общем случае наличие аэродинамических сил приводит к возникновению в системе позиционных неконсервативных сил.

Теперь выделим диссипативные силы, обусловленные аэродинамикой. Как нетрудно видеть из (1.8), элементы матрицы  $\mathbf{D}$  этих сил определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 d_{ij} = & C_{d0}V (b_{i0}b_{j0} + 2a_{i0}a_{j0}) - \frac{V^2 C_d^\alpha \alpha'_1}{2} (\alpha'_j a_{i0} + \alpha'_i a_{j0}) - \\
 & - \frac{VC_{l0}}{2} (a_{i0}b_{j0} + b_{i0}a_{j0}) + \frac{V^2 C_l^\alpha \alpha'_1}{2} (\alpha'_j b_{i0} + \alpha'_i b_{j0}) + \\
 & + VLC_{m0} (a_{j0}\delta_{1i} + a_{i0}\delta_{1j}) - \frac{V^2 C_m^\alpha \alpha'_1}{2} (\alpha'_j \delta_{1i} + \alpha'_i \delta_{1j})
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Оценим ранг матрицы  $\mathbf{D}$ . Введем в рассмотрение вспомогательные вектора раз-

мерности  $s$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_1 &= \{a_{10} \ a_{20} \ \dots \ a_{s0}\}^T, & \mathbf{Y}_2 &= \{b_{10} \ b_{20} \ \dots \ b_{s0}\}^T, \\ \mathbf{Y}_3 &= \{\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_s\}^T, & \mathbf{Y}_4 &= \{1 \ 0 \ \dots \ 0\}^T\end{aligned}$$

Тогда матрицу  $\mathbf{D}$  можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= C_{d0}V (\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_2^T + 2\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_1^T) - \frac{V^2C_d^\alpha\alpha'_1}{2} (\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3^T + \mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_1^T) - \\ &\quad - \frac{VC_{l0}}{2} (\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2^T + \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_1^T) + \frac{V^2C_l^\alpha\alpha'_1}{2} (\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_3^T + \mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_2^T) + \\ &\quad + VLC_{m0} (\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_4^T + \mathbf{Y}_4\mathbf{Y}_1^T) - \frac{V^2C_m^\alpha\alpha'_1}{2} (\mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_4^T + \mathbf{Y}_4\mathbf{Y}_3^T) = \\ &= \mathbf{Y}_1 \left( 2C_{d0}V\mathbf{Y}_1^T - \frac{V^2C_d^\alpha\alpha'_1}{2}\mathbf{Y}_3^T - \frac{VC_{l0}}{2}\mathbf{Y}_2^T + VLC_{m0}\mathbf{Y}_4^T \right) + \\ &\quad + \mathbf{Y}_2 \left( C_{d0}V\mathbf{Y}_2^T - \frac{VC_{l0}}{2}\mathbf{Y}_1^T + \frac{V^2C_l^\alpha\alpha'_1}{2}\mathbf{Y}_3^T \right) + \\ &\quad + \mathbf{Y}_3 \left( -\frac{V^2C_d^\alpha\alpha'_1}{2}\mathbf{Y}_1^T + \frac{V^2C_l^\alpha\alpha'_1}{2}\mathbf{Y}_2^T - \frac{V^2C_m^\alpha\alpha'_1}{2}\mathbf{Y}_4^T \right) + \\ &\quad + \mathbf{Y}_4 \left( VLC_{m0}\mathbf{Y}_1^T - \frac{V^2C_m^\alpha\alpha'_1}{2}\mathbf{Y}_3^T \right)\end{aligned}\tag{1.10}$$

Из (1.10) видно, что матрица диссипативных сил представляется в виде суммы четырех матриц. Каждая из них представляет собой произведение вектора-столбца на вектор-строку, и поэтому ее ранг не больше 1. Соответственно, ранг  $\mathbf{D}$  не превышает 4. Это означает, что матрица диссипативных сил имеет не более 4 отличных от нуля собственных значений.

Таким образом, аэродинамические силы при сделанных относительно них предположениях заведомо не могут обеспечить полную диссипацию в системе с числом степеней свободы более 4.

Будем обозначать через  $\Delta_n$  главные миноры порядка  $n$  матрицы  $\mathbf{D}$ . Глав-



ный минор 4-го порядка имеет вид:

$$\Delta_4 = -\frac{L^2 V^6}{16} \left( 8C_{d0} C_m^\alpha (C_{d0} C_m^\alpha - C_{m0} C_d^\alpha) - (C_{l0} C_m^\alpha - 2C_{m0} C_l^\alpha)^2 \right) \times \\ \times (a_{20} b_{30} \alpha'_4 - a_{20} b_{40} \alpha'_3 - a_{30} b_{20} \alpha'_4 + a_{30} b_{40} \alpha'_2 + a_{40} b_{20} \alpha'_3 - a_{40} b_{30} \alpha'_2)^2$$

Знак этого выражения зависит от величин аэродинамических коэффициентов и их производных в положении равновесия.

Рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть  $C_{l0} = C_{m0} = 0$  (такая ситуация имеет место, например, для тонкого крыла с симметричным профилем в положении «вдоль потока»). Тогда

$$\Delta_4 = -\frac{L^2 V^6}{2} (C_{d0} C_m^\alpha)^2 (a_{20} b_{30} \alpha'_4 - a_{20} b_{40} \alpha'_3 - a_{30} b_{20} \alpha'_4 + \\ + a_{30} b_{40} \alpha'_2 + a_{40} b_{20} \alpha'_3 - a_{40} b_{30} \alpha'_2)^2 < 0.$$

Рассмотрим также несколько ситуаций, в которых ранг матрицы диссипативных сил меньше максимального значения.

1.  $C_{m0} = C_m^\alpha = 0$ . В этом случае коэффициент при  $\mathbf{Y}_4$  в (1.10) обращается в нуль, и  $\text{rank} \mathbf{D} \leq 3$ .

$$\Delta_3 = -\frac{V^5}{4} \left( C_{d0} (C_d^\alpha)^2 + 2C_{d0} (C_l^\alpha)^2 - C_d^\alpha C_{l0} C_l^\alpha \right) \times \\ \times ((a_{10} b_{20} - a_{20} b_{10}) \alpha'_3 + (a_{30} b_{10} - a_{10} b_{30}) \alpha'_2 + (a_{20} b_{30} - a_{30} b_{20}) \alpha'_1)^2$$

Эта величина отрицательна, если  $C_{l0} = 0$  и/или  $C_d^\alpha = 0$ .

2.  $a_{j0} = 0$  ( $j = 1..s$ ). В этом случае все элементы вектора  $\mathbf{Y}_1$  равны нулю, и  $\text{rank} \mathbf{D} \leq 3$ .

$$\Delta_3 = -\frac{V^5 L^2}{4} C_{d0} (C_m^\alpha)^2 (b_{20} \alpha'_3 - b_{30} \alpha'_2)^2 < 0$$

3.  $b_{j0} = 0$  ( $j = 1..s$ ). В этом случае все элементы вектора  $\mathbf{Y}_2$  равны нулю, и  $\text{rank} \mathbf{D} \leq 3$ .

$$\Delta_3 = -\frac{V^5 L^2}{2} C_m^\alpha (C_{d0} C_m^\alpha - C_{m0} C_d^\alpha) (a_{30} \alpha'_2 - a_{20} \alpha'_3)^2$$

Эта величина отрицательна, если  $C_{m0} = 0$  или  $C_d^\alpha = 0$ .

В рассмотренных частных случаях матрица  $\mathbf{D}$  не является положительно полуопределенной, и среди ее собственных чисел имеются отрицательные, т.е. аэродинамические силы имеют характер, так сказать, «антидиссипативных».

## 1.2. Модель присоединенного осциллятора

Для учета нестационарных эффектов, возникающих в случае, когда тело движется в среде неравномерно, воспользуемся подходом, изложенным в [50]. Этот подход использует дополнительные «скрытые координаты», которые характеризуют внутреннюю динамику потока среды. Аналогичный метод, в частности, использовался в работах [111, 198] для описания динамики «плохообтекаемых» тел (т.е. тел, обтекание которых сопровождается отрывными явлениями, активным формированием вихрей и т.п.).

### 1.2.1. Описание модели

Предположим, что твердое тело может совершать возвратно-поступательное движение вдоль неподвижной прямой  $L$  (рис. 1.4). Пусть это тело имеет форму тонкого прямоугольного крыла  $ABCD$ . Пусть кромка  $AB$  пластины перпендикулярна прямой  $L$ . Введем неподвижную систему координат  $OXYZ$ , начало которой поместим в некоторую точку прямой, вдоль которой движется центр масс пластины. Ось  $OX$  направим вдоль прямой  $L$ , ось  $OZ$  — параллельно кромке  $AB$ , а ось  $OY$  — соответственно.

Предположим, что плоскость пластины параллельна плоскости  $YZ$ . В качестве обобщенной координаты выберем абсциссу  $x$  центра масс пластины.

Пусть пластина помещена в поток среды, скорость  $V$  которого на беско-

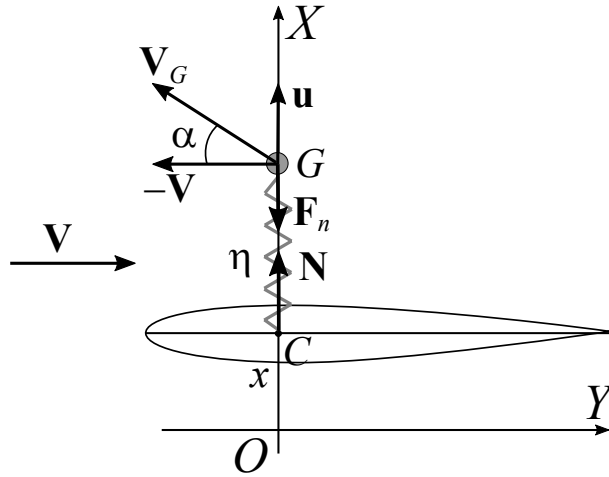


Рис. 1.4. Поступательно движущееся крыло с присоединенным осциллятором

нечности постоянна и параллельна оси  $OY$ . Обозначим через  $N$  проекцию на ось абсцисс силы, с которой поток действует на пластину. Будем считать пластину-крыло установленным таким образом, чтобы при стационарном потоке и неподвижном ( $\dot{x} = 0$ ) крыле выполнялось  $N = 0$ .

Тогда уравнение движения пластины в проекции на ось  $Ox$  имеет следующий вид:

$$M\ddot{x} = F_x + N, \quad (1.11)$$

где  $M$  — масса пластины, а  $F_x$  — внешняя сила, не связанная со средой (например, вынуждающая сила, обеспечивающая поддержание заданного режима движения, или возвращающая сила).

Из статических экспериментов известно, что для тонкого крыла положение центра давления практически не зависит от угла атаки, пока этот угол остается достаточно малым (диапазон углов атаки и положение центра давления зависят от профиля крыла). Соответствующая точка хорды называется передним фокусом крыла. Обозначим ее через  $C$  и будем «привязываться» к ней при описании аэродинамического воздействия на движущееся крыло в рамках квазистатического подхода. Ограничимся рассмотрением таких движений крыла,

при которых соответствующий угол атаки остается достаточно малым.

Следуя [50, 51], будем моделировать внутреннюю динамику потока среды с помощью линейного осциллятора  $G$ , который может совершать колебания вдоль прямой, перпендикулярной хорде крыла и проходящей через точку  $C$ . Этот осциллятор в дальнейшем будем называть «присоединенным осциллятором». Обозначим соответствующую обобщенную координату через  $\eta$ . Будем считать, что на осциллятор со стороны остального потока действует сила, определяющаяся скоростью осциллятора относительно набегающего потока, причем проекция этой силы на нормаль к хорде имеет следующий вид:

$$F_n = \frac{\rho S}{2} V_G^2 C_n(\alpha_g),$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $S$  — площадь крыла,  $V_G$  — воздушная скорость точки  $G$ ,  $\alpha_g$  — угол атаки, под которым будем понимать угол между вектором воздушной скорости и хордой крыла,  $C_n$  — безразмерный коэффициент нормальной силы, зависящий от угла атаки так же, как и в стационарном случае. В области малых углов атаки выполняется соотношение  $C_n(\alpha) = C_n^\alpha \alpha$ .

Воздушная скорость точки  $G$ , т.е. ее скорость относительно набегающего потока, представляет собой сумму  $-\mathbf{V} + \mathbf{u}$ , где  $u$  — скорость точки  $G$  относительно неподвижной системы отсчета. Поэтому для угла атаки справедлива следующая формула:

$$\operatorname{tg} \alpha_g = \frac{u}{V}$$

Поскольку движение рассматривается в области малых углов атаки, получаем:

$$\alpha_g = \frac{\dot{x} + \dot{\eta}}{V}$$

Кроме того, предположим, что крыло взаимодействует с потоком «через посредство» присоединенного осциллятора, т.е. сила  $N$  в (1.11) представляет

собой нормальную (к хорде) компоненту аэродинамической силы, действующей на крыло.

Для упрощения записи выберем единицы измерения таким образом, что  $b = 1$ ,  $\rho S/2 = 1$ ,  $V = 1$ , где  $V$  — скорость набегающего потока на бесконечности,  $b$  — хорда пластины. Тогда параметры  $M$ ,  $m$ , силы  $F_x$ ,  $N$ ,  $F_n$  и координаты  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\eta$ ,  $\dot{\eta}$  окажутся соответствующим образом нормированными.

С учетом изложенного уравнения движения системы «крыло+присоединенный осциллятор» примут вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= F_x + k\eta + h\dot{\eta} \\ m(\ddot{x} + \ddot{\eta}) &= -k\eta - h\dot{\eta} - C_n^\alpha(\dot{x} + \dot{\eta}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Отметим, что введенная «внутренняя координата потока», во-первых, недоступна непосредственному измерению, а во-вторых, начальное значение  $\eta_0$  в общем случае не определено. Впрочем, как известно, неизмеряемая величина может быть наблюдаемой, т.е. её значение в любой момент времени (в том числе и в начальный) может быть восстановлено по данным о тех координатах, которые доступны измерению (в первую очередь, координатах и скоростях точек тела). Кроме того, в случае, когда стационарный поток обтекает достаточно долго неподвижное крыло, установленное под нулевым углом атаки, естественно считать, что не только  $\eta \equiv 0$ , но и  $\dot{\eta} \equiv 0$ .

Идентификация параметров присоединенного осциллятора может осуществляться на основе экспериментальных данных.

В работах [14, 43] приведены данные экспериментов, в которых крыло совершало вынужденные поступательные гармонические колебания в направлении поперек потока. В системе отсчета, связанной с потоком, координата  $x$  изменялась со временем по следующему закону:

$$x(t) = a \cos \Omega t \quad (1.13)$$

Здесь  $\Omega$  — безразмерная частота, называемая также числом Струхаля.

Тогда мгновенный угол атаки  $\alpha$ , определяемый как угол между скоростью профиля относительно потока и хордой, будет определяться следующей формулой:

$$\alpha \approx a\Omega \sin \Omega t$$

При этом зависимость коэффициента нормальной силы от времени будет иметь следующий вид:

$$C_n(t) = A_n \sin \Omega t + B_n \cos \Omega t + f_n(t),$$

где в  $f_n(t)$  входят гармоники более высокого порядка.

Эксперименты показывают, что коэффициенты при этих гармониках невелики, и ими можно пренебречь, по крайней мере, для не слишком больших чисел Струхаля ( $\Omega < 2$ ). Отметим, что проявление гармоник высших порядков свидетельствует о нелинейности рассматриваемого процесса, и в этой ситуации предлагаемая линейная модель, естественно, требует уточнений.

Испытания [14] и [43] производились в воде (крылья буксировались), профиль крыла был симметричным — НАСА0015. В [14] использовались крылья с удлинением 2 ( $C_n^\alpha = 2.8$ ) и 4 ( $C_n^\alpha = 3.6$ ), значение параметра  $\Omega$  изменялось в диапазоне от 0.3 до 2.3. В одной серии экспериментов амплитуда  $a = 0.2$ , во второй —  $a = 0.286$ . В [43] использовались крылья с удлинением 3 ( $C_n^\alpha = 3.8$ ) и 5 ( $C_n^\alpha = 4.5$ ). Амплитуда  $a$  колебаний изменялась от 0.045 до 0.35. Значение параметра  $\Omega$  лежит в пределах от 0.2 до 1.8

Подставим зависимость (1.13) в уравнение (1.12). Заметим, что, поскольку в экспериментах измеряется именно величина вынуждающей силы, в которую затем вносятся поправки, связанные с наличием у пластины инерционных свойств, из 1-го уравнения системы (1.12) получим аппроксимационную формулу для экспериментальной зависимости нормальной силы от времени  $N_{appr}(t)$ :

$$N_{appr}(t) = -F - M\ddot{x} = k\eta + d\dot{\eta} \quad (1.14)$$

Учитывая зависимость положения пластины от времени, из второго уравнения системы (1.12) получим:

$$N_{appr}(t) = a\Omega \frac{C_n^\alpha k^2 + h\Omega^4 m^2 + h\Omega^2 C_n^{\alpha 2} + h^2 \Omega^2 C_n^\alpha}{(k - m\Omega^2) + (h + C_n^\alpha)^2 \Omega^2} \sin(\Omega t) - \\ - a\Omega^2 \frac{k\Omega^2 m^2 + kC_n^{\alpha 2} - k^2 m - m\Omega^2 h^2}{(k - m\Omega^2) + (h + C_n^\alpha)^2 \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (1.15)$$

Для расчетов были выбраны значения:  $k = 2$ ,  $h = 10$ . На рис. 1.5 сплошными линиями изображены расчетные кривые, полученные по формуле (1.15), пунктиром — результат, полученный в рамках квазистатической модели, а кружками — первая гармоника, полученная из экспериментальных данных. Видно, что расчет по формуле (1.15) достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Вообще говоря, нестационарность проявляется двояким образом. Во-первых, амплитуда нестационарного отклика отличается от амплитуды квазистатического значения, во-вторых нестационарный отклик имеет сдвиг фазы относительно квазистатического (как на рис. 1.5а). Однако в частном случае, представленном на рис. 1.5б, практически отсутствует сдвиг фазы, но амплитуды заметно отличаются.

Предложенные значения параметров присоединенной динамической системы являются в достаточной мере условными: хотя они позволяют обеспечить удовлетворительное согласие с конкретными экспериментами в сравнительно широком диапазоне параметров движения для тел типа плоской пластины, нельзя исключить того, что они на самом деле зависят от параметров движения (например, от частоты колебаний), от характеристик среды и т.д.

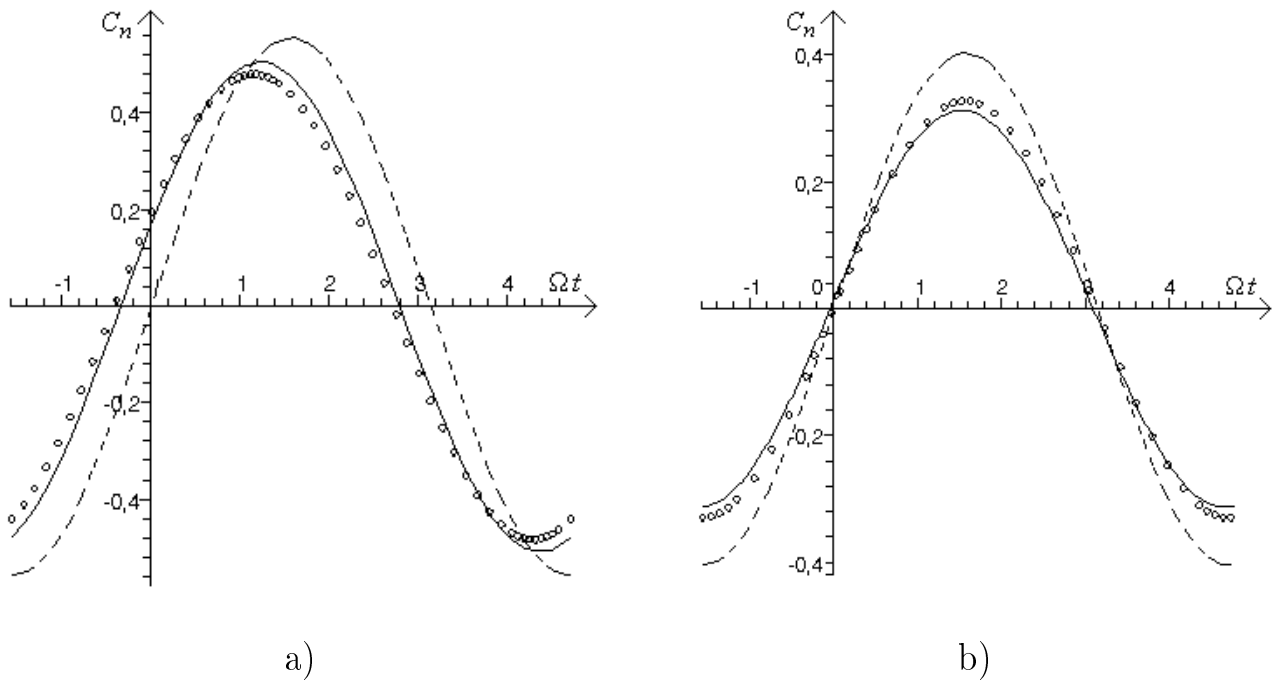


Рис. 1.5. Зависимость коэффициента  $C_n$  от времени: эксперимент (точки), формула (1.15) (сплошные линии), и квазистатика (пунктирные линии): а)  $\Omega = 0.993$ ,  $a = 0.2$ ,  $C_n^\alpha = 2.8$ ; б)  $\Omega = 0.5$ ,  $a = 0.21$ ,  $C_n^\alpha = 3.8$ .

С учетом этого обстоятельства, а также для сохранения возможности проведения параметрического анализа, в дальнейшем мы сохраним за этими величинами смысл параметров.

### 1.2.2. Интегро-дифференциальная форма представления уравнений движения

В литературе для описания сил и моментов, действующих на тело в потоке, иногда используются интегро-дифференциальные уравнения с ядрами, представляющими собой сумму экспонент. Вообще говоря, этих экспонент бесконечно много, но в некоторых ситуациях для приемлемого описания происходящего может оказаться достаточным сохранить лишь конечное их число. В частности, С.М. Белоцерковский показал, что в рассматриваемой задаче о поступательном



движении пластины достаточно двух экспонент. Поэтому вопрос о соответствии между различными формами представления уравнений движения тела в среде представляет самостоятельный интерес.

Как известно, система (1.12) может быть единственным образом «свернута» в одно интегро-дифференциальное уравнение относительно переменной  $x(t)$ . Для этого 2-е уравнение системы (1.12) будем рассматривать как неоднородное уравнение относительно переменной  $\eta(t)$ :

$$m\ddot{\eta} + (h + C_n^\alpha)\dot{\eta} + k\eta = f(t) = -m\ddot{x} - C_n^\alpha\dot{x} \quad (1.16)$$

Общее решение этого уравнения методом вариации произвольных постоянных представим в виде

$$\begin{aligned} \eta(t) = & m \frac{-\eta_0\lambda_2 + \dot{\eta}_0}{\sigma} e^{\lambda_1 t} + m \frac{\eta_0\lambda_1 - \dot{\eta}_0}{\sigma} e^{\lambda_2 t} + \\ & + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^2 \int_0^t (-1)^i (m\ddot{x}(\tau) + C_n^\alpha\dot{x}(\tau)) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (1.17)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни характеристического уравнения для (1.16):

$$m\lambda^2 + (C_n^\alpha + h)\lambda + k = 0, \quad (1.18)$$

а  $\sigma = \sqrt{(h + C_n^\alpha)^2 - 4km}$ . Очевидно, что при  $(h + C_n^\alpha) > 0$  имеем  $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ .

После подстановки (1.17) в 1-е уравнение системы (1.12) и интегрирования по частям получим:

$$M\ddot{x} = N(t) + F, \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned}
N(t) = & -C_n^\alpha \dot{x} + \eta_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k(k/\lambda_i + h)}{\sigma} e^{\lambda_i t} - \\
& - \dot{\eta}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{m(k + h\lambda_i)}{\sigma} e^{\lambda_i t} + C_n^\alpha \dot{x}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i t} + \\
& + \sum_{i=1}^2 (-1)^i (m + C_n^\alpha/\lambda_i) \frac{k + h\lambda_i}{\sigma} \int_0^t \ddot{x} e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \quad (1.20)
\end{aligned}$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}|_{t=0}, \ddot{x}_0 = \ddot{x}|_{t=0}, \eta_0 = \eta|_{t=0}, \dot{\eta}_0 = \dot{\eta}|_{t=0}$$

Таким образом, (1.19) представляет собой двухпараметрическое семейство интегро-дифференциальных уравнений, в котором роль параметров играют величины  $\eta_0$  и  $\dot{\eta}_0$ . Поскольку само (1.19) содержит в качестве неизвестной лишь функцию  $x(t)$ , то, вообще говоря, априори неясно, откуда следует брать значения этих параметров. Поэтому следует учитывать, что не каждое решение исходной системы является решением конкретного интегро-дифференциального уравнения из указанного семейства.

Отметим, что (1.20) содержит слагаемое, зависящее от мгновенной скорости тела, и слагаемые, связанные с предысторией, в том числе, и интегральное. Видно, что собственно начальные условия движения тела и присоединенного осциллятора «забываются» с экспоненциальной скоростью.

### 1.2.3. Разделение движений

При работе с интегро-дифференциальными уравнениями типа (1.19)-(1.20) обычно интегрированием по частям понижают порядок производной под интегралом, чтобы упростить вид уравнения. Покажем, что обратная операция, т.е. повышение порядка производной, дает определенные преимущества. В резуль-

тате этого преобразования получаем:

$$\begin{aligned}
N(t) = & -C_n^\alpha \dot{x} - \left( m - \frac{C_n^{\alpha 2}}{k} \right) \ddot{x} + \\
& + \eta_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k(k/\lambda_i + h)}{\sigma} e^{\lambda_i t} - \dot{\eta}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{m(k + h\lambda_i)}{\sigma} e^{\lambda_i t} + \\
& + C_n^\alpha \dot{x}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i t} + \ddot{x}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i (m + C_n^\alpha/\lambda_i) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i t} - \\
& + \sum_{i=1}^2 (-1)^i (m + C_n^\alpha/\lambda_i) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} \int_0^t \ddot{x} e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \quad (1.21)
\end{aligned}$$

Использовать такую форму представления оказывается удобно, если тело совершает, так сказать, «медленное» движение. Введем в (1.21) медленное время  $\bar{t} = t\varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$  (предполагается, что  $x(\bar{t})$  — ограниченная функция вместе со всеми своими производными):

$$\begin{aligned}
N(\bar{t}) = & -\varepsilon C_n^\alpha x' - \varepsilon^2 \left( m - \frac{C_n^{\alpha 2}}{k} \right) x'' + \\
& + \eta_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k(k/\lambda_i + h)}{\sigma} e^{\lambda_i \bar{t}/\varepsilon} - \dot{\eta}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{m(k + h\lambda_i)}{\sigma} e^{\lambda_i \bar{t}/\varepsilon} + \\
& + C_n^\alpha \dot{x}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i \bar{t}/\varepsilon} + \ddot{x}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i (m + C_n^\alpha/\lambda_i) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i \bar{t}/\varepsilon} - \\
& + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^2 (-1)^i (m + C_n^\alpha/\lambda_i) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} \int_0^{\bar{t}/\varepsilon} x''' e^{\lambda_i(\bar{t}/\varepsilon - \tau)} d\tau \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначена производная по медленному времени.

Из (1.22) видно, что при  $\varepsilon \ll |\lambda_1|$  процесс «забывания» начальных условий и присоединенного осциллятора, и пластины протекает в рамках «погранслоя по времени» ( $\bar{t} < \bar{T} \sim \varepsilon/|\lambda_1|$ ).

Остальные слагаемые естественным образом разделились по степеням малого параметра. Ясно, что при медленном движении тела нормальная составля-

ющая  $N$  аэродинамической силы мала. Если ограничиться в (1.22) лишь слагаемым первого порядка по  $\varepsilon$ , то получим квазистатическое приближение, т.к. для традиционно принятого в аэромеханике мгновенного угла атаки имеем  $\alpha = -\dot{x}$ .

Вообще говоря, может возникнуть необходимость учета членов второго порядка малости по  $\varepsilon$ , т.е. второго слагаемого в (1.22). Сгруппировав все члены, содержащие ускорение, в левой части, мы получим, что добавочный коэффициент при ускорении, обусловленный наличием аэродинамики, имеет вид

$$m - \frac{C_n^{\alpha^2}}{k}$$

Эта величина отрицательна как раз для пластин с относительно высоким значением  $C_n^{\alpha}$ . Так что в этом случае справедливее говорить не о «присоединении» массы, а скорее об ее «отсоединении».

Таким образом, новая форма (1.22) оказалась удобной для реализации процедуры разделения времени.

Заметим, что изложенная выше процедура интегрирования по частям с повышением порядка производной от неизвестной величины под интегралом позволяет регулярным образом осуществлять разложение по малому параметру.

Вообще говоря, интегро-дифференциальные уравнения типа (1.20) можно привести к виду (1.21) и в случае ядер более общего вида.

Очевидно, что систему (1.12) для любой конкретной зависимости силы  $F$  от фазовых координат тела и времени можно привести к виду одного уравнения четвертого порядка относительно переменной  $x$ . Отметим также, что это же уравнение можно получить и из интегро-дифференциального уравнения (1.20) путем последовательного исключения экспонент.

В частности, если  $F$  является упругой силой, действующей на крыло со стороны крепления, т.е.  $F = -\kappa x - \delta \dot{x}$ , уравнение четвертого порядка примет

следующий вид:

$$\begin{aligned}
 Mx^{(IV)} + \frac{m\delta + mh + hM + C_n^\alpha M}{m} \ddot{x} + \\
 + \frac{km + kM + m\chi + h\delta + C_n^\alpha h + C_n^\alpha \delta}{m} \dot{x} + \frac{h\chi + k\delta + C_n^\alpha \chi + kC_n^\alpha}{m} x + \frac{k\chi}{m} x = 0 \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Проведем сопоставление полученных уравнений движения тела в среде с уравнениями, получающимися в рамках некоторых других известных моделей.

#### 1.2.4. Сравнение с моделью С. М. Белоцерковского

##### Моделирование подъемной силы с помощью интеграла Дюамеля

В работе [6] предложено моделировать воздействие потока на колеблющееся крыло с помощью интеграла Дюамеля с ядром в виде суммы экспоненциальных функций времени, показатели которых определялись в ходе численных экспериментов.

В рамках этой модели зависимость коэффициента подъемной силы от времени в случае поступательного движения тела имеет вид:

$$C_y(t) = -\dot{x}_0 H(t) - \int_0^t H(t - \tau) \ddot{x}(\tau) d\tau \quad (1.24)$$

Здесь предполагается, что  $\dot{x}(t)|_{t<0} = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +0} \dot{x} = \dot{x}_0$ . Ядро интеграла имеет вид

$$H(t) = C_y^\alpha + \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t}$$

В этом случае уравнение движения пластины запишется таким образом:

$$M\ddot{x} = -\dot{x}_0 H(t) - \int_0^t H(t - \tau) \ddot{x}(\tau) d\tau + F \quad (1.25)$$

Путем несложных преобразований выражение для  $C_y$  можно привести к следующей форме:

$$C_y = -\dot{x}C_y^\alpha + \ddot{x} \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} - \dot{x}_0 \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} - \ddot{x}_0 \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} e^{\lambda_i t} - \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} e^{\lambda_i(t-\tau)} \ddot{x}(\tau) d\tau \quad (1.26)$$

Тогда уравнение (1.25) с учетом (1.26) примет следующий вид:

$$M\ddot{x} = -\dot{x}C_y^\alpha + \ddot{x} \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} - \dot{x}_0 \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} - \ddot{x}_0 \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} e^{\lambda_i t} - \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} e^{\lambda_i(t-\tau)} \ddot{x}(\tau) d\tau + F \quad (1.27)$$

Сравним его с (1.19). Видно, что эти выражения имеют схожую структуру. Однако в (1.27) отсутствуют, так сказать, «начальные возмущения» по содержащимся в ядре экспонентам (иначе говоря, по возмущениям потока среды). Таким образом, при заданных  $x_0$ ,  $\dot{x}_0$  (1.27), в отличие от (1.19), не является семейством уравнений.

## Сопоставление коэффициентов

В уравнениях типа (1.27) можно с помощью регулярной процедуры производить последовательное исключение экспонент ядра. При этом порядок уравнения каждый раз будет увеличиваться на единицу. Если в ядре всего  $n$  экспонент, то в результате применения процедуры исключения получится обыкновенное дифференциальное уравнение порядка  $n + 2$ .

В процессе обработки некоторых данных авторы статьи [6] установили, что для достижения вполне приемлемой аппроксимации отклика среды достаточно учитывать лишь две экспоненты ядра. Тогда в предположении, что внешняя

сила  $F$  является упругой силой со стороны крепления, т.е.  $F = -\varkappa x - \delta \dot{x}$ , уравнение (1.27) можно привести к виду

$$\begin{aligned} Mx^{IV} + (\delta + C_n^\alpha - (\lambda_1 + \lambda_2)M - c_1 - c_2)\ddot{x} + \\ + (\varkappa - (\lambda_1 + \lambda_2)(\delta + C_n^\alpha) + M\lambda_1\lambda_2 + c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1)\ddot{x} + \\ + (-\varkappa(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2(\delta + C_n^\alpha))\dot{x} + \lambda_1\lambda_2\varkappa x = 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Отметим, что не при всех начальных условиях траектории уравнения (1.28) являются решениями уравнения вида (1.25), т.к. в последнем  $\ddot{x}_0$  и  $\ddot{x}_0$  связаны с  $x_0$  и  $\dot{x}_0$ .

Ясно, что уравнения (1.28) и (1.23) должны совпадать для любых значений  $M$ ,  $\varkappa$  и  $\delta$ . Из этого условия получаем соотношения, связывающие коэффициенты модели [6] с коэффициентами предложенной модели:

$$\begin{aligned} m^2\lambda_1\lambda_2 + [C_n^\alpha(\lambda_1 + \lambda_2) - c_1\lambda_2 - c_2\lambda_1]m + C_n^\alpha(C_n^\alpha - c_1 - c_2) &= 0 \\ k = m\lambda_1\lambda_2, \quad h = C_n^\alpha - c_1 - c_2 & \quad (1.29) \\ 0 = m(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C_n^\alpha + c_1 + c_2 & \end{aligned}$$

Обратим внимание на последнее соотношение. Учитывая результаты предшествующего обсуждения, можно ожидать, что параметры ядра  $c_{1,2}$  и  $\lambda_{1,2}$  в представлении (1.26) не являются независимыми.

### 1.2.5. Угловые колебания крыла — аэродинамический маятник

Рассмотрим теперь несколько более сложную ситуацию — вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, перпендикулярной направлению набегающего потока. Типичным объектом, совершающим такое движение, является флюгер.

Рассмотрим аэродинамический маятник — твёрдое тело, состоящее из стержня-державки  $OA$  и крыла с симметричным профилем, жестко скреплённого с державкой в носике (рис. 1.6) так, что державка и хорда профиля лежат на одной прямой. Пусть точка  $O$  неподвижна и представляет собой идеальный цилиндрический шарнир. Обозначим длину державки (от оси вращения до передней кромки крыла) через  $l$ . Будем считать, что  $l > 0$ , если точка  $O$  находится «слева» от носика  $A$  профиля, и  $l < 0$ , если она расположена «справа» него. Предположим, что маятник помещен в поток среды, имеющий на бесконечности постоянную скорость  $\mathbf{V}$ . Воздействием потока на державку будем пренебрегать.

Введем неподвижную систему координат  $OXY$ , ось абсцисс направим вдоль потока. Положение маятника описывается одной обобщённой координатой — углом поворота  $\theta$  (между направлением потока и державкой).

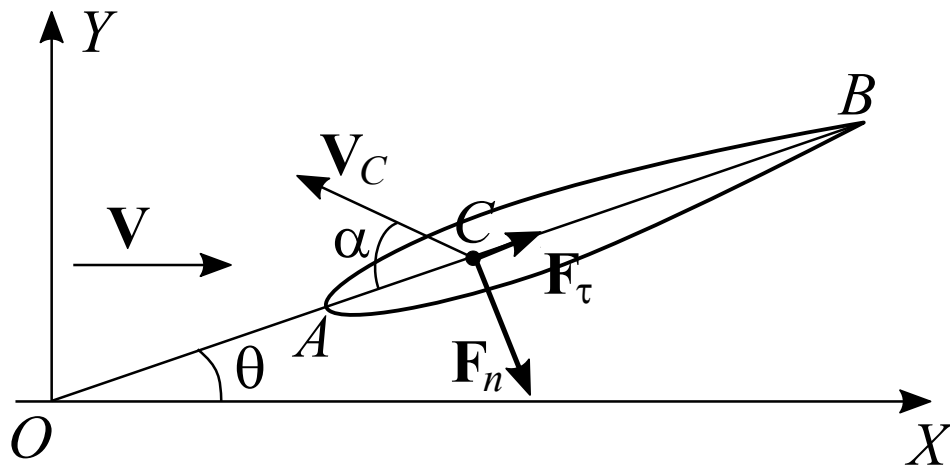


Рис. 1.6. Однозвенный аэродинамический маятник.

Вначале воспользуемся для описания воздействия потока на наш маятник вариантом квазистатического подхода, в рамках которого предполагается, что воздействие потока на маятник сводится к одной силе, приложенной в точке  $C$  хорды профиля (статический центр давления). Как и ранее, разложим эту силу на две составляющие — нормальную к хорде  $\mathbf{F}_n$  и направленную вдоль хорды



$\mathbf{F}_\tau$ , причем

$$F_n = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_n(\alpha), \quad F_\tau = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_\tau(\alpha)$$

Здесь  $S$  — площадь крыла,  $\rho$  — плотность среды,  $C_n$  и  $C_\tau$  — безразмерные коэффициенты нормальной и тангенциальной силы (их зависимость от угла атаки определяется из статических экспериментов),  $V_C$  — величина воздушной скорости центра давления  $C$ , а  $\alpha$  — угол атаки (под которым понимается угол между вектором  $\mathbf{V}_C$  и хордой крыла). Воздушная скорость и угол атаки определяются из следующих кинематических соотношений:

$$\begin{aligned} V_C \cos \alpha &= V \cos \theta \\ V_C \sin \alpha &= V \sin \theta + (l + l_0) \dot{\theta} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Здесь  $l_0$  — расстояние от передней кромки крыла до центра давления.

Тогда уравнения движения маятника примут вид [4]:

$$J\ddot{\theta} = - (l + l_0) \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_n(\alpha) + M_z \tag{1.31}$$

Здесь  $J$  — момент инерции крыла относительно точки  $O$ ,  $M_z$  — момент внешних сил не аэродинамической природы (например, управляющий момент).

Уравнения (1.31) и (1.30) образуют замкнутую систему уравнений движения рассматриваемого объекта. При  $M_z = 0$ , в силу симметричности профиля, существует очевидное положение равновесия «по потоку»  $\theta(t) \equiv 0$ .

Будем рассматривать только малые колебания в окрестности этого положения равновесия. Тогда, как известно из статических экспериментов, центр давления практически не меняет свое положение на хорде (и располагается для разных крыльев на расстоянии  $0.2 \div 0.25$  длины хорды от передней кромки), а коэффициент нормальной силы является линейной функцией угла атаки:  $C_n(\alpha) = C_n^\alpha \alpha$ .

Чтобы учесть инерционные свойства потока среды, проявляющиеся при угловых колебаниях маятника в потоке, адаптируем предложенную ранее модель присоединенного осциллятора для этой ситуации.

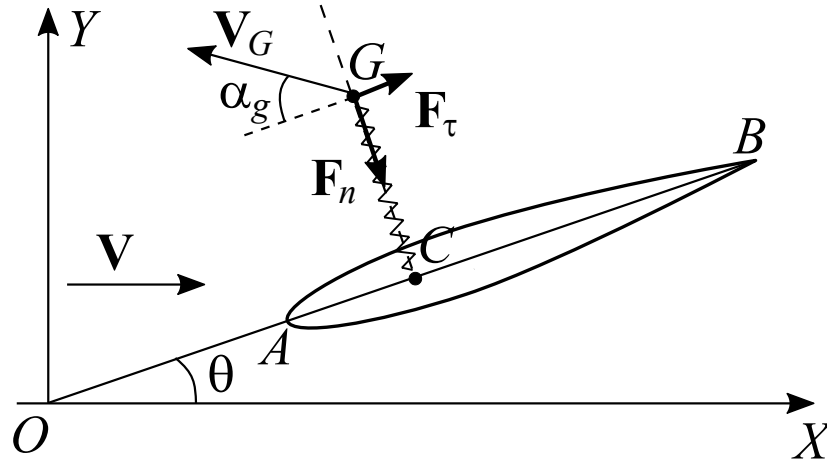


Рис. 1.7. Однозвенный аэродинамический маятник с присоединенным осциллятором.

Предположим, что осциллятор прикреплен к хорде крыла в статическом центре давления  $C$  так, что точка  $G$  может перемещаться вдоль нормали к хорде (рис. 1.7). Обозначим расстояние от точки  $G$  до хорды через  $\eta$  (эта величина играет роль дополнительной обобщенной координаты). Будем считать также, что сила аэродинамического воздействия со стороны потока приложена к точке  $G$ , и её нормальная и тангенциальная составляющие имеют следующую структуру:

$$F_n = \frac{\rho S}{2} V_G^2 \hat{C}_n, \quad F_\tau = \frac{\rho S}{2} V_G^2 C_\tau \quad (1.32)$$

Здесь  $C_n$ ,  $C_\tau$  — безразмерные коэффициенты нормальной и тангенциальной силы.

Уравнения движения системы «маятник+осциллятор» имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} + m\eta^2\ddot{\theta} + 2m\eta\dot{\eta}\dot{\theta} + m(l+l_0)\eta\dot{\theta}^2 &= (l+l_0)(k\eta+h\dot{\eta}) - \eta F_\tau + M_z \\ m(\ddot{\eta} + (l+l_0)\ddot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2) &= -k\eta - h\dot{\eta} - F_n \end{aligned} \quad (1.33)$$

Здесь  $m$  — масса присоединённого осциллятора,  $k$  и  $h$  — коэффициенты жесткости и демпфирования, соответственно.

Как и в предыдущем пункте, для упрощения записи выберем единицы измерения таким образом, что  $b = 1$ ,  $\rho S/2 = 1$ ,  $V = 1$ , где  $V$  — скорость набегающего потока на бесконечности,  $b$  — хорда пластины. Тогда величины  $\eta$ ,  $\dot{\eta}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $h$ ,  $l$ ,  $l_0$  окажутся соответствующим образом нормированными. Эта процедура, разумеется, эквивалентна обезразмериванию.

Эффективный угол атаки  $\alpha_g$  и воздушная скорость  $V_G$  точки  $G$  определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} V_G \cos \alpha_g &= \cos \theta + \eta \dot{\theta} \\ V_G \sin \alpha_g &= \sin \theta + (l + l_0) \dot{\theta} + \dot{\eta} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Поскольку крыло в аэродинамическом маятнике имеет симметричный профиль, то из соображений симметрии ясно, что при  $M_z \equiv 0$  система 1.33 имеет неподвижную точку  $\theta = \eta = 0$  (что отвечает положению, в котором маятник выставлен «по потоку», а пружина осциллятора не деформирована).

Ограничимся рассмотрением случая, когда маятник совершает достаточно медленное движение в окрестности этого положения, т.е. в области малых углов  $\theta$ . Тогда величина  $\eta$  также будет малой. Известно, что в области малых углов атаки величина коэффициента тангенциальной силы для тонких профилей мала. Поэтому будем в дальнейшем пренебрегать влиянием этой силы на динамику системы.

Кроме того, предположим, что «нестационарный» коэффициент нормальной силы можно представить в следующем виде:

$$\hat{C}_n = C_n(\alpha_g) + C_\omega \dot{\theta}$$

Здесь  $C_n(\alpha_g)$  — коэффициент нормальной силы, зависимость которого от угла атаки считается известной из статических экспериментов, а  $\alpha_g$  — эффективный

угол атаки, под которым, как и в предыдущем пункте, мы будем понимать угол между воздушной скоростью точки  $G$  и хордой профиля; величина  $C_\omega$  (которую мы будем считать постоянной) представляет собой параметр, который аналогичен вращательной производной нормальной силы по угловой скорости (с той оговоркой, что в данном подходе зависимость нормальной силы от угловой скорости частично учтена в угле атаки).

Добавление в выражение для коэффициента нормальной силы слагаемого  $C_\omega \dot{\theta}$  диктуется следующим соображением. Если величина  $l + l_0 = 0$  (т.е. ось вращения расположена в центре давления), то угол атаки оказывается не зависящим от угловой скорости маятника. Соответственно, и аэродинамическое воздействие на маятник (в том числе и нормальная сила) не зависит от угловой скорости. Такое, в некотором смысле, «вырождение» представляется неоправданным.

Поскольку углы атаки малы, будем считать, что  $C_n(\alpha_g) = C_n^\alpha \alpha_g$ .

Отбрасывая в уравнениях (1.33) и (1.34) члены выше первого порядка малости, получим:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= (l + l_0)(k\eta + h\dot{\eta}) + M_z \\ m(\ddot{\eta} + (l + l_0)\ddot{\theta}) &= -k\eta - h\dot{\eta} - C_n^\alpha(\theta + (l + l_0)\dot{\theta} + \dot{\eta}) - C_\omega\dot{\theta} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Чтобы идентифицировать параметры модели и проверить ее работоспособность, воспользуемся данными из экспериментальных работ [33, 120]. В обеих этих работах исследовались аэродинамические силы, действующие на крыло, совершающее вынужденные угловые гармонические колебания:

$$\theta = \theta_a \sin(\Omega\tau) + \theta_0 \quad (1.36)$$

Безразмерный параметр  $\Omega = \omega b/V$  (где  $\omega$  — размерная частота колебаний) в аэродинамике называют числом Струхаля.

Подставим зависимость 1.36 во второе уравнение системы 1.35. Выполнение первого уравнения этой системы обеспечивается за счет надлежащего выбора момента  $M_z$ , который в данном случае играет роль управления.

Решив получившееся неоднородное линейное дифференциальное уравнение, найдем силу  $N$ , действующую на крыло со стороны осциллятора (и которую мы в рамках предложенной модели интерпретируем как нормальную аэродинамическую силу, приложенную к крылу):

$$\begin{aligned}
N = k\eta + h\dot{\eta} = C_n^\alpha \theta_0 + \frac{\theta_a \sin(\Omega\tau)}{(k - m\Omega^2)^2 + (h + C_n^\alpha)^2 \Omega^2} [C_n^\alpha \Omega^2 h(h + C_n^\alpha) + \\
+ (l + l_0)\Omega^2(kC_n^{\alpha 2} - h^2 m\Omega^2) + (k - \Omega^2 m)k(C_n^\alpha - m(l + l_0)\Omega^2) + \\
+ C_\omega \Omega^2(\Omega^2 hm + C_n^\alpha k)] + \frac{\theta_a \Omega \cos(\Omega\tau)}{(k - m\Omega^2)^2 + (h + C_n^\alpha)^2 \Omega^2} [hm^2(l + l_0)\Omega^4 + \\
+ (h(l + l_0)C_n^{\alpha 2} + (h(l + l_0) - m)hC_n^\alpha)\Omega^2 + kC_n^\alpha(-C_n^\alpha + k(l + l_0)) + \\
+ ((C_n^\alpha h + h^2 - km)\Omega^2 + k^2)C_\omega] \quad (1.37)
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в рамках квазистатической модели

$$N = C_n^\alpha \theta_0 + C_n^\alpha \theta_a \sin(\Omega\tau) + \Omega C_n^\alpha (l + l_0) \cos(\Omega\tau) \quad (1.38)$$

В работе [33] испытывалось крыло с симметричным профилем НАСА-0015. Эксперименты проводились в воде. Изменяемым параметром являлась безразмерная частота  $\Omega$ . Данные представлены в виде зависимостей коэффициента нормальной силы от угла  $\theta$ .

Статические аэродинамические характеристики таковы:  $C_n^\alpha = 4.6$ ,  $l_0 = 0.24$ . Для параметров присоединенного осциллятора примем такие же значения, что и ранее —  $m = 1.57$ ,  $k = 2$ ,  $h = 10$ .

Результаты моделирования приведены на рис. 1.8. Точки соответствуют экспериментальным данным, сплошные линии — расчету по формуле (1.37),

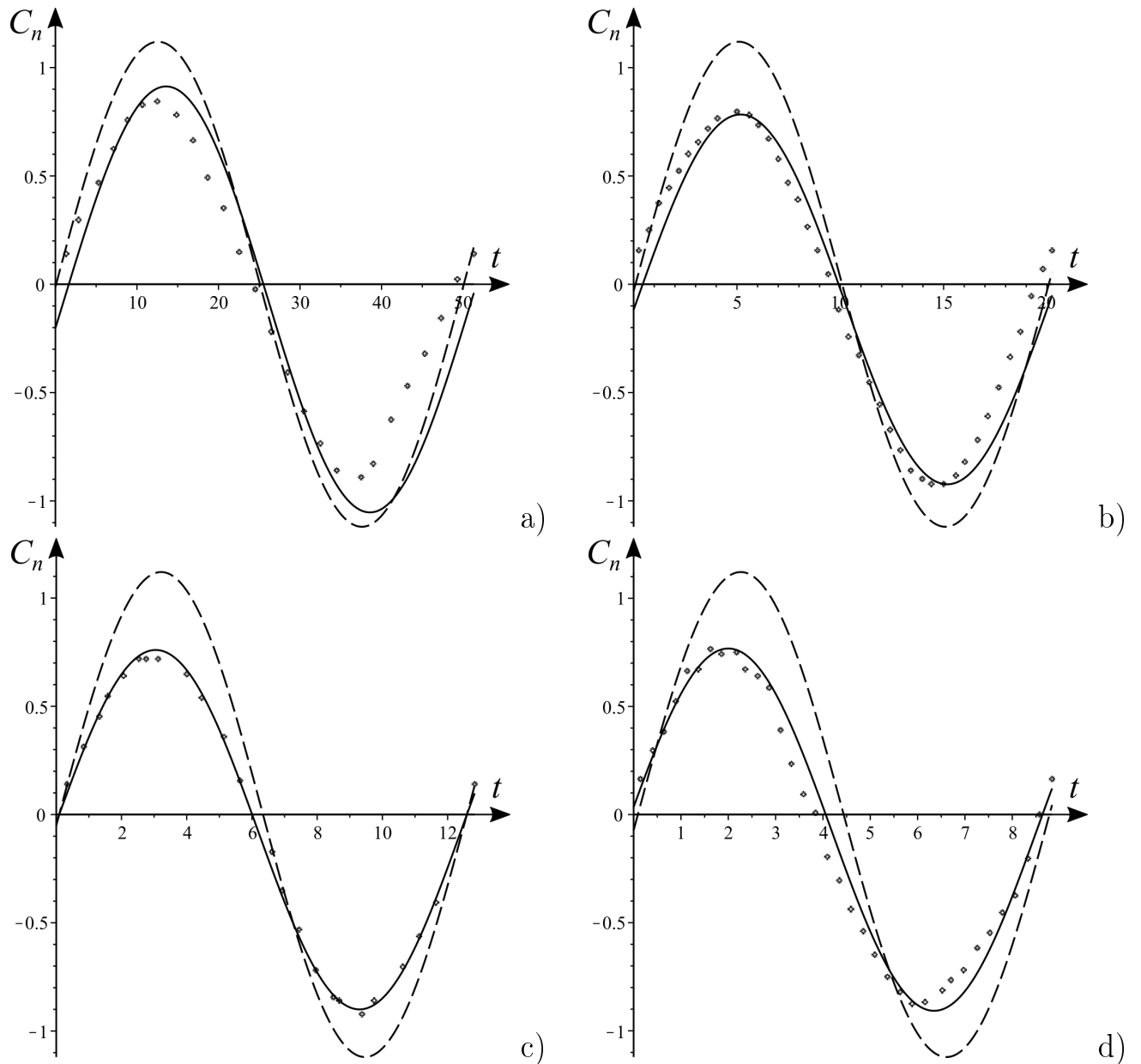


Рис. 1.8. Зависимость коэффициента  $C_n$  от времени: эксперимент (точки), формула (1.37) (сплошные линии), и квазистатика (пунктирные линии): а)  $\Omega = 0.13$ ; б)  $\Omega = 0.31$ ; в)  $\Omega = 0.50$ ; д)  $\Omega = 0.72$ .

пунктирные линии — расчету в рамках квазистатической модели (формула (1.38)).

Видно, что модель «присоединенного осциллятора» достаточно хорошо согласуется с экспериментом. При этом несколько худшее совпадение наблюдает-

ся для наименьшего значения числа Струхала. Тем не менее, во всех рассмотренных случаях эта модель обеспечивает заметно лучшее описание экспериментальных данных, чем квазистатический подход.

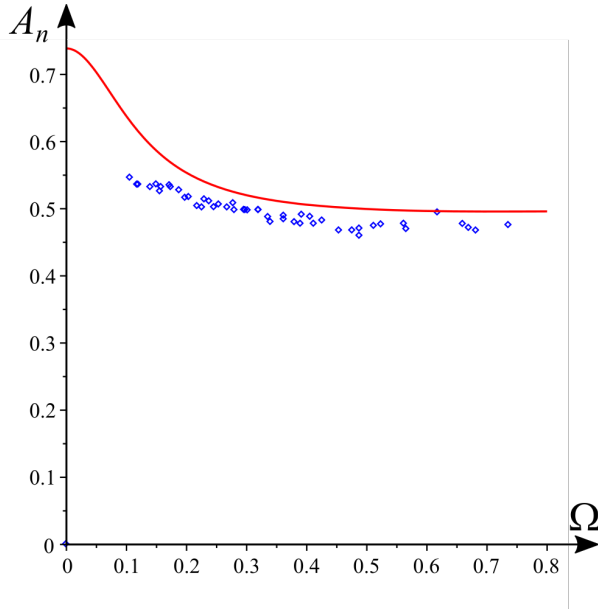


Рис. 1.9. Сравнение экспериментальной (точки) и расчетной (кривая) зависимостей коэффициента  $A_n$  от числа Струхала  $\Omega$ .

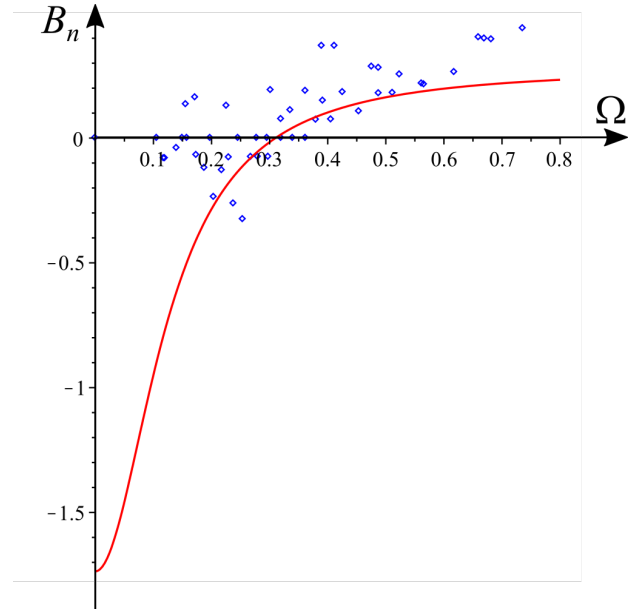


Рис. 1.10. Сравнение экспериментальной (точки) и расчетной (кривая) зависимостей коэффициента  $B_n$  от числа Струхала  $\Omega$ .

В работе [120] изучалось крыло с симметричным профилем NACA0012. Эксперименты проводились в воздухе при разных значениях скорости набегающего потока и угловой частоты колебаний. Измерялась, в частности, зависимость подъемной силы от времени. Нужно отметить, что, поскольку рассматривается диапазон достаточно малых углов атаки, коэффициент лобового сопротивления мал, и значения коэффициентов подъемной силы и нормальной силы весьма близки. Данные представлены в виде значений коэффициентов первой гармоники ряда Фурье:

$$C_l^{exp} \approx C_n^{exp} = A_n \sin(\Omega\tau) + \Omega B_n \cos(\Omega\tau)$$

На рис. 1.9-1.10 приведены зависимости коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  от  $\Omega$ , рассчитанные по формуле (1.37), и полученные в указанных экспериментах. Видно, что совпадение для коэффициента  $A_n$  достаточно хорошее. Для коэффициента  $B_n$  эксперимент дает существенно больший разброс значений, чем для  $A_n$ , тем не менее, согласие с расчетом можно считать удовлетворительным.

## Выводы

Рассмотрены подходы квазистатического типа к описанию аэродинамического воздействия на тело со стороны потока сопротивляющейся среды. Отмечено, что они описывают динамику тела тем точнее, чем меньше движение тела отличается от поступательного, равномерного и прямолинейного. Соответственно, представляется естественным использовать их при описании достаточно медленного движения тела вблизи положения равновесия. Обсуждена структура аэродинамических сил в окрестности положения равновесия (в рамках квазистатического подхода), показано, что в ней содержатся все виды сил (позиционные консервативные и позиционные неконсервативные, диссипативные и гироскопические).

Обсуждена возможность использования модели присоединенного осциллятора для описания нестационарных аэродинамических сил, действующих на крыло, которое может совершать поступательные или угловые колебания в потоке. Показано, что расчеты в рамках этой модели достаточно хорошо согласуются с результатами экспериментов. Это дает основания пользоваться данным подходом для исследования особенностей поведения тел в потоке сопротивляющейся среды в ситуациях, когда эффективный угол атаки  $\alpha$  остается достаточно малым во все время движения, так что зависимости аэродинамических сил от  $\alpha$  можно считать линейными.



Установлена взаимосвязь между известным подходом к описанию нестационарного аэродинамического воздействия на крыло с помощью интеграла Дюамеля с экспоненциальным ядром и подходом на основе модели присоединенного осциллятора. Показано, что уравнения движения тела в потоке, полученные с помощью модели присоединенного осциллятора, приводятся к интегро-дифференциальной форме, аналогичной уравнениям, получаемым в рамках подхода, использующего интеграл Дюамеля.

Кроме того, показано, что если тело типа тонкого крыла совершает медленное поступательное движение поперек потока среды, так что мгновенный угол атаки остается малым, а производная коэффициента нормальной аэродинамической силы по углу атаки достаточно велика, то коэффициент при ускорении тела, обусловленный наличием нестационарного аэродинамического воздействия, оказывается отрицательным, что дает основание говорить не о «присоединенной», а об «отсоединенной» массе.

## Глава 2

# О влиянии потенциальных и диссипативных сил на устойчивость положения равновесия

Аэродинамические силы возникают в огромном числе технических объектов. Как было отмечено в первой главе, наличие таких сил приводит к появлению в системе, в частности, позиционных неконсервативных сил, а также диссипативных сил с неполной диссипацией. Соответственно, эти силы могут приводить к неустойчивости целевого режима движения (например, равновесия) объекта.

Для тел, закрепленных в потоке среды, одним из естественных, так сказать, технических способов повлиять на устойчивость является изменение характеристик крепления (в первую очередь, коэффициентов жесткости и демпфирования). Во введении отмечалось, что, как показано в целом ряде работ, при определенных обстоятельствах увеличение демпфирования приводит к потере устойчивости (что выглядит несколько неожиданным). Более того, при этом возможна неоднократная смена характера устойчивости.

Рассмотрим теперь, как повлияет на устойчивость положения равновесия увеличение жесткости крепления. Иными словами, проанализируем, как изменится характер устойчивости при изменении элементов матрицы потенциальных сил.

## 2.1. Об изменении характера устойчивости при изменении диагонального элемента матрицы потенциальных сил

Рассмотрим линейную механическую систему с  $s$  степенями свободы. Уравнения движения ее можно записать следующим образом:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q} = 0 \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{M}$  — матрица инерции,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{N}$  — матрицы диссипативных, гироскопических, позиционных потенциальных и непотенциальных сил, соответственно.

Исследуем влияние изменения жесткости по одной из обобщенных координат (для определенности, первой) на характер устойчивости. Это означает, что к матрице потенциальных сил добавляется матрица, в которой отличен от нуля только один элемент, а именно, первый элемент на главной диагонали:

$$\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} k'_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Соответственно, уравнения движения принимают следующий вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{K}')\mathbf{q} = 0, \quad (2.3)$$

В ходе дальнейшего изложения будем считать, что все величины являются безразмерными.

Очевидно, существует невырожденная замена переменных  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}$ , приводящая матрицу инерции к единичному виду и оставляющая матрицу  $\mathbf{K}'$  диаго-

нальной. В новых переменных система (2.3) примет вид:

$$\ddot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{G}}) \dot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{K}}') \mathbf{x} = 0 \quad (2.4)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{D}}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}'$  — матрицы, полученные в результате указанного преобразования. Поскольку такая замена переменных не меняет ранг матриц, в матрице  $\tilde{\mathbf{K}}'$  также будет только один отличный от нуля элемент:

$$\tilde{\mathbf{K}}' = \begin{pmatrix} \kappa & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно показать, что характеристический полином системы (2.4) можно представить в следующем структурном виде:

$$P = a_{2s}\lambda^{2s} + a_{2s-1}\lambda^{2s-1} + (a_{2s-2} + \kappa b_{2s-2})\lambda^{2s-2} + \dots + (a_1 + \kappa b_1)\lambda + a_0 + \kappa b_0 \quad (2.5)$$

Здесь  $a_j$  ( $j = 0..2s$ ) и  $b_j$  ( $j = 0..2s - 2$ ) — некоторые комбинации коэффициентов матриц  $\tilde{\mathbf{D}}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}$  (не зависят от  $\kappa$ ). Легко заметить, что  $a_{2s} = 1$ ,  $b_{2s-2} = 1$ .

Изменение характера устойчивости может происходить в двух случаях: когда один из корней обращается в нуль (т.е.  $a_0 + \kappa b_0 = 0$ ) или когда действительная часть какой-либо пары комплексно-сопряженных корней обращается в нуль.

Первый случай имеет место при  $\kappa = \kappa_1 = -a_0/b_0$ . Эта ситуация означает потерю или восстановление (в зависимости от знаков коэффициентов  $a_0$  и  $b_0$ ) статической устойчивости при увеличении дополнительной жесткости  $\kappa$ .

Второй случай означает, что при некотором значении  $\kappa$  полином (2.5) имеет корень вида  $\lambda = i\mu$  ( $i$  — мнимая единица,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \neq 0$ ). Подставив это выражение в (2.5), выделив вещественную и мнимую части и обозначив  $\mu^2 = \xi$ ,

получим следующую систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^s (-1)^j a_{2j} \xi^j + \kappa \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j b_{2j} \xi^j &= 0 \\ \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j a_{2j+1} \xi^j + \kappa \sum_{j=0}^{s-2} (-1)^j b_{2j+1} \xi^j &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть выражения при  $\kappa$  в обоих уравнениях (2.6) отличны от нуля. Выразив  $\kappa$  из обоих уравнений, получим:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^s (-1)^j a_{2j} \xi^j \right) \left( \sum_{j=0}^{s-2} (-1)^j b_{2j+1} \xi^j \right) - \\ - \left( \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j a_{2j+1} \xi^j \right) \left( \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j b_{2j} \xi^j \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что выражение (2.7) представляет собой полином степени  $2s - 2$  относительно  $\xi$ . Каждому его положительному корню отвечает некоторое значение дополнительной жесткости  $\kappa$ , при котором у системы существует характеристическое число с нулевой вещественной частью, т.е. может происходить смена характера устойчивости. Соответственно, таких изменений характера устойчивости может быть не более  $2s - 2$ .

Пусть теперь коэффициент при  $\kappa$  в каком-либо из уравнений (2.6) равен нулю. Тогда, как нетрудно видеть,  $\xi$  является корнем полинома степени не выше  $s - 1$ , что меньше  $2s - 2$  для всех  $s > 1$ .

С учетом перехода одного из корней характеристического полинома через ноль (случай 1) получаем, что максимальное число изменений характера устойчивости при изменении одного из диагональных элементов матрицы потенциальных сил (т.е. коэффициента жесткости по одной из обобщенных координат) равно  $2s - 1$ . Таким образом, доказано следующее утверждение:

**Утверждение.** При изменении одного диагонального элемента в матрице

потенциальных сил в линейной механической системе с  $s$  степенями свободы характер устойчивости может меняться не более, чем  $2s - 1$  раз.

Необходимо отметить, что аналогичное утверждение можно доказать и для случая, когда в системе изменяется один из диагональных элементов матрицы диссипативных сил.

Вернемся к системе 2.1. Предположим, что гироскопические силы в системе отсутствуют. Пусть у матрицы диссипативных сил существует не менее одного отрицательного собственного числа, причем остальные положительны. Пусть тривиальное равновесие асимптотически устойчиво. Покажем, что можно добавить в систему потенциальные силы с положительно определенной матрицей таким образом, чтобы дестабилизировать положение равновесия.

Рассмотрим матрицу дополнительных потенциальных сил вида  $\mathbf{K}' = \kappa \mathbf{M}$ . Эта матрица, очевидно, является положительно определенной. Существует невырожденное преобразование, одновременно приводящее матрицу  $\mathbf{M}$  к единичной форме, а матрицу  $\mathbf{D}$  — к диагональному виду  $\tilde{\mathbf{D}} = \text{diag}\{\tilde{d}_i\}$ . Очевидно, что при таком преобразовании матрица  $\mathbf{K}'$  примет вид  $\tilde{\mathbf{K}}' = \kappa \mathbf{E}_s$ . Кроме того, данное преобразование не изменяет знаки собственных чисел матрицы диссипативных сил.

Соответственно, система уравнений движения примет следующий вид:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{x}} + \left( \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{N}} + \kappa \mathbf{E}_s \right) \mathbf{x} = 0 \quad (2.8)$$

Характеристический полином можно представить так:

$$\left| \mathbf{E}_s \lambda^2 + \tilde{\mathbf{D}}\lambda + \left( \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{N}} + \kappa \mathbf{E}_s \right) \right| = 0$$

Пусть величина  $\kappa$  велика:  $\kappa = \kappa_0 \varepsilon^2$ , где  $\varepsilon \ll 1$ . Будем искать корни в виде разложения  $\lambda = \lambda_0/\varepsilon + \lambda_1 + o(1)$ .

$$\left| \mathbf{E}_s \frac{\lambda_0^2 + \kappa_0}{\varepsilon^2} + \left( \tilde{\mathbf{D}} + 2\lambda_1 \mathbf{E}_s \right) \frac{\lambda_0}{\varepsilon} + O(1) \right| = 0$$

Отсюда получаем, что  $\lambda_0 = \pm i\sqrt{\kappa_0}$ , а  $\lambda_1$  являются корнями уравнения

$$\left| \tilde{\mathbf{D}} - (-2\lambda_1)\mathbf{E}_s \right| = 0$$

Следовательно, все  $\lambda_1$  представляют собой собственные числа матрицы диссипативных сил, деленные на 2 и взятые с обратным знаком. Однако по предположению среди собственных чисел матрицы  $\mathbf{D}$  есть, по крайней мере, одно отрицательное. Значит, среди величин  $\lambda_1$  будет, по крайней мере, одна положительная. Это означает, что положение равновесия будет неустойчивым.

## 2.2. Пример системы с максимально возможным числом изменений характера устойчивости.

Теперь следует разрешить вопрос о том, может ли найденное выше максимальное количество смен характера устойчивости быть достигнуто в какой-либо механической системе.

**Утверждение.** Пусть в линейной механической системе с  $s$  степенями свободы гироскопические силы отсутствуют, а матрицы остальных сил имеют следующий вид:

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}_s, \mathbf{D} = \text{diag} \{ \varepsilon d_{jj} \}, \mathbf{K} = \text{diag} \{ k_{jj} + \delta_{1j} \kappa \}, \mathbf{N} = \{ n_{jq} \}, j, q = (1..s)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр,  $\delta_{jq}$  — дельта Кронекера,  $\mathbf{E}_s$  — единичная матрица размера  $s \times s$ . Пусть, кроме того, коэффициенты матриц удовлетворяют следующим соотношениям:

$$d_{jj} > 0, j = 1..s; |k_{11}| \varepsilon, k_{11} < 0, k_{jj} > 0, j = 2..s;$$

$$|k_{jj} - k_{qq}| \gg \varepsilon, q \neq j, j, q = 1..s; n_{jq} = \varepsilon \delta_{j+1,q} \nu_{jq}, j = 1..s - 1, q = j + 1..s$$

Тогда при изменении жесткости по первой координате характер устойчивости сменится  $2s - 1$  раз.

*Доказательство.* Ясно, что при  $\kappa < -k_{11}$  первый диагональный элемент матрицы жесткости отрицателен, и имеет место статическая неустойчивость. Рассмотрим ситуацию, когда  $\kappa > -k_{11}$  и, кроме того,  $|k_{11} + \kappa - k_{jj}| \gg \varepsilon$ ,  $j = (1..s)$ . Будем искать собственные числа в виде  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + o(\varepsilon)$ . Тогда характеристический полином можно представить в следующем виде:

$$P = \prod_{j=1}^s (\lambda_0^2 + k_{jj} + \delta_{1j}\kappa) + \varepsilon \sum_{j=1}^s \prod_{q=1, q \neq j}^s (2\lambda_1 + d_{jj}) \lambda_0 (\lambda_0^2 + k_{qq} + \delta_{1q}\kappa) + o(\varepsilon)$$

Последовательно приравнявая нулю коэффициенты при степенях малого параметра, получаем, что вещественные части всех собственных чисел отрицательны, т.е. имеет место асимптотическая устойчивость.

Пусть теперь  $\kappa$  таково, что два диагональных элемента матрицы потенциальных сил совпадают:  $\kappa = \kappa_j = k_{jj} - k_{11}$ ,  $j = (2..s)$ . Тогда, как известно [3], при выбранной структуре циркуляционных сил и в отсутствие диссипативных сил имеет место неустойчивость. Этот же результат нетрудно получить, удержав в выражении для характеристического полинома члены до второго порядка малости по  $\varepsilon$  включительно.

Ясно, что неустойчивость сохранится и при добавлении в систему достаточно малой диссипации. Из соображений непрерывности следует, что неустойчивость имеет место и для некоторого интервала значений  $\kappa$ , содержащего величину  $\kappa_j$ .

Таким образом, получаем, что существует  $s$  интервалов значений  $\kappa$ , в которых имеет место неустойчивость. Первый из них содержит луч  $(-\infty, 0]$ , а остальные содержат величины  $k_{jj} - k_{11}$ ,  $j = (2..s)$ . Эти интервалы разделены промежутками, в которых положение равновесия асимптотически устойчиво.



Следовательно, при изменении  $\kappa$  характер устойчивости меняется  $2s - 1$  раз, что и доказывает утверждение.

### 2.3. Случай механической системы с 2 степенями свободы

Рассмотрим более подробно случай двух степеней свободы ( $s = 2$ ). Тогда систему (2.4) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} + \gamma \\ d_{12} - \gamma & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} + \nu \\ k_{12} - \nu & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Будем полагать  $\kappa \geq 0$ . Для удобства обозначения будем называть систему, получающуюся из (2.9) при  $\kappa = 0$ , «невозмущенной». В этой «невозмущенной» системе можно условно выделить две колебательные подсистемы, отвечающие обобщенным координатам (так сказать, парциальные системы), которые имеют следующий вид:

$$\ddot{x}_i + d_{ii}\dot{x}_i + k_{ii}x_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.10)$$

Характеристический полином системы (2.9) можно представить в следующем виде:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + \tilde{a}_2(\kappa)\lambda^2 + \tilde{a}_1(\kappa)\lambda + \tilde{a}_0(\kappa), \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2(\kappa) &= a_2 + \kappa, & \tilde{a}_1(\kappa) &= a_1 + d_{22}\kappa, & \tilde{a}_0(\kappa) &= a_0 + k_{22}\kappa, \\ a_3 &= d_{11} + d_{22}, & a_2 &= d_{11}d_{22} - d_{12}^2 + \gamma^2 + k_{11} + k_{22}, \\ a_1 &= d_{11}k_{22} + d_{22}k_{11} - 2k_{12}d_{12} + 2\gamma\nu, & a_0 &= k_{11}k_{22} - k_{12}^2 + \nu^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Заметим, что коэффициенты  $a_i$  являются коэффициентами характеристического полинома «невозмущенной» системы.

Известно, что для системы четвертого порядка условия асимптотической устойчивости тривиального равновесия можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_0 + \kappa k_{22} > 0, \quad a_1 + \kappa d_{22} > 0, \quad a_2 + \kappa > 0, \quad a_3 > 0, \\ H_{3\kappa} = (a_1 + \kappa b_1)(a_2 + \kappa)a_3 - a_3^2(a_0 + \kappa k_{22}) - (a_1 + \kappa d_{22})^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Величина  $H_{3\kappa}$  представляет собой третий минор матрицы Гурвица для многочлена (2.11).

Если  $a_3 = d_{11} + d_{22} < 0$ , то положение равновесия неустойчиво, и его нельзя стабилизировать путем введения дополнительной жесткости (такая ситуация возникает, в частности, если в обеих колебательных подсистемах имеется антидиссипация). В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая  $d_{11} + d_{22} > 0$ .

Отметим, что функции  $\tilde{a}_2(\kappa)$  и  $\tilde{a}_1(\kappa)$  являются линейными, и их нули, очевидно, принадлежат интервалам, на которых  $H_{3\kappa}(\kappa) < 0$  и/или  $\tilde{a}_0(\kappa) < 0$ .

Выражение для  $H_{3\kappa}$  можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{3\kappa} = d_{11}d_{22}\kappa^2 + ((d_{11} - d_{22})a_1 + (d_{22}k_{11} - d_{11}k_{22})a_3 + \\ + (d_{11}d_{22} - d_{12}^2 + \gamma^2)d_{22}a_3)\kappa + H_{30} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь  $H_{30}$  — это третий минор матрицы Гурвица для «невозмущенной» системы.

Выражение (2.14) представляет собой квадратный трехчлен относительно  $\kappa$ . Проанализируем его знак в зависимости от значений параметров системы.

Ранее было показано, что максимальное число смен характера устойчивости в системе с  $s$  степенями свободы при изменении диагонального коэффициента матрицы потенциальных сил равно  $2s - 1$ . Соответственно, для системы с 2 степенями свободы можно ожидать до 3 таких чередований при изменении  $\kappa$  от 0 до бесконечности.

В данном случае нетрудно записать условия, которые определяются количество изменений характера устойчивости положения равновесия.

Характер устойчивости может измениться, когда выражение  $H_{3\kappa}$  или свободный член многочлена (2.11) обращается в нуль. Это происходит, когда дополнительная жесткость  $\kappa$  принимает одно из следующих значений:

$$\kappa_0 = -\frac{a_0}{k_{22}} = -k_{11} + \frac{k_{12}^2 - \nu^2}{k_{22}}, \quad \kappa_{1,2} = \frac{-A_1 \mp \sqrt{D_1}}{2d_{11}d_{22}} \quad (2.15)$$

Здесь  $D_1 = A_1^2 - 4H_{30}d_{11}d_{22}$ ; знак «минус» соответствует  $\kappa_1$ , а знак «плюс» —  $\kappa_2$ . При этом мы предполагаем, что  $k_{22} \neq 0$ .

Характер устойчивости меняется три раза на интервале  $\kappa \in [0, \infty)$ , если выполняется одна из приведенных групп условий:

$$D_1 > 0, d_{11}d_{22} > 0, a_0 > 0, k_{22} < 0, \tilde{a}_2(\kappa_1) > 0, 0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_0, \quad (2.16)$$

или

$$D_1 > 0, d_{11}d_{22} > 0, a_0 < 0, k_{22} > 0, \tilde{a}_2(\kappa_0) > 0, 0 < \kappa_0 < \kappa_1 < \kappa_2. \quad (2.17)$$

Из этих неравенств непосредственно следует, что  $A_1 < 0$ ,  $H_{30} > 0$ .

Рассмотрим группу неравенств (2.16). Очевидно, коэффициент  $\tilde{a}_2(\kappa)$  монотонно растет с ростом  $\kappa$ . В то же время, как было отмечено выше, эта функция не может обратиться в нуль на интервале, на котором одновременно  $H_{3\kappa} > 0$  и  $\tilde{a}_0 > 0$ . Но функция  $H_{3\kappa}$  положительна на интервалах  $\kappa < \kappa_1$  и  $\kappa_2 < \kappa$ , а  $\tilde{a}_0 > 0$  при  $\kappa < \kappa_0$ . Следовательно,  $\tilde{a}_2(\kappa)$  может обратиться в нуль либо на интервале  $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ , либо на интервале  $\kappa > \kappa_0$ . Таким образом, условия (2.16) никогда не выполняются.

Характер устойчивости меняется дважды на интервале  $\kappa \in [0, \infty)$ , если выполняется одна из следующих групп условий:

$$D_1 > 0, a_0 > 0, k_{22} > 0, \tilde{a}_2(\kappa_1) > 0, \kappa_0 < 0 < \kappa_1 < \kappa_2, \quad (2.18)$$

или

$$D_1 > 0, d_{11}d_{22} > 0, a_0 > 0, k_{22} < 0, \tilde{a}_2(\kappa_2) > 0, 0 < \kappa_2 < \kappa_0, \quad (2.19)$$

или

$$D_1 > 0, d_{11}d_{22} < 0, a_0 < 0, k_{22} > 0, \tilde{a}_2(\kappa_0) > 0, \kappa_1 < \kappa_0 < \kappa_2. \quad (2.20)$$

Случаи  $d_{11}d_{22} = 0$ ,  $k_{22} = 0$  и  $D_1 = 0$  требуют отдельного рассмотрения. Однако такие ситуации являются «негрубыми», и их мы не будем их рассматривать подробно, заметив лишь, что в первых двух случаях характер устойчивости может меняться не более чем два раза, а в последнем — не более одного раза (за исключением единственного значения  $\kappa$ , при котором  $H_{3\kappa} = 0$ ).

Теперь рассмотрим некоторые частные случаи, когда выполняются какая-либо из групп условий (2.17)-(2.20).

### 2.3.1. Случай диагональных матриц диссипативных и потенциальных сил

Предположим, что гироскопические силы в системе отсутствуют, матрицы диссипативных и потенциальных сил диагональны, а матрица диссипативных сил положительно определена.

Тогда

$$D_1 = d_{11}d_{22}(d_{11} + d_{22})^2(d_{11}d_{22}(d_{22}^2 - 4k_{22}) + 4\nu^2)$$

Это выражение положительно, если

$$\nu > \frac{1}{2} \sqrt{d_{11}d_{22}(4k_{22} - d_{22}^2)} \quad (2.21)$$

Величина  $A_1$  в рассматриваемом случае определяется формулой

$$A_1 = d_{11}d_{22}(d_{11}d_{22} + d_{22}^2 + 2(k_{11} - k_{22}))$$

Нетрудно показать также, что  $H_{30} > 0$ , если коэффициент позиционных неконсервативных сил не слишком велик:

$$\nu < \frac{1}{2} \sqrt{d_{11}d_{22}(4k_{22} - d_{22}^2) + d_{11}d_{22} \frac{A_1^2}{(d_{11} + d_{22})^2}} \quad (2.22)$$

Вначале рассмотрим случай, когда  $k_{22} < 0$  и  $|k_{22}| \ll 1$ . Очевидно, что при этом и  $D_1$ , и  $A_1$ , и  $\tilde{a}_2$  положительны. Если при этом неравенство (2.22) не выполняется, т.е.  $H_{30} < 0$ , то величины  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  вещественные и разных знаков. Эти величины, вообще говоря, имеют порядок 1. В то же время  $\kappa_0$ , как явствует из (2.15), имеет порядок  $k_{22}^{-1} \gg 1$ . Соответственно, имеют место условия (2.19), и характер устойчивости меняется дважды на интервале  $\kappa \in (0, \infty)$ .

Пусть теперь  $k_{22}$  положителен и достаточно велик, так что  $A_1 < 0$ . Пусть, кроме того, коэффициент  $\nu$  удовлетворяет одновременно условиям (2.21) и (2.22) (это, очевидно, возможно). Тогда, как нетрудно видеть, величины  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  вещественные и положительные, а  $\kappa_0$  отрицательна. Следовательно, выполняются условия (2.19), и характер устойчивости также меняется два раза в области положительных  $\kappa$ .

Отметим, что для проявления данного эффекта в рассматриваемом случае необходимо наличие позиционных неконсервативных сил.

### 2.3.2. Случай антидиссипации в одной из колебательных подсистем

Пусть  $d_{11}d_{22} < 0$ , т.е. имеет место антидиссипация по одной из обобщенных координат и диссипация по другой. В этой ситуации, очевидно,  $H_{3\kappa} < 0$ , если  $\kappa$  достаточно велико. Таким образом, даже если в исходной системе тривиальное положение равновесия асимптотически устойчиво, добавление достаточно большой жесткости по одной из обобщенных координат сделает его неустойчивым. Это соответствует ранее обсужденной возможности дестабилизации равновесия

за счет изменения матрицы потенциальных сил в случае, когда у матрицы диссипации есть отрицательные собственные числа.

Если же положение равновесия в «невозмущенной» системе неустойчиво, причем коэффициент при  $\kappa$  в (2.14) отрицателен, то невозможно обеспечить стабилизацию за счет увеличения жесткости по какой-либо одной обобщенной координате.

Интересно, что не важно, добавляется ли жесткость по той координате, для которой имеет место демпфирование, или по той, для которой имеет место антидиссипация. Рассмотрим подробнее случай  $\kappa \gg 1$ . Тогда корни характеристического полинома для системы с дополнительной жесткостью можно представить в следующем виде:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\kappa} - \frac{d_{11}}{2} + O\left(\kappa^{-1/2}\right), \quad \lambda_{3,4} = \frac{-d_{22} \pm \sqrt{d_{22}^2 - 4k_{22}}}{2} + o(1)$$

Отметим, что  $\lambda_{3,4}$  представляют собой собственные значения колебательной подсистемы, соответствующей второй координате.

В системе, как и следовало ожидать, присутствуют высокочастотные колебания. Если  $d_{11} < 0$  и  $d_{22} > 0$ , то амплитуда этих колебаний, вообще говоря, возрастает. Если же  $d_{11} > 0$  и  $d_{22} < 0$ , то эти колебания оказываются затухающими. Однако, по крайней мере, у одной из величин  $\lambda_{3,4}$  действительная часть положительна. Таким образом, за счет увеличения жесткости в колебательной подсистеме, отвечающей первой координате, невозможно стабилизировать вторую.

В качестве примера рассмотрим систему со следующими значениями параметров:  $d_{11} = 1$ ,  $d_{12} = \gamma = 0$ ,  $k_{11} = k_{22} = 1$ . Предполагая, что позиционные неконсервативные силы отсутствуют (т.е.  $\nu = 0$ ), построим области асимптотической устойчивости положения равновесия на плоскости параметров  $(\kappa, k_{12})$  для разных значений  $-1 < d_{22} < 0$  (так что  $d_{11} + d_{22} > 0$ ). При этом характе-

ристический полином (2.11) примет следующий вид:

$$P' = \lambda^4 + (1 + d_{22}) \lambda^3 + (2 + d_{22} + \kappa) \lambda^2 + (1 + d_{22} + \kappa) \lambda + 1 - k_{12}^2 + \kappa \quad (2.23)$$

С учетом выражений для коэффициентов полинома (2.23) и условия  $d_{11} +$

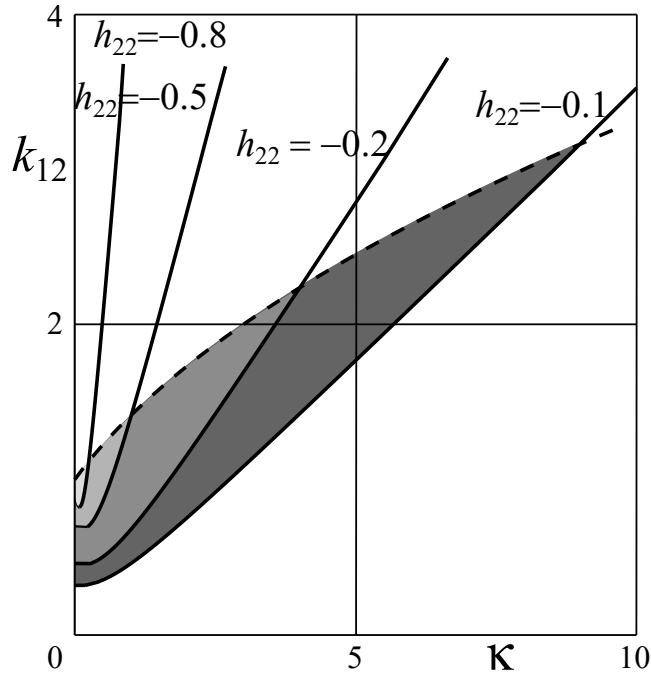


Рис. 2.1. Области асимптотической устойчивости в случае антидиссипации в одной из колебательных подсистем.

$d_{22} > 0$  ясно, что границы указанных областей образованы кривой, на которой обращается в нуль свободный член характеристического полинома (на рис. 2.1 изображена пунктирной линией), и кривой, на которой обращается в нуль  $H_{3\kappa}$  (на рис. 2.1 изображена сплошной линией для каждого значения  $d_{22}$ ). Области асимптотической устойчивости закрашены.

Видно, что если положение равновесия устойчиво при  $\kappa = 0$ , то его устойчивость разрушается при достаточно большом значении дополнительной жесткости. В то же время, в некотором диапазоне значений  $k_{12}$  увеличение  $\kappa$  приводит к стабилизации положения равновесия, неустойчивого при  $\kappa = 0$ . Тем не менее, для достаточно больших  $\kappa$  вновь происходит потеря устойчивости.

Отметим, что эффект проявляется, в том числе, и в отсутствие гироскопических сил и позиционных неконсервативных сил.

Рассмотрим еще ситуацию, когда  $d_{22} < 0$  и  $|d_{22}| \ll 1$ ,  $d_{12} = \gamma = \nu = 0$ ,  $k_{11} > 0$ ,  $k_{22} > 0$  и  $a_0 = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 < 0$ . Нетрудно видеть, что при этом  $\tilde{a}_2 > 0$  при любых положительных  $\kappa$ . Кроме того, для  $\kappa_{1,2}$  справедливы следующие формулы:

$$\kappa_1 = -|k_{12}| \sqrt{\frac{d_{11}}{-d_{22}}} + O(1), \quad \kappa_2 = |k_{12}| \sqrt{\frac{d_{11}}{-d_{22}}} + O(1)$$

В то же время,  $\kappa_0 > 0$  и порядка единицы (см. 2.15). Таким образом, выполнены условия (2.20), так что при изменении  $\kappa$  от 0 до бесконечности характер устойчивости меняется дважды (неустойчивость–асимптотическая устойчивость–неустойчивость).

### 2.3.3. Случай полной диссипации в обеих колебательных подсистемах

Пусть теперь  $d_{11} > 0$  и  $d_{22} > 0$ , т.е. колебания обеих колебательных подсистем (2.9) являются затухающими. Тем не менее, одно из собственных чисел матрицы  $\mathbf{D}$  системы (2.9) может быть отрицательным (это означает, что в системе отсутствует полная диссипация).

Рассмотрим вначале ситуацию, когда тривиальное положение равновесия «невозмущенной» системы асимптотически устойчиво, т.е.  $a_i > 0$  ( $i = 0 \dots 3$ , см. (2.11)) и  $H_{30} > 0$ .

Если при этом выражение (2.14), рассматриваемое как уравнение относительно  $\kappa$ , не имеет действительных корней или оба корня отрицательны, то устойчивость сохраняется при любых значениях дополнительной жесткости. Если же оба корня положительны, то это означает, что существует диапазон



значений дополнительной жесткости, для которых устойчивость тривиального равновесия нарушается.

В общем случае выражение для дискриминанта указанного трехчлена достаточно громоздко. Поэтому рассмотрим частные случаи.

Пусть  $\mu_{d1}$  и  $\mu_{d2}$  — собственные числа матрицы диссипативных сил. Предположим, что выполняются следующие условия:

$$d_{11} > d_{22} > 0, \quad d_{11} > |d_{12}|, \quad k_{22} \geq |k_{11}|, \quad k_{22} \geq |k_{12}|, \quad k_{12}d_{12} > 0 \quad \nu = 0, \quad \gamma = 0, \\ \mu_{d1} > 0 > \mu_{d2}, \quad |\mu_{d2}| \ll 1 \quad (2.24)$$

Последние неравенства означают, что система является, так сказать, «слабо» антидиссипативной.

Тогда для диагональных элементов матрицы диссипативных сил имеют место следующие аппроксимационные формулы:

$$d_{11} = \frac{\mu_{d1} + \sqrt{\mu_{d1}^2 - 4d_{12}^2}}{2} + O(\mu_{d2}), \quad d_{22} = \frac{\mu_{d1} - \sqrt{\mu_{d1}^2 - 4d_{12}^2}}{2} + O(\mu_{d2}). \quad (2.25)$$

При этом, очевидно,  $a_2 > 0$ , следовательно,  $\tilde{a}_2 > 0$  для всех значений  $\kappa > 0$ . Принимая во внимание выражения (2.25) и (2.24), нетрудно показать, что разложение величины  $D_1$  по малому параметру имеет следующий вид:

$$D_1 = -2\mu_{d2}\mu_{d1}^3 \left( 2d_{12}^2 k_{22} + (\sqrt{\mu_{d1}^2 - 4d_{12}^2} - \mu_{d1})k_{12}d_{12} + 2k_{12}^2 \right) + O(\mu_{d2}^2) \\ = -4\mu_{d2}\mu_{d1}^3 (d_{11}d_{22}k_{22} - d_{22}k_{12}d_{12} + k_{12}^2) + O(\mu_{d2}^2) \\ = 4|\mu_{d2}|\mu_{d1}^3 \left( k_{22}d_{11}d_{22} \left( 1 - \frac{k_{12}d_{12}}{k_{22}d_{11}} \right) + k_{12}^2 \right) + O(\mu_{d2}^2) > 0 \quad (2.26)$$

Таким образом,  $D_1 \sim |\mu_{d2}|$ .

В то же время, из формул (2.15) и (2.26) следует, что выполняются следу-

ющие соотношения:

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= -k_{11} + k_{12}^2 k_{22}^{-1} < -k_{11} + k_{22}; \\ \kappa_1 &= -k_{11} + k_{22} + k_{12} d_{12}^{-1} \sqrt{\mu_{d1}^2 - 4d_{12}^2} - \sqrt{D_1} + O(\mu_{d2}) > -k_{11} + k_{22}; \\ \kappa_2 &= -k_{11} + k_{22} + k_{12} d_{12}^{-1} \sqrt{\mu_{d1}^2 + 4d_{12}^2} - \sqrt{D_1} + O(\mu_{d2}) > -k_{11} + k_{22};\end{aligned}$$

Если  $\kappa_0 > 0$  (это имеет место, например, когда  $k_{11} < 0$ ), то выполняются условия (2.17). В этом случае равновесие «невозмущенной» системы неустойчиво. Его можно стабилизировать, добавляя в систему жесткость по первой обобщенной координате таким образом, чтобы  $\kappa \in (\kappa_0, \kappa_1)$ . Если еще больше увеличить жесткость, так что  $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ , то это приведет к потере устойчивости. Наконец, если добавленная жесткость превысит значение  $\kappa_2$ , то положение равновесия вновь станет асимптотически устойчивым.

Если  $\kappa_0 < 0$ , то выполняются условия (2.18), и характер устойчивости меняется два раза при изменении параметра  $\kappa$  в диапазоне  $0 < \kappa < \infty$ .

Теперь откажемся от предположения о малости одного из собственных чисел матрицы диссипативных сил. Вместо этого предположим, что в системе имеется малый параметр  $\varepsilon$ , причем  $H_{30} = \varepsilon \bar{H}_{30} > 0$ . Будем считать также, что все коэффициенты характеристического полинома «невозмущенной» системы положительны,  $k_{11} > 0$  и  $k_{22} > 0$ . Таким образом, мы находимся в пространстве параметров вблизи границы области устойчивости.

Тогда при выполнении условия

$$Q = (d_{11} - d_{22}) a_1 + (d_{22} k_{11} - d_{11} k_{22}) a_3 + (d_{11} d_{22} - d_{12}^2 + \gamma^2) d_{22} a_3 < 0 \quad (2.27)$$

существует диапазон значений  $0 < \kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ , в котором  $H_{3\kappa} < 0$ :

$$\kappa_1 = -\frac{\varepsilon \bar{H}_{30}}{Q} + o(\varepsilon), \quad \kappa_2 = -\frac{Q}{d_{11} d_{22}} + O(\varepsilon) \quad (2.28)$$

Отметим, что потеря устойчивости происходит уже при малых (порядка  $\varepsilon$ ) величинах добавленной жесткости.

Неравенство (2.27) выполняется, в частности, если удовлетворяются следующие соотношения:

$$d_{22}k_{11}/k_{22} < d_{11} < d_{22}, \quad d_{11}d_{22} - d_{12}^2 + \gamma^2 \leq 0$$

При этом удовлетворяются условия (2.18).

Пусть теперь положение равновесия исходной системы неустойчиво, причем все коэффициенты характеристического полинома положительны, а  $H_{30} < 0$ . Тогда у выражения (2.14), рассматриваемого как уравнение на  $\kappa$ , имеется один отрицательный и один положительный корень. Это значит, что достаточно большая дополнительная жесткость обеспечивает стабилизацию положения равновесия.

В качестве примера рассмотрим систему со следующими значениями параметров:  $d_{11} = 1$ ,  $d_{22} = 1.5$ ,  $d_{12} = 1.5$ ,  $\gamma = 0.5$  (таким образом,  $\det(\mathbf{D} + \mathbf{G}) < 0$  и  $\det(\mathbf{D}) < 0$ ) и  $k_{22} = 1$ . Будем считать, что позиционные неконсервативные силы отсутствуют:  $\nu = 0$ . При этом характеристический полином (2.9) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} P' = & \lambda^4 + 2.5\lambda^3 + (k_{11} + \kappa + 0.5)\lambda^2 + \\ & + (1.5k_{11} - 3k_{12} + 1.5\kappa + 1)\lambda + k_{11} - k_{12}^2 + \kappa \end{aligned} \quad (2.29)$$

Нетрудно показать, что при  $k_{11} > 0$  граница области асимптотической устойчивости образована кривой, на которой обращается в нуль свободный член (2.29) (на рис. 2.2 изображена пунктиром), и кривой, на которой обращается в нуль  $H_{3\kappa}$  (на рис. 2.2 изображена сплошной линией).

На рис. 2.2 а, б, в цветом выделены области устойчивости на плоскости параметров  $(\kappa, k_{12})$  для разных значений  $k_{11}$ .

Видно, что при малых  $k_{11}$  область асимптотической устойчивости является двусвязной в области  $\kappa > 0$ , так что существует такой диапазон значений дополнительной жесткости, в котором неустойчивость имеет место при всех  $k_{12}$ . Соответственно, в этой ситуации увеличение жесткости может привести к потере устойчивости.

Впрочем, если дополнительная жесткость достаточно велика, то положение равновесия снова становится асимптотически устойчивым.

Если при малых  $\kappa$  тривиальное положение было неустойчивым, то оно стабилизируется за счет введения достаточно большой дополнительной жесткости.

Отметим, что при малых  $k_{11}$  и достаточно небольших  $k_{12}$  характер устойчивости меняется трижды (т.е. максимальное число раз для системы с 2 степенями свободы) при изменении  $\kappa$  от 0 до  $\infty$ .

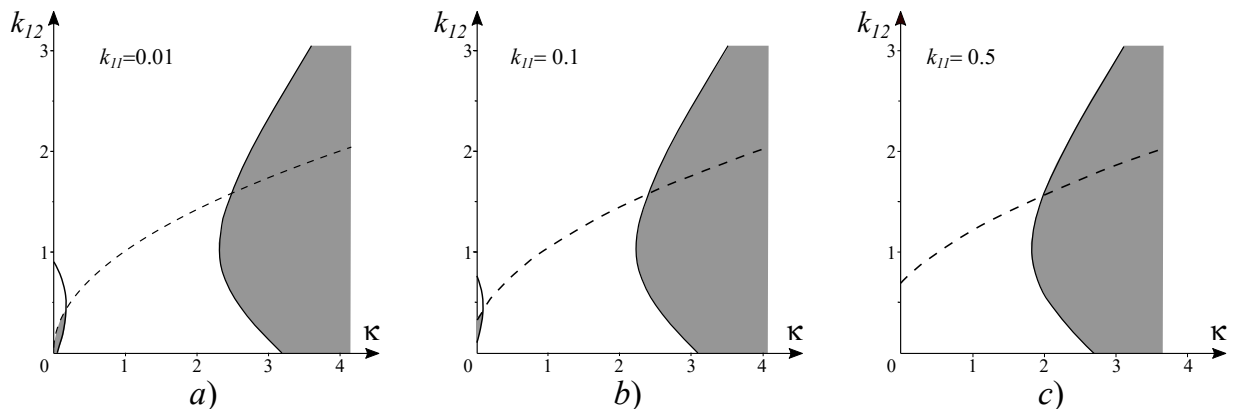


Рис. 2.2. Области асимптотической устойчивости (выделены серым цветом) в случае полной диссипации в обеих колебательных подсистемах.

При больших  $k_{11}$  область асимптотической устойчивости односвязная при  $\kappa > 0$ . Положение равновесия, неустойчивое при  $\kappa = 0$ , становится асимптотически устойчивым при введении в систему достаточно большой дополнительной жесткости.

Отметим, что для возникновения описанных эффектов наличие позицион-

ных неконсервативных сил оказывается необязательным.

### 2.3.4. Случай полной диссипации в системе

Пусть теперь не только в каждой из колебательных подсистем (2.10), но и в системе в целом присутствует полная диссипация, причем коэффициенты матрицы демпфирования малы:  $d_{11} = \varepsilon h_{11} > 0$ ,  $d_{12} = \varepsilon h_{12}$ ,  $d_{22} = \varepsilon h_{22} > 0$  ( $\varepsilon \ll 1$ ),  $k_{11} > 0$ ,  $k_{22} > 0$ . Будем считать также, что гироскопических сил нет.

Тогда из теорем Томсона-Тета-Четаева следует, что в отсутствие неконсервативных позиционных сил положение равновесия асимптотически устойчиво при любых  $\kappa$ , если определитель матрицы  $\mathbf{K}$  потенциальных сил положителен. Если же этот определитель отрицателен, то положение равновесия станет асимптотически устойчивым при достаточно большом значении  $\kappa$ .

Однако в присутствии неконсервативных позиционных сил ситуация оказывается совершенно иной.

С учетом сделанных предположений характеристический полином (2.11) можно записать следующим образом:

$$P_{\kappa} = \lambda^4 + \varepsilon (h_{11} + h_{22}) \lambda^3 + (k_{11} + k_{22} + \kappa + O(\varepsilon^2)) \lambda^2 + \varepsilon (h_{11}k_{22} + h_{22}k_{11} - 2k_{12}h_{12} + h_{22}\kappa) \lambda + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 + \nu^2 + k_{22}\kappa. \quad (2.30)$$

Выражение (2.14) примет такой вид:

$$H_{3\kappa} = \varepsilon^2 h_{11} h_{22} \kappa^2 + 2\varepsilon^2 (h_{12} k_{12} (h_{22} - h_{11}) + h_{11} h_{22} (k_{11} - k_{22})) \kappa + \varepsilon^2 ((h_{11} + h_{22})(h_{11} k_{22} - 2h_{12} k_{12} + h_{22} k_{11})(k_{11} + k_{22}) - (h_{11} + h_{22})^2 (k_{11} k_{22} - k_{12}^2 + \nu^2) - (h_{11} k_{22} - 2h_{12} k_{12} + h_{22} k_{11})^2) + o(\varepsilon^2) \quad (2.31)$$

Поскольку  $h_{11} h_{22} > 0$ , то достаточно большая дополнительная жесткость в первой колебательной подсистеме обеспечивает асимптотическую устойчивость равновесия.

Нетрудно показать, что корни уравнения  $H_{3\kappa} = 0$  определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \kappa_{1,2} = & -k_{11} + k_{22} + \frac{k_{12}h_{12}(h_{11} - h_{22})}{h_{11}h_{22}} \mp \\ & \mp \frac{(h_{11} + h_{22})\sqrt{h_{11}h_{22}\nu^2 - (h_{11}h_{22} - h_{12}^2)k_{12}^2}}{h_{11}h_{22}} + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Эти величины являются действительными, если выполнено следующее неравенство:

$$|\nu| > \nu_{**} = |k_{12}| \sqrt{\frac{(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)}{h_{11}h_{22}}}$$

Подкоренное выражение положительно в силу положительной определенности матрицы диссипативных сил.

Третий минор матрицы Гурвица для «невозмущенной» системы положителен, если  $|\nu| < \nu_0$ , где

$$\nu_0 = \sqrt{k_{12}^2 + \frac{h_{11}h_{22}((h_{11}k_{22} + h_{22}k_{11})(h_{11} + h_{22}) + (k_{11} - k_{22})^2)}{(h_{11} + h_{22})^2}}$$

Нетрудно показать, что  $\nu_{**} \leq \nu_0$ , причем равенство достигается только при выполнении условия  $h_{12}k_{12}(h_{11} - h_{22}) = h_{11}h_{22}(k_{11} - k_{22})$  (заметим, что одновременно обращается в нуль и коэффициент при  $\kappa$  в выражении (2.31)).

Это означает, что если параметры системы удовлетворяют следующим условиям:

$$\nu_{**} < |\nu| < \nu_0, \quad h_{12}k_{12}(h_{22} - h_{11}) + h_{11}h_{22}(k_{11} - k_{22}) < 0,$$

то  $\kappa_{1,2}$  — действительные положительные числа (пусть для определенности  $\kappa_1 < \kappa_2$ ). Соответственно, при  $0 < \kappa < \kappa_1$  положение равновесия асимптотически устойчиво, при  $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$  оно становится неустойчивым, а при  $\kappa_2 < \kappa$  — вновь асимптотически устойчивым. Таким образом, увеличение жесткости в первой колебательной подсистеме может привести к потере устойчивости.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий численный пример. Пусть параметры системы таковы:  $d_{11} = 0.1$ ,  $d_{22} = 0.05$ ,  $d_{12} = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $k_{11} = 1.0$ ,  $k_{22} = 2.5$ . На рис. 2.3 построены области устойчивости системы на плоскости  $(\kappa, \nu)$  при разных значениях  $k_{12}$  (картина, очевидно, симметрична относительно оси  $\nu = 0$ ). Неустойчивости соответствуют точки, находящиеся «правее» соответствующих кривых.

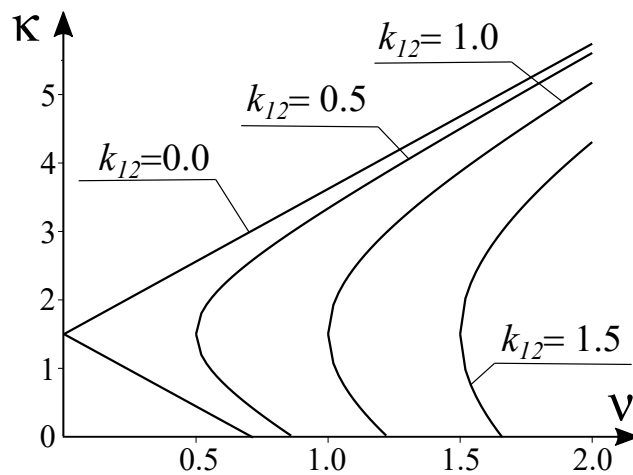


Рис. 2.3. Области асимптотической устойчивости в случае полной диссипации в системе (расположены «левее» соответствующих кривых).

Значения  $k_{12}$  выбирались так, чтобы статическая неустойчивость в невозмущенной системе не возникала.

Видно, что при всех выбранных значениях  $k_{12}$  существует диапазон значений  $\nu$ , в котором положение равновесия асимптотически устойчиво при достаточно малых  $\kappa$ , неустойчиво в некотором интервале значений  $\kappa$  и снова становится асимптотически устойчивым, когда  $\kappa$  достаточно велико. Этот диапазон уменьшается с ростом  $k_{12}$ .

Таким образом, разрушение устойчивости положения равновесия в определенном диапазоне значений жесткости в одной из колебательных подсистем (2.10) может наблюдаться в случае, если в одной из колебательных подсистем

имеется антидиссипация, в случае, когда в системе в целом имеет место неполная диссипация и даже в случае полной диссипации в системе. В первых двух случаях эффект может проявляться в отсутствие неконсервативных позиционных сил, а в последнем – только в присутствии таких сил (причем они должны удовлетворять определенным условиям).

### 2.3.5. Изменение элементов на побочной диагонали матрицы потенциальных сил

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в добавочной матрице потенциальных сил отличен от нуля не элемент на главной диагонали, а два элемента на побочной диагонали:

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\kappa} \\ \tilde{\kappa} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

В этом случае несколько удобнее воспользоваться другой заменой координат. Вначале, как и ранее, введем новые координаты  $(y_1, y_2)$  таким образом, чтобы сделать матрицу  $\mathbf{M}$  единичной, а матрицу  $\tilde{\mathbf{K}}_2$  – диагональной. Поскольку собственные значения матрицы  $\tilde{\mathbf{K}}_2$  равны по величине и противоположны по знаку, получаем:

$$\hat{\mathbf{K}}_2 \mapsto \hat{\mathbf{K}}'_2 = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{K}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Она имеет такие же собственные значения, что и матрица  $\hat{\mathbf{K}}'_2$ . Очевидно, существует невырожденная замена координат  $(z_1, z_2) \mapsto (y_1, y_2)$ , которая приводит



эту матрицу к виду  $\hat{\mathbf{K}}'_2$ . Соответственно, обратное этому преобразование приведет нашу систему уравнений к следующему виду:

$$\ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{z}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}'_2 + \mathbf{N})\mathbf{z} = 0, \quad (2.35)$$

где  $\mathbf{z} = (z_1 \ z_2)^T$ .

Теперь рассмотрим этот случай несколько подробнее.

Прежде всего, запишем характеристический полином системы 2.35:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + (a_1 - 2d_{12}\kappa)\lambda + a_0 - 2k_{12}\kappa - \kappa^2, \quad (2.36)$$

где коэффициенты  $a_i$  ( $i = 0..3$ ) определяются формулами (2.12).

Обозначим третий главный минор матрицы Гурвица для многочлена (2.36) через  $H'_{3\kappa}$ . Как и в предыдущем случае, достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального равновесия имеют следующий вид:

$$a_0 - 2k_{12}\kappa - \kappa^2 > 0, \quad a_1 - 2d_{12}\kappa > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad (2.37)$$

$$H'_{3\kappa} = ((d_{11} + d_{22})^2 - 4d_{12}^2)\kappa^2 + A'_1\kappa + a_1a_2a_3 - a_3^2a_0 - a_1^2 > 0, \quad (2.38)$$

где

$$\begin{aligned} A'_1 = & -2(d_{11} + d_{22})d_{12}(d_{11}d_{22} - d_{12}^2 + \gamma^2) - 8d_{12}(k_{12}d_{12} - \gamma\nu) \\ & + 2k_{12}(d_{11} + d_{22})^2 + 2d_{12}(d_{11} - d_{22})(k_{22} - k_{11}) \end{aligned}$$

Ясно, что при больших значениях  $\kappa$  имеет место неустойчивость.

Характер устойчивости тривиального равновесия может измениться, когда выражение  $H'_{3\kappa}$  или свободный член полинома 2.36 обращаются в нуль. Из (2.36) и (2.38) следует, что оба этих выражения представляют собой квадратные трехчлены относительно  $\kappa$ , так что максимально возможное количество чередований характера устойчивости, когда  $\kappa$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$  равно четырем.

Обозначим корни уравнения  $H'_{3\kappa} = 0$  через  $\kappa'_{1,2}$ , а корни уравнения  $a_0 - 2k_{12}\kappa - \kappa^2 = 0$  — через  $\kappa'_{3,4}$ .

Это максимальное количество изменений характера устойчивости достигается, если выполняются следующие неравенства:

$$D'_1 > 0, D'_2 > 0, (d_{11} + d_{22})^2 > 4d_{12}^2, a_2 > 0, a_3 > 0, \kappa'_3 < \kappa'_1 < \kappa'_2 < \kappa'_4, \quad (2.39)$$

где

$$D'_1 = A_1^2 - 4((d_{11} + d_{22})^2 - 4d_{12}^2) H_{30}, \quad D'_2 = k_{12}^2 + a_0.$$

Вновь предположим, что матрицы потенциальных и диссипативных сил положительно определены, а гироскопические силы отсутствуют ( $\gamma = 0$ ). Кроме того, предположим, что матрица диссипативных сил «близка» к диагональной:  $d_{12} \ll 1$ .

Тогда из формул (2.12) следует, что  $a_0 > 0$ ,  $a_2 > 0$  и  $a_3 > 0$ . Очевидно, что второе и третье условия из (2.39) при этом также выполняются. Нетрудно показать, что для того, чтобы  $D'_1$  было положительным, величина  $\nu$  должна быть достаточно велика по модулю:

$$|\nu| > \nu'_1 = \sqrt{\frac{d_{11}d_{22}(d_{11}k_{22} + d_{22}k_{11})}{d_{11} + d_{22}} + \frac{d_{11}d_{22}(k_{11} - k_{22})^2}{(d_{11} + d_{22})^2}} + O(d_{12}).$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \kappa'_{1,2} &= -k_{12} \mp \sqrt{\nu^2 - \frac{d_{11}d_{22}(d_{11}k_{22} + d_{22}k_{11})}{d_{11} + d_{22}} - \frac{d_{11}d_{22}(k_{11} - k_{22})^2}{(d_{11} + d_{22})^2}} \\ &\quad + d_{12} \frac{d_{11}d_{22}(d_{11} + d_{22}) + (d_{11} - d_{22})(k_{11} - k_{22})}{(d_{11} + d_{22})^2} + o(d_{12}) \\ \kappa'_{3,4} &= -k_{12} \mp \sqrt{\nu^2 + k_{11}k_{22}} \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\kappa'_3 < \kappa'_1$  и  $\kappa'_2 < \kappa'_4$ . Следовательно, условия (2.39) удовлетворены, и характер устойчивости меняется четыре раза, когда параметр  $\kappa$ , возрастая,

проходит все действительные значения. А именно, равновесие неустойчиво при  $\kappa \in (-\infty, \kappa'_3) \cup (\kappa'_1, \kappa'_2) \cup (\kappa'_4, \infty)$  и асимптотически устойчиво, когда  $\kappa \in (\kappa'_3, \kappa'_1) \cup (\kappa'_2, \kappa'_4)$ .

Посмотрим, как проявляются описанные выше эффекты, на примере механической системы с двумя степенями свободы — двойного аэродинамического маятника.

## 2.4. Двухзвенный аэродинамический маятник

Рассмотрим теперь механическую систему с двумя «вращательными» степенями свободы — двойной аэродинамический маятник (см. рис. 2.4). Звенья  $O_1O_2O'_2O'_1$  и  $O''_2O_3O'_3O''_2$  маятника представляют собой прямоугольные рамки, состоящие из жестких стержней. На втором звене закреплено тонкое крыло с симметричным профилем. Плоскость симметрии крыла совпадает с плоскостью второго звена маятника. Будем считать, что оси вращения обоих звеньев ( $O_1O'_1$  и  $O_2O'_2$ ) вертикальны. На первом звене маятника установлена спиральная пружина.

Пусть маятник помещен в стационарный горизонтальный поток среды (воздуха). Введем неподвижную систему координат с началом на оси вращения первого звена. Ось абсцис направим вдоль скорости  $\mathbf{V}$  набегающего потока. Будем считать также, что пружина не напряжена, если первое звено выставлено вдоль потока.

Пусть  $\varphi, \theta$  — углы, которые первое и второе звенья образуют с осью абсцис, соответственно. Эти углы можно выбрать в качестве обобщенных координат, описывающих механическую часть системы.

Чтобы описать аэродинамические силы, действующие на маятник, воспользуемся квазистатическим подходом. Будем считать, что поток действует только

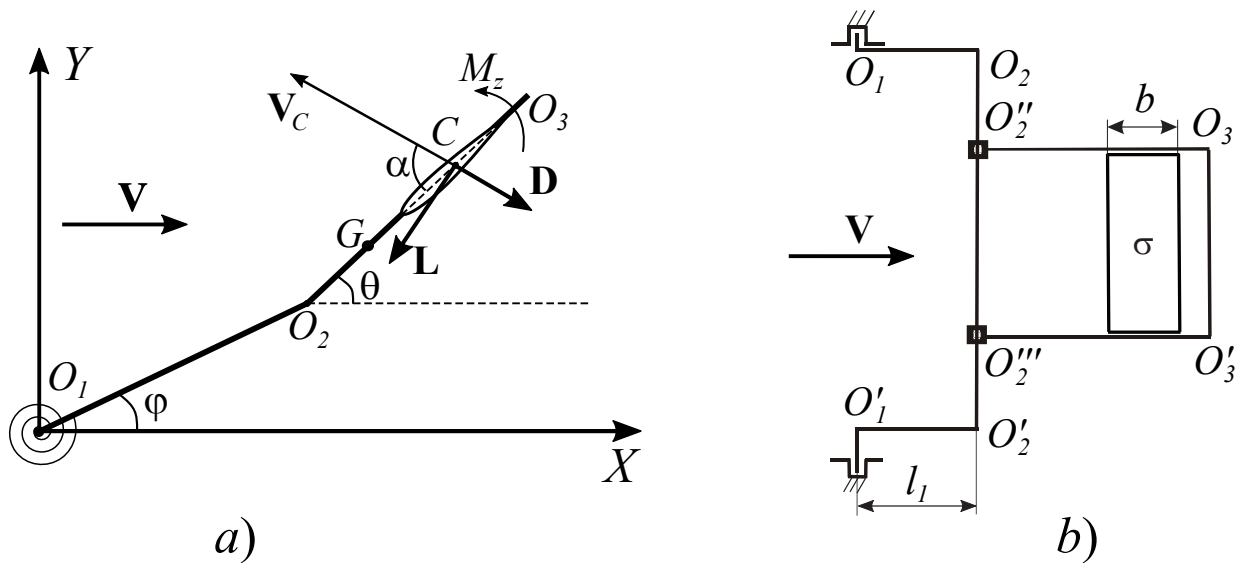


Рис. 2.4. Схема двухзвенного аэродинамического маятника с пружиной на первом звене: а) вид сверху; б) вид сбоку.

на крыло. Учитывая, что движение маятника, вообще говоря, не ограничено областью малых углов, воспользуемся тем вариантом подхода, в котором аэродинамические силы и моменты приводятся к середине  $C$  хорды.

В соответствии с этим подходом, силы  $\mathbf{D}$  лобового сопротивления, подъемной силы  $\mathbf{L}$  (приложенных в точке  $C$ ) и момента  $M_z$  относительно середины хорды представляются в следующем структурном виде:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\rho\sigma V_C C_d(\alpha)\mathbf{V}_C, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2}\rho\sigma V_C C_l(\alpha)\mathbf{e}_z \times \mathbf{V}_C, \quad M_z = \frac{1}{2}\rho\sigma b V_C^2 C_m(\alpha) \quad (2.40)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды;  $\sigma$  — площадь крыла;  $b$  — длина хорды крыла;  $C_d$ ,  $C_l$ ,  $C_m$  — безразмерные коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы и момента относительно точки  $C$ , соответственно;  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор нормали к плоскости движения (восходящая вертикаль);  $\mathbf{V}_C$  — воздушная скорость точки  $C$ ;  $\alpha$  — мгновенный угол атаки, т.е. угол между вектором  $\mathbf{V}_C$  и хордой крыла (см. рис. 2.4).

Величины  $V_C$  и  $\alpha$  представляют собой псевдоскорости, и их следует выра-

зять через обобщенные координаты и скорости.

Для этого запишем выражения для координат точки  $C$ :

$$x_C = l_1 \cos \varphi + r \cos \theta, \quad y_C = l_1 \sin \varphi + r \sin \theta$$

Здесь  $l_1$  — длина первого звена, а  $r$  — расстояние от шарнира между звеньями  $O_2$  до точки  $C$ .

Следовательно, вектор воздушной скорости выглядит так:

$$\mathbf{V}_C = \left\{ -V - l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \right\}$$

Отсюда нетрудно получить кинематические соотношения, определяющие угол атаки:

$$V_C \cos \alpha = V \cos \theta + l_1 \dot{\varphi} \sin (\varphi - \theta)$$

$$V_C \sin \alpha = V \sin \theta + l_1 \dot{\varphi} \cos (\varphi - \theta) + r \dot{\theta}$$

Для составления уравнений движения механической части системы воспользуемся Лагранжевым формализмом.

Кинетическая энергия маятника имеет следующий вид:

$$T = \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{m}{2} \left( \left( l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + l_2 \dot{\theta} \sin \theta \right)^2 + \left( l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + l_2 \dot{\theta} \cos \theta \right)^2 \right). \quad (2.41)$$

Здесь  $J_1$  — момент инерции первого звена относительно оси вращения,  $J_2$  — центральный момент инерции второго звена,  $m$  — масса второго звена,  $l_2$  — расстояние от точки  $O_2$  до центра масс  $G$  второго звена.

Обобщенные силы, связанные с силами упругости и аэродинамическими

силами, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= -\frac{\rho\sigma V_C l_1}{2} C_d(\alpha) \left( V \sin \varphi + l_1 \dot{\varphi} + r \dot{\theta} \cos(\theta - \varphi) \right) - \\
&\quad -\frac{\rho\sigma V_C l_1}{2} C_l(\alpha) \left( V \cos \varphi + r \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta} \right) - k\varphi \\
Q_\theta &= -\frac{\rho\sigma V_C r}{2} C_d(\alpha) \left( V \sin \theta + r \dot{\theta} + l_1 \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) \right) + \\
&\quad +\frac{\rho\sigma V_C r}{2} C_l(\alpha) \left( -V \cos \theta + l_1 \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi} \right)
\end{aligned}$$

Здесь  $k$  — коэффициент жесткости спиральной пружины.

С учетом вышеизложенного, уравнения движения системы принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(J_1 + ml_1^2) \ddot{\varphi} + ml_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\theta} - ml_1 l_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}^2 = \\
&\quad = -\frac{\rho\sigma V_C l_1}{2} C_d(\alpha) \left( V \sin \varphi + l_1 \dot{\varphi} + r \cos(\theta - \varphi) \dot{\theta} \right) - \\
&\quad -\frac{\rho\sigma V_C l_1}{2} C_l(\alpha) \left( V \cos \varphi + r \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta} \right) - k\varphi - h\dot{\varphi} \\
&(J_2 + ml_2^2) \ddot{\theta} + ml_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\varphi} + ml_1 l_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi}^2 = \\
&\quad = -\frac{\rho\sigma V_C r}{2} C_d(\alpha) \left( V \sin \theta + r \dot{\theta} + l_1 \cos(\theta - \varphi) \dot{\varphi} \right) \\
&\quad +\frac{\rho\sigma V_C r}{2} C_l(\alpha) \left( -V \cos \theta + l_1 \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi} \right) + \frac{\rho\sigma V_C^2 b}{2} C_m(\alpha)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Для упрощения записи проведем обезразмеривание системы. Для этого введем безразмерное время  $\tau = \sqrt{b/V_0}$  (здесь  $V_0$  — некоторая характерная скорость) и следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
\bar{l}_1 &= \frac{l_1}{b}, \bar{l}_2 = \frac{l_2}{b}, \bar{r} = \frac{r}{b}, u = \frac{V}{V_0}, u_C = \frac{V_C}{V_0}, \\
\bar{m} &= \frac{2m}{\rho\sigma b}, \bar{J}_1 = \frac{2J_1}{\rho\sigma b^3}, \bar{J}_2 = \frac{2J_2}{\rho\sigma b^3}, \bar{k} = \frac{2k}{\rho\sigma b V_0^2}
\end{aligned}$$

Тогда уравнения движения (2.42) в безразмерной форме примут следующий

вид:

$$\begin{aligned}
& (\bar{J}_1 + \bar{m}\bar{l}_1^2) \ddot{\varphi} + \bar{m}\bar{l}_1\bar{l}_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\theta} - \bar{m}\bar{l}_1\bar{l}_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}^2 = \\
& = -\bar{l}_1 u_C^2 (C_d(\alpha) \sin(\alpha + \varphi - \theta) + C_l(\alpha) \cos(\alpha + \varphi - \theta)) - k\varphi \\
& (\bar{J}_2 + \bar{m}\bar{l}_2^2) \ddot{\theta} + \bar{m}\bar{l}_1\bar{l}_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\varphi} + \bar{m}\bar{l}_1\bar{l}_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi}^2 = \\
& = -\bar{r} u_C^2 (C_d(\alpha) \sin \alpha + C_l(\alpha) \cos \alpha) + u_C^2 C_m(\alpha)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Кинематические соотношения (2.41) после обезразмеривания будут выглядеть так:

$$\begin{aligned}
u_C \cos \alpha &= u \cos \theta + \bar{l}_1 \dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) \\
u_C \sin \alpha &= u \sin \theta + \bar{l}_1 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) + \bar{r} \dot{\theta}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

В силу симметрии (напомним, что профиль крыла симметричен) очевидно, что положение, в котором оба звена маятника вытянуты вдоль скорости набегающего потока ( $\varphi \equiv \theta \equiv 0$ ), является положением равновесия.

Уравнения движения, линеаризованные в окрестности тривиального положения равновесия, имеют вид, аналогичный (2.3), где

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \bar{J}_1 + \bar{m}\bar{l}_1^2 & \bar{m}\bar{l}_1\bar{l}_2 \\ \bar{m}\bar{l}_1\bar{l}_2 & \bar{J}_2 + \bar{m}\bar{l}_2^2 \end{pmatrix}, & \mathbf{K} &= u^2 \begin{pmatrix} C_{d0}\bar{l}_1 & \frac{C_l^\alpha \bar{l}_1}{2} \\ \frac{C_l^\alpha \bar{l}_1}{2} & (C_l^\alpha + C_{d0})(\bar{r} - \bar{r}_0) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{D} &= (C_l^\alpha + C_{d0}) u \begin{pmatrix} \bar{l}_1^2 & \frac{\bar{l}_1}{2}(2\bar{r} - \bar{r}_0) \\ \frac{\bar{l}_1}{2}(2\bar{r} - \bar{r}_0) & \bar{r}(\bar{r} - \bar{r}_0) \end{pmatrix}, & \mathbf{G} &= (C_l^\alpha + C_{d0}) u \begin{pmatrix} 0 & \frac{\bar{l}_1 \bar{r}_0}{2} \\ -\frac{\bar{l}_1 \bar{r}_0}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{N} &= u^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{C_l^\alpha \bar{l}_1}{2} \\ -\frac{C_l^\alpha \bar{l}_1}{2} & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{K}' &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Здесь  $C_{d0} = C_d(0)$ ,  $C_l^\alpha = dC_l/d\alpha|_{\alpha=0}$ ,  $\bar{r}_0 = dC_m/d\alpha|_{\alpha=0} (C_{d0} + C_l^\alpha)^{-1}$ .

Нетрудно, видеть, что определитель матрицы  $\mathbf{D}$  диссипативных сил отрицателен. Следовательно, в системе отсутствует полная диссипация.

Чтобы привести эту систему к виду (2.9), следуя процедуре, описанной в главе 2, перейдем к новым переменным:

$$x_1 = \sqrt{\frac{J_*}{J_{**}}} \varphi, \quad x_2 = \sqrt{J_{**}} \theta + \frac{\bar{m} \bar{l}_1 \bar{l}_2}{\sqrt{J_{**}}} \varphi,$$

где  $J_* = \bar{J}_1 \bar{J}_2 + \bar{J}_1 \bar{m} \bar{l}_2^2 + \bar{J}_2 \bar{m} \bar{l}_1^2$  и  $J_{**} = \bar{J}_2 + m \bar{l}_2^2$ .

Тогда компоненты матриц диссипативных, гироскопических, потенциальных и циркуляционных сил, фигурирующих в системе (2.9), будут определяться следующими формулами:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \bar{l}_1^2 u \frac{(C_l^\alpha + C_{d0}) (\bar{J}_2 + \bar{m} \bar{l}_2 (\bar{l}_2 - \bar{r})) (\bar{J}_2 + \bar{m} \bar{l}_2 (\bar{l}_2 - \bar{r} + \bar{r}_0))}{J_* J_{**}}, \\ d_{12} &= u \bar{r} \bar{l}_1 \frac{(C_l^\alpha + C_{d0}) ((\bar{J}_2 + \bar{m} \bar{l}_2^2) (2\bar{r} - \bar{r}_0) - 2\bar{m} \bar{r} \bar{l}_2 (\bar{r} - \bar{r}_0))}{2J_{**} \sqrt{J_*}}, \\ d_{22} &= u \bar{r} \frac{(C_l^\alpha + C_{d0}) (\bar{r} - \bar{r}_0)}{J_{**}}, \quad \gamma = u \bar{l}_1 \bar{r}_0 \frac{(C_l^\alpha + C_{d0})}{2\sqrt{J_*}}, \\ k_{11} &= u \bar{l}_1^2 \frac{\bar{m}^2 \bar{l}_2^2 \bar{l}_1 (C_l^\alpha + C_{d0}) (\bar{r} - \bar{r}_0) - C_l^\alpha \bar{m} \bar{l}_1 \bar{l}_2 J_{**} + C_{d0} J_{**}^2}{J_* J_{**}}, \\ k_{12} &= -u^2 \bar{l}_1 \frac{2(C_l^\alpha + C_{d0}) \bar{m} \bar{l}_2 (\bar{r} - \bar{r}_0) - C_l^\alpha J_{**}}{2J_{**} \sqrt{J_*}}, \\ k_{22} &= u^2 \frac{(C_l^\alpha + C_{d0}) (\bar{r} - \bar{r}_0)}{J_{**}}, \quad \nu = \frac{u^2 \bar{l}_1 C_l^\alpha}{2\sqrt{J_*}}, \quad \kappa = \bar{k} \frac{J_{**}}{J_*} \end{aligned}$$

Из статических экспериментов известно, что для тонких профилей выполнено соотношение  $C_{d0} \ll 1$ .

Тогда характеристический полином имеет следующий вид:

$$P = \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + (a_2 + \kappa) \lambda^2 + (a_1 + d_2 \kappa) \lambda + a_0 + k_{22} \kappa,$$

где

$$a_3 = \frac{u C_l^\alpha (\bar{J}_1 \bar{r} (\bar{r} - \bar{r}_0) + \bar{J}_2 \bar{l}_1^2 - \bar{m} \bar{l}_1^2 (\bar{r} + \bar{l}_2) (\bar{r} - \bar{r}_0) + \bar{m} \bar{l}_1^2 \bar{l}_2 (\bar{l}_2 - \bar{r}))}{J_*} + O(C_{d0}),$$



$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{u^2 C_l^\alpha (\bar{J}_1 (\bar{r} - \bar{r}_0) - \bar{m} \bar{l}_1^2 (\bar{l}_2 - \bar{r} + \bar{r}_0))}{J_*} + O(C_{d0}), \\
a_1 &= C_{d0} \frac{u^3 \bar{l}_1 C_l^\alpha (\bar{r} - \bar{r}_0) (\bar{r} + \bar{l}_1)}{J_*} + o(C_{d0}), \\
a_0 &= C_{d0} \frac{u^4 \bar{l}_1 C_l^\alpha (\bar{r} - \bar{r}_0)}{J_*} + o(C_{d0}).
\end{aligned}$$

Кроме того, третий минор матрицы Гурвица для «невозмущенной» системы (при  $\kappa = 0$ ) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_{30} &= \frac{C_{d0} (C_l^\alpha)^3 (\bar{r} - \bar{r}_0) \bar{l}_1^2 u^6}{J_*^3} (\bar{J}_1 \bar{r} (\bar{r} - \bar{r}_0) + \bar{J}_2 \bar{l}_1^2 + \bar{m} \bar{l}_1^2 (\bar{l}_2 - \bar{r}) (\bar{l}_2 - \bar{r} + \bar{r}_0)) \times \\
&\quad \times (\bar{J}_1 (\bar{r} - \bar{r}_0) - \bar{J}_2 \bar{l}_1 - \bar{m} \bar{l}_1 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) (\bar{l}_2 - \bar{r} + \bar{r}_0)) + O(C_{d0}^2) \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Пусть  $\bar{r} > \bar{r}_0$ . Тогда, если момент инерции первого звена достаточно велик, то  $a_i > 0$  ( $i = 0 \dots 3$ ), и выражение (2.45) положительно. Таким образом, в отсутствие пружины в креплении первого звена имеет место асимптотическая устойчивость положения «по потоку».

Эта ситуация соответствует одному из частных случаев, рассмотренных в главе 2 (п. 2.3.3). Неравенство (2.27) в данной задаче принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
& - \frac{(C_l^\alpha)^3 \bar{l}_1^2 u^4 (\bar{r} - \bar{r}_0)}{J_* J_{**}^2} (\bar{J}_2 + \bar{m} \bar{l}_2 (\bar{l}_2 - \bar{r} + \bar{r}_0)) \times \\
& \quad \times (\bar{J}_1 \bar{r} (\bar{r} - \bar{r}_0) + \bar{J}_2 \bar{l}_1^2 + \bar{m} \bar{l}_1^2 (\bar{l}_2 - \bar{r}) (\bar{l}_2 - \bar{r} + \bar{r}_0)) + O(C_{d0}) < 0 \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Неравенство (2.46), очевидно, выполняется в случае, когда  $\bar{r}_0 < \bar{r} < \bar{l}_2 + \bar{J}_2 / \bar{m} \bar{l}_2$  и величина  $\bar{J}_1$  достаточно велика.

Соответственно, при этом удовлетворяются условия (2.18), и характер устойчивости меняется дважды при увеличении  $\kappa$  от нуля до бесконечности, причем

критические значения этого параметра определяются формулами (2.28):

$$\kappa_1 = C_{d0} u^2 \frac{J_{**} \bar{J}_1 (\bar{r} - \bar{r}_0) - \bar{J}_2 \bar{l}_1 - \bar{m} \bar{l}_1 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) (\bar{l}_2 - \bar{r} + \bar{r}_0)}{J_* (\bar{J}_2 + \bar{m} \bar{l}_2 (\bar{l}_2 - \bar{r} + \bar{r}_0))} + o(C_{d0}),$$

$$\kappa_2 = C_i^\alpha u^2 \frac{J_{**} (\bar{J}_1 \bar{r} (\bar{r} - \bar{r}_0) + \bar{J}_2 \bar{l}_1^2 + \bar{m} \bar{l}_1^2 (\bar{l}_2 - \bar{r}) (\bar{l}_2 - \bar{r} + \bar{r}_0))}{\bar{r} (\bar{J}_2 + \bar{m} \bar{l}_2 (\bar{l}_2 - \bar{r}))} + O(C_{d0})$$

Таким образом, при определенных значениях параметров установка на первое звено двухзвенного аэродинамического маятника спиральной пружины даже относительно малой жесткости приводит к потере устойчивости тривиального положения равновесия.

Это подтверждается экспериментальными исследованиями [12], [174], проведенными в аэродинамической трубе А6 НИИ механики МГУ. Полученные в эксперименте зависимости углов отклонения звеньев от безразмерного времени изображены на рис. 2.5 для разных значений безразмерного коэффициента жесткости пружины в первом шарнире.

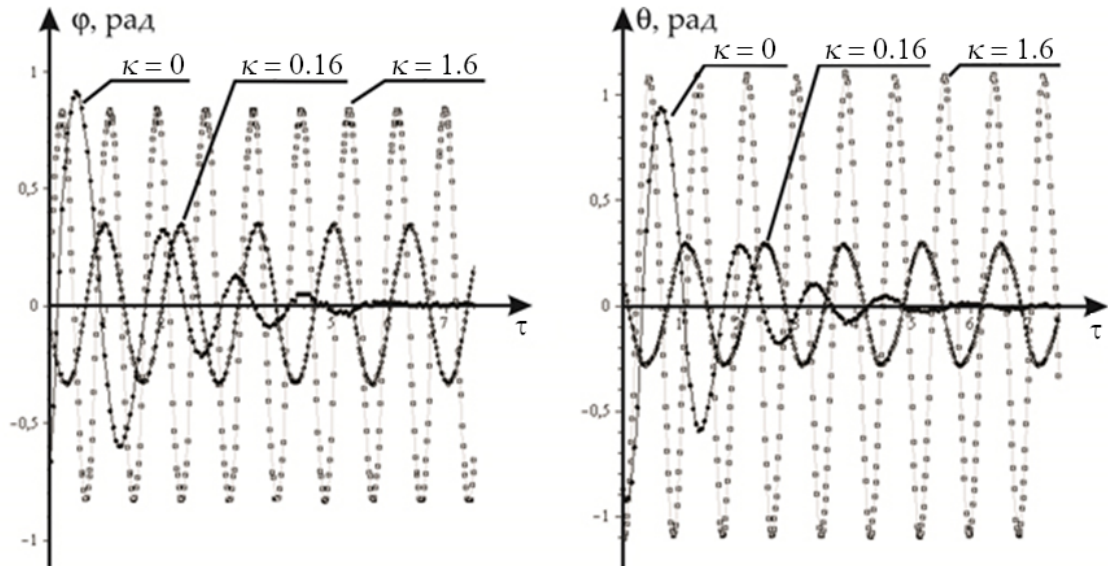


Рис. 2.5. Зависимости углов  $\varphi$  и  $\theta$  от безразмерного времени для разных значений коэффициента жесткости пружины  $\kappa$ .

Видно, что в отсутствие пружины имеет место асимптотическая устойчи-

вость. С ростом  $\kappa$  устойчивость исчезает и возникают притягивающие колебательные режимы, причем их амплитуда растет с увеличением  $\kappa$  (в рассмотренном диапазоне значений этого коэффициента).

В случае, когда тривиальное равновесие неустойчиво, в системе возникают автоколебания (их исследование проведено, в частности, в [103], [12], [174]). Соответственно, такой маятник может служить рабочим элементом ветроэнергетической установки колебательного типа. Вопросы генерации электроэнергии с помощью двухзвенного аэродинамического маятника, соединенного с пьезоэлементами, обсуждаются в работах [175].

## Выводы

Исследовано влияние изменения диагонального элемента матрицы потенциальных сил на устойчивость равновесия в системе при наличии диссипативных сил с неполной диссипацией и/или позиционных неконсервативных сил.

Показано, что при изменении диагонального элемента матрицы потенциальных сил характер устойчивости положения равновесия голономной системы с  $s$  степенями свободы может изменяться не более  $2s - 1$  раз. Для любого конечного значения  $s$  существует система, в которой число изменений характера устойчивости равно максимально возможному.

Для голономной системы с 2 степенями свободы в случае неполной диссипации существуют условия на параметры, при выполнении которых при изменении одного из элементов главной диагонали матрицы потенциальных сил от 0 до бесконечности характер устойчивости равновесия меняется 3 раза (неустойчивость — асимптотическая устойчивость — неустойчивость — асимптотическая устойчивость). Этот эффект проявляется и в отсутствие циркуляционных сил.

Для голономной системы с 2 степенями свободы с циркуляционными сила-

ми существуют условия на параметры, при выполнении которых при изменении одного из элементов главной диагонали матрицы потенциальных сил от нуля до бесконечности имеет место двукратная смена характера устойчивости тривиального равновесия (в том числе, при наличии полной диссипации).

Эффект потери устойчивости при увеличении жесткости по одной из обобщенных координат продемонстрирован аналитически и зарегистрирован экспериментально для двухзвенного аэродинамического маятника.

## Глава 3

# Особенности динамики крыла в потоке сопротивляющейся среды в рамках линейной постановки

В этой главе мы рассмотрим некоторые эффекты, возникающие при нестационарном движении тела (имеющего форму крыла) в потоке сопротивляющейся среды в случае, когда тело имеет одну степень свободы. Для описания взаимодействия тела с потоком воспользуемся моделью присоединенного осциллятора, описанной в первой главе. При этом мы будем ограничиваться линейной постановкой задачи, считая угол атаки достаточно малым. Это предположение оправданно, если движение крыла достаточно медленное, и угол между его хордой и скоростью набегающего потока достаточно мал<sup>1</sup>.

### 3.1. Поступательное движение крыла поперек потока

#### 3.1.1. Вынужденное движение

При оценке параметров присоединенного осциллятора был рассмотрен один из возможных типов вынужденного движения тела (гармонические колебания). Представляют интерес также такие вынужденные движения, которые завершаются остановкой и последующим удержанием тела в неподвижном состоянии. На примере таких движений можно исследовать так называемое последствие потока среды. Отметим, что в терминах модели присоединенного осциллято-

---

<sup>1</sup> При подготовке данной главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [50, 51, 56, 52, 171, 61]

ра это последствие можно интерпретировать как проявление инерционных свойств потока, характеристики которого продолжают изменяться со временем даже после остановки тела.

Рассмотрим тело, имеющее форму тонкого прямоугольного крыла с симметричным профилем. Пусть это тело совершает вынужденное движение по закону

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} u_0, & t < 0 \\ u_0 - \ddot{x}_0 t, & 0 \leq t < t_* = u_0/\ddot{x}_0 \\ 0, & t_* \leq t \end{cases} \quad (3.1)$$

Так как  $\eta(0) = -u_0 C_n^\alpha/k$ ,  $\dot{\eta}(0) = 0$ , а  $\ddot{x}$  — кусочно-постоянная функция, то для описания функции  $N(t)$  удобно использовать представление (1.20):

$$N(t) = \begin{cases} -C_n^\alpha u_0, & t < 0 \\ -C_n^\alpha u_0 + \left( m - \frac{C_n^{\alpha 2}}{k} + C_n^\alpha t - \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=1}^2 (-1)^i (m + C_n^\alpha/\lambda_i) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i t} \right) \ddot{x}_0, & 0 \leq t < t_* \\ -\ddot{x}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i (m + C_n^\alpha/\lambda_i) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} (1 - e^{-\lambda_i t_*}) e^{\lambda_i t}, & t_* \leq t \end{cases} \quad (3.2)$$

Естественно, что первая из формул (3.2) соответствует «статическому» значению силы. Вторая формула в (3.2) описывает силу на этапе равномерного торможения, а третья соотношение в (3.2) описывает последствие, возникающее после остановки крыла.

Нетрудно показать, что зависимость  $N(t)$  при  $t > 0$  имеет немонотонный характер, более того, в моменты  $t = 0$  и  $t = t_*$  (точки разрыва ускорения) производная  $dN/dt$  также терпит разрыв.

Видно, что  $N(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.к. зависимость силы  $N$  от времени представляет собой сумму убывающих экспонент. Заметим, что характеристические показатели этих экспонент являются собственными числами для уравнения присоединенного осциллятора.

Возникает вопрос о возможности изменения направления силы  $N$ . Нетрудно показать, что при выполнении условия  $h > C_n^\alpha$  существует единственное критическое значение  $w_*$  ускорения, при котором сила  $N$  в процессе движения один раз (в нашем случае при  $t = t_*$ ) обращается в нуль. Если  $0 < \ddot{x}_0 < w_*$ , то направление силы остается неизменным во время торможения и последующего релаксационного процесса. Если же  $\ddot{x}_0 > w_*$ , то сила  $N$  изменяет направление, причем дважды: один раз на фазе торможения, второй раз — на фазе последействия.

Таким образом, при  $\ddot{x}_0 > w_*$  на этапе торможения имеется интервал времени, в течение которого сила воздействия со стороны потока стремится не остановить крыло, а, напротив, «разогнать» его. Максимальная величина  $N_*$  этой «разгоняющей» силы определяется соотношением

$$N_* = (h - C_n^\alpha)u_0 \quad (3.3)$$

и соответствует случаю мгновенной остановки тела.

Отметим, что на этапе последействия ( $t > t_*$ ) функция  $N(t)$  имеет единственный минимум и принимает в нем отрицательное значение, что коррелирует с некоторыми известными экспериментальными данными.

### Пример

Проведем численный расчет зависимостей силы  $N$  от времени при  $u_0 = 0.2$  для трех режимов торможения и изобразим эти зависимости на фиг. 3.1: 1)  $\ddot{x}_0 = 0.1$ ; 2)  $\ddot{x}_0 = 0.6$ ; 3)  $\ddot{x}_0 = 1000$ . Во всех трех случаях примем одинаковые значения динамических параметров:  $C_n^\alpha = 3.8$ ,  $m = 1.3$ ,  $k = 2.0$ ,  $h = 10.0$ .

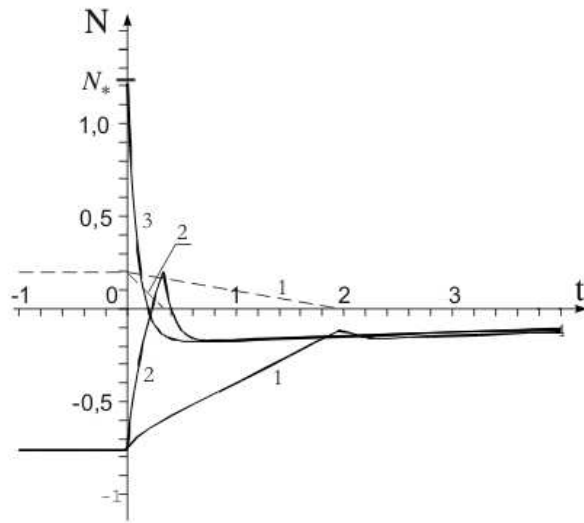


Рис. 3.1. Зависимость силы, действующей на крыло, от времени.

Для наглядности в верхней части фиг. 3.1 пунктиром изображены графики соответствующих зависимостей  $\dot{x}(t)$  (кроме третьего случая).

Видно, что смена направления силы происходит уже при  $\ddot{x}_0 \sim 0.6$ .

### 3.1.2. Управляемость и наблюдаемость системы

Задача управления движением тела в потоке осложняется двумя обстоятельствами. Во-первых, непосредственное управляющее воздействие можно приложить только к телу, а не к самому присоединенному осциллятору, имитирующему внутреннюю динамику потока. Во-вторых, информация о состоянии движения осциллятора недоступна для непосредственного измерения. Она должна восстанавливаться с привлечением замкнутой динамической системы.

Исследуем управляемость и наблюдаемость рассматриваемой системы в предположении об отсутствии внешних сил, помимо управления и аэродинамических.

Рассмотрим уравнения (1.12) движения крыла с присоединенным осцил-



лятором, считая, что сила  $F_x$  представляет собой управление. Тогда, с учетом отмеченных выше обстоятельств, задача управления и наблюдения может быть записана в следующей форме (для сокращения записи будем обозначать управление через  $w$ ):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}w \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{H}\mathbf{Y}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Здесь  $\mathbf{Y} = (x \ \dot{x} \ \eta \ \dot{\eta})^T$ ,  $\mathbf{Z} = (z_1 \ z_2)^T$ ,  $\mathbf{B} = (0 \ M^{-1} \ 0 \ -M^{-1})$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{M} & \frac{h}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C_n^\alpha}{m} & -\frac{k}{m} - \frac{k}{M} & -\frac{h + C_n^\alpha}{M} - \frac{h}{M} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно показать, что матрица управляемости имеет максимальный ранг, если удовлетворяется условие

$$C_n^\alpha h - km \neq 0.\tag{3.5}$$

Эксперименты показывают, что для тел типа тонких крыльев величина  $C_n^\alpha$ , как правило, не меньше 2. Соответственно, при значениях параметров присоединенного осциллятора, полученных в ходе идентификации в главе 1, условие (3.5) выполняется. Таким образом, в общем случае система является управляемой.

Условие (3.5) является необходимым для наблюдаемости системы. Если оно выполнено и, кроме того,  $\text{rank} \mathbf{H} = 2$ , то матрица наблюдаемости имеет максимальный ранг. Это означает, что по информации о положении и скорости тела можно восстановить информацию о состоянии движения присоединенного осциллятора.

Более того, если (3.5) выполняется, и  $H_{12} = H_{21} = H_{22} = 0$ , а  $H_{11} \neq 0$ , то матрица наблюдаемости имеет ранг, равный 4. Таким образом, для наблюдаемости системы в целом достаточно измерять только положение тела.

В то же время, если  $H_{11} = H_{21} = H_{22} = 0$  и  $H_{12} \neq 0$ , то матрица наблюдаемости содержит нулевой столбец, и ее ранг меньше максимального. Таким образом, информации только о скорости тела недостаточно для наблюдаемости системы.

### 3.1.3. Свободное торможение тела

Как показано выше, при быстром вынужденном торможении крыла возможно изменение направления силы воздействия потока. Интересно теперь рассмотреть эффекты, возникающие при свободном торможении крыла в потоке среды.

Предположим, что при  $t < 0$  тело двигалось с постоянной скоростью  $u_0 > 0$  под действием вынуждающей силы  $F$  (достаточно долго, так, чтобы движение среды можно было считать установившимся, как и в п. 2.3).

Пусть теперь в момент  $t = 0$  сила  $F$  обратилась в ноль. Рассмотрим задачу об изменении скорости крыла при его дальнейшем движении в потоке среды.

Очевидно, что использование интегро-дифференциального уравнения (1.19), как с учетом (1.20), так и (1.21), приводит к достаточно сложной математической задаче. В то же время система (1.12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} M\dot{u} &= k\eta + h\dot{\eta} \\ m\ddot{\eta} + (h + C_n^\alpha)\dot{\eta} + k\eta &= -C_n^\alpha u - m\dot{u} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь  $u = \dot{x}$  (координата  $x$ , очевидно, является циклической).

Запишем характеристическое уравнение для системы (3.6):

$$\mu^3 + \left( \frac{h + C_n^\alpha}{m} + \frac{h}{M} \right) \mu^2 + \left( \frac{k}{m} + \frac{k}{M} + \frac{C_n^\alpha h}{mM} \right) \mu + \frac{kC_n^\alpha}{mM} = 0 \quad (3.7)$$

Можно показать, что в практически интересных случаях корни уравнения (3.7) имеют отрицательную вещественную часть. Обозначим их через  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$ .

Для крыла заданной формы система уравнений (3.6) содержит только один существенный параметр, а именно, массу  $M$  крыла. Проанализируем влияние этого параметра на движение крыла. Можно показать, что при выполнении условия  $km < hC_n^\alpha$  существуют такие значения  $0 < M_1 < M_2 < \infty$  массы крыла, что в диапазоне «малых» масс ( $0 < M < M_1$ ) все три корня вещественные, в диапазоне «средних» масс ( $M_1 < M < M_2$ ) имеются два комплексно-сопряженных корня, в диапазоне «больших» масс ( $M_2 < M$ ) снова все три корня вещественные.

В силу установившегося характера обтекания при  $t < 0$  имеем  $\eta(0) = -\frac{u_0 C_n^\alpha}{k}$ ,  $\dot{\eta}(0) = 0$ . Для полноты описания процесса торможения запишем формулы для зависимостей скорости  $u$  и положения  $x$  крыла от времени в случае, когда все корни характеристического полинома различны (будем считать при этом, что  $x(0) = 0$ ):

$$u(t) = u_0 \sum U_i e^{\mu_i t}, \quad x(t) = u_0 \sum \mu_i^{-1} U_i e^{\mu_i t} + \frac{u_0}{C_n^\alpha} \left( M + m - \frac{C_n^{\alpha 2}}{k} \right) \quad (3.8)$$

$$\text{где } U_i = \frac{(k + \mu_1 h) (\mu_2 \mu_3 (hC_n^\alpha + kM) + (\mu_2 + \mu_3) k C_n^\alpha)}{k^2 (\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - \mu_3)} \quad (1, 2, 3).$$

Из (3.8) видно, что при значении массы крыла  $M_* = -m + \frac{C_n^{\alpha 2}}{k}$  (для вышеуказанных диапазонов значений параметров присоединенной системы  $M_* > 0$ ) крыло при  $t \rightarrow \infty$  возвратится к начальному положению. Если масса крыла

больше этого значения, то конечное положение  $x_\infty$  крыла будет смещено в ту сторону, в которую направлена первоначальная скорость, а если меньше — в противоположную.

### Пример 2.

На фиг. 3.2 приведены графики зависимостей действительных и мнимых частей  $\mu_{1,2,3}$  от  $M$  (при указанных выше значениях динамических параметров и  $u_0$ ). Вещественные части изображены в нижней полуплоскости, мнимые — в верхней. Видно, что  $M_1 \approx 5.63$ ,  $M_2 \approx 57.5$ . Следовательно, при  $M < 57.5$  в процессе торможения скорость крыла будет менять направление.

В рассматриваемом случае  $M_* = 5.92$ , поэтому при  $M < 5.92$  будет изменять знак и перемещение крыла.

На фиг. 3.3 изображены проекции фазовых траекторий системы на плоскость  $xu$  для пяти значений массы: 1)  $M = 70$ , 2)  $M = 57.5$ , 3)  $M = 20$ , 4)  $M = 5.9$ , 5)  $M = 1$ .

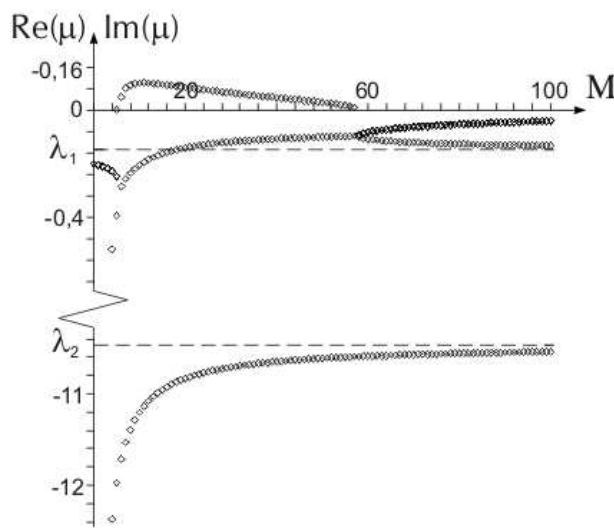


Рис. 3.2. Зависимости корней характеристического полинома от  $M$ .

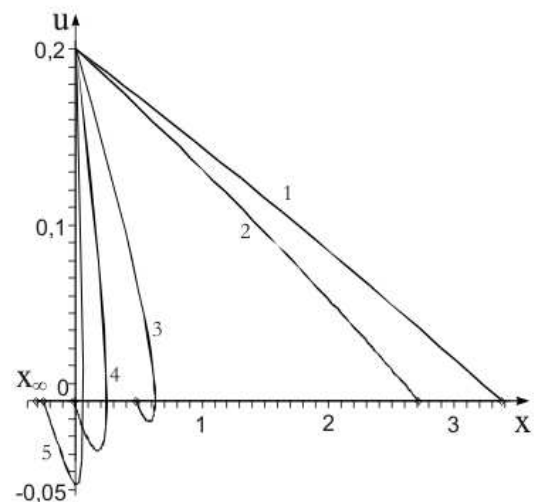


Рис. 3.3. Фазовые траектории системы.

Ясно, что кривые 3) и 4) должны иметь вид сворачивающихся спиралей,

однако соотношения между вещественной и мнимой частями корней характеристического полинома таковы, что в данном масштабе изображения просматривается только одно полупереколебание.

Заметим, что структура коэффициентов уравнения (3.7) такова, что его решения в предельных случаях большой и малой массы крыла оказываются весьма простыми.

### Случай легкого крыла

Пусть масса крыла мала. Тогда, произведя в системе (3.6) замену переменных  $(\eta, \dot{\eta}, u) \rightarrow (\eta, w = u + \dot{\eta}, u)$  и осуществив разделение [45] движений, получим порождающую систему для «медленных» движений:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\eta}} &= -\frac{k}{h}\bar{\eta} \\ \dot{\bar{w}} &= -\frac{C_n^\alpha}{m}\bar{w} \\ \bar{u} &= \bar{w} + \frac{k}{h}\bar{\eta}\end{aligned}\tag{3.9}$$

с начальными условиями  $\bar{w}(0) = u_0$ ,  $\bar{\eta}(0) = -\frac{u_0 C_n^\alpha}{k}$ .

Нетрудно видеть, что на фазе «быстрого» переходного процесса скорость крыла уменьшилась с  $u_0$  до  $u_0(1 - C_n^\alpha/h)$ , т.е., хотя произошло «быстрое» торможение крыла, но «разгон» отсутствует.

Из (3.9) очевидно, что медленное движение крыла описывается формулами:

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) &= u_0\left(-\frac{C_n^\alpha}{h}e^{-kt/h} + e^{-C_n^\alpha t/m}\right), \\ \bar{x} &= u_0\left(\frac{C_n^\alpha}{k}e^{-\frac{k}{h}t} - \frac{m}{C_n^\alpha}e^{-\frac{C_n^\alpha}{m}t}\right) - \frac{u_0}{C_n^\alpha}\left(-m + \frac{C_n^\alpha}{k}\right)\end{aligned}\tag{3.10}$$

Как и следовало ожидать, легкое крыло в процессе торможения не только меняет направление движения, но и «отбрасывается» потоком «назад» на максимальную величину.

### Случай тяжелого крыла

Пусть масса крыла велика. Тогда из (3.7) получим:

$$\mu_{1,2} = \frac{-(h + C_n^\alpha) \pm \sqrt{(h + C_n^\alpha)^2 - 4km}}{2m} + O(1/M), \quad \mu_3 = -\frac{C_n^\alpha}{M} + O(1/M^2)$$

Для сравнения выпишем уравнение движения крыла в квазистатической модели:

$$\dot{i} = -\frac{C_n^\alpha}{M} u$$

Заметим, что характеристическое число в этой модели совпадает с точностью до главных членов с показателем  $\mu_3$ . В то же время показатели  $\mu_{1,2}$  с точностью до главных членов равны характеристическим числам  $\lambda_{1,2}$  присоединенного осциллятора.

Это означает, что за пределами относительно короткого интервала времени, имеющего порядок  $1/|\mu_1|$ , описание движения крыла в рамках предложенной модели практически совпадает с описанием ее движения согласно квазистатической модели. Этого следовало ожидать, так как очевидно, что чем тяжелее крыло, тем меньшее влияние на него оказывают переходные процессы в среде, и соответственно, тем более адекватный результат дает квазистатическая модель, что коррелирует с содержанием раздела 1.2.3.

#### 3.1.4. Задача о колебаниях крыла на упругом креплении

Пусть тело-крыло может совершать возвратно-поступательное движение под действием возвращающей силы  $F = -\kappa x$ . Тогда уравнения движения кры-

ла примут вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -\varkappa x + k\eta + h\dot{\eta} \\ m(\ddot{x} + \ddot{\eta}) &= -k\eta - (h + C_n^\alpha)\dot{\eta} - C_n^\alpha\dot{x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Прежде всего, составим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} Mm\lambda^4 + (M(C_n^\alpha + h) + mh)\lambda^3 + (hC_n^\alpha + Mk + km + m\varkappa)\lambda^2 + \\ + (kC_n^\alpha + \varkappa C_n^\alpha + \varkappa h)\lambda + k\varkappa = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Видно, что все коэффициенты характеристического полинома (3.12) положительны. Третий минор матрицы Гурвица имеет вид:

$$\begin{aligned} Mh(k + \varkappa)C_n^{\alpha 3} + (((2M + m)\varkappa + k(M + m))h^2 + M^2k^2)C_n^{\alpha 2} + \\ + (\varkappa(M + m)h^2 + m^2\varkappa^2 + 2km^2\varkappa + k^2(M + m)^2)hC_n^\alpha + h^2\varkappa^2m^2 \end{aligned}$$

Поскольку  $C_n^\alpha > 0$ , это выражение положительно при всех физически осмысленных значениях параметров. Таким образом, тривиальное положение равновесия асимптотически устойчиво.

В [6] приведены результаты расчета положения профиля в зависимости от времени в случае, когда профиль совершает затухающие колебания на пружине в потоке среды. Были рассмотрены два случая: 1)  $M = 100$ ,  $\varkappa = 1$ ,  $C_n^\alpha = 6.28$  и 2)  $M = 2$ ,  $\varkappa = 0.02$ ,  $C_n^\alpha = 3.14$ . Проведем расчеты для этих же значений параметров в соответствии с (3.11), полагая, как и в разделе 1.2.1,  $k = 2$ ,  $h = 10$ .

Для первого случая результаты приведены на рис. 3.4. Здесь кривая с индексом 1 обозначает расчет работы [6], кривая с индексом 2 — расчет по квазистатической модели, а кривая с индексом 3 — расчет по предложенной модели. Видно, что первая и третья кривые практически совпадают. Как явствует из рисунка, отличие квазистатической зависимости от зависимостей, даваемых более точными моделями, имеет порядок 10%.

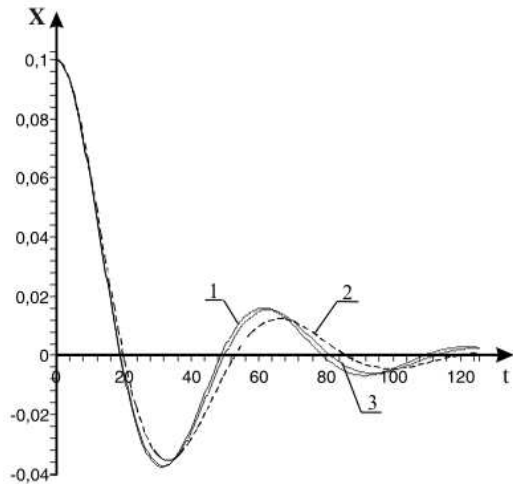


Рис. 3.4.  $M = 100$ ,  $\varkappa = 1$ ,  $C_n^\alpha = 6.28$ .

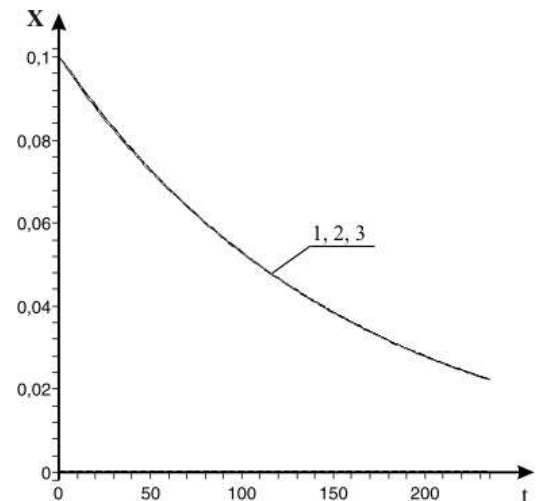


Рис. 3.5.  $M = 2$ ,  $\varkappa = 0.02$ ,  $C_n^\alpha = 3.14$ .

Для второго случая результаты приведены на рис. 3.5 (обозначения те же). Видно, что все три кривые практически совпадают.

Таким образом, предложенная модель (3.11) обладает уровнем точности, аналогичным [6].

Для описания медленных движений системы (см. 1.2.3) оценим характерные времена  $T_{1,2}$  собственных движений присоединенной динамической системы с учетом полученной в предыдущих разделах количественной информации о параметрах присоединенного осциллятора. Получаем:

$$T_1 \approx 10, \quad T_2 \approx 0.1 \quad (3.13)$$

Отметим, что малый параметр, формально введенный в разделе 1.2.3, в данной задаче может быть связан не только с большим значением массы, как в предыдущем разделе, но также и с жесткостью пружины. Остановимся на двух случаях возникновения в этой системе медленных движений: случай большой массы крыла и случай малой жесткости пружины крепления.



### 3.1.5. Случай тяжелого крыла

Пусть масса крыла велика. В этом случае естественно ввести малый параметр  $\varepsilon = \sqrt{\varkappa/M}$ , а уравнение медленных движений принимает вид

$$x'' = -\varkappa x - \varepsilon C_n^\alpha x'$$

Отметим, что в этой ситуации медленное движение представляет собой экспоненциально затухающие колебания. Если в качестве характерного времени  $T$  медленных движений принять период этих колебаний в натуральном времени, то получим  $T = \sqrt{M/\varkappa}$ . Соответственно, область применимости квазистатической модели определяется (см. 3.13) соотношением  $T \gg 10$ , т.е.  $M \gg 100\varkappa$ .

В то же время, характерное время затухания имеет порядок  $C_n^\alpha/2M$ . Поэтому в ситуации, когда необходимо обеспечить только точность скорости затухания, область применимости квазистатической модели может расширяться:  $M \gg 5 C_n^\alpha$ .

Возвращаясь к рисунку 3.4, отметим, что при указанных значениях параметров первое из условий не выполняется (т.к.  $M = 100$  и  $100\varkappa = 100$ ), а второе условие принимает вид  $100 \gg 31.4$ , что говорит о том, что точность квазистатической модели в данном случае не очень высока.

Для сравнения приведем корни характеристического многочлена в рамках квазистатической модели:

$$\lambda_{1,2}^{st} = -0.0314 \pm 0.0949i$$

и соответствующие им корни для системы (3.11):

$$\lambda_{1,2} = -0.0286 \pm 0.1039i$$

### 3.1.6. Случай малой жесткости пружины крепления

Пусть теперь жесткость  $\kappa$  пружины крепления мала. В этой ситуации естественно ввести малый параметр  $\varepsilon = \kappa/C_n^\alpha$ .

Тогда с учетом (1.22) уравнения медленных движений с точностью до членов второго порядка малости примут вид:

$$\varepsilon^2 M x'' = -\varepsilon C_n^\alpha x - \varepsilon C_n^\alpha x' + \varepsilon^2 \left( m - \frac{C_n^{\alpha 2}}{k} \right) x'' \quad (3.14)$$

В силу наличия малого параметра при старшей производной в уравнении (3.14) отщепляется еще один класс «быстрых» движений. Оставшиеся медленные движения описываются уравнением

$$x' = -x,$$

Заметим, что в рамках квазистатической модели также имеет место разделение движений, причем медленные движения описываются таким же уравнением.

Именно с этим обстоятельством и связано совпадение расчетных кривых и квазистатики на рисунке 3.5.

Для сравнения приведем показатель экспоненты, описывающей медленное движение: в рамках квазистатической модели  $\lambda_1^{st} = -0.00640$ ; в рамках предложенной модели  $\lambda_1 = -0.00635$ .

## 3.2. Колебания однозвенного аэродинамического маятника

Проанализируем более подробно динамику однозвенного аэродинамического маятника, рассмотренного в первой главе. Как было отмечено, в отсутствие моментов внешних сил, отличных от аэродинамических, этот маятник имеет

тривиальное положение равновесие, когда его державка вытянута «вдоль потока». Исследуем устойчивость этого положения.

Вначале воспользуемся квазистатическим подходом. Линеаризуем уравнения движения (1.31) в окрестности этого положения:

$$J\ddot{\theta} = - (l + l_0) \frac{\rho S}{2} V^2 C_n^\alpha (\theta + (l + l_0) \dot{\theta}) \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) с точностью до обозначений совпадает с уравнением, приведенным в [40].

Нетрудно показать, что в рамках квазистатической модели условие асимптотической устойчивости положения равновесия по потоку можно записать так:

$$l + l_0 > 0 \quad (3.16)$$

Иначе говоря, для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы центр вращения  $O$  находился перед центром давления. Условие (3.16) с точностью до обозначений совпадает с критерием, полученным в [40]. Противоположное неравенство является достаточным критерием неустойчивости.

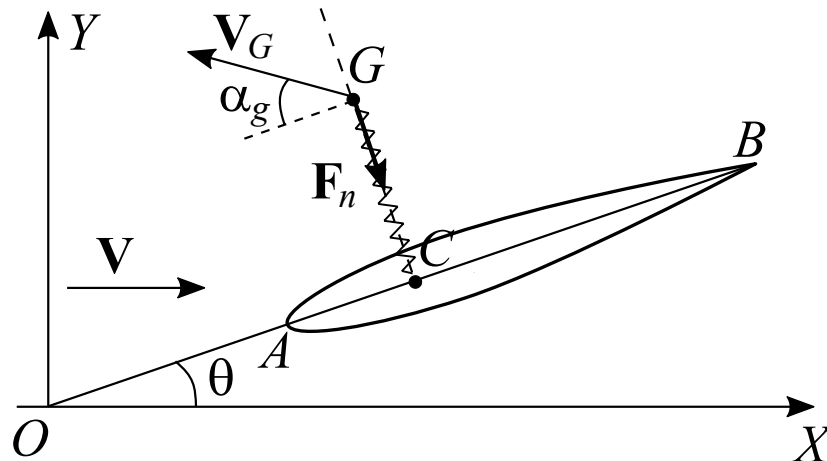


Рис. 3.6. Однозвенный аэродинамический маятник с присоединенным осциллятором.

Теперь воспользуемся для описания нестационарного аэродинамического воздействия на маятник моделью присоединенного осциллятора (см. рис. 3.6).

Учитывая, что момент внешних сил (кроме аэродинамических) равен нулю, уравнения (1.35) малых колебаний маятника примут вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= (l + l_0)(k\eta + h\dot{\eta}) \\ m(\ddot{\eta} + (l + l_0)\ddot{\theta}) &= -k\eta - h\dot{\eta} - C_n^\alpha(\theta + (l + l_0)\dot{\theta} + \dot{\eta}) - C_\omega\dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь, как и ранее,  $m$  — масса присоединённого осциллятора,  $k$  и  $h$  — коэффициенты жесткости и демпфирования, соответственно.

Характеристическое уравнение системы 3.17 имеет вид:

$$\begin{aligned} Jm\lambda^4 + (hm(l + l_0)^2 + J(h + C_n^\alpha))\lambda^3 + \\ + (Jk + (l + l_0)^2(C_n^\alpha h + km) + hC_\omega(l + l_0))\lambda^2 + \\ + (C_n^\alpha(h + k(l + l_0)) + kC_\omega)(l + l_0)\lambda + k(l + l_0)C_n^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из 3.18 видно, что в рамках модели присоединённого осциллятора, как и в рамках квазистатического подхода, неравенство

$$l + l_0 < 0$$

является достаточным условием неустойчивости (причем статической) рассматриваемого положения равновесия.

Однако достаточное условие асимптотической устойчивости в соответствии с этой моделью имеет несколько более сложный вид. Исследуем вначале более подробно предельные случаи: случай большой массы тела и случай малой массы тела.

### «Тяжёлое» крыло

Пусть масса  $M$  крыла весьма велика:  $M = 1/\mu^2$ ,  $\mu \ll 1$ .

Введём следующие обозначения:  $J = J_0 + \mu^{-2}(l + l_g)^2$ , где  $J_0$  — момент инерции крыла относительно оси, проходящей через центр масс,  $l_g$  — расстояние от передней кромки до центра масс крыла, который мы для простоты будем считать лежащим на хорде. Тогда для случая  $l + l_0 > 0$  корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\mu \frac{\sqrt{C_n^\alpha(l + l_0)}}{l + l_g} - \mu^2 \frac{C_n^\alpha(l + l_0)}{2} \frac{k(l + l_0) - C_n^\alpha + kC_\omega/C_n^\alpha}{k(l + l_g)^2} + o(\mu^2)$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{-(h + C_n^\alpha) \pm \sqrt{(h + C_n^\alpha)^2 - 4km}}{2m} + o(1)$$

Как и следовало ожидать, два последних корня в нулевом приближении равны корням характеристического уравнения парциальной системы, представляющей собой присоединённый осциллятор. Значения параметров  $m$ ,  $k$ ,  $h$  таковы, что вещественные части этих корней отрицательны.

Обратимся теперь к первым двум корням. Нетрудно показать, что при  $l \rightarrow \infty$  эти корни стремятся к корням, получающимся в рамках квазистатического подхода. Это означает, что при колебаниях тяжёлого крыла на длинной державке модель присоединённого осциллятора и квазистатическая модель дают близкие результаты. Для обеспечения асимптотической устойчивости рассматриваемого положения равновесия достаточно, чтобы вещественные части корней были отрицательными, т.е.:

$$l > l_* = -l_0 + \frac{C_n^\alpha}{k} - \frac{C_\omega}{C_n^\alpha}$$

Результаты идентификации параметров присоединённого осциллятора показывают, что величина  $C_n^\alpha$  больше как  $k$ , так и  $C_\omega$ . Это означает, что  $l_* > -l_0$ . Но при  $l < l_*$  действительная часть  $\lambda_{1,2}$  положительна. Следовательно, получаем, что в рамках модели присоединённого осциллятора положение равновесия по

потоку для тяжёлого крыла будет неустойчивым даже в случае, когда ось вращения расположена перед центром давления (но достаточно близко к нему). Таким образом, условия асимптотической устойчивости в рамках этой модели более жёсткие, чем в квазистатической модели.

### «Лёгкое» крыло

Пусть момент инерции крыла весьма мал:  $J = \varepsilon \ll 1$ . Тогда для случая  $l + l_0 > 0$  справедливы следующие формулы для корней характеристического полинома:

$$\lambda_1 = -\frac{h(l + l_0)^2}{\varepsilon} - \frac{h}{m} + \frac{k}{h} + \frac{C_\omega}{m(l + l_0)} + o(1), \quad \lambda_2 = -\frac{k}{h} + o(1),$$

$$\lambda_{3,4} = -C_n^\alpha \frac{1 + pC_\omega \pm \sqrt{(1 + pC_\omega)^2 - 4mp}}{2m} + o(1)$$

Здесь  $p = (C_n^\alpha(l + l_0))^{-1}$ .

Таким образом, в этом случае асимптотическая устойчивость положения равновесия по потоку имеет место для значений  $l$ , сколь угодно близких к  $-l_0$  (но таких, что  $l + l_0 > 0$ ).

Вообще говоря, все величины  $\lambda_{1-4}$  отличаются от значений, получающихся в рамках квазистатической модели. Тем не менее, если выполнены соотношения

$$4m \ll C_n^\alpha(l + l_0), \quad |C_\omega| \ll C_n^\alpha(l + l_0)$$

(что, в частности, имеет место при достаточно длинной державке), то корни с минимальной по абсолютной величине действительной частью (и, соответственно, максимальные времена затухания) для обоих подходов совпадают с точностью до главных членов:  $\lambda_{\min} = -(l + l_0)^{-1}$ .

## Область устойчивости

Предположим, что  $|C_\omega| \ll C_n^\alpha$ . Запишем условия асимптотической устойчивости положения равновесия «по потоку» в рамках модели присоединенного осциллятора, пренебрегая членами, содержащими  $C_\omega$ :

$$\begin{aligned}
 & kC_n^\alpha Z_1 (h + C_n^\alpha) J^2 + \\
 & + (l + l_0)hC_n^\alpha (2(l + l_0)kmZ_1 + Z_2 ((l + l_0)(C_n^\alpha + h) - m)) J + \\
 & + (l + l_0)^4 mhC_n^\alpha (hZ_2 + mk^2(l + l_0)) > 0, \\
 & l + l_0 > 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь  $Z_1 = k(l + l_0) - C_n^\alpha$ ,  $Z_2 = C_n^\alpha(k(l + l_0) + h)$ .

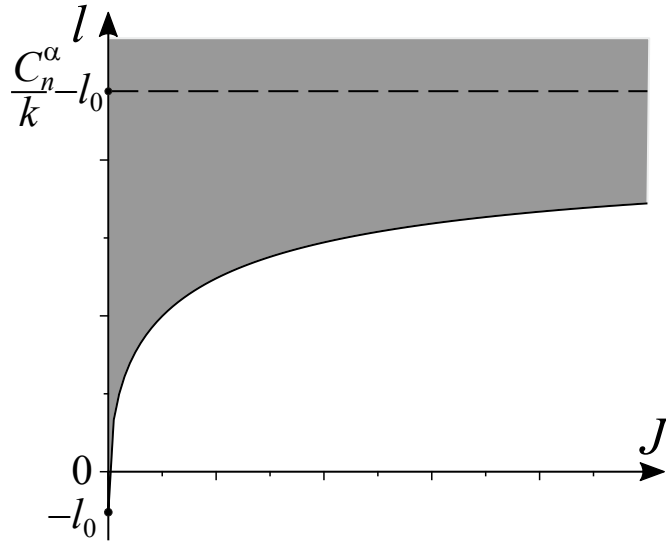


Рис. 3.7. Область асимптотической устойчивости (выделена серым)

Из 3.19 видно, что если  $C_n^\alpha(C_n^\alpha + h) > mk$ , то имеет место следующее: если длина державки маятника достаточно велика (так что  $l > C_n^\alpha/k - l_0$ ), то при любом значении момента инерции маятника относительно точки подвеса рассматриваемое положение равновесия асимптотически устойчиво. Если  $-l_0 < l < C_n^\alpha/k - l_0$ , то существует такое значение  $J = J_*$ , что для  $J < J_*$  равновесие асимптотически устойчиво, а при  $J > J_*$  оно неустойчиво. Наконец, при  $l <$

$l_0$  равновесие неустойчиво при всех  $J$ . Это отражено на рис. 3.7, на котором область асимптотической устойчивости качественно изображена на плоскости параметров  $(J, l)$  (выделена серым цветом).

Данный результат качественно согласуется с работой [164], в которой показано, что для такого маятника флаттер возможен в ситуации, когда точка подвеса лежит «выше по потоку», чем центр давления (т.е.  $l + l_0 > 0$ ), если момент инерции достаточно велик. При этом аэродинамические силы описывались с помощью функций Теодорсена. Возникновение потери устойчивости подтверждено в этой работе также экспериментально. Однако диапазон значений длины державки, в котором возникает данный эффект, в литературе не исследовался.

### 3.2.1. Численные эксперименты

Расчёты проводились для стандартных симметричных профилей — НАСА 0009, НАСА 0012 — которые использовались в феноменологических моделях силового взаимодействия профиля со сплошной средой.

Исследовались два вида движений: вынужденные гармонические колебания вокруг положения по потоку; движения, возникающие под действием постоянной вынуждающей силы.

Учитывая малость углов атаки крылового профиля, целесообразно принять модель безотрывного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью с граничным условием непротекания на контуре профиля и с условием Жуковского-Чаплыгина на острой кромке.

Из-за нестационарного движения профиля циркуляция скорости вокруг него — переменная, а это приводит к сходу завихренности с острой кромки и к образованию вихревого следа. Мгновенное вихревое поле, состоящее из присо-



единённых и свободных вихрей, определяет рассчитываемые при моделировании гидродинамические моменты и силы, действующие на профиль со стороны среды.

При проведении численного эксперимента были использованы вычислительные коды для решения задач гидродинамики с помощью лагранжевых вихревых методов, разработанные и запатентованные в НИИ механики МГУ. В этих кодах реализован, в частности, модифицированный метод дискретных вихрей (ММДВ). В этом методе вихревой слой, который отрывается с кромок тел, моделируется двумя и более цепочками вихревых элементов. В отличие от обычного метода дискретных вихрей, кратные цепочки вихрей позволяют учесть влияние конечной начальной толщины вихревого слоя, сходящего с тела, на его устойчивость. Например, при воздействии на вихревой слой возмущений с относительно малой длиной волны, конечность толщины слоя приводит к его стабилизации. Это следует из известной теории гидродинамической устойчивости Рэлея. Преимущество ММДВ состоит в том, что он позволяет корректно учесть это обстоятельство и не допустить нефизичного роста возмущений, которое обычно имеет место при использовании обычного метода дискретных вихрей с однократными цепочками. Таким образом, модифицированный метод дискретных вихрей косвенно учитывает влияние вязкости, которое проявляется в формировании вихревых слоёв конечной (а не нулевой) толщины.

Предварительно с помощью ММДВ были проведены расчёты статического обтекания маятника при различных углах атаки с целью определения зависимости коэффициента нормальной силы от времени и, соответственно, параметров  $C_n^\alpha$  и  $l_0$ . При этом были получены следующие данные:

для профиля НАСА 0009:  $C_n^\alpha = 6.55$ ,  $l_0 = 0.25$ ;

для профиля НАСА 0012:  $C_n^\alpha = 6.9$ ,  $l_0 = 0.26$ .

Результаты расчетов коэффициента нормальной силы для НАСА 0009 приведены на рис. 3.8 (квадратики обозначают значения, полученные с помощью ММДВ, а сплошная кривая описывается уравнением  $C_n(\theta) = C_n^\alpha \theta$ , где принято  $C_n^\alpha = 6.55$ ).

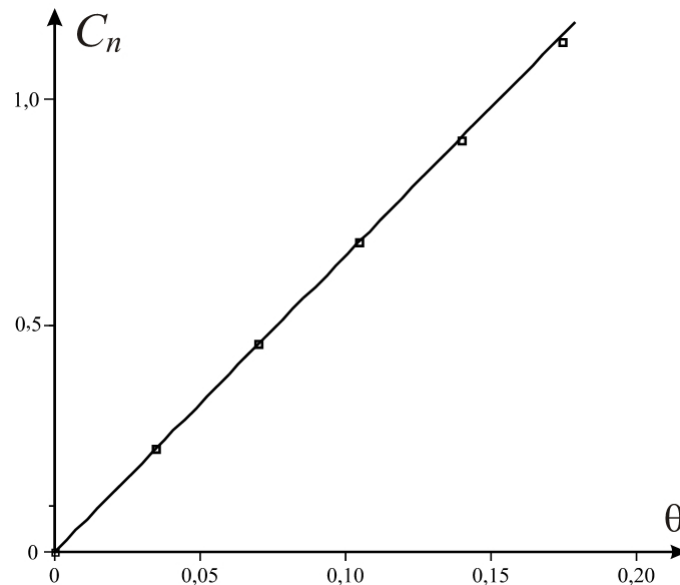


Рис. 3.8. Статическая зависимость коэффициента  $C_n$  от угла  $\theta$ .

Сравним результаты моделирования с помощью феноменологических подходов с данными, которые получаемыми в результате прямого гидродинамического моделирования с использованием метода ММДВ.

### 3.2.2. Вынужденные колебания

Пусть угол поворота маятника зависит от времени по гармоническому закону:  $\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega t)$  Тогда в рамках линейной задачи зависимость от времени нормальной силы, действующей на крыло, описывается одной гармоникой с той же частотой:

$$C_n(t) = \theta_0 (A_n \sin \Omega t + B_n \cos \Omega t)$$

Результаты моделирования с помощью ММДВ показали, что нормальная сила, действующая на маятник при таком движении, представляет собой периодическую функцию, которая с достаточно высокой точностью описывается одной гармоникой.

Нетрудно показать, что в рамках квазистатической модели имеют место следующие соотношения:

$$A_n = C_n^\alpha, \quad B_n = \Omega C_n^\alpha (l + l_0)$$

В соответствии с моделью присоединённого осциллятора мы получаем для этих коэффициентов следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_n &= Q (C_n^\alpha \Omega^2 h (h + C_n^\alpha) + (l + l_0) \Omega^2 (k C_n^{\alpha 2} - h^2 m \Omega^2) + \\ &\quad + (k - \Omega^2 m) k (C_n^\alpha - m (l + l_0) \Omega^2) + C_\omega \Omega^2 (\Omega^2 h m + C_n^\alpha k)) \\ B_n &= (h m^2 (l + l_0) \Omega^4 + (h (l + l_0) C_n^{\alpha 2} + (h (l + l_0) - m) h C_n^\alpha) \Omega^2 + \\ &\quad + k C_n^\alpha (-C_n^\alpha + k (l + l_0)) + ((C_n^\alpha h + h^2 - k m) \Omega^2 + k^2) C_\omega] \end{aligned}$$

где  $Q = \left[ (k - m \Omega^2)^2 + \Omega^2 (h + C_n^\alpha)^2 \right]^{-1}$ .

Для расчетов по модели присоединенного осциллятора были приняты следующие значения параметров:  $m = 1.5$ ,  $k = 3$ ,  $h = 8$ ,  $C_\omega = 0$ .

На рис. 3.9-3.10 представлены результаты расчётов коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  с помощью квазистатической модели, с помощью модели присоединённого осциллятора и с помощью прямого гидродинамического моделирования.

Расчёты проводились для профиля НАСА 0009 при разных значениях частоты  $\Omega$  (0.1, 0.2, 0.4) и длины державки. Белыми квадратами, треугольниками и черными квадратами обозначены зависимости, полученные с помощью метода ММДВ (прямое гидродинамическое моделирование) для  $\Omega = 0.1$ ,  $\Omega = 0.2$  и  $\Omega = 0.4$ , соответственно. Сплошными линиями изображены зависимости, полученные по модели присоединённого осциллятора, а пунктирными линиями —

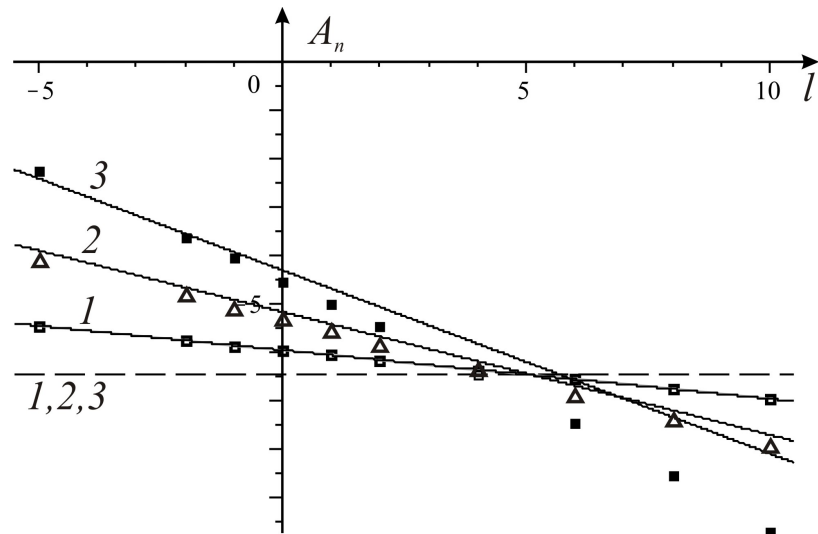


Рис. 3.9. Зависимость коэффициента  $A_n$  от длины державки.

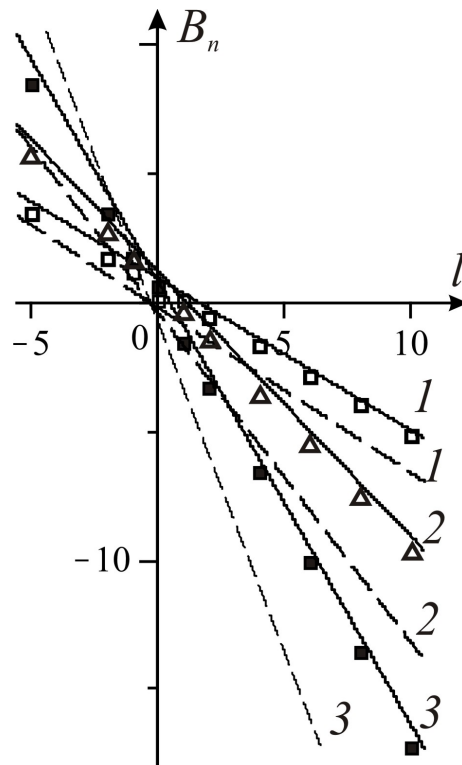


Рис. 3.10. Зависимость коэффициента  $B_n$  от длины державки.

зависимости, полученные по квазистатической модели. Цифры 1, 2 и 3 отвечают случаям  $\Omega = 0.1$ ,  $\Omega = 0.2$  и  $\Omega = 0.4$ , соответственно.

Видно, что результаты, полученные с помощью ММДВ и с помощью мо-

дели присоединённого осциллятора, достаточно близки. Заметные отличия возникают лишь для больших длин державки в случае  $\Omega = 0.4$ , что, по-видимому, связано с тем, что в этой ситуации эффективный угол атаки оказывается достаточно большим, так что необходимо учитывать нелинейные эффекты. В то же время результаты, даваемые квазистатическим подходом, существенно отличаются от данных численного эксперимента.

Интересно, что параметры присоединенного осциллятора здесь оказываются отличными от тех, которые были определены по результатам натуральных экспериментов. Это может быть связано с особенностями поведения среды в рамках гидродинамического моделирования.

### 3.2.3. Переходные процессы

Пусть к аэродинамическому маятнику в середине хорды приложена вынуждающая сила, нормальная к хорде, величина которой зависит от времени по следующему закону:

$$F_{ext}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -0.5, & 0 \leq t \end{cases} \quad (3.20)$$

Тогда для моментов времени  $t \geq 0$  положение равновесия «по потоку» исчезает, и вместо него возникает «смещенное» положение равновесия, определяемое равенством аэродинамического момента и момента силы  $F_{ext}(t)$ .

Если при  $t < 0$  маятник находился в положении  $\theta = 0$ , то при  $t > 0$  возникнет переходный процесс выхода в новое положение равновесия.

Расчёты проводились для двух профилей (НАСА 0009 и НАСА 0012) при разных значениях длины державки и плотности  $\rho_0$  материала крыла. Некоторые результаты численного моделирования приведены на фиг. 5-20 для разных значений  $\rho_0$  и  $l$ .

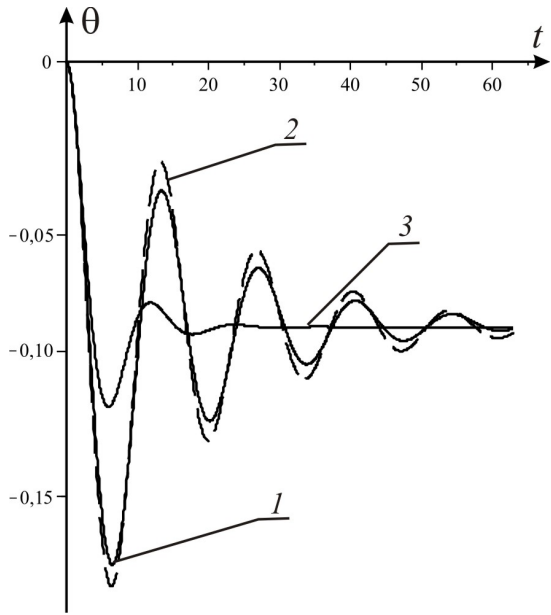


Рис. 3.11. NASA 0009,  $\rho_0 = 100$ ,  $l = 1$ .

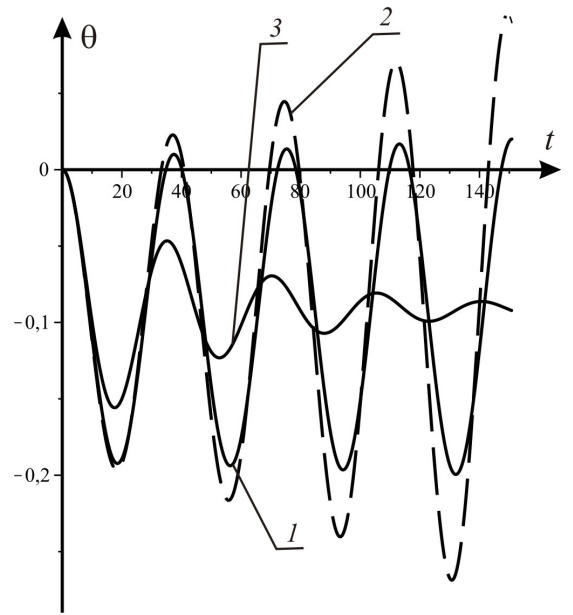


Рис. 3.12. NASA 0009,  $\rho_0 = 1000$ ,  $l = 1$ .

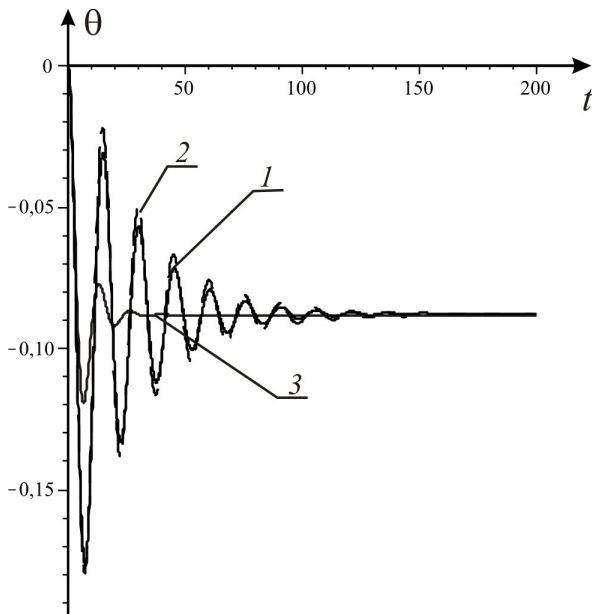


Рис. 3.13. NASA 0012,  $\rho_0 = 100$ ,  $l = 1$ .

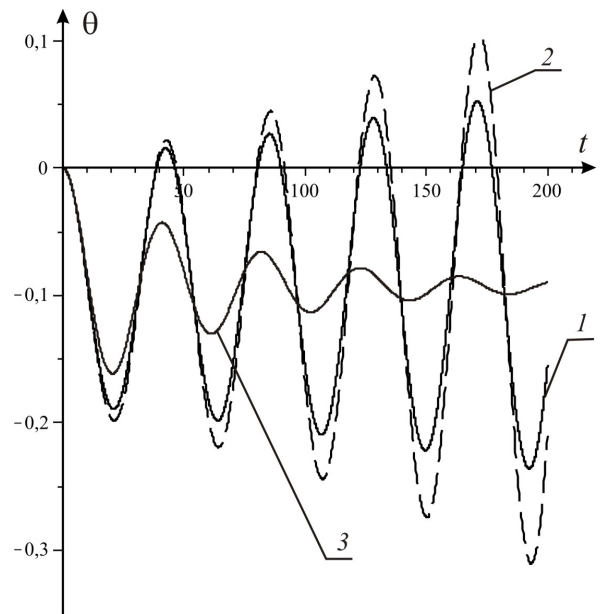


Рис. 3.14. NASA 0012,  $\rho_0 = 1000$ ,  $l = 1$ .

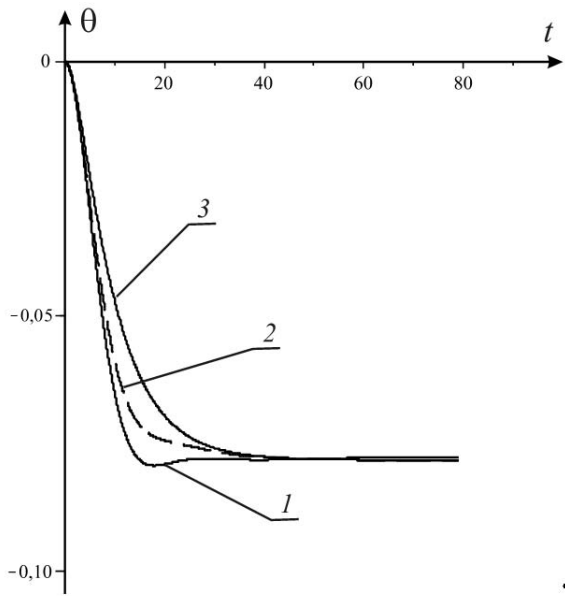


Рис. 3.15. NASA 0009,  $\rho_0 = 100$ ,  $l = 10$ .

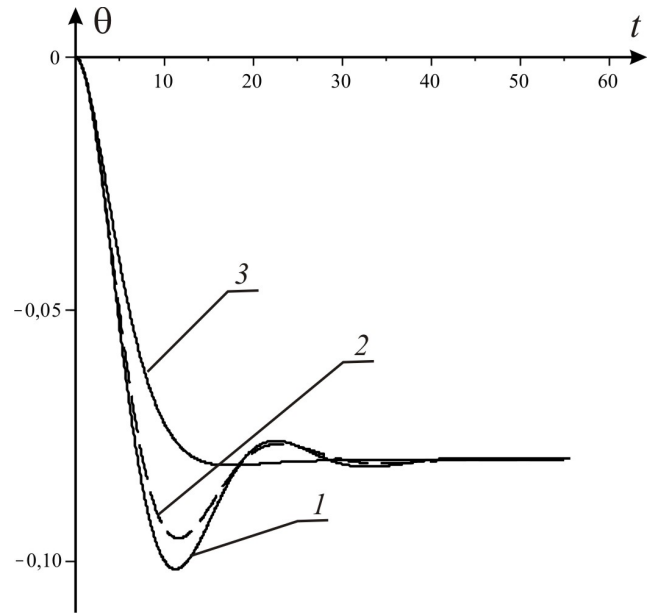


Рис. 3.16. NASA 0009,  $\rho_0 = 100$ ,  $l = 5$ .

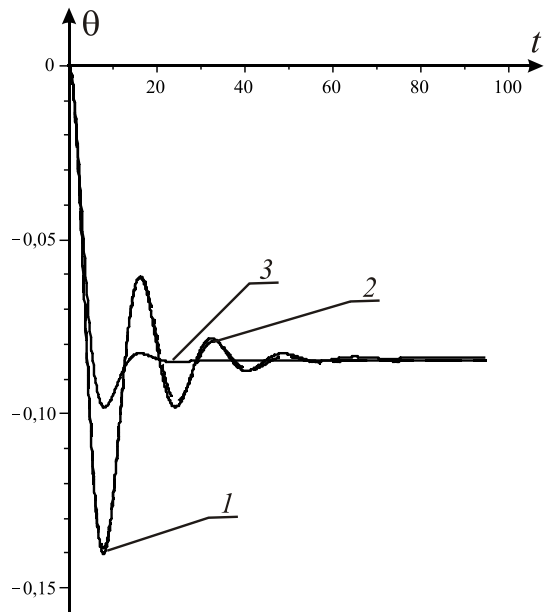


Рис. 3.17. NASA 0009,  $\rho_0 = 100$ ,  $l = 2$ .

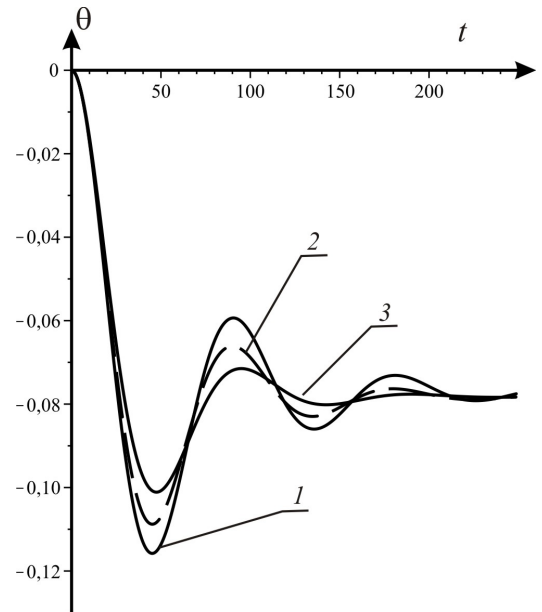


Рис. 3.18. NASA 0009,  $\rho_0 = 1000$ ,  $l = 10$ .

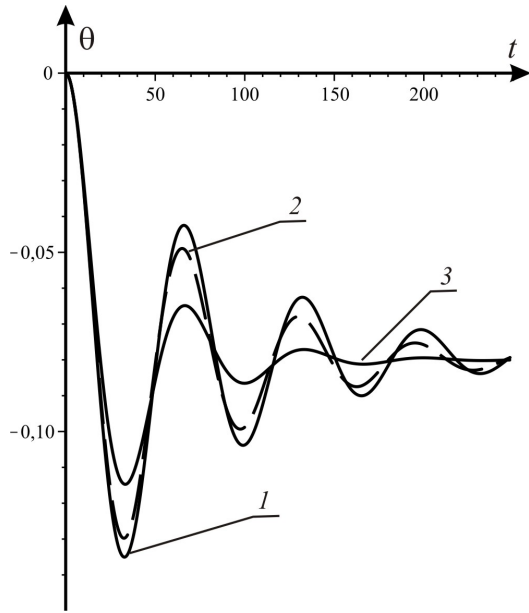


Рис. 3.19. NASA 0009,  $\rho_0 = 1000$ ,  $l = 5$ .

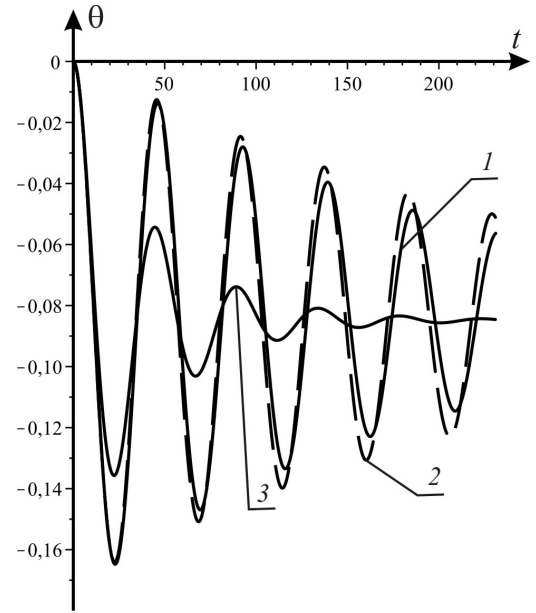


Рис. 3.20. NASA 0009,  $\rho_0 = 1000$ ,  $l = 2$ .

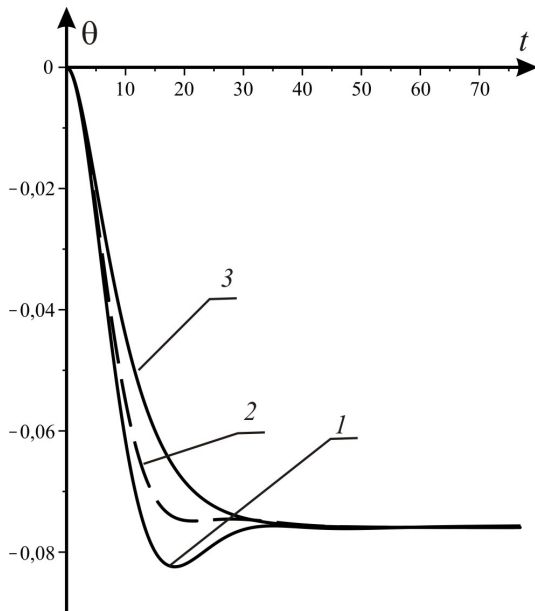


Рис. 3.21. NASA 0012,  $\rho_0 = 100$ ,  $l = 10$ .

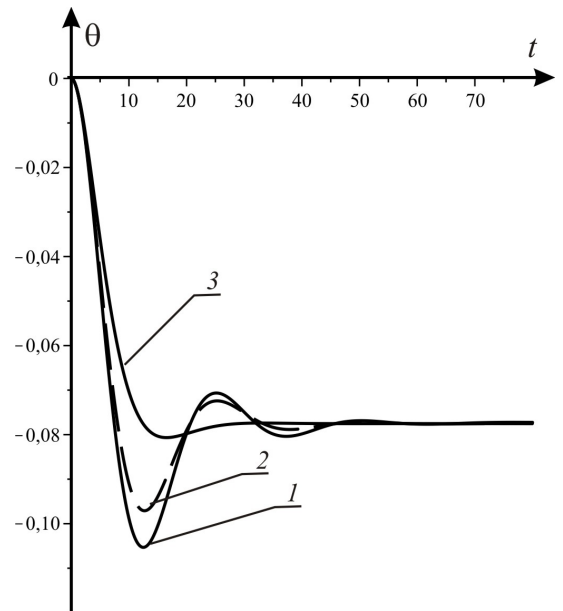


Рис. 3.22. NASA 0012,  $\rho_0 = 100$ ,  $l = 5$ .



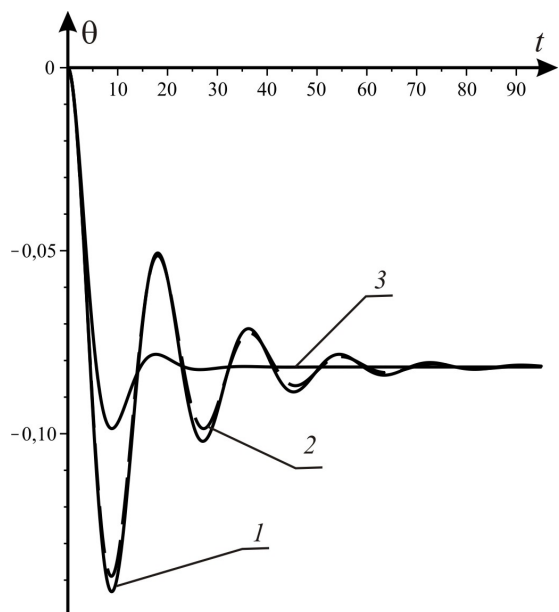


Рис. 3.23. NASA 0012,  $\rho_0 = 100$ ,  $l = 2$ .

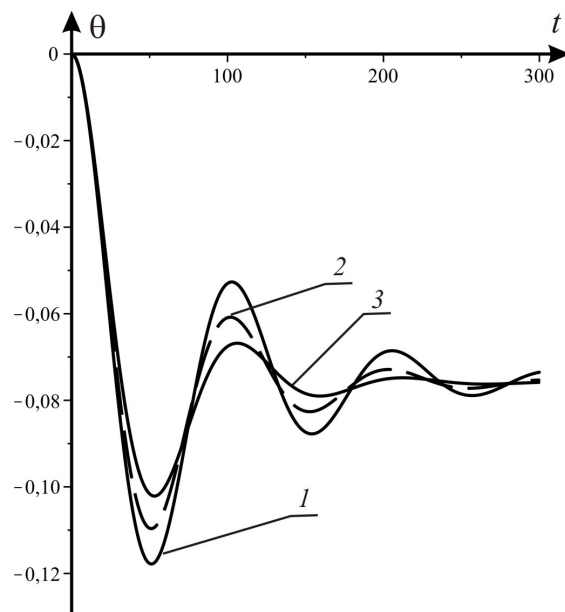


Рис. 3.24. NASA 0012,  $\rho_0 = 1000$ ,  $l = 10$ .

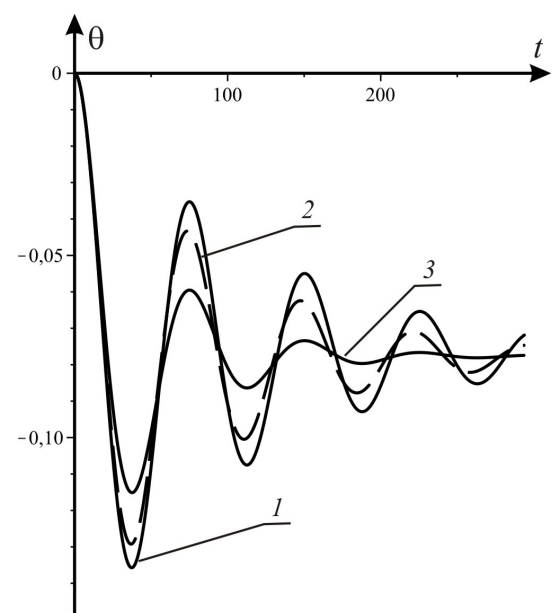


Рис. 3.25. NASA 0012,  $\rho_0 = 1000$ ,  $l = 5$ .

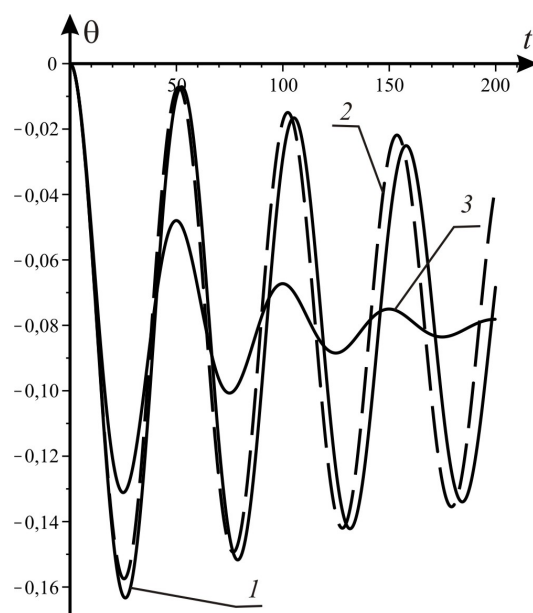


Рис. 3.26. NASA 0012,  $\rho_0 = 1000$ ,  $l = 2$ .

На всех рисунках кривые с индексом 1 изображают зависимость угла  $\theta$  поворота маятника от времени по ММДВ, кривые с индексом 2 — результаты расчётов по модели присоединённого осциллятора, а кривые с индексом 3 — зависимость, полученную в рамках квазистатического подхода.

Видно, что результаты расчётов по ММДВ и по модели присоединённого осциллятора находятся в качественном согласии. Более того, в достаточно широком диапазоне значений параметров имеет место количественное согласие результатов. В то же время данные, полученные с помощью квазистатического подхода, заметно отличаются. Это может свидетельствовать о том, что для описания данного класса движений квазистатический подход в его традиционной форме неприменим.

Отметим также, что результаты моделирования методом ММДВ качественно подтверждают результаты, полученные с помощью модели присоединенного осциллятора: при увеличении момента инерции для достаточно малых положительных  $l$  устойчивость положения равновесия теряется (см. рис. 3.11-3.14). Наличие постоянной силы, очевидно, приводит лишь к смещению положения равновесия, но не влияет на характер устойчивости.

Таким образом, проведенное сопоставление результатов численного гидродинамического эксперимента с помощью ММДВ в задаче об аэродинамическом маятнике с результатами, полученными с помощью феноменологических моделей, показывает, что область применимости модели присоединённого осциллятора заметно шире, чем область применимости квазистатического подхода.

Заметим в заключение, что в случае, когда положение равновесия оказывается неустойчивым, в системе возникают колебания, и угол атаки выходит из области, в которой можно применять модель присоединенного осциллятора. Однако если в точке подвеса маятника будет установлена пружина, то могут возникнуть предельные циклы, лежащие в области малых углов атаки. Исследование этой ситуации проведено в работе [61]. В частности, показано, что в широком диапазоне значений параметров частота колебаний практически не зависит от коэффициента жесткости пружины крепления и от момента инер-

ции маятника, а амплитуда колебаний растет с увеличением момента инерции и убывает с ростом коэффициента жесткости.

## Выводы

В этой главе модель присоединенного осциллятора использована для описания аэродинамических сил, действующих на тело типа тонкого крыла, которое неравномерно движется в потоке среды. При этом предполагается, что нормальная аэродинамическая сила зависит от эффективного угла атаки линейно.

При равномерном торможении тонкого крыла, поступательно движущегося поперек потока среды, нормальная сила, действующая на крыло, не меняет направление, если ускорение крыла меньше определенного критического значения, и меняет направление два раза (один на фазе торможения, второй — на фазе последствия), если ускорение превышает это критическое значение. При этом на некотором интервале времени в ходе фазы торможения указанная сила препятствует торможению.

Для однозвенного аэродинамического маятника существует диапазон значений длины державки, в котором положение равновесия «по потоку» является асимптотически устойчивым, если момент инерции маятника относительно точки подвеса меньше определенного критического значения, и неустойчивым, если момент инерции больше этого значения.

## Глава 4

# Особенности динамики малых ветроэнергетических установок различных типов

Известно, что при определенных условиях твердое тело под воздействием потока сопротивляющейся среды совершает установившееся движение — вращательное или колебательное. В ряде случаев это связано с нелинейностью аэродинамического воздействия.

Как было отмечено во введении, такие движения можно использовать для преобразования энергии потока в полезные формы энергии (например, электричество). В этой главе рассматриваются различные электромеханические системы, представляющие собой существующие или перспективные малые ветроэнергетические установки (или их рабочие элементы), и обсуждаются особенности их поведения.

Поскольку мгновенный угол атаки на рабочих режимах и в рамках переходных процессов может принимать большие значения, для описания аэродинамических сил мы будем использовать квазистатический подход.

### 4.1. Малая горизонтально-осевая автономная ветроэнергетическая установка.

Самым распространенным типом ветроэнергетических установок (как промышленных, так и малогабаритных) являются установки с рабочим элементом, представляющим собой пропеллер, ось которого практически горизонтальна. Малые установки зачастую подключаются к потребителям (будь то аккумуля-

тор, активное сопротивление и т.п.) напрямую, поэтому электрическая цепь и ветротурбина оказывают непосредственное влияние друг на друга. В этой связи представляется необходимым проанализировать поведение замкнутой системы, включающей в себя ветроэнергетическую установку вместе с подключенной к ней нагрузкой<sup>1</sup>.

#### 4.1.1. Постановка задачи и уравнения движения

Рассмотрим механическую систему, состоящую из ветровой турбины и электрогенератора (рис. 4.1). К генератору подключена электрическая цепь, содержащая активное сопротивление. Предположим, что ветротурбина и якорь электрогенератора малой ВЭС образуют единое твердое тело  $T$ , которое может вращаться вокруг неподвижной оси в электромагнитном поле, создаваемом статором генератора. Определим положение тела  $T$  с помощью его угла поворота  $\Psi$  (эта координата, очевидно, псевдоциклическая [49]). Обозначим угловую скорость тела  $\omega = \dot{\Psi}$ . Тогда уравнение вращательного движения тела  $G$  имеет вид:

$$J\dot{\omega} = M - M_{el} \quad (4.1)$$

Здесь  $J$  — момент инерции тела  $G$ ;  $M$  — момент аэродинамических сил;  $M_{el}$  — момент, создаваемый на оси якоря электромагнитными силами.

Описание динамики тока в цепи зависит от типа генератора и электрической схемы. Ограничимся простейшим случаем: генератор постоянного тока с независимым возбуждением (постоянным), внешняя нагрузка — активное сопротивление.

---

<sup>1</sup> При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [20, 22, 23, 24, 166, 53, 57, 176]

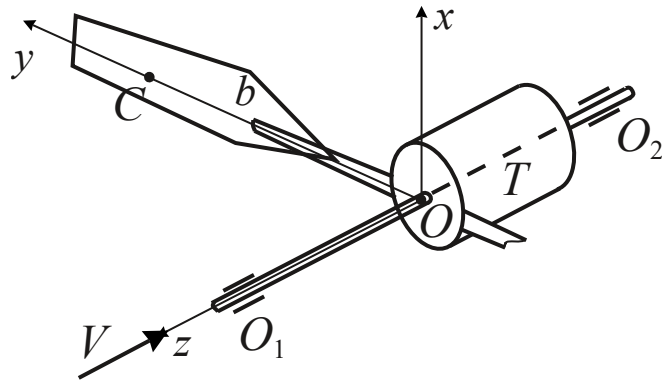


Рис. 4.1. Схема ветротурбины

Тогда уравнение изменения тока представляется в виде:

$$L\dot{I} = \mathcal{E} - (R + r)I \quad (4.2)$$

где  $I$  — сила тока в обмотке якоря,  $L$  — индуктивность якоря,  $r$  — внутреннее сопротивление якоря,  $R$  — внешнее сопротивление,  $\mathcal{E}$  — ЭДС, создаваемая генератором.

Будем считать, что поток имеет постоянную скорость  $V$  и оказывает воздействие только на лопасти. Перейдем к описанию аэродинамического воздействия на отдельную лопасть. Как правило, форма основной части лопасти достаточно близка к тонкой плоской пластине, вытянутой вдоль радиального направления (связанная с телом ось  $Oy$  на рис. 4.1). Поэтому заменим лопасть некоторой эквивалентной пластиной, повернутой вокруг оси  $Oy$  на установочный угол  $\varphi$ . Нулевое значение этого угла соответствует такому положению лопасти, при котором ветротурбина не начинает раскручиваться под действием ветра (очевидно, такое положение существует). Предположим, что результирующая аэродинамическая сила приложена в некоторой точке  $C$  пластины, лежащей на оси  $Oy$  на расстоянии  $b_c$  от оси вращения. Правомерность использования подобной схемы в рамках квазистатического подхода была экспериментально

подтверждена в [30]. В принципе, для получения более детального описания потока можно использовать методы прикладной аэродинамики, но это часто требует значительных ресурсов и больших затрат времени на проведение расчетов.

При введенных предположениях момент аэродинамических сил может быть представлен в следующем виде ([30, 22]).

$$M = \frac{1}{2} \rho S b_c V_a^2 (C_y(\alpha) \cos(\varphi - \alpha) - C_x(\alpha) \sin(\varphi - \alpha)) \quad (4.3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность воздуха,  $S$  — площадь лопастей,  $C_x(\alpha)$  и  $C_y(\alpha)$  — коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы отдельной лопасти,  $b_c$  — расстояние от эффективного центра давления лопастей до оси вращения,  $\varphi$  — эффективный установочный угол лопастей. Мгновенный угол атаки  $\alpha$  и воздушная скорость  $V_a$  эффективного центра давления определяются следующими соотношениями:

$$\alpha = \varphi - \arctg \frac{b_c \omega}{V}, \quad V_a^2 = (b_c \omega)^2 + V^2 \quad (4.4)$$

В литературе аэродинамический момент, действующий на ветротурбину, представляется также в следующем виде:

$$M = \frac{1}{2} \rho S b V^2 C_m, \quad (4.5)$$

где  $b$  — радиус лопасти турбины,  $C_m$  — безразмерный коэффициент момента, который с учетом 4.4 зависит от установочного угла и мгновенной угловой скорости. Надо заметить, что в работах по ветроэнергетике часто используется безразмерная угловая скорость  $\Omega$ , которую называют быстроходностью и под которой понимают отношение скорости конца лопасти к скорости ветра:  $\Omega = b\omega/V$ .

Таким образом, из (4.1), (4.2) и (4.3) уравнения движения системы имеют

следующий вид:

$$J\dot{\omega} = \frac{1}{2}\rho S b_c ((b_c \omega)^2 + V^2) (C_y(\alpha) \cos(\varphi - \alpha) - C_x(\alpha) \sin(\varphi - \alpha)) - M_{el} \quad (4.6)$$

$$L\dot{I} = \mathcal{E} - (R + r)I$$

Для того, чтобы система (4.6) вместе с (4.4) была замкнута, к ней необходимо добавить соотношения, связывающие момент электромагнитных сил и ЭДС с током и угловой скоростью. Такие соотношения будут обсуждены в последующих разделах.

Предложенная модель содержит ряд конструктивных параметров, в частности,  $b$ ,  $\varphi$ ,  $r$ ,  $J$ ,  $L$ . Вообще говоря, для каждого конкретного устройства эти параметры подлежат идентификации в тестовых экспериментах.

Было показано [20, 22], что функция  $M(\omega, \varphi)$  обладает следующим свойством: для каждого  $\varphi$  в области  $\omega > 0$  существует значение  $\omega_m(\varphi)$  угловой скорости, при котором момент достигает максимальной величины  $M_{max}$ .

Необходимо отметить, что при  $\varphi \sim 80^\circ - 90^\circ$  рассматриваемые зависимости обладают характерным свойством: при сравнительно небольших угловых скоростях величина момента существенно меньше  $M_{max}$  и может даже стать отрицательной (т.е. момент может из вращающего превратиться в тормозящий).

#### 4.1.2. Аппроксимация аэродинамического момента.

Аэродинамический момент представляет собой сложную нелинейную функцию (4.3, 4.4) угловой скорости. Многочисленные экспериментальные исследования показывают, что ветротурбина, имеющая лопасти с высоким аэродинамическим качеством, обладает также и высокой быстроходностью, и для ее предпочтительных рабочих режимов справедливо соотношение  $\Omega = \omega b/V \gg 1$ . Данное обстоятельство можно использовать для построения простой расчетной формулы для аэродинамического момента. Проиллюстрируем эту возможность



для случая, когда установочный угол близок к  $\pi/2$ . Положим  $\varphi = \pi/2 - \psi$ ,  $\psi \ll 1$  и, разложив выражение для момента по  $1/\omega$  до членов второго порядка малости, получим

$$M_a = A_2\omega^2 + \psi A_1\omega + A_0 + \psi \frac{B_1}{\omega} + \frac{B_2}{\omega^2}, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2}\rho S b_c^3 \left( -C_{x0} - \frac{1}{2}C''_{x0}\psi^2 \right) + o(\psi^2) \\ A_1 &= \frac{1}{2}\rho S b_c^2 V \left( -C'_{y0} + C''_{x0} + \left[ -\frac{1}{6}C'''_{y0} + \frac{1}{6}C''''_{x0} \right] \psi^2 \right) + o(\psi^2) \\ A_0 &= \frac{1}{2}\rho S b_c V^2 \left( C'_{y0} - \frac{1}{2}C_{x0} - \frac{1}{2}C''_{x0} + \left[ \frac{1}{2}C'''_{y0} - \frac{1}{4}C''_{x0} - \frac{1}{4}C''''_{x0} \right] \psi^2 \right) + o(\psi^2) \\ B_1 &= \frac{1}{2}\rho S V^3 \left( -\frac{1}{2}C'_{y0} - \frac{1}{2}C'''_{y0} + \frac{1}{6}C''_{x0} + \frac{1}{6}C''''_{x0} \right) + O(\psi^2) \\ B_2 &= \frac{1}{2}\rho S b_c^{-1} V^4 \left( \frac{1}{6}C'_{y0} + \frac{1}{6}C'''_{y0} + \frac{1}{8}C_{x0} + \frac{1}{12}C''_{x0} - \frac{1}{24}C''''_{x0} \right) + O(\psi^2) \end{aligned}$$

Нулевой индекс означает, что значения функций  $C_x(\alpha)$ ,  $C_y(\alpha)$  и их производных взяты при  $\alpha = 0$ . Здесь использован тот факт, что для симметричных профилей коэффициент  $C_x$  — четная, а  $C_y$  — нечетная функция угла атаки  $\alpha$ .

Отметим также, что для профилей с относительно высоким качеством имеют место следующие соотношения:

$$|C'''_{y0}| \gg 1 \gg C_{x0}, \quad |C'''_{y0}| \gg C''_{x0} \gg C_{x0} > 0, \quad (4.8)$$

$$|C'''_{y0}| \gg C''''_{x0} > 0, \quad |C'''_{y0}| \gg C'_{y0} \gg C_{x0}, \quad C'''_{y0} < 0 \quad (4.9)$$

Отсюда при достаточно малых  $\psi$  получаем

$$A_2 < 0, \quad B_2 < 0, \quad B_1 > 0$$

Наличие в равенстве (4.7) ненулевых коэффициентов  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  отличает эту формулу от обычно используемых в ветроэнергетике (например, [68]).

Используя аппроксимационную формулу, можно оценить значения  $\omega_m$  и  $\omega_0$  угловой скорости, при которых момент, соответственно, достигает максимума и обращается в нуль:

$$\omega_m = \bar{\omega}_m + \psi \frac{B_1 \bar{\omega}_m^2 - A_1 \bar{\omega}_m^5}{4B_2} + o(\psi), \quad \bar{\omega}_m = \left( \frac{B_2}{A_2} \right)^{1/4} \quad (4.10)$$

$$\omega_0 = \bar{\omega}_0 - \psi \frac{A_1 \bar{\omega}_0^3 + B_1 \bar{\omega}_0^2}{2A_2 \bar{\omega}_0^4 + A_1 \bar{\omega}_0^3 - 2B_2} + o(\psi), \quad \bar{\omega}_0 = \sqrt{\frac{A_0 + \sqrt{A_0^2 - 4A_2 B_2}}{2A_2}}$$

#### 4.1.3. Стационарные движения в случае линейного электромеханического взаимодействия.

Для описания электромеханического взаимодействия воспользуемся подходом [18]. Вначале предположим, что это взаимодействие является линейным, т.е.  $M_{el} = \kappa I$  и  $\mathcal{E} = \kappa \omega$ , где  $\kappa$  — коэффициент электромеханического взаимодействия, который можно считать постоянным.

В этом случае уравнения стационарных движений рассматриваемой динамической системы имеют вид:

$$I = M(\omega, \varphi)/\kappa \quad (4.11)$$

$$I = \kappa \omega / (R + r) \quad (4.12)$$

Из 4.12 следует, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{\omega}{I} = \frac{R}{\kappa} + \frac{r}{\kappa} \quad (4.13)$$

На рис. 4.2 точками изображена зависимость отношения  $\omega/I$  от  $R$ , полученная в результате экспериментов с генератором, изготовленным в Национальном университете Cheng Kung (Тайвань). В этих экспериментах вал генератора приводился во вращение с помощью двигателя, и при различных значениях

нагрузочного сопротивления измерялся ток в цепи. Линией показаны результаты расчетов, проведенных в рамках линейной модели электромеханического взаимодействия. Видно, что имеет место достаточно хорошее совпадение.

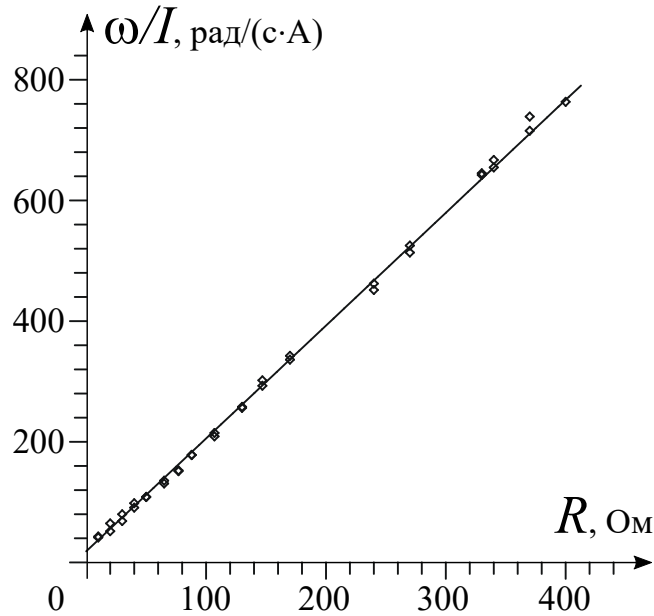


Рис. 4.2. Характеристика линейного генератора: точки — эксперимент, линия — расчет в рамках линейной модели электромеханического взаимодействия.

Обсудим теперь характерные особенности стационарных режимов, взяв в качестве примера аэродинамические характеристики  $C_x(\alpha)$ ,  $C_y(\alpha)$  стандартного профиля НАСА 0012, определенные в экспериментах [91], и выбрав следующие значения параметров системы:

$$b = 0.3 \text{ м}, \quad S = 0.05 \text{ м}^2, \quad r = 10 \text{ Ом}, \quad \psi = 0.1, \quad \kappa = 0.5 \text{ В} \cdot \text{с}, \quad V = 5 \text{ м/с}$$

На рис. 4.3 на фазовой плоскости ( $\Omega = b\omega/V$ ,  $I$ ) системы изображена кривая (4.11) и прямая (4.12) (для трех значений внешнего сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ ,  $R_1 < R_2 < R_3$ ). Пунктирной линией изображена аппроксимационная зависимость (4.7). При этом

$$A_2 \approx -0.007, \quad A_1 \approx 0.39, \quad A_0 \approx -0.13, \quad B_1 \approx 42.9, \quad B_2 \approx -10.1$$

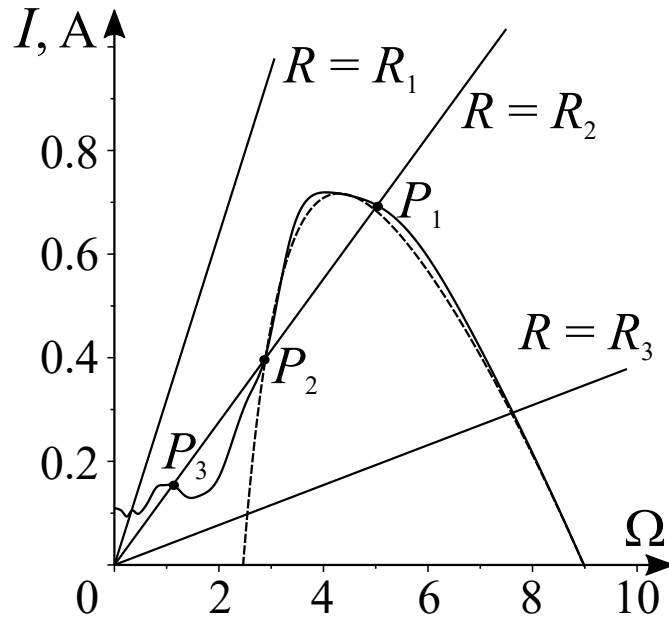


Рис. 4.3. Фазовая плоскость

Видно, что аппроксимационная кривая достаточно хорошо описывает функцию момента в области больших значений безразмерной угловой скорости  $\Omega$ .

Точки пересечения кривой (4.11) и прямой (4.12) представляют собой неподвижные точки системы при соответствующем значении  $R$ . Видно, что существует интервал значений  $R$ , в котором система имеет несколько неподвижных точек, причем этот интервал может быть достаточно широким.

Рассмотрим вначале диапазон относительно больших значений угловой скорости (наиболее предпочтительных в практическом смысле), что позволит использовать аппроксимационную формулу (4.7) для аэродинамического момента. В этом диапазоне существует не более двух неподвижных точек (рис. 4.3). Обозначим ту из них, которая соответствует большей угловой скорости, через  $P_1(\omega_1, I_1)$ , а другую — через  $P_2(\omega_2, I_2)$ .

Проследим эволюцию и бифуркации неподвижных точек  $P_1$  и  $P_2$  при изменении параметров  $R$  и  $L$ .

При подключении дополнительного потребителя электроэнергии (как правило, параллельно) внешнее сопротивление  $R$  уменьшается вплоть до нуля (при коротком замыкании цепи). Соответственно, если внутреннее сопротивление  $r$  генератора достаточно мало, то существует значение  $R_*$  внешнего сопротивления, при котором неподвижная точка  $P_1$  сливается с точкой  $P_2$ . Имеем

$$R_* = \frac{\kappa^2 \omega_*^3}{2A_2 \omega_*^4 - 2B_2} - r > 0, \quad \omega_* = \sqrt{\frac{A_0 - \sqrt{A_0^2 + 12A_2 B_2}}{2A_2}} + O(\psi) \quad (4.14)$$

Следовательно, при  $R < R_*$  неподвижные точки  $P_1$  и  $P_2$  не существуют, и «предпочтительный» рабочий режим отсутствует.

Характеристический полином системы 4.6, линеаризованной в окрестности неподвижной точки  $(\omega_s, I_s)$ , имеет вид:

$$\lambda^2 + \left( \frac{R+r}{L} - \frac{M'_\omega(\omega_s, \varphi)}{J} \right) \lambda + \frac{1}{LJ} \left( \frac{\kappa^2}{(R+r)} - M'_\omega \right) (\omega_s, \varphi) = 0 \quad (4.15)$$

Следовательно, достаточные условия асимптотической устойчивости этой неподвижной точки имеют вид

$$\frac{R+r}{L} - \frac{M'_\omega(\omega_s, \varphi)}{J} > 0, \quad \frac{\kappa^2}{(R+r)} - M'_\omega(\omega_s, \varphi) > 0 \quad (4.16)$$

Из рис. 4.3 видно, что в точке  $P_2$  производная  $dI/d\omega$  для кривой 4.11 больше, чем тангенс угла наклона прямой 4.12, поэтому второе из условий 4.16 не выполняется. Соответственно, данная точка, пока она существует, является седлом.

Рассмотрим теперь точку  $P_1$ .

В случае, если  $L \leq L_* = J(R_* + r)^2 \kappa^{-2}$ , точка  $P_1$  асимптотически устойчива во всем диапазоне значений внешнего сопротивления  $R > R_*$ . Если же  $L > L_*$ , то характер устойчивости зависит от соотношений между параметрами.

Определим значение  $R_m$  сопротивления, при котором неподвижная точка

$P_1$  отвечает максимуму аэродинамического момента ( $\omega_1 = \omega_m$ ) (рис. 4.3):

$$R_m = \kappa^2 \omega_m (A_2 \omega_m^2 + \psi A_1 \omega_m + A_0 + \psi B_1 \omega_m^{-1} + B_2 \omega_m^{-2})^{-1} - r > R_*$$

Если  $L > L_*$  и  $R_* < R \leq R_m$ , то условия устойчивости (4.16) для точки  $P_1$  могут нарушаться. В частности, если

$$L > L_1 = J(R + r) (\psi A_1 + 2A_2 \omega - 2B_2 \omega^{-3} - \psi B_1 \omega^{-2})^{-1}$$

то нарушается первое из указанных условий. При прохождении значения  $L_1$  имеет место бифуркация типа Андронова–Хопфа. Характер этой бифуркации определяется [3] знаком следующего выражения:

$$Q = 2 (\psi A_1 + 2A_2 \omega - 2B_2 \omega^{-3} - \psi B_1 \omega^{-2}) (A_2 + 3B_2 \omega^{-4} + \psi B_1 \omega^{-3})^2 - 3J \left( (\psi A_1 + 2A_2 \omega - 2B_2 \omega^{-3} - \psi B_1 \omega^{-2})^2 J^{-1} - \kappa^2 L^{-1} \right) (-4B_2 \omega^{-5} - \psi B_1 \omega^{-4})$$

Отметим, что в рассматриваемом диапазоне значений внешнего сопротивления

$$M'_\omega = \psi A_1 + 2A_2 \omega - 2B_2 \omega^{-3} - \psi B_1 \omega^{-2} > 0$$

и второе условие (4.16) для точки  $P_1$  заведомо выполнено. Принимая во внимание соотношения (4.8), можно показать, что  $Q > 0$ . Это означает, что при увеличении  $L$  имеет место слияние неустойчивого цикла с устойчивым фокусом, сопровождающееся потерей последним устойчивости (жесткая потеря устойчивости).

Численный анализ показывает, что указанный неустойчивый цикл рождается из петли сепаратрисы седла  $P_2$  (см. ниже).

В диапазоне  $R_m < R < \infty$  неподвижная точка  $P_1$  асимптотически устойчива для любых значений индуктивности. Однако характер затухания в окрестности этой неподвижной точки зависит от  $L$ : в области достаточно малых и

достаточно больших значений  $L$  данная неподвижная точка — узел, а в области промежуточных значений  $L$  — фокус.

В случае разомкнутой цепи ( $R = \infty$ ) точка  $P_1$  асимптотически устойчива при любых  $L$  и отвечает вращению турбины с угловой скоростью  $\omega_0$ . Ток при этом, разумеется, равен нулю.

Представляет интерес также рассмотреть влияние скорости  $V$  набегающего потока на стационарные режимы. Из равенства (4.7) следует, что  $M \sim V^2$ . Кроме того,  $\omega_m = V\Omega_m/b$ ,  $\omega_* = V\Omega_*/b$ , где  $\Omega_*$  и  $\Omega_m$  не зависят от  $V$ . «Электрические» параметры ( $r$ ,  $\kappa$ ,  $R$ ) также не зависят от скорости потока. Поэтому для любого значения внешнего сопротивления существует минимальное значение скорости ветра

$$V_* = \frac{\kappa^2 \Omega_*^3}{(R + r)(2A_2 \Omega_*^4 - 2B)}, \quad (4.17)$$

ниже которой неподвижные точки  $P_1$  и  $P_2$  отсутствуют. Здесь  $B = B_2 V^{-4}$  — величина, не зависящая от  $V$ .

На рис. 4.4 приведена бифуркационная диаграмма стационарных движений в зависимости от внешнего сопротивления. Сплошные линии соответствуют устойчивым стационарным движениям, пунктирная — неустойчивым.

Если значение сопротивления велико ( $R > R_u$ ), то система находится на верхней (устойчивой) ветви. Если  $R$ , уменьшаясь, становится меньше  $R_l$ , то «верхний» (высокоскоростной) режим исчезает, и устойчивым является только режим с невысокой угловой скоростью. Для того, чтобы вернуться на «верхний режим», необходимо вновь сделать сопротивление достаточно большим ( $R > R_u$ ). Таким образом, при изменении внешнего сопротивления в системе имеет место гистерезис. Это явление было описано в [20]. Оно, по-видимому, может мешать нормальному функционированию установки.

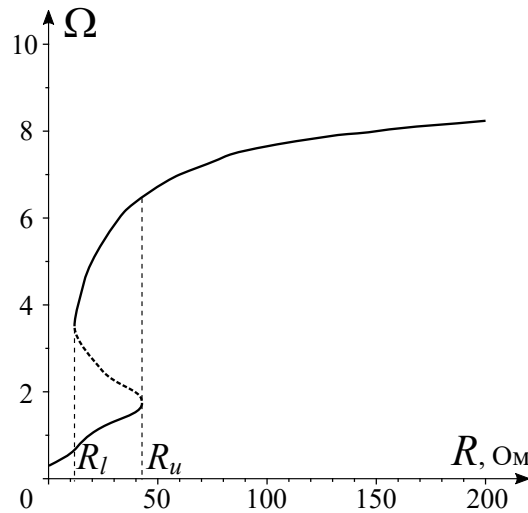


Рис. 4.4. Бифуркационная диаграмма стационарных режимов при изменении  $R$

#### 4.1.4. Переходные режимы и циклы в случае линейного электромеханического взаимодействия

Подключение или отключение очередного потребителя (прибора) к малой ВЭС сопровождается скачкообразным изменением внешнего сопротивления. Поэтому необходимо описать возникающие при этом процессы перехода на новый стационарный режим. Это тем более интересно, что при наличии нескольких устойчивых стационарных движений каждое из них имеет свою область притяжения. В качестве примера рассмотрим случай, когда значения параметров системы таковы, что существуют три неподвижных точки  $P_1(\Omega_1, I_1)$ ,  $P_2(\Omega_2, I_2)$ ,  $P_3(\Omega_3, I_3)$ , ( $\Omega_1 > \Omega_2 > \Omega_3$ ) (рис. 4.5), причем для всех этих точек выполнено условие  $M'_\omega > 0$ . Чтобы сделать рисунки более наглядными, для расчетов взята скорость потока  $V = 10$  м/с и момент инерции  $J = 0.01$  кгм<sup>2</sup>.

Реальные генераторы обладают достаточно малой индуктивностью ( $L \rightarrow 0$ ). Соответствующий фазовый портрет качественно изображен на рис. 4.5 а. При этом режимы  $P_1$  и  $P_3$  асимптотически устойчивы. Во втором уравнении системы (4.6) имеется малый параметр при старшей производной, и можно про-



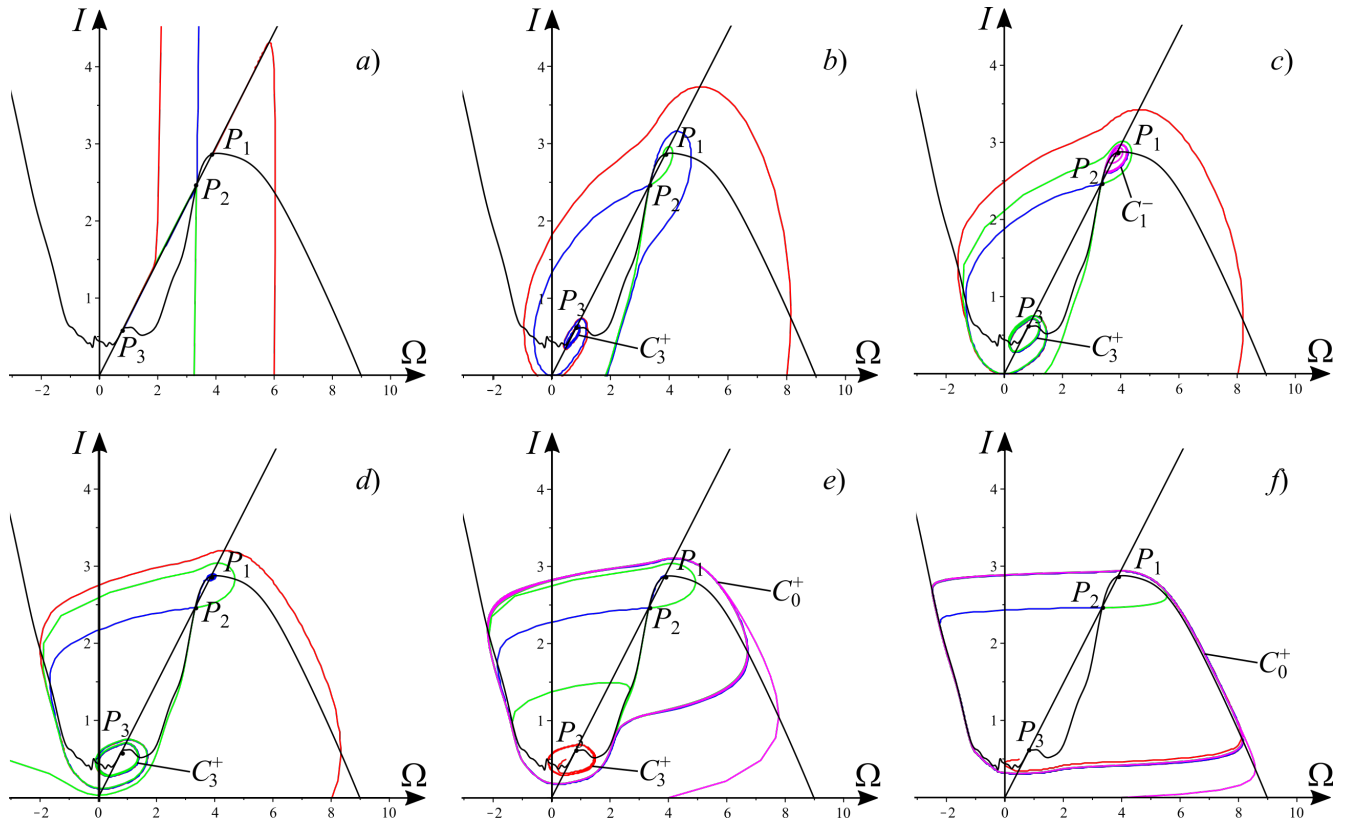


Рис. 4.5. Эволюция фазовой плоскости системы при изменении параметра  $L$

вести процедуру разделения движений по Тихонову. Быстрые движения соответствуют быстрому изменению тока при малом изменении  $\omega$ . Поэтому фазовые траектории быстрых движений изображаются почти вертикальными прямыми. Медленные движения осуществляются вдоль прямой (4.12). Направления движения изображающей точки указаны стрелками.

Две входящих в седловую точку  $P_2$  сепаратрисы делят фазовую плоскость на две части, соответствующие областям притяжения устойчивых режимов. Отметим, что начало координат оказывается вне области притяжения предпочтительного рабочего режима  $P_1$ , то есть, при включении генератора в ситуации, когда безразмерная угловая скорость турбины мала ( $\Omega(t_0) \approx 0$ ,  $I(t_0) = 0$ ), установка выйдет на нежелательный рабочий режим. Если же установка функ-

ционировала в рабочем режиме с безразмерной угловой скоростью в диапазоне  $\Omega > \Omega_2$ , то при мгновенном уменьшении внешнего сопротивления (что соответствует подключению дополнительного потребителя) до величины  $R_0$  установка выйдет на предпочтительный режим  $P_1$ . Правда, переходный процесс иногда сопровождается «забросом» тока, то есть резким увеличением силы тока с последующим ее уменьшением до рабочего значения. Этот заброс оказывается тем больше, чем ближе исходная угловая скорость к угловой скорости  $\omega_*$  «холостого хода».

Уменьшить этот заброс можно, в частности, за счет увеличения индуктивности. Поэтому анализ поведения системы при больших значениях индуктивности представляет не только чисто теоретический, но и практический интерес.

Проследим за эволюцией устойчивости неподвижных точек и перестройкой структуры фазового портрета при увеличении индуктивности, используя численные расчеты на базе значений параметров системы, определенных в результате упомянутых экспериментов.

По мере увеличения  $L$  одна из сепаратрис, входящих в седло  $P_2$ , «изгибается», приближаясь к другой входящей сепаратрисе (Рис. 4.5 b). В итоге этой эволюции образуется петля сепаратрисы седла (при  $L \approx 51.1$ ). Нетрудно показать, что в выбранных значениях параметров седловая величина для точки  $P_2$  больше нуля, поэтому в результате данной бифуркации рождается отталкивающий предельный цикл  $C_1^-$ . Он охватывает устойчивую неподвижную точку  $P_1$  (Рис. 4.5 c). При дальнейшем увеличении  $L$  областью притяжения режима  $P_1$  оказывается только внутренность этого предельного цикла.

Кроме того, при  $L \approx 40.7$  происходит бифуркация Андронова-Хопфа в точке  $P_3$ , отвечающей низкоскоростному режиму. При этом точка становится неустойчивой, и рождается притягивающий предельный цикл  $C_3^+$  (Рис. 4.5 b).

При дальнейшем увеличении  $L$  отталкивающий цикл  $C_1^-$ , родившийся из петли сепаратрисы, стягивается к точке  $P_1$ , и при  $L \approx 115.4$  происходит бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой неподвижная точка  $P_1$  сливается с этим циклом и превращается в неустойчивый фокус. Картина фазовой плоскости, возникающая после этой бифуркации, представлена на Рис. 4.5 d.

При последующем возрастании индуктивности происходит рождение двойного цикла. Появляющиеся при этом притягивающий  $C_0^+$  цикл и отталкивающий циклы охватывают все три неподвижных точки вместе с притягивающим циклом  $C_3^+$ . По мере роста  $L$  отталкивающий цикл стягивается и в конце концов исчезает в результате образования петли сепаратрисы седла. Возникающая при этом картина представлена на рис. 4.5 e.

При дальнейшем росте  $L$  все неподвижные точки теряют устойчивость, «малые» циклы исчезают в результате серии бифуркаций, и единственным аттрактором оказывается «большой» притягивающий предельный цикл  $C_0^+$  (рис. 4.5 f). Любопытно, что движение изображающей точки вдоль этой периодической траектории сопровождается изменением знака угловой скорости.

Рассмотрим, наконец, предельный случай  $L \rightarrow \infty$  (рис. 4.5 g). При этом все неподвижные точки неустойчивы. В этом случае второе уравнение системы (4.6) содержит большой параметр при старшей производной. Следовательно, переменная  $I$  является медленной, а  $\omega$  — быстрой. Фазовые траектории быстрых движений изображаются почти горизонтальными прямыми. Фазовые траектории медленных движений представляют собой фрагменты кривой (4.11).

#### 4.1.5. Оптимизация.

Одной из выходных характеристик ветровой установки является момент на валу, поэтому для определенного класса задач может представлять интерес

величина  $M_{max}$ . Пользуясь аппроксимационной формулой (4.7), получим (полагая для простоты  $\psi = 0$ )

$$M_{max} = A_0 - 2\sqrt{A_2 B_2} \quad (4.18)$$

В то же время, в некоторых ситуациях (например, при использовании ветровой установки в качестве привода к насосу и т.п.) важна механическая мощность  $N$ , «отбираемая» ветротурбиной у потока:  $N = \omega M$ . В литературе, посвященной ветроэнергетическим установкам, обсуждается задача максимизации именно этой величины. Из равенства (4.7) имеем

$$N = A_2 \omega^3 + \psi A_1 \omega^2 + A_0 \omega + \psi B_1 + \frac{B_2}{\omega} \quad (4.19)$$

Мощность  $N$  достигает максимума при угловой скорости  $\omega_n$ . Оценим ее при  $\psi = 0$ :

$$\omega_n = \frac{A_0 + \sqrt{A_0^2 + 12A_2 B_2}}{-6A_2}$$

В принципе, на основе аппроксимационных формул (4.7), (4.10) можно определить, в какую сторону следует поворачивать лопасть, чтобы обеспечить возрастание момента или механической мощности.

Отметим, что главной характеристикой ветроэнергетической установки является вырабатываемая ею электрическая мощность  $E = RI^2$ . Благодаря тому, что описанная ранее [20, 22] замкнутая модель связывает электрические и механические характеристики устройства, стало возможным представить эту величину на рабочем режиме в следующем виде (при учете уравнений (4.11, 4.12)):

$$E = N - \frac{r}{\kappa^2} M^2$$

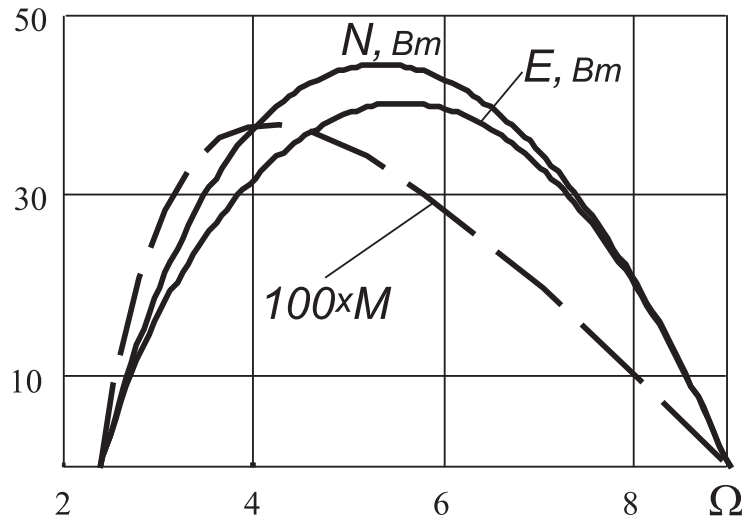


Рис. 4.6. Механическая мощность, электрическая мощность и момент ветротурбины как функции безразмерной угловой скорости

Очевидно, максимумы функций  $N$  и  $E$ , вообще говоря, достигаются при разных значениях  $\omega_n$  и  $\omega_e$  угловой скорости, причем  $\omega_e > \omega_n$  [22].

На рис. 4.6 представлены аппроксимационные зависимости  $N(\Omega)$  и  $E(\Omega)$  при указанных параметрах установки. Для сравнения штриховой кривой изображена зависимость  $M(\Omega)$ , умноженная на масштабный коэффициент.

#### 4.1.6. Учет нелинейности электромеханического взаимодействия

Выше мы предполагали, что электромеханическое взаимодействие является линейным. Однако это предположение справедливо не для всех генераторов. Рассмотрим механическую систему, состоящую из ветровой турбины и коллекторного электрогенератора на постоянных магнитах, причем для этого генератора момент электромагнитных сил нелинейно зависит от тока, а ЭДС нелинейно зависит от угловой скорости:  $M_{el} = \kappa I - \chi I^2$ ,  $\mathcal{E} = \kappa \omega - \chi I \omega$  (здесь  $\kappa$ ,  $\chi$  — коэффициенты электромеханической связи, которые мы будем считать

постоянными). Запишем уравнения движения этой системы:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= M - \kappa I + \chi I^2, \\ L\dot{I} &= \kappa\omega - \chi I\omega - (R + r)I \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость турбины,  $J$  — момент инерции турбины,  $M$  — момент аэродинамических сил,  $I$  — сила тока в обмотке якоря,  $L$  и  $r$  — индуктивность и внутреннее сопротивление якоря,  $R$  — внешнее сопротивление в цепи якоря.

Будем считать, как и ранее (см. (4.5)), что аэродинамический момент можно представить в следующем виде:

$$M = \frac{1}{2}\rho S b V^2 C_m(\omega)$$

Здесь, как и ранее,  $\rho$  — плотность воздуха,  $S$  — площадь, ометаемая лопастями,  $V$  — скорость набегающего потока,  $b$  — радиус турбины,  $C_m$  — безразмерный коэффициент момента аэродинамических сил, который будем считать зависящим только от мгновенной угловой скорости турбины (установочный угол фиксирован). Эта зависимость представляет собой достаточно сложную нелинейную функцию (см., напр., [123]), причем можно выделить следующие особенности рассматриваемой функции, которые характерны для достаточно широкого класса лопастей:

$$\begin{aligned} C_m(0) > 0; \quad \exists! \omega_M > 0 : C_m(\omega_M) = 0; \quad \exists! \omega_m > 0 : C'_m(\omega_m) = 0; \\ C''_m(0) > 0; \quad C''_m(\omega_m) < 0; \quad \exists! \omega_{mm} \in (0, \omega_m) : C''_m(\omega_{mm}) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Предложенная математическая модель устройства отличается от использованной выше наличием нелинейных членов в слагаемых, описывающих электро-механическое взаимодействие. При  $\chi = 0$  уравнения (4.20) совпадают с уравнениями (4.6).

#### 4.1.7. Стационарные решения в случае нелинейного электромеханического взаимодействия

Обратимся к анализу неподвижных точек динамической системы (4.20). Эти точки соответствуют стационарным режимам установки (заметим, что часть из них, а именно, устойчивые, являются рабочими режимами). Они определяются следующей системой уравнений:

$$\chi I^2 - \kappa I + M = 0 \quad (4.22)$$

$$I(R + r + \chi\omega) - \kappa\omega = 0 \quad (4.23)$$

Ясно, что неподвижные точки существуют только в диапазоне угловых скоростей от 0 до  $\omega_M$ , где аэродинамический момент положителен.

Уравнение 4.22, рассматриваемое как уравнение относительно тока, очевидно, имеет две ветви решений:

$$I_{1,2} = \frac{\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 4\chi M}}{2\chi}$$

Очевидно,  $I_1(\omega_M) = 0$ , а  $I_2(\omega_M) = \kappa/\chi$ .

Неподвижные точки системы соответствуют точкам пересечения кривых  $I_1$  и  $I_2$  с кривой, представляющей собой решение уравнения (4.23):

$$I_0 = \frac{\kappa\omega}{R + r + \chi\omega}$$

Отметим, что функция  $I_0$  — монотонно возрастающая.

Пусть  $M(\omega_m) < \kappa^2/4\chi$ . Тогда ветви  $I_{1,2}$  действительны при всех угловых скоростях в диапазоне  $[0, \omega_M]$ , причем в силу (4.21) функция  $I_1$  возрастает на интервале  $\omega \in [0, \omega_m)$  и убывает на интервале  $\omega \in (\omega_m, \omega_M]$ , а  $I_2$  ведет себя противоположным образом.

В этой ситуации для любого значения электрического сопротивления существует, по крайней мере, одна неподвижная точка, лежащая на кривой  $I_1$ . Выясним, существуют ли другие.

Введем в рассмотрение функцию

$$R_*(\omega) = \frac{2\chi\kappa\omega}{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 4\chi M}} - r - \chi\omega,$$

которая представляет собой такое значение внешнего сопротивления, при котором кривые  $I_1$  и  $I_0$  имеют общую точку при заданной угловой скорости. Предположим, далее, что для значения  $\omega_{mm}$  угловой скорости (т.е. в точке перегиба аэродинамического момента) выполнены следующие условия:

$$M'_a(\omega_{mm})\omega_{mm} > 2M(\omega_{mm}) - \kappa \frac{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega_{mm})}}{2\chi} \quad (4.24)$$

$$R_*(\omega_{mm}) \geq 0 \quad (4.25)$$

Тогда из (4.24) следует, что

$$\partial I_1 / \partial \omega|_{\omega=\omega_{mm}} > \partial I_0 / \partial \omega|_{\omega=\omega_{mm}}.$$

Условие (4.25) означает, что существует физически осмысленное значение внешнего сопротивления, при котором значения функций  $I_0$  и  $I_1$  в точке  $\omega_{mm}$  совпадают. Следовательно, в этой точке кривые  $I_0$  и  $I_1$  пересекаются.

Ясно, что в данной ситуации эти кривые заведомо имеют еще одну точку пересечения, лежащую «левее» точки  $\omega_{mm}$ . Кроме того, поскольку при  $\omega = \omega_M$  имеют место соотношения  $I_0(\omega_M) > I_1(\omega_M) = 0$ , то существует и третья точка пересечения (причем расположенная «правее» точки  $\omega_m$ ).

Соответственно, существует такой диапазон значений внешнего сопротивления  $R_1 > R > R_2$ , в котором рассматриваемая динамическая система имеет, по крайней мере, три неподвижных точки, лежащих на кривой  $I_1$ . Отметим,



что если выполнение или невыполнение условия (4.24) связано исключительно с особенностями аэродинамического момента, то условие (4.25) заведомо выполнено, если скорость потока достаточно мала (то есть если величина  $M(\omega_{mm})$  достаточно мала).

Кроме того, если внутреннее сопротивление  $r$  генератора достаточно мало, то существует значение  $R_3$  внешнего сопротивления, при котором для некоторого  $\omega$  касаются кривые  $I_2$  и  $I_0$  (соответствующая угловая скорость больше  $\omega_m$ ). Ясно, что для всех  $0 \leq R < R_3$  в рассматриваемой динамической системе будут существовать, по крайней мере, три неподвижные точки (две на кривой  $I_2$  и одна на кривой  $I_1$ ).

Рассмотрим теперь случай  $M(\omega_m) > \kappa^2/4\chi$ . Отметим, что это неравенство заведомо будет выполнено, если скорость набегающего потока достаточно велика, поскольку аэродинамический момент пропорционален квадрату  $V$ , а коэффициенты электромеханического взаимодействия, стоящие в правой части неравенства, от  $V$  не зависят. В этом случае ветви  $I_1$  и  $I_2$  будут действительными в интервалах  $\omega \in [0, \omega_*] \cup [\omega_{**}, \omega_M]$ , где  $M(\omega_*) = M(\omega_{**}) = \kappa^2/4\chi$ . Соответственно, неподвижные точки также могут существовать только в этих диапазонах угловых скоростей — в отличие от предыдущего случая.

Очевидно, что для любого значения внешнего сопротивления существует неподвижная точка динамической системы, отвечающая угловой скорости, лежащей в диапазоне  $\omega_M > \omega \geq \omega_{**}$ . Кроме того, если  $r$  достаточно мало, то для внешних сопротивлений, меньших некоторого значения  $R_4$ , имеется, по крайней мере, еще две неподвижные точки, которые соответствуют угловым скоростям, принадлежащим диапазону  $(0, \omega_*)$ .

Нетрудно показать, что достаточные условия асимптотической устойчиво-

сти неподвижной точки имеют вид:

$$\frac{R+r}{L} - \frac{M'_a(\omega)}{J} > 0, \quad \frac{\kappa^2}{R+r} - M'_a(\omega) > 0 \quad (4.26)$$

Они, разумеется, совпадают с условиями (4.16). Эти условия заведомо выполнены, если  $M'_\omega(\omega) \leq 0$ , т.е. если  $\omega \geq \omega_m$ .

#### 4.1.8. Влияние параметра $\chi$ на гистерезис

Представляется интересным проанализировать влияние параметра  $\chi$ , характеризующего нелинейность электромеханической связи, на ширину гистерезиса, т.е. на диапазон сопротивлений, в которых он реализуется.

Рассмотрим некоторое  $\chi = \chi_0$ , такое, что  $\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_m) > 0$ . Будем рассматривать  $I_{1,2}$  как функции  $\omega$  и  $\chi$ , а  $I_0$  — как функцию  $\omega$ ,  $\chi$  и  $R$ . Предположим, что гистерезис существует на нижней ветви решений. Его границы определяются такими значениями внешнего сопротивления, при которых кривые  $I_0$  и  $I_1$  касаются при некотором значении угловой скорости. Обозначим эти значения сопротивления через  $R_1$  и  $R_2$ .

Пусть касание имеет место при  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , соответственно ( $\omega_1 > \omega_2$ ), причем

$$M''(\omega)|_{\omega=\omega_1} < 0 \quad \text{и} \quad M''_a(\omega)|_{\omega=\omega_2} > 0.$$

Отсюда следует, что  $R_1 < R_2$ . Тогда:

$$\begin{aligned} I_1(\omega_1, \chi_0) &= I_0(\omega_1, \chi_0, R_1), \quad I_1(\omega_2, \chi_0) = I_0(\omega_2, \chi_0, R_2) \\ \frac{\partial I_1}{\partial \omega} \Big|_{\omega_1, \chi_0} &= \frac{\partial I_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega_1, \chi_0, R_1}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial \omega} \Big|_{\omega_2, \chi_0} = \frac{\partial I_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega_2, \chi_0, R_2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Рассмотрим теперь  $\chi = \chi_0 + d\chi$ . Тогда:

$$I_1(\omega_i + d\omega, \chi_0 + d\chi) = I_0(\omega_i + d\omega, \chi_0 + d\chi, R_i + dR_i), \quad i = 1, 2$$

Отсюда с учетом (4.27) получаем:

$$dR_i = \left( \left( \frac{\partial I_0}{\partial R} \right)^{-1} \left( \frac{\partial I_1}{\partial \chi} - \frac{\partial I_0}{\partial \chi} \right) \right) \Big|_{\omega_i, \chi_0, R_i} d\chi, \quad i = 1, 2$$

Нетрудно показать, что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_0}{\partial \chi} &= -\frac{I_0^2}{\kappa}, & \frac{\partial I_0}{\partial R} &= -\frac{I_0^2}{\kappa\omega}, \\ \frac{\partial I_1}{\partial \chi} &= \frac{I_1^2}{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega)}}, & \frac{\partial I_1}{\partial \omega} &= \frac{M'_a(\omega)}{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega)}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Теперь интервал сопротивлений, при которых реализуется гистерезис, равен  $R_2 - R_1 + \Delta R$ , где  $\Delta R = dR_2 - dR_1$ . Тогда с учетом (4.27) и (4.28) получим следующее:

$$\Delta R = \left( \omega_1 - \omega_2 + \frac{\kappa\omega_1}{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_1)}} - \frac{\kappa\omega_2}{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_2)}} \right) d\chi$$

Рассмотрим функцию

$$f(\omega) = \frac{\kappa\omega}{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega)}.$$

Производную этой функции по  $\omega$  можно представить в следующем виде:

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega)}} + \frac{2\kappa\chi_0\omega}{(\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega))^{3/2}} M'(\omega)$$

Поскольку на интервале  $(\omega_2, \omega_1)$  производная аэродинамического момента по угловой скорости положительна,  $df/d\omega > 0$  на этом промежутке. Соответственно,  $f(\omega_1) > f(\omega_2)$ .

Таким образом, получаем, что  $\Delta R > 0$ , соответственно, при увеличении параметра  $\chi$  диапазон гистерезиса увеличивается.

#### 4.1.9. Влияние параметра $\chi$ на величину тока на стационарном режиме

Посмотрим теперь, как изменяется ток на высокоскоростном стационарном режиме (режиме, на котором  $\omega > \omega_m$ ) при изменении параметра  $\chi$ , если

внешнее сопротивление остается неизменным.

Пусть при некотором значении  $\chi = \chi_0$  и внешнем сопротивлении  $R = R_0$  стационарный режим реализуется при угловой скорости  $\omega = \omega_0$ . Рассмотрим вначале случай, когда неподвижная точка системы лежит на пересечении кривых  $I_0$  и  $I_1$ : Тогда при  $\chi = \chi_0 + d\chi$  ( $d\chi > 0$ ) получим:

$$I_1(\omega_0 + d\omega, \chi_0 + d\chi) = I_0(\omega_0 + d\omega, \chi_0 + d\chi, R_0)$$

Отсюда:

$$\frac{M'_a(\omega_0)}{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_0)}} d\omega + \frac{I_1^2}{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_0)}} d\chi = \frac{\kappa(R_0 + r)}{(R_0 + r + \chi_0 \omega_0)^2} d\omega - \frac{I_0^2}{\kappa} d\chi$$

Соответственно, приращение угловой скорости определяется следующим соотношением:

$$d\omega = \frac{I_0^2}{\kappa} \frac{\left( \sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_0)} + \kappa \right) (R_0 + r + \chi_0 \omega_0)^2}{\kappa(R_0 + r) \sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_0)} - M'_a(\omega_0)(R_0 + r + \chi_0 \omega_0)^2} d\chi > 0$$

Таким образом, при увеличении параметра  $\chi$  угловая скорость на стационарном режиме возрастает. Найдём теперь изменение тока на стационарном режиме:

$$dI = \frac{I_0^2 d\chi}{\kappa} \frac{M'_a(\omega_0)(R_0 + r + \chi_0 \omega_0)^2 + \kappa^2(R_0 + r)}{\kappa(R_0 + r) \sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_0)} - M'_a(\omega_0)(R_0 + r + \chi_0 \omega_0)^2}$$

Любопытно, что если  $\omega_0$  близка к  $\omega_m$ , т.е.  $M'_a$  близка к нулю, то величина  $dI$  положительна, а если  $\omega_0$  близка к  $\omega_M$  (т.е.  $R_0$  достаточно велико), то она отрицательна. Это означает, что при увеличении  $\chi$  ток на стационарном режиме, лежащем на ветви  $I_1$ , убывает, если внешнее сопротивление достаточно велико, и возрастает при меньших значениях сопротивления.

Пусть теперь неподвижная точка рассматриваемой динамической системы лежит на пересечении кривых  $I_0$  и  $I_2$ :  $I_2(\omega_0, \chi_0) = I_0(\omega_0, \chi_0, R_0)$ .

Аналогично предыдущему случаю, получим:

$$d\omega = \frac{I_0^2}{\kappa} \frac{\left(\sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_0)} - \kappa\right) (R_0 + r + \chi_0 \omega_0)^2}{\kappa(R_0 + r) \sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_0)} - M'(\omega_0)(R_0 + r + \chi_0 \omega_0)^2} d\chi$$

Учитывая, что  $M(\omega) > 0$  в рассматриваемом диапазоне угловых скоростей, ясно, что  $d\omega < 0$ . Для приращения тока имеем:

$$dI = \frac{I_0^2 d\chi}{\kappa} \frac{M'_a(\omega_0)(R_0 + r + \chi_0 \omega_0)^2 - \kappa^2(R_0 + r)}{\kappa(R_0 + r) \sqrt{\kappa^2 - 4\chi_0 M(\omega_0)} - M'_a(\omega_0)(R_0 + r + \chi_0 \omega_0)^2}$$

Очевидно, что  $dI < 0$ . Таким образом, при увеличении  $\chi$  ток на стационарном режиме, лежащем на ветви  $I_2$ , убывает при любом значении сопротивления (необходимо отметить, впрочем, что сам такой режим существует только при достаточно малых значениях  $R_0$  и при условии, что внутреннее сопротивление генератора также достаточно мало).

#### 4.1.10. Влияние параметра $\chi$ на величину мощности на стационарном режиме

Максимум механической мощности на валу турбины достигается при некотором значении  $\omega_p > \omega_m$  угловой скорости:

$$M'(\omega_p)\omega_p + M(\omega_p) = 0$$

Отметим, что для всех  $\chi \leq \kappa^2 / M(\omega_p)$  величина максимальной механической мощности постоянна и равна  $M(\omega_p)\omega_p$ . Если параметр  $\chi$  становится больше указанной величины, то стационарный режим с угловой скоростью, равной  $\omega_p$  оказывается недостижимым, и, естественно, максимальная мощность уменьшается.

Величина мощности, передаваемой во внешнюю цепь (на потребителей), определяется формулой

$$P_e = I^2 R = M(\omega) - I^2 r.$$

Прежде всего, для каждой из ветвей стационарных режимов оценим величину угловой скорости  $\omega_{e1,2}$ , при которой достигается максимум выходной мощности  $P_e$ . Для первой ветви имеем:

$$M'(\omega_{e1})\omega_{e1} + M(\omega_{e1}) - rI_1(\omega_{e1}) \frac{M'(\omega_{e1})}{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega_{e1})}} = 0$$

Поскольку в диапазоне  $\omega > \omega_m$  производная аэродинамического момента по угловой скорости отрицательна, получаем, что  $\omega_{e1} > \omega_p$ .

Для второй ветви:

$$M'(\omega_{e2})\omega_{e2} + M(\omega_{e2}) + rI_2(\omega_{e2}) \frac{M'(\omega_{e2})}{\sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega_{e2})}} = 0$$

Очевидно, что  $\omega_m < \omega_{e2} < \omega_p$ . Таким образом, максимум выходной мощности на второй ветви достигается при меньшем значении угловой скорости, чем на первой ветви.

Выясним теперь, как изменяется величина выходной мощности при изменении  $\chi$ . Для первой ветви:

$$\frac{\partial P_e}{\partial \chi} = \frac{r \left( \kappa - \sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega)} \right) \left( 2\chi M(\omega) + \kappa \sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega)} - \kappa^2 \right)}{2\chi^3 \sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega)}} \quad (4.29)$$

Видно, что при  $4\chi M(\omega_m) < \kappa^2$  выражение (4.29) меньше нуля для всех  $\omega$  из рассматриваемого интервала. Соответственно, нетрудно показать, что на первой ветви стационарных режимов максимальная мощность, выдаваемая потребителям, уменьшается с ростом параметра  $\chi$ .

Для второй ветви:

$$\frac{\partial P_e}{\partial \chi} = \frac{r \left( \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega)} \right) \left( -2\chi M(\omega) + \kappa \sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega)} + \kappa^2 \right)}{2\chi^3 \sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega)}} \quad (4.30)$$

Выражение (4.30), очевидно, больше нуля. Соответственно, для второй ветви стационарных режимов максимальная мощность, выдаваемая потребителям, увеличивается с ростом параметра  $\chi$ .

Сравним потребительские мощности на обеих ветвях:

$$(M(\omega) - I_1^2 r) - (M(\omega) - I_1^2 r) = \frac{\kappa r + \sqrt{\kappa^2 - 4\chi M(\omega)}}{\chi^2} > 0$$

Таким образом, максимальная мощность на первой ветви стационарных режимов больше, чем максимальная мощность на второй ветви. Соответственно, режимы, лежащие на первой ветви, являются предпочтительными.

#### 4.1.11. Гистерезис стационарных режимов при изменении внешнего сопротивления

Поскольку при некоторых значениях параметров существует несколько устойчивых стационарных режимов, в рассматриваемой механической системе возможно возникновение гистерезиса. Для системы без нелинейных членов, описывающих электромеханическое взаимодействие, гистерезис, возникающий при изменении внешнего сопротивления, был описан ранее.

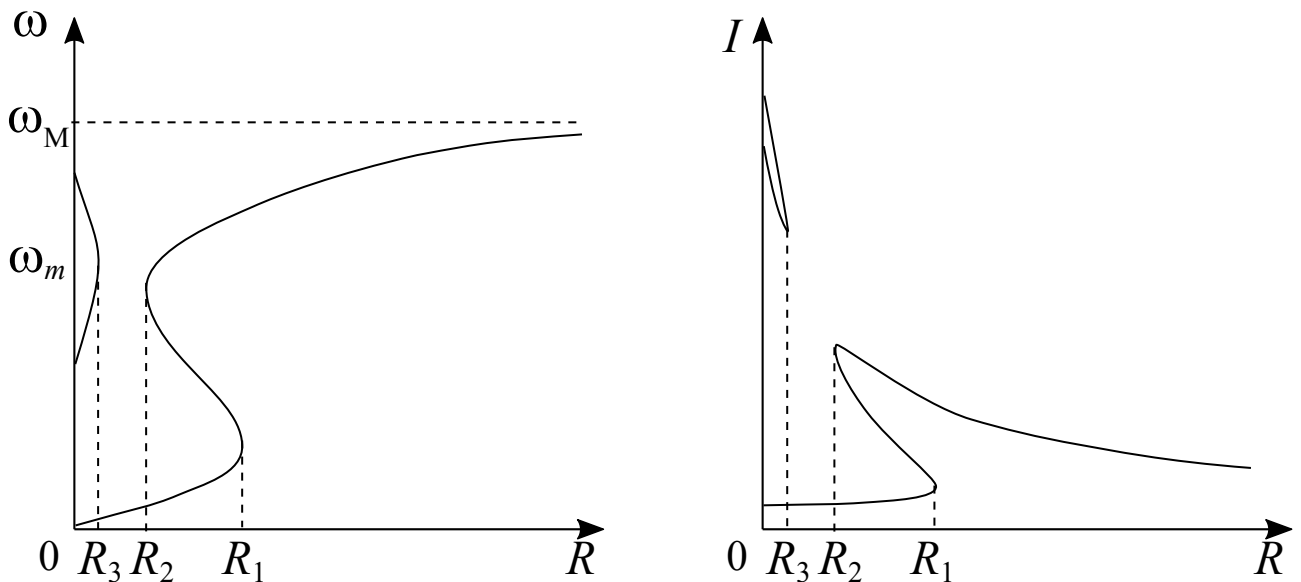


Рис. 4.7. Качественная зависимость угловой скорости и силы тока на стационарном режиме от внешнего сопротивления: случай «малого»  $\chi$

Однако в зависимости от величины  $\chi$  выделяются две качественно разные ситуации: Если  $4\chi M(\omega_m) < \kappa^2$ , то устойчивый высокоскоростной стационарный режим ( $\omega \geq \omega_m$ ) существует не при всех значениях внешнего сопротивления, а только для  $R > R_1$  (разумеется, если  $R_1 > 0$ ). При  $0 \leq R < R_2$  существует устойчивый низкоскоростной режим. Если, помимо этого,  $\exists R_3 > 0$  и  $R_3 < R_2$ , то при малых  $R$  помимо медленного режима, существует также устойчивый высокоскоростной режим. Впрочем, для того, чтобы такой режим можно было наблюдать в эксперименте, необходимо, чтобы внутреннее сопротивление генератора было весьма мало. Кроме того, наличие трения на валу также уменьшает область существования таких режимов.

При таких параметрах генератора возможно осуществлять управление с помощью внешнего сопротивления, поскольку, изменяя его, можно перевести систему с высокоскоростного режима на низкоскоростной и наоборот.

Такая ситуация качественно проиллюстрирована на рис. 4.7, где приведены кривые зависимостей угловой скорости и силы тока на стационарном режиме от внешнего сопротивления.

Если  $4\chi M(\omega_m) > \kappa^2$ , то устойчивый высокоскоростной режим существует при всех значениях внешнего сопротивления. Соответственно, если система выйдет на такой режим, то при любом последующем изменении  $R$  она останется на высокоскоростном режиме. Перейти на низкоскоростной режим просто за счет изменения сопротивления невозможно (что ограничивает возможности управления системой за счет внешнего сопротивления).

Такая ситуация качественно проиллюстрирована на рис. 4.8, где приведены кривые зависимостей угловой скорости и силы тока на стационарном режиме от внешнего сопротивления.

Необходимо отметить, что при критическом значении параметра  $\chi$  (или  $V$ )



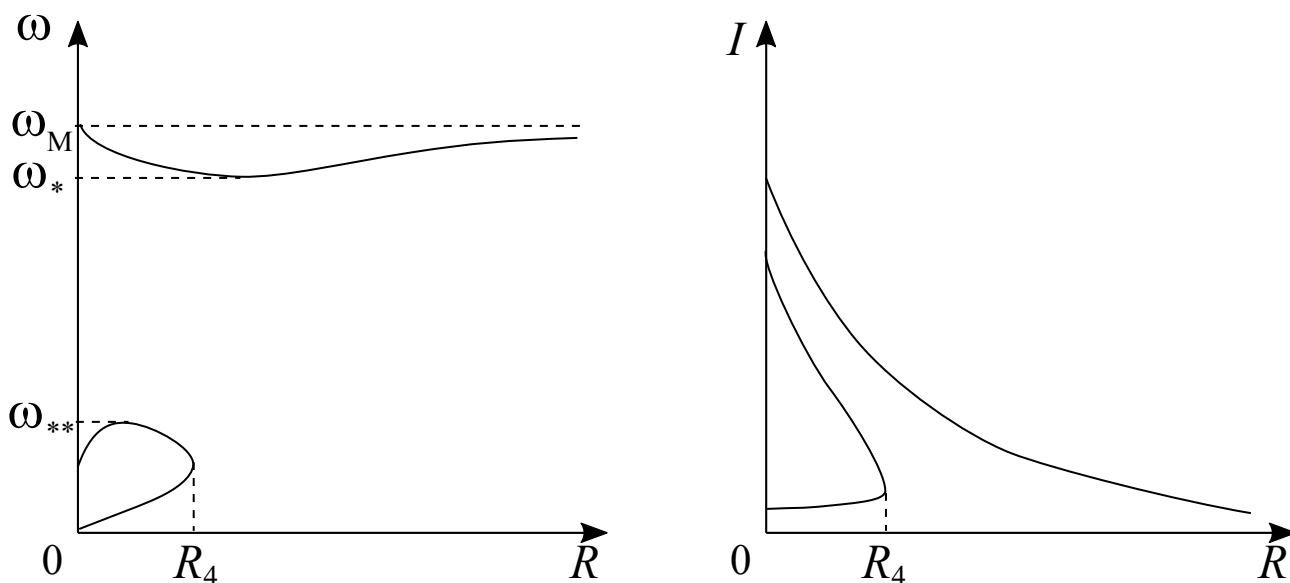


Рис. 4.8. Качественная зависимость угловой скорости и силы тока на стационарном режиме от внешнего сопротивления: случай «большого»  $\chi$

многообразие стационарных режимов претерпевает качественную перестройку.

Следует отметить также, что приведенные результаты в целом справедливы и для других типов ветротурбин (например, для турбины Савониуса, как показано в [176]).

#### 4.1.12. Экспериментальная верификация

##### Определение характеристик электромеханического взаимодействия генератора

Для экспериментальной верификации предложенной модели использовалась ветроэнергетическая установка производства компании Superb Electric Co. (Тайвань) (рис. 4.9). Ее турбина состоит из шести лопастей, причем длина лопастей  $b$  составляет 0,55 м.

Для того чтобы определить характеристики электромеханического взаимодействия генератора (будем далее называть его «генератор 1»), воспользуемся



Рис. 4.9. Ветроэнергетическая установка в дозвуковой аэродинамической трубе

результатами экспериментов, проведенных в НИИ механики МГУ и описанных, в частности, в [10]. В этих экспериментах генератор приводился в движение с помощью электродвигателя, соединенного с его осью. При этом изменялся выходной момент двигателя и внешнее сопротивление в цепи якоря исследуемого генератора. В результате был получен набор зависимостей выходного тока генератора 1 от угловой скорости якоря при различных внешних сопротивлениях. На базе этой информации были определены следующие значения параметров генератора 1:

$$\kappa = 2.45 \text{ НмА}^{-1}, \chi = 0.78 \text{ НмА}^{-2}, r = 40 \text{ Ом} \quad (4.31)$$

Качество аппроксимации, получающееся при значениях (4.31), проиллюстрировано на рис. 4.10, на котором изображены экспериментальные зависимости тока на стационарном режиме от угловой скорости, полученные в ходе испытаний

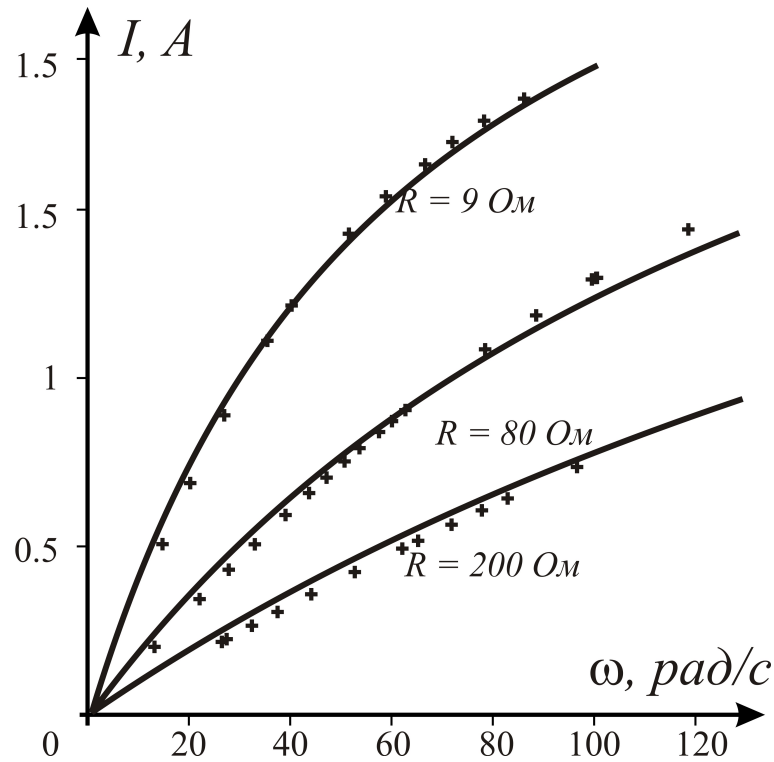


Рис. 4.10. Ветроэнергетическая установка в дозвуковой аэродинамической трубе

при разных значениях  $R$  (крестики), и результаты расчета по предложенной модели (сплошные линии).

Видно, что расчетные кривые достаточно хорошо согласуются с результатами экспериментов.

### Идентификация аэродинамического момента, действующего на лопасти

Предложенная модель позволяет восстановить аэродинамический момент, действующий на лопасти установки на стационарном режиме, по измерениям силы тока и скорости потока на этом режиме (разумеется, при условии, что известны параметры генератора):

$$C_m(\Omega) = \frac{2}{\rho S b V^2} (\kappa I - \chi I^2) \quad (4.32)$$

Таким образом, для определения зависимости коэффициента аэродинамического момента от быстроходности требуется определить параметры генератора и измерять скорость потока, угловую скорость турбины и ток в цепи якоря. Отметим, что выполнять измерения тока (и обеспечить достижение нужной точности) технически значительно проще, чем измерения непосредственно момента.

Для идентификации аэродинамического момента использовались данные, полученные при испытаниях указанной ветроэнергетической установки в дозвуковой аэродинамической трубе А6 НИИ механики МГУ [10]. В этих экспериментах в цепь ротора генератора (после выпрямителя) включались различные внешние сопротивления и измерялась угловая скорость турбины, а также ток и напряжение во внешней цепи. Испытания проводились при разных скоростях набегающего потока (от 4 до 12 м/с).

Воспользуемся серией экспериментов, в которой скорость потока составляла 6 м/с. Соответствующие данные представлены на рис. 4.11.

Сформируем аппроксимационную формулу для описания зависимости  $C_m$  от быстроходности. В предыдущих разделах было показано, что в области достаточно больших значений  $\Omega$  для аэродинамического момента можно использовать зависимость следующей структуры:

$$C_{m1}(\Omega) = A_2\Omega^2 + A_1\Omega + A_0 + B_1\Omega^{-1} + B_2\Omega^{-2}$$

В то же время, разложение момента в ряд Тэйлора в нуле по  $\Omega$ , очевидно, дает следующее выражение:

$$C_{m2}(\Omega) = K_0 + K_1\Omega + K_2\Omega^2$$

Для того чтобы получить аппроксимационную формулу для всего рассматри-

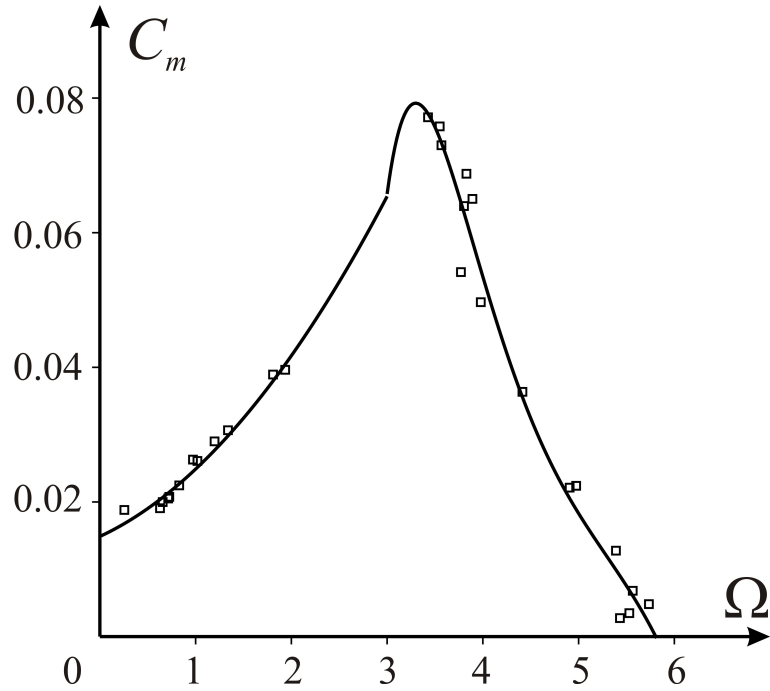


Рис. 4.11. Сопоставление аппроксимации аэродинамического момента с экспериментальными данными: эксперименты с генератором 1

ваемого диапазона значений  $\Omega$ , «склеим» эти два выражения:

$$C_m(\Omega) = \begin{cases} A_2\Omega^2 + A_1\Omega + A_0 + B_1\Omega^{-1} + B_2\Omega^{-2}, & \Omega > \Omega_* \\ K_0 + K_1\Omega + K_2\Omega^2, & \Omega \leq \Omega_* \end{cases} \quad (4.33)$$

Здесь  $\Omega_*$  — значение, при котором выполняется равенство  $C_{m1}(\Omega_*) = C_{m2}(\Omega_*)$ .

Используя метод наименьших квадратов, получим для параметров в формуле (4.33) следующие значения:

$$\begin{aligned} \Omega_* &= 2.8974K_0 = 0.0149, & K_1 &= 0.0066, \\ K_2 &= 0.0034 & A_0 &= -13.4081, & A_1 &= 1.9257, \\ A_2 &= -0.1034, & B_1 &= 40.9669, & B_2 &= -45.2529 \end{aligned} \quad (4.34)$$

На рис. 4.11 квадратиками изображены значения безразмерного коэффициента момента, восстановленные по формуле (4.32) на основе данных, полученных в

описанных выше экспериментах. Сплошная линия соответствует аппроксимационной зависимости (4.33) с учетом (4.34). По оси абсцисс отложены значения быстроходности турбины.

Видно, что предложенная аппроксимация достаточно хорошо описывает экспериментальные данные.

Отметим, что в значение  $\Omega_*$  оказывается в области, в которой экспериментальные точки отсутствуют. Это связано с тем, что при таких значениях угловой скорости в системе нет устойчивых стационарных режимов. Экспериментальное определение характеристик неустойчивых режимов связано с достаточно большими трудностями и в данной серии экспериментов не проводилось. В то же время, в будущем необходимо будет выполнить такие измерения, чтобы уточнить формулу (4.33) в «среднем» диапазоне значений угловых скоростей.

Чтобы убедиться в объективности методики идентификации аэродинамического момента, воспользуемся следующим соображением. Ясно, что аэродинамические свойства ветротурбины не должны зависеть от генератора, подключенного к ней (в предположении, что взаимодействие потока с корпусом генератора незначительно). Соответственно, моменты, восстановленные по экспериментальным данным, полученным для одних тех же лопастей, но подключенных к разным генераторам, должны быть близки.

В [19] описаны эксперименты, в рамках которых лопасти указанной выше ветротурбины были присоединены к другому генератору (ниже будем называть его «генератор 2»), разработанному и изготовленному Национальным университетом Чен-Кун (National Cheng Kung University, Тайвань). В указанной работе было показано, что зависимость вырабатываемого тока от угловой скорости ротора при фиксированной нагрузке с достаточно хорошей точностью является

линейной:

$$I = \frac{\kappa_2 \omega}{R + r_2}; \quad \kappa_2 = 0.32 \text{ НмА}^{-1}, \quad \chi_2 = 0, \quad r_2 = 1 \text{ Ом} \quad (4.35)$$

ВЭУ, получившаяся в результате присоединения указанной ветротурбины к генератору 2, была помещена в дозвуковую аэродинамическую трубу А6 НИИ механики МГУ. Была проведена серия продувок при разных скоростях набегающего потока (от 4 до 10 м/с) и разных значениях внешнего сопротивления, включенного в цепь ротора генератора (через выпрямитель). При этом измерялись угловая скорость турбины, а также ток и напряжение во внешней цепи.

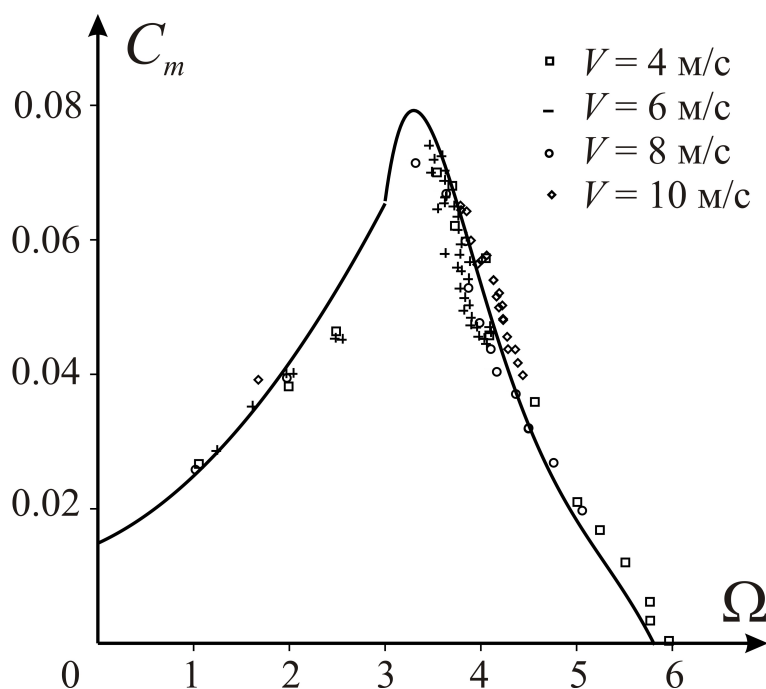


Рис. 4.12. Сопоставление аппроксимации аэродинамического момента с экспериментальными данными: эксперименты с генератором 2

По этим данным на основе (4.32) с учетом (4.35) были рассчитаны значения безразмерного коэффициента момента для разных значений  $\Omega$ . Результаты

представлены на рис. 4.12, где по оси абсцисс отложены значения быстроходности турбины, а по оси ординат — безразмерный коэффициент момента.

Сплошной линией изображена зависимость (4.33). Видно, что полученная аппроксимационная формула достаточно хорошо описывает как аэродинамический момент, восстановленный по измерениям, выполненным с генератором 1, так и момент, восстановленный по измерениям, выполненным с генератором 2. Это означает, что предложенная методика восстановления аэродинамического момента по результатам измерения тока является достаточно надежной.

## Моделирование поведения ветротурбины

Перейдем теперь к моделированию поведения ветротурбины. Для этого в среде Matlab был разработан модуль на базе предложенной математической модели (4.20) с учетом соотношений (4.33).

Прежде всего, смоделируем эволюцию угловой скорости и силы тока во внешней цепи на устойчивых стационарных режимах при изменении внешнего сопротивления. Результаты расчетов представлены на рис. 4.13-4.14 (сплошные кривые). На этих же рисунках приведены экспериментальные данные (квадратики).

Видно, что в целом предложенная модель хорошо согласуется с результатами экспериментов. Отметим, что верхняя ветвь стационарных режимов, которая отвечает рабочим режимам установки, описывается достаточно точно. Несколько худшее согласие имеет место в области средних угловых скоростей. Это может быть связано со значительным влиянием погрешностей экспериментальных измерений и аппроксимации в окрестности значения внешнего сопротивления, при котором имеет место седлоузловая бифуркация (когда параметр  $R$ , уменьшаясь, проходит это значение, рождается пара стационарных реше-



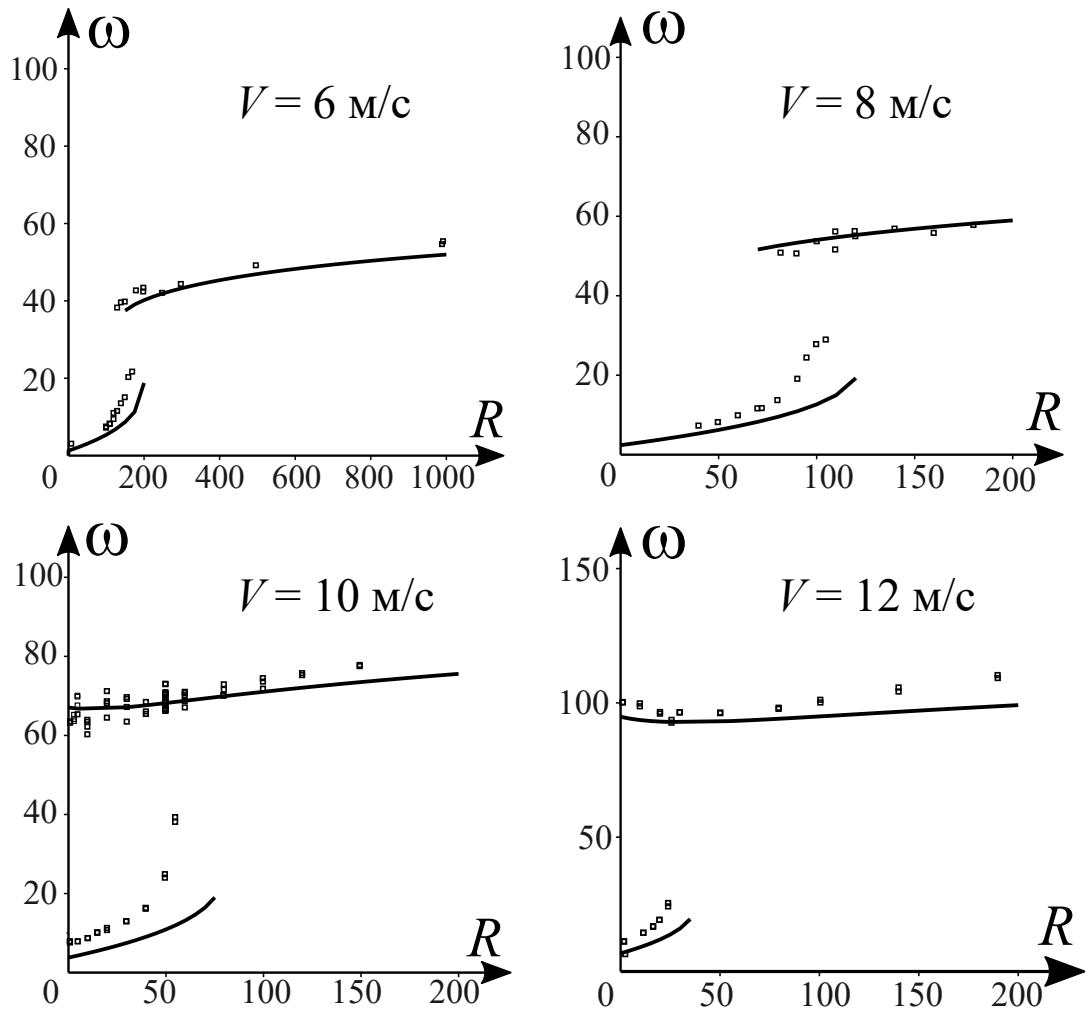


Рис. 4.13. Зависимость угловой скорости на стационарных режимах от сопротивления

ний).

Теперь обратимся к неустановившимся движениям системы. Здесь особенно интересно проанализировать влияние непостоянства скорости ветра.

Рассмотрим ситуацию, когда скорость потока меняется со временем по гармоническому закону:

$$V = V_0 + \Delta V \sin \nu t$$

Исследуем влияние частоты и амплитуды колебаний величины  $V$  на поведение системы. Из общих соображений ясно, что проявления нетривиальных эффектов можно ожидать в ситуации, когда установка при среднем значении скорости

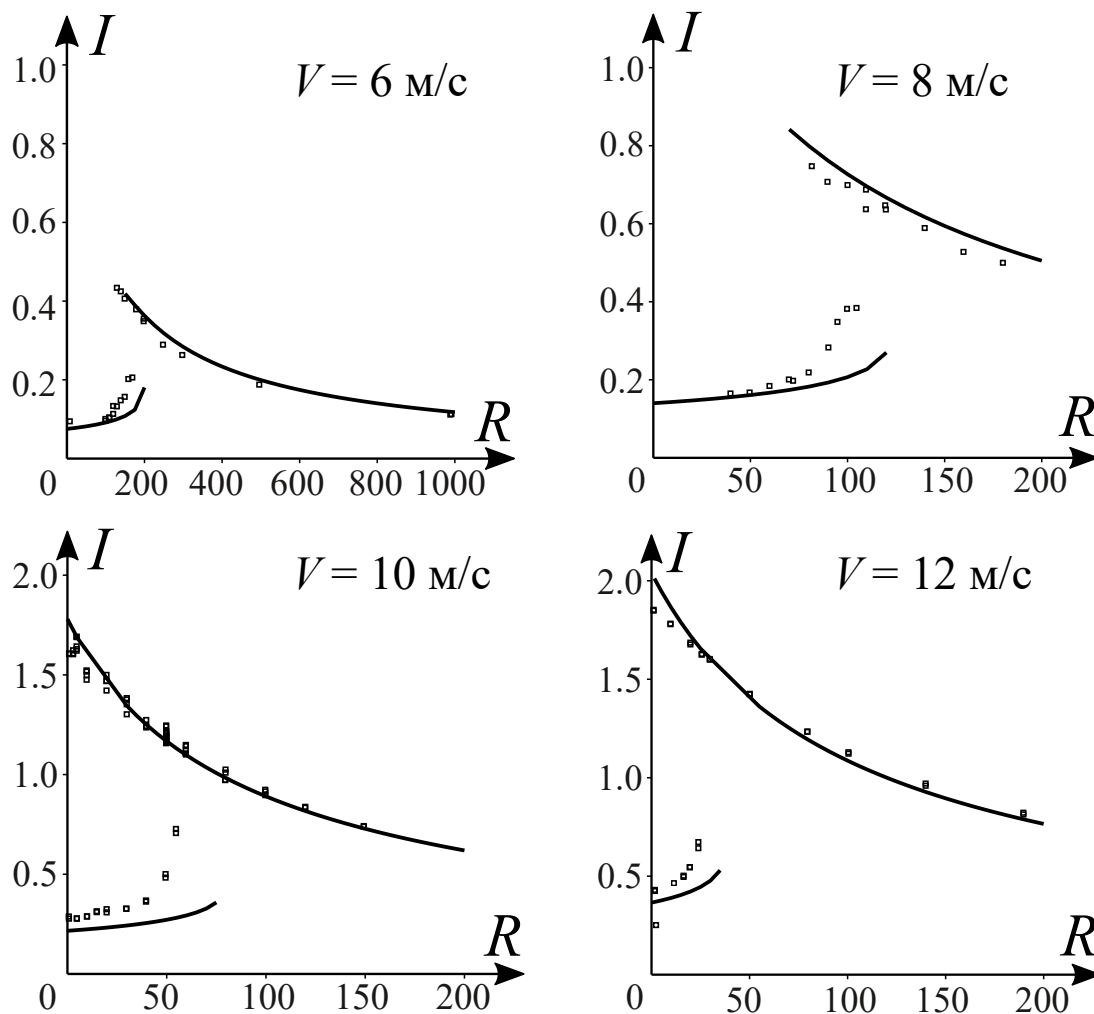


Рис. 4.14. Зависимость силы тока на стационарных режимах от сопротивления

ветра находится вблизи оптимального режима (соответствующего максимуму момента или вырабатываемой мощности). Поэтому для расчета были выбраны следующие значения параметров:  $R = 60 \text{ Ом}$ ,  $V_0 = 8 \text{ м/с}$ . Момент инерции вращающихся частей принят равным  $0.5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  (что примерно соответствует значению для реальной установки).

Результаты расчетов приведены на рис. 4.15-4.16 в виде зависимостей угловой скорости от времени. Пунктирными линиями отмечены стационарные значения угловой скорости, сплошными — ее значения скорости в переходном процессе.

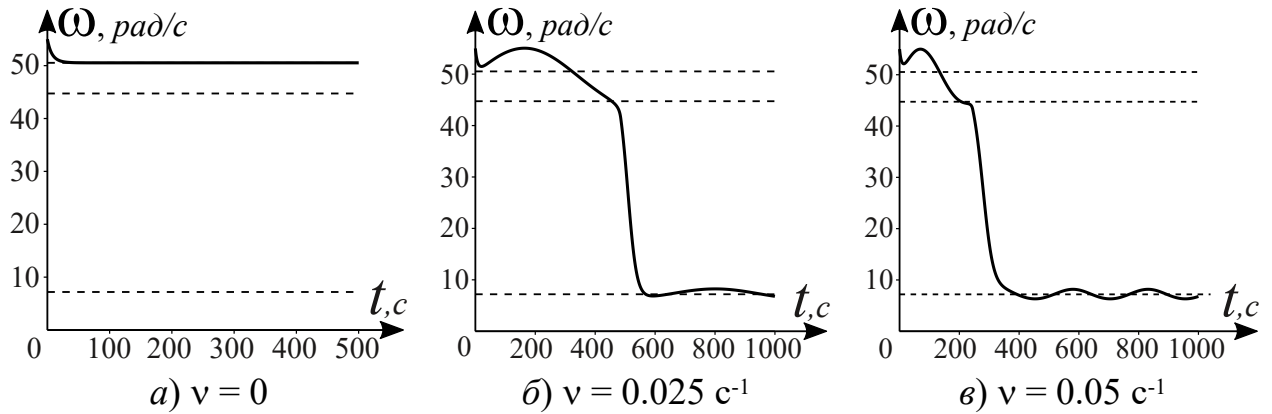


Рис. 4.15. Зависимость угловой скорости турбины от времени при разных  $\nu$

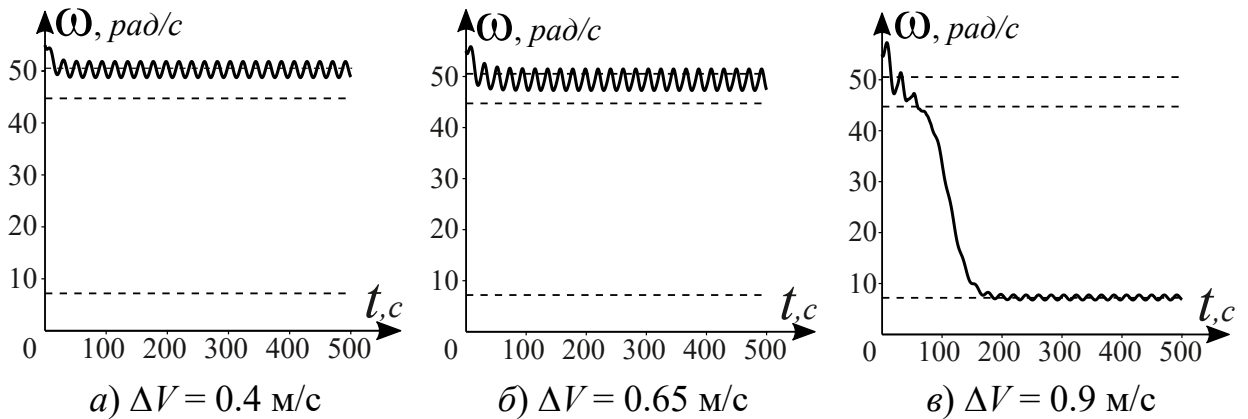


Рис. 4.16. Зависимость угловой скорости турбины от времени при разных амплитудах скорости ветра

При скорости ветра, равной  $V_0$ , существует притягивающий высокоскоростной режим (рис. 4.15 а). Этот режим существует и при скоростях ветра, близких к  $V_0$ . В частности, для исследуемой системы при принятых значениях и выбранном  $R$  этот режим существует при  $V > 7.7$  м/с. Однако если скорость ветра гармонически меняется с малой частотой, то происходит «сваливание» установки на низкоскоростной режим (рис. 4.15 б).

В то же время, при относительно больших значениях  $\nu$  установка совершает колебания в окрестности высокоскоростного режима (рис. 4.15 в).

Увеличение амплитуды колебаний ветра в определенных ситуациях вначале приводит к некоторому уменьшению средней угловой скорости установки (рис. 4.16 а,б). Это уменьшение тем значительнее, чем больше амплитуда. Если же  $\Delta V$  превышает некоторое критическое значение, то установка после некоторого переходного процесса выходит в окрестность низкоскоростного режима, соответствующего среднему значению  $V$  (рис. 4.16в).

Интересно, что отмеченное выше снижение средней угловой скорости было экспериментально зарегистрировано также и для вертикально-осевой ВЭУ [88]. Данный эффект следует учитывать при проведении измерений в аэродинамической трубе (по крайней мере, если колебания скорости потока составляют порядка 10% или выше).

## **4.2. Динамика ветроэнергетических установок колебательного типа**

Ветроэнергетические установки, рабочий элемент которых совершает вращательное движение, являются наиболее распространенным типом таких устройств. Однако в последнее время все более пристальное внимание уделяется изучению возможности преобразовывать энергию потока среды в полезные формы с помощью установок, в которых рабочий элемент совершает колебания под действием потока. Механизмы возникновения таких колебаний могут быть разными — галопирование, флаттер, вихри, сходящие с поверхности тела и т.д. Для выработки электроэнергии в таких системах могут использоваться, в частности, пьезоэлементы или линейные электрогенераторы.

Следует отметить, что двухзвенный аэродинамический маятник, рассмотренный в главе 2, также может использоваться в качестве рабочего элемента

подобных ветроэнергетических установок. В работах [175], [173] исследовано влияние различных параметров на характеристики колебаний маятника и даны оценки выходной мощности.

Далее мы рассмотрим особенности динамики двух электромеханических систем, в которых энергия колебаний тела, индуцированных потоком среды, преобразуется в электричество.

#### **4.2.1. Динамика ветроэнергетической установки, использующей эффект галопирования**

В этом разделе мы рассмотрим ветроэнергетическую установку, использующую эффект галопирования. Это явление представляет собой возникновение колебаний плохообтекаемых тел в направлении поперек потока в случае, когда скорость потока превосходит некоторое критическое значение. Вообще говоря, галопирование обусловлено тем, что при определенных условиях для плохообтекаемых тел аэродинамическое демпфирование оказывается отрицательным.

#### **Уравнения движения**

Рассмотрим аэроупругую систему, состоящую из тела  $M_1$  и  $M_2$ , которые могут двигаться поступательно вдоль горизонтальной оси  $OY$  (см. рис. 4.17). Тело  $M_1$  представляет собой материальную точку, а тело  $M_2$  имеет форму квадратной призмы, ось которой перпендикулярна линии движения и вертикальна. Две стороны основания призмы параллельны оси  $OY$ . Оба тела соединены пружиной. Точка  $M_1$ , кроме того, прикреплена пружиной к неподвижной точке  $O$ . К призме жестко прикреплен магнит  $M_3$ , который может двигаться внутри катушки индуктивности. Эта катушка включена в электрическую цепь, которая также содержит нагрузочное сопротивление  $R_l$ . При движении призмы маг-

нит движется внутри катушки, и в цепи индуцируется электрический ток (эта схема представляет собой простейший линейный электрогенератор). Тела  $M_1$  и  $M_2$  находятся в горизонтальном стационарном потоке воздуха. Предполагается, что поток действует только на призму. Скорость потока равна  $V$  и перпендикулярна оси  $OY$ . Такая конфигурация системы отличается от рассмотренных в [192] наличием электрического контура и тем, что аэродинамическое воздействие приложено к первому телу (которое непосредственно связано с неподвижным основанием). Пусть  $OXY$  — неподвижная система координат, ось абсцисс

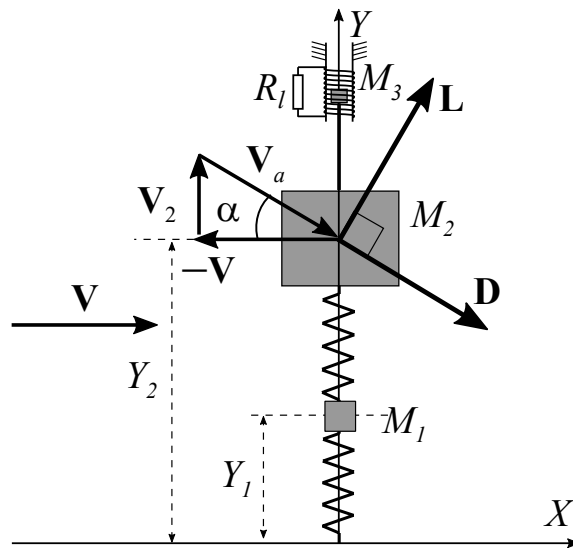


Рис. 4.17. Галопирующая ветроэнергетическая установка с двумя подвижными массами (вид сверху).

которой направлена вдоль набегающего потока. Чтобы описать динамику нашей электромеханической системы, введем координаты  $Y_1$  и  $Y_2$  тел  $M_1$  и  $M_2$ , соответственно, и ток  $I$  в электрической цепи.

Чтобы смоделировать аэродинамическое воздействие на призму, воспользуемся квазистатическим подходом. В рамках этого подхода аэродинамические силы предполагаются зависящими только от мгновенного состояния движения тела. Он широко используется (например, в [104, 165]), поскольку он позволяет

эффективно проводить параметрический анализ и во многих случаях обеспечивает достаточно точное описание особенностей поведения тела. Многочисленные исследования (в частности, [159]) показывают, что феномен галопирования достаточно хорошо описывается данной моделью. Аэродинамическую силу, действующую на призму, представим в виде суммы подъемной (или боковой) силы  $L$  и силы лобового сопротивления  $D$ , приложенных в центре призмы, причем сила  $D$  направлена вдоль воздушной скорости  $V_a$  (т.е. скорости призмы относительно набегающего потока), а сила  $L$  – перпендикулярно ей. Эти силы имеют следующую структуру:

$$D = \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_d(\alpha), \quad L = \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_l(\alpha) \quad (4.36)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха,  $S$  – площадь боковой поверхности призмы,  $\alpha$  – угол атаки, т.е. угол между скоростью  $V_a$  и осью  $OX$ ,  $C_d$  и  $C_l$  – безразмерные коэффициенты боковой силы и силы лобового сопротивления, соответственно. Очевидно, выполнены следующие соотношения:

$$V_a = \sqrt{V_2^2 + V^2} \quad (4.37)$$

Из (4.36) и (4.37) мы можем найти проекцию  $F_y$  результирующей аэродинамической силы на направление движения:

$$F_y = \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_y(\alpha) = \frac{\rho S}{2} V_a^2 (C_l \cos \alpha - C_d \sin \alpha) \quad (4.38)$$

Из соображений симметрии ясно, что  $C_y$  в выражении (4.38) представляет собой нечетную функцию  $\alpha$ . Поэтому в области сравнительно малых  $\alpha$  эту функцию можно приближенно представить в виде полинома следующего вида:  $C_y = \sum_{i=1}^n C_{y,2i+1} \alpha^{2i+1}$ . Коэффициенты  $C_{y,2i+1}$  и их количество зависят от формы призмы. Во многих исследованиях (например, [192]) используются кубические полиномы. Однако такое число членов разложения во многих случаях оказывается недостаточным для того, чтобы описать основные особенности

поведения  $C_y$  даже в диапазоне малых  $\alpha$ . В частности, рассмотрим экспери-

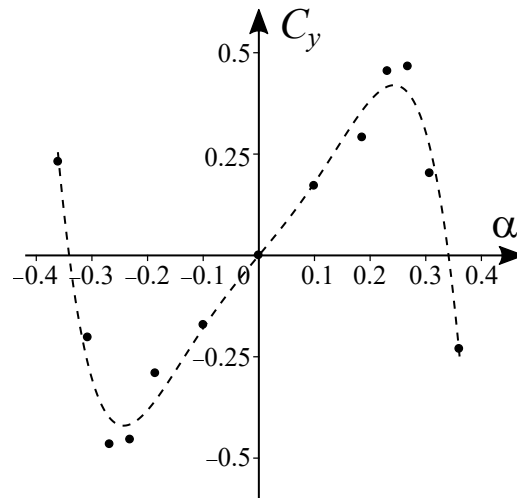


Рис. 4.18. Зависимость коэффициента поперечной аэродинамической силы от угла атаки  $\alpha$  (рад); точки — экспериментальные данные из [167]; пунктирная линия — аппроксимация (4.39).

ментальные данные из работы [167], относящиеся к квадратной призме (без соединенной с ней пластины). Измеренные значения коэффициента  $C_y$  представлены на рис. 4.18 точками. Для того чтобы получить достаточно точную аппроксимацию  $C_y$ , необходим полином, по крайней мере, 5 степени:

$$C_y^{appr} = C_{y1}\alpha + C_{y3}\alpha^3 + C_{y5}\alpha^5 \quad (4.39)$$

где  $C_{y1} = 1.64$ ,  $C_{y3} = 17.5$ ,  $C_{y5} = -272.3$ . Аппроксимационная кривая (4.39) изображена на рис. 4.18 пунктирной линией. Она достаточно близка к экспериментальным данным в диапазоне  $|\alpha| < 0.35$ . Поэтому в дальнейшем мы будем использовать формулу (4.39), предполагая, что  $C_{y1} > 0$ ,  $C_{y3} > 0$  и  $C_{y5} < 0$ .

Аналогично [98, 76], мы будем использовать следующие формулы для описания ЭДС  $E$ , создаваемой в катушке движущимся магнитом, и силы  $F_{em}$ , действующей на магнит со стороны электромагнитного поля:

$$E = C \frac{dY_2}{dt}, \quad F_{em} = -CI \quad (4.40)$$



При записи уравнения для электрического контура необходимо учитывать наличие у катушки индуктивности  $L_c$  и внутреннего сопротивления  $R_c$ .

Таким образом, уравнения движения рассматриваемой электромеханической системы с учетом можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 Y_1}{dt^2} + k_1 Y_1 + k_2 (Y_1 - Y_2) + h_1 \frac{dY_1}{dt} + h_2 \left( \frac{dY_1}{dt} - \frac{dY_2}{dt} \right) &= 0 \\
m_2 \frac{d^2 Y_2}{dt^2} + k_2 (Y_2 - Y_1) + h_2 \left( \frac{dY_2}{dt} - \frac{dY_1}{dt} \right) &= \\
&= \frac{\rho S}{2} \left( V^2 + \left( \frac{dY_2}{dt} \right)^2 \right) C_y(\alpha) - CI \\
L_c \frac{dI}{dt} &= - (R_l + R_c) I + C \frac{dY_2}{dt}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Здесь  $m_1$  — масса точки  $M_1$ ,  $m_2$  — масса призмы  $M_2$  вместе с магнитом  $M_3$ ;  $k_{1,2}$  — коэффициенты жесткости пружин;  $h_{1,2}$  — коэффициенты демпфирования пружин.

Чтобы уменьшить число параметров, перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{tU}{b}, \quad y_{1,2} = \frac{Y_{1,2}}{b}, \quad \bar{I} = \frac{IR_c}{CU}, \quad \bar{V} = \frac{V}{U}, \\
m &= \frac{m_2}{m_1}, \quad \bar{k}_{1,2} = \frac{k_{1,2}b^2}{m_1 U^2}, \quad k = \frac{k_2}{k_1}, \quad \bar{h}_{1,2} = \frac{h_{1,2}b}{m_1 U}, \\
\mu &= \frac{\rho S b}{2m_1}, \quad L = \frac{L_c U}{b R_c}, \quad R = \frac{R_l}{R_c}, \quad \chi = \frac{C^2 b}{R_c m_1 U}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Здесь  $U$  — некоторая характерная скорость.

Используя (4.42) и обозначая производную по  $\tau$  точкой, преобразуем систему (4.41) в следующую систему безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2 (y_1 - y_2) + \bar{h}_1 \dot{y}_1 + \bar{h}_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0 \\
m \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) + \bar{h}_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) &= \mu (\bar{V}^2 + \dot{y}_2^2) C_y(\alpha) - \chi \bar{I} \\
L \dot{\bar{I}} &= - (R + 1) \bar{I} + \dot{y}_2
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Очевидно, эта система имеет единственное положение равновесия, а именно, тривиальное:  $y_1 = y_2 = \bar{I} = 0$ .

В дальнейшем в этом разделе для упрощения записи будем опускать черту над безразмерными величинами.

Представляется интересным сопоставить динамику системы (4.43) с поведением системы, содержащей только одно подвижное тело (призму), масса которого равна суммарной массе системы, изображенной на рис. 4.17.

Безразмерные уравнения движения системы с одной колеблющейся массой, как нетрудно видеть, могут быть представлены в следующем виде с сохранением прежних обозначений:

$$\begin{aligned} (m + 1)\ddot{y}_2 + k_1 y_2 + h_1 \dot{y}_2 &= \mu (V^2 + \dot{y}_2^2) C_y(\alpha) - \chi I \\ L\dot{I} &= -(R + 1) I + \dot{y}_2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Чтобы сопоставить эффективность отбора энергии потока с помощью систем с одной и двумя подвижными массами, исследуем и сравним области неустойчивости тривиального равновесия этих систем в пространстве параметров и мощность, вырабатываемую этими системами на установившихся колебаниях.

### Анализ устойчивости равновесия

Для анализа устойчивости равновесия линеаризуем систему (4.43) в окрестности этой неподвижной точки с учетом соотношений (4.37) и (4.39):

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2 (y_1 - y_2) + h_1 \dot{y}_1 + h_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0 \\ m\ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) + h_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) &= \mu V C_{y1} \dot{y}_2 - \chi I \\ L\dot{I} &= -(R + 1) I + \dot{y}_2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Вначале обсудим ситуацию, когда электрическая цепь отсутствует (т.е.  $L = 0$  и  $\chi = 0$ ). При этом уравнения (4.45) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}')\mathbf{y} = 0, \quad (4.46)$$

где  $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2)^T$  и

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 & -h_2 \\ -h_2 & h_2 - V\mu C_{y1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}, \mathbf{K}' = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из выражения для матрицы  $D$  в (4.46) видно, что при достаточно большом  $V$  имеет место неустойчивость. Отметим, что для крыла подъемная сила направлена в противоположную сторону, что обеспечивает асимптотическую устойчивость при любых скоростях потока (см. п. 3.1.4).

В этой системе отсутствуют как гироскопические, так и позиционные неконсервативные силы. Кроме того,  $\det(\mathbf{K} + \mathbf{K}') = k_1 k_2 \geq 0$ . Следовательно, если  $\det \mathbf{D} > 0$ , то тривиальное равновесие асимптотически устойчиво при любых  $k_{1,2} > 0$ .

Характеристическое уравнение системы (4.45) можно представить в следующем виде:

$$m\lambda^4 + (m(h_1 + h_2) + h_2 - \mu V C_{y1}) \lambda^3 +$$

$$+ (h_1 h_2 - (h_1 + h_2)\mu V C_{y1} + m(k_1 + k_2) + k_2) \lambda^2 +$$

$$(h_1 k_2 + h_2 k_1 - \mu V C_{y1}(k + k_1)) \lambda + k_1 k_2 = 0 \quad (4.47)$$

Рассмотрим ситуацию, когда в системе нет полной диссипации, но, в то же время, демпфирование пружин достаточно велико:

$$\det \mathbf{D} = h_1 h_2 - \mu V C_{y1}(h_1 + h_2) < 0, \quad h_2 - V\mu C_{y1} > 0. \quad (4.48)$$

Заметим, что если  $\det \mathbf{D} < 0$  и при этом величины  $k_1$  и  $k_2$  достаточно малы, то коэффициент при  $\lambda^2$  в многочлене (4.47) становится отрицательным, что означает неустойчивость равновесия.

Если неравенства (4.48) выполнены и, кроме того,  $|\det D| \ll 1$ ,  $h_1 > h_2$  и  $\mu < 1$  (последнее условие означает, что тело  $M_2$  легче, чем тело  $M_1$ ), то удовлетворяются условия (2.24). Следовательно, изменение коэффициента  $k_1$  в диапазоне от 0 до бесконечности сопровождается двумя изменениями характера устойчивости.

Рассмотрим также случай, когда выполняются условия (4.48) и при этом  $|h_2 - uC_{y1}| = \varepsilon \ll 1$ . Нетрудно показать, что тогда уравнение  $H_{3\kappa} = 0$  (рассматриваемое как уравнение на  $k_1$ ) имеет два действительных корня. Один из них положителен и имеет порядок  $\varepsilon^{-1}$ . Знак другого корня совпадает со знаком выражения  $d_1 - uC_y^\alpha$ . В этом случае характер устойчивости также меняется дважды, когда параметр  $k_1$  пробегает значения от 0 до  $\infty$ .

Интересно отметить, что если сделать систему более «жесткой», равновесие не обязательно станет (или даже останется) асимптотически устойчивым. Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 4.19а. Точка  $A$  соответствует меньшим значениям коэффициентов жесткости обеих пружин, чем точка  $B$ . Однако равновесие асимптотически устойчиво в точке  $A$  и неустойчиво в точке  $B$ . Таким образом, увеличение коэффициентов жесткости обеих пружин дестабилизирует систему. Естественно, верно и обратное: уменьшение жесткостей пружин крепления при определенных условиях может обеспечить стабилизацию.

Этот эффект выглядит несколько неожиданным.

Влияние коэффициентов демпфирования пружин крепления на устойчивость равновесия оказывается, так сказать, «нормальным». Из рис. 4.19 легко видеть, что увеличение коэффициента демпфирования  $h_1$  первой пружины ве-

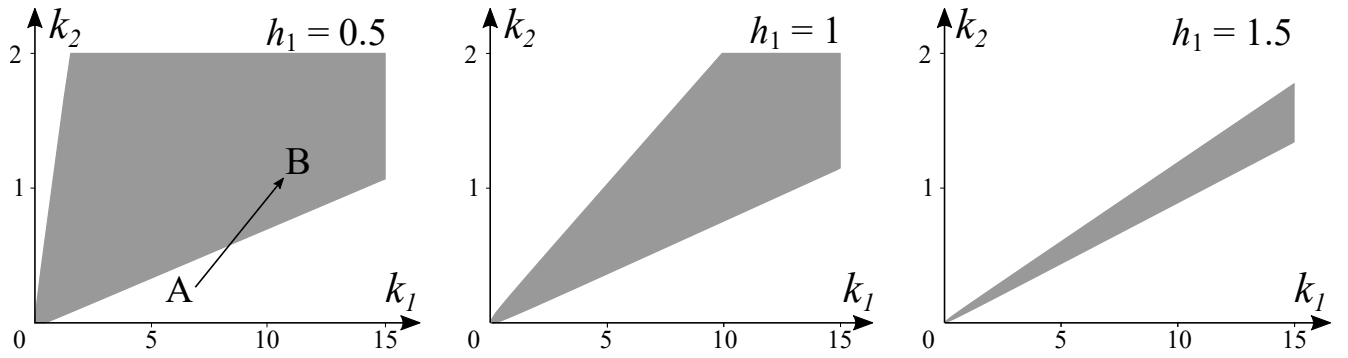


Рис. 4.19. Область неустойчивости в зависимости от параметров системы.

дет к уменьшению области неустойчивости, как и следовало ожидать. То же справедливо и для  $h_2$ .

Потеря устойчивости сопровождается рождением предельного цикла (бифуркация Андронова-Хопфа). Численное исследование показывает, что первая Ляпуновская величина положительна в широком диапазоне значений параметров системы. Соответственно, бифуркация оказывается субкритической.

Теперь вернемся к рассмотрению системы с учетом электрической цепи. В качестве характерной скорости выберем величину  $U = b\sqrt{k_1}m_1$  (здесь все величины размерные). Тогда безразмерная жесткость первой пружины будет равна 1. Характеристический полином системы (4.45) можно при этом представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& Lm\lambda^5 + (-LV\mu C_{y1} + ((h_1 + h_2)m + h_2)L + m(R + 1))\lambda^4 + \\
& + (-V\mu C_{y1}((R + 1) + L(h_1 + h_2)) + (h_1h_2 + (k + 1)m + k)L + \\
& + (R + 1)((m + 1)h_2 + mh_1) + \chi)\lambda^3 + \\
& + (-((k + 1)L + (R + 1)(h_1 + h_2))V\mu C_{y1} + (h_1k + h_2)L + \\
& + (R + 1)h_1h_2 + \chi(h_1 + h_2) + (R + 1)((m + 1)k + m))\lambda^2 + \\
& + ((-V\mu C_{y1}(k + 1)(R + 1) + kL + (R + 1)(kh_1 + h_2) + (k + 1)\chi)\lambda + \\
& + k(R + 1)) \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Чтобы проанализировать устойчивость, сделаем некоторые дополнительные предположения. Если тела движутся в воздухе, представляется естественным предположить, что их средняя плотность значительно больше, чем плотность воздуха, т.е. величина  $\mu$  мала. Кроме того, предположим, что коэффициенты демпфирования пружин и безразмерный коэффициент электромеханического взаимодействия также малы. Такая ситуация имеет место, в частности, если брать параметры, приведенные в работе [98]. Наконец, будем считать, что безразмерный коэффициент индуктивности тоже мал (т.е. характерные времена для процессов, протекающих в электрической цепи, существенно меньше, чем для процессов, протекающих в механической части системы). Иными словами:

$$\mu \ll 1, \quad h_1 \sim \mu, \quad h_2 \sim \mu, \quad \chi \sim \mu, \quad L \sim \mu \quad (4.50)$$

Отметим, что в «вырожденном» случае, т.е. при  $\mu = h_1 = h_2 = \chi = L = 0$ , полином (4.49) принимает следующий вид:

$$(R + 1) (m\lambda^4 + ((m + 1)k + m)\lambda^2 + k)$$

С учетом (4.50) мы можем найти корни полинома (4.49) в виде разложения по малому параметру:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{R + 1}{L} + \frac{\chi}{m(R + 1)} + o(\mu) \\ \lambda_{2-5} &= \pm i\omega_{1,2} + \frac{\mu C_{y1}(-\omega_{1,2}^2 + k + 1)}{(-4\omega_{1,2}^2 + 2k + 2)m + 2k} (V - V_{c1,2}) + o(\mu) \end{aligned} \quad (4.51)$$

где

$$V_{c1,2} = \frac{h_1(k - m\omega_{1,2}^2) + h_2(1 - m\omega_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2)}{\mu C_{y1}(-\omega_{1,2}^2 + k + 1)} + \frac{\chi}{\mu C_{y1}(R + 1)} \quad (4.52)$$

а  $\omega_{1,2}$  — положительные корни следующего уравнения:

$$m\omega^4 - (mk + k + m)\omega^2 + k = 0 \quad (4.53)$$

причем для определенности будем считать, что  $\omega_1 < \omega_2$ .

Величины  $\omega_{1,2}$  представляют собой собственные частоты системы колебаний в отсутствие потока и без сопряжения с электрической частью.

Прямой подстановкой в (4.62) нетрудно показать, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \omega_1 < 1 < \omega_2, \omega_1 < \sqrt{k+1} < \omega_2, \omega_1 < \sqrt{\frac{1}{m+1}} < \omega_2, \\ \omega_1 < \sqrt{\frac{k}{m}} < \omega_2, \omega_1 < \sqrt[4]{\frac{k}{m}} < \omega_2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Из (4.51) и (4.54) нетрудно видеть, что вещественная часть корня  $\lambda_1$  всегда отрицательна (поскольку величины  $L$  и  $\chi$  малы), и равновесие становится неустойчивым, когда скорость ветра превышает критическое значение  $V_c = \min(V_{c1}, V_{c2})$ .

Нетрудно показать, что для системы (4.43) в предположениях (4.50) критическая скорость ветра  $V_c^s$  определяется следующим выражением:

$$V_c^s = \frac{h_1}{\mu C_{y1}} + \frac{\chi}{\mu C_{y1}(R+1)} \quad (4.55)$$

Заметим, что из (4.62) следует, что  $\omega_1 \rightarrow (m+1)^{-1/2} \sim 1$  при  $k \rightarrow \infty$ . Соответственно, из (4.52) мы получаем, что имеет место соотношение  $V_c^s = \lim_{k \rightarrow \infty} V_{c1}$ , как и следовало ожидать.

Вычисление производных от выражений (4.52) по  $h_1$ ,  $h_2$  и  $\chi$  с учетом неравенств (4.54) показывает, что  $V_{c1}$  и  $V_{c2}$  монотонно растут с увеличением этих параметров, что представляется вполне естественным.

Чтобы определить влияние жесткости пружины между телами на устойчивость, будем рассматривать величины  $V_{c1,2}$  как функции  $k$  и вычислим их

производные по этому параметру:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{c1}}{dk} &= -\frac{4m^2((h_2 - (2h_1 + h_2)k)m + h_2(\Delta - k))}{\mu C_{y1}\Delta(m(k+1) - k + \Delta)} \\ \frac{dV_{c2}}{dk} &= -\frac{4m^2((-h_2 + (2h_1 + h_2)k)m + h_2(\Delta - k))}{\mu C_{y1}\Delta(-m(k+1) + k + \Delta)}\end{aligned}\quad (4.56)$$

Здесь  $\Delta = \sqrt{(m+1)^2 k^2 + 2mk(m-1) + m^2}$ .

Обе производные (4.56) обращаются в нуль при одном и том же значении параметра  $k$ :

$$k_c = \frac{mh_2(h_1 + h_2)}{h_1(mh_1 + mh_2 + h_2)}\quad (4.57)$$

Заметим, что величина  $k_c$  монотонно растет с ростом  $m$ . Очевидно, для больших  $k$  мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{dV_{c1}}{dk} &= \frac{2mh_1}{\mu C_{y1}k^2(m+1)} + o(k^{-2}) > 0 \\ \frac{dV_{c2}}{dk} &= -\frac{2m^2((h_1 + h_2)m + h_2)}{\mu k^2 C_{y1}(m+1)} + o(k^{-2}) < 0\end{aligned}$$

Учитывая то обстоятельство, что  $\omega_1\omega_2 = \sqrt{k/m}$ , разность значений этих критических скоростей можно представить в следующем виде:

$$V_{c2} - V_{c1} = -\frac{(((h_1 + h_2)m - h_1 + h_2)k + (h_1 + h_2)m)(k - m\omega_1^4)}{\mu C_{y1}(k+1 - \omega_1^2)(\omega_1^2 m(k+1) - k)}$$

Следовательно, мы можем заключить с учетом (4.54), что если

$$h_2 \geq h_1 \frac{1-m}{1+m}\quad (4.58)$$

то  $V_{c1} < V_{c2}$  и  $V_c = V_{c1}$  для всех  $k$  (заметим, что неравенство (4.58) заведомо выполнено в случае  $m \geq 1$ ). В этой ситуации критическая скорость ветра  $V_c$  имеет единственный минимум на интервале  $k \in [0, \infty)$ . В то же время,

$$V_{c1}|_{k=0} = \frac{h_2}{\mu C_{y1}} + \frac{\chi}{\mu C_{y1}(R+1)}$$



Таким образом, если  $h_2 > h_1$ , то из (4.55) следует, что  $V_c > V_c^s$  при малых  $k$ . Если  $h_2 \leq h_1$ , то  $V_c \leq V_c^s$  при всех  $k$ .

Если неравенство (4.58) не выполнено (и, следовательно,  $m < 1$  и  $h_2 < h_1$ ), то существует такое значение  $k_*$  коэффициента жесткости, что  $V_{c1} < V_{c2}$  при  $k < k_*$  и  $V_{c1} > V_{c2}$  при  $k > k_*$ . При этом  $V_{c1}|_{k=0} < V_c^s$ , что означает, что при нарушении условия (4.58) критическая скорость ветра для системы с двумя массами всегда меньше, чем для соответствующей системы с одной массой.

Если условие (4.58) выполнено и, кроме того,  $V_{c1}(k_c) < V < V_{c1}(0)$  (где  $k_c$  определяется формулой (4.57), то существует диапазон скоростей ветра, в котором равновесие асимптотически устойчиво при достаточно малых и достаточно больших величинах жесткости и неустойчиво при «промежуточных» значениях  $k$ . Этот эффект был отмечен в работе [177] для системы с двумя подвижными массами без электрической цепи. Если  $V > \max(V_{c0}, V_c^s)$ , то равновесие неустойчиво при всех  $k$ . В то же время, если условие (4.58) не выполнено, то при некоторых значениях скорости ветра существует интервал положительных значений  $k$ , в котором равновесие асимптотически устойчиво. Вне этого интервала (т.е. и при малых, и при больших  $k$ ) имеет место неустойчивость. Границы областей устойчивости показаны на рис. 4.20 на плоскости  $(k, V)$  для различных величин  $R$ ,  $m$  и  $h_2$  при следующих значениях остальных параметров:  $\mu = \chi = h_1 = L = 0.01$ . Сплошные линии обозначают границы областей устойчивости, а пунктирные соответствуют значениям критической скорости для системы с одной подвижной массой. На рис. 4.20, а представлен случай, когда условие (4.58) выполнено, а на рис. 4.20, б — случай, когда оно не выполняется.

Из результатов расчетов, приведенных на рис. 4.20, видно, что надлежащим выбором  $k$  можно существенно уменьшить скорость, при которой начи-

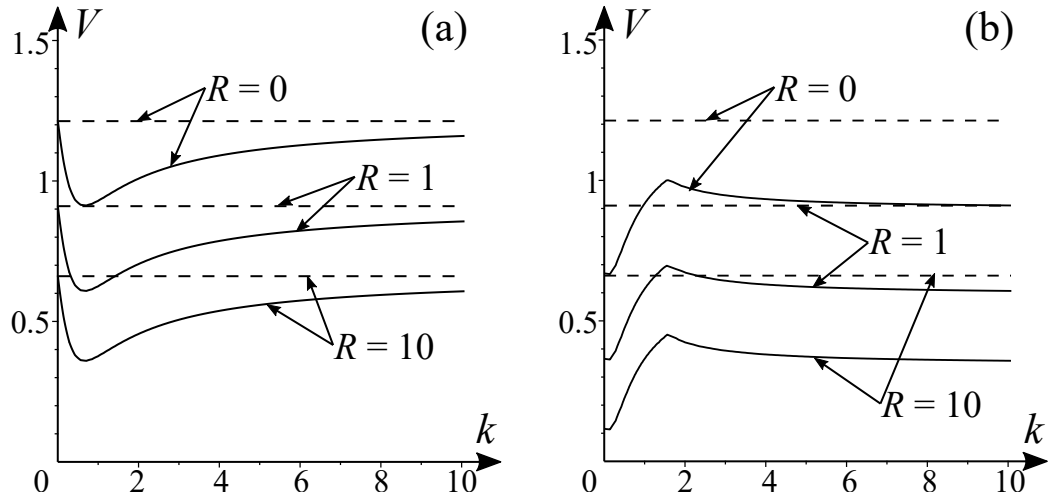


Рис. 4.20. Границы области устойчивости на плоскости параметров  $V$  и  $k$ : а)  $m = 1$ ,  $h_2 = 0.01$ ; б)  $m = 0.5$ ,  $h_2 = 0.001$ .

нается галопирование (и, соответственно, когда становится возможным отбор энергии у потока).

### Периодические режимы

Предположим, что  $C_{y1} \sim 1$ ,  $C_{y3} \sim \mu^{-1}$  и  $|C_{y5}| \sim \mu^{-2}$ . Для удобства обозначений введем дополнительный малый параметр  $\epsilon = \sqrt{\mu}$ . Будем искать периодические решения системы (4.43) следующего вида:

$$y_1 = \epsilon y_{11} \sin \omega \tau, \quad y_2 = \epsilon y_{21} \sin \omega \tau + \epsilon^3 y_{22} \cos \omega \tau, \quad I = \epsilon^3 I_1 \sin \omega \tau + \epsilon I_2 \cos \omega \tau \quad (4.59)$$

Подставив (4.59) в (4.43), приравнявая коэффициенты при  $\sin \omega \tau$  и  $\cos \omega \tau$  и удерживая только члены минимального порядка по  $\epsilon$ , получим следующие урав-

нения:

$$\begin{aligned}
& -y_{11}\omega^2 + (k+1)y_{11} - ky_{21} = 0 \\
& \frac{h_1 + h_2}{\mu}y_{11}\omega - \frac{h_2}{\mu}y_{21}\omega - ky_{22} = 0 \\
& -m\omega^2y_{21} - ky_{11} + ky_{21} = 0 \\
& \frac{5}{8V^3}C_{y5}\mu^2\omega^5y_{21}^5 + \frac{3}{4V}C_{y3}\mu\omega^3y_{21}^3 + C_{y1}V\omega y_{21} - m\omega^2y_{22} - \\
& -\frac{h_2}{\mu}\omega y_{11} + \frac{h_2}{\mu}\omega y_{21} + \frac{\chi}{\mu}I_2 + ky_{22} = 0 \\
& -\frac{L}{\mu}I_2\omega + (R+1)I_1 + \omega y_{22} = 0 \\
& (R+1)I_2 - \omega y_{21} = 0
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
y_{21} &= y_{11}\frac{k+1-\omega^2}{k}, \quad y_{22} = y_{11}\omega\frac{h_2\omega^2 + h_1k - h_2}{k^2\mu}, \quad I_2 = y_{11}\omega\frac{k+1-\omega^2}{k(R+1)} \\
I_1 &= y_{11}\omega^2\frac{Lk(1+k-\omega^2) + (R+1)h_2(1-\omega^2) - h_1k(R+1)}{k^2\mu(R+1)^2}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Подставив (4.61) в третье уравнение системы (4.60) получим уравнение для частоты предельного цикла:

$$m\omega^4 - (mk + k + m)\omega^2 + k = 0 \tag{4.62}$$

Это уравнение, как и следовало ожидать при сделанных предположениях относительно параметров, совпадает с уравнением (4.62), так что частоты предельных циклов близки к собственным частотам  $\omega_{1,2}$  нашей системы.

Амплитуда колебаний первого тела определяется следующим уравнением:

$$\begin{aligned}
5\mu^2C_{y5}\omega_{1,2}^4(k+1-\omega_{1,2}^2)^4y_{11}^4 + 6\mu V^2k^2C_{y3}\omega_{1,2}^2(k+1-\omega_{1,2}^2)^2y_{11}^2 + \\
+ 8V^3k^4C_{y1}(V - V_{c1,2}) = 0
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Заметим, что величины  $C_{y1}$  и  $C_{y3}$  положительны, а  $C_{y5}$  — отрицательна.

Формально уравнения (4.62), (4.63) могут иметь до 4 положительных корней, которые отвечают предельным циклам динамической системы (4.43). Вообще говоря, для определения характера устойчивости этих циклов можно воспользоваться методами, основанными на теории Флоке (например, [139]) или на построении систем сравнения (например, [36]). Однако в нашем случае выводы об устойчивости периодических решений можно сделать из некоторых простых соображений.

Пусть выполнено условие (4.58). Тогда равновесие устойчиво при  $V < V_{c1}$  и неустойчиво при  $V > V_{c1}$  для всех  $k$ . При  $V = V_{c1}$  имеет место бифуркация Андронова-Хопфа. Рассмотрим случай  $\omega = \omega_1$ . Нетрудно показать, что при этом уравнение (4.63) имеет два положительных корня, если  $V$  меньше  $V_{c1}$ , но достаточно близко к этой величине. Это означает, что бифуркация является субкритической. Очевидно, один из этих корней (тот, который стремится к нулю при  $V \rightarrow V_{c1} - 0$ ), соответствует неустойчивому предельному циклу. Другой корень отвечает притягивающему циклу. Значение  $V$ , при котором они сливаются, нетрудно получить из условия обращения в нуль дискриминанта уравнения (4.63) при  $\omega = \omega_1$ . При  $V > V_{c1}$  уравнение (4.63) имеет только один положительный корень, и соответствующий цикл является притягивающим.

Субкритический характер бифуркации можно считать благоприятным с точки зрения выработки энергии, поскольку он позволяет дополнительно увеличить «рабочий» диапазон скоростей ветра.

Пусть теперь  $\omega = \omega_2$ . Тогда при  $V$ , достаточно близких к  $V_{c2}$  и не превышающих этого значения, уравнение (4.63) имеет два положительных корня. Меньший из них, который стремится к нулю при  $V \rightarrow V_{c2} - 0$ , отвечает неустойчивому предельному циклу. Когда параметр  $V$  проходит значение  $V_{c2}$ , этот цикл

стягивается в начало координат, и знак вещественной части второй пары корней характеристического полинома меняется на положительный. Другой корень уравнения (4.63), который существует и при  $V > V_{c2}$ , отвечает притягивающему циклу.

Если (4.58) не выполнено, имеет место в целом аналогичная ситуация.

С точки зрения выработки энергии важны, в первую очередь, притягивающие циклы. Предшествующий анализ показывает, что при надлежащем выборе параметров системы такие циклы возникают при скоростях потока, меньших, чем в случае системы с одной подвижной массой.

Другой важной характеристикой ветроэнергетической установки является, разумеется, выходная мощность. Безразмерная мощность, вырабатываемая рассматриваемой системой в электрическом контуре и осредненная на периоде  $T$  колебаний, задается следующей формулой:

$$P = \frac{1}{T} \int_{\tau=0}^T I^2 R d\tau \quad (4.64)$$

Вычислим интеграл (4.64) с учетом выражений (4.59) и (4.61) и оставим только члены порядка  $\epsilon^2$ :

$$P = \epsilon^2 \frac{I_2^2 R}{2} = \frac{R\eta}{2(R+1)^2} \quad (4.65)$$

где

$$\eta = \frac{\mu y_{11}^2 \omega^2 (k+1-\omega^2)^2}{k^2} > 0.$$

Заметим, что (4.63) можно переписать следующим образом:

$$5C_{y5}\eta^2 + 6V^2C_{y3}\eta + 8V^3C_{y1}(V - V_{c1,2}) = 0 \quad (4.66)$$

Нетрудно показать, что для системы с одной подвижной массой величина  $\eta$  удовлетворяет уравнению, аналогичному (4.66), где вместо  $V_{c1,2}$  стоит  $V_c^s$ .

Как нетрудно видеть из (4.66),

$$\frac{d\eta}{dk} = \frac{8V^3 C_{y1}}{10C_{y5}\eta + 6V^2 C_{y3}} \frac{dV_{c1,2}}{dk} \quad (4.67)$$

Из двух решений (4.66) притягивающему циклу соответствует большее, поэтому первый сомножитель в (4.67) всегда отрицателен. Соответственно, поскольку  $V_{c1}$  имеет минимум при  $k = k_c$ , то  $\eta$  (а значит, и мощность) при этом достигает максимума. Поскольку  $V_{c2}$  убывает на интервале  $k \in [k_c, \infty)$ , то мощность на этом промежутке возрастает (конечно, там, где существуют циклы).

Предположим, что условие (4.58) выполнено. Тогда  $V_{c1} < V_{c2}$  при всех  $k$  и, кроме того,  $V_c^s > V_{c1}$  на интервале  $k \in [k_c, \infty)$ . С учетом этого нетрудно показать, что при таких значениях жесткости мощность на циклах с частотой  $\omega_1$  больше, чем в системе с одной подвижной массой, и больше, чем на циклах с частотой  $\omega_2$ .

Чтобы несколько более подробно исследовать влияние параметров  $k$  и  $m$  системы на характеристики предельных циклов и на выходную мощность, проведем численное моделирование. Для коэффициентов, описывающих аэродинамическое воздействие и для параметров  $\mu$ ,  $L$ ,  $\chi$  и  $h_1$  примем значения, указанные в предыдущих пунктах. Предположим также, что коэффициенты демпфирования обеих пружин одинаковы:  $h_2 = h_1$ .

Вначале рассмотрим случай  $m = 1$ ,  $R = 1$ . Тогда  $V_c^s \approx 0.91$ . На рис. 4.21 представлены амплитуды  $A_{y1}$  колебаний точки  $M_1$ , амплитуды  $A_{y2}$  колебаний призмы, частоты колебаний и выходная мощность в зависимости от десятичного логарифма коэффициента жесткости  $k$  для нескольких значений  $V$ . Сплошные линии обозначают результаты, полученные с помощью соотношений (4.61)-(4.63), а точки — значения, полученные при численном интегрировании системы (4.43) стандартным методом Рунге-Кутты 4 порядка. Черные линии и точки соответствуют притягивающим циклам, а серые — неустойчи-

вым. Мощность показана только для притягивающих решений. Значения мощности, обеспечиваемые системой с одной подвижной массой,  $P_{\max}^s$ , показаны пунктиром (разумеется, только для тех скоростей ветра, при которых такая система имеет притягивающее периодическое решение). Видно, что аппрокси-

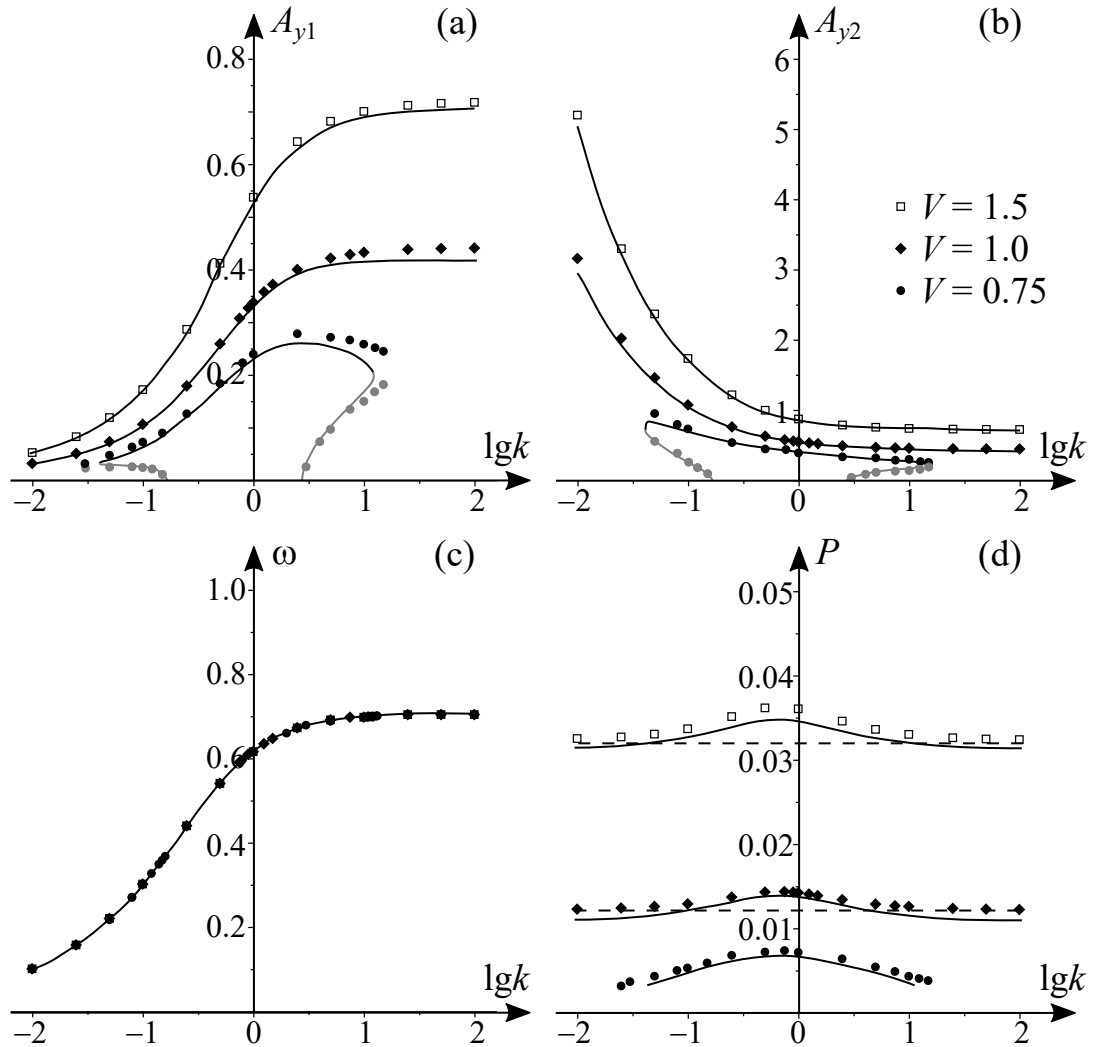


Рис. 4.21. Характеристики предельных циклов в зависимости от параметров  $k$  и  $V$ : а) амплитуда колебаний точки  $M_1$ ; б) амплитуда колебаний призмы; в) десятичный логарифм частоты; д) мощность.

мация достаточно близка к значениям, получаемым прямым интегрированием уравнений движения. Однако точность заметно падает вблизи точек, в которых сливаются устойчивый и неустойчивый периодические режимы. Кроме того, ап-

проксимация дает несколько заниженные значения амплитуд. С этим связано то обстоятельство, что выходная мощность, даваемая приближенной формулой (4.65), оказывается меньше, чем мощность, полученная непосредственным интегрированием системы (4.43). Для обеспечения большей точности необходим учет членов более высокого порядка.

Тем не менее, аппроксимация отражает основные тенденции в отношении мощности. Для каждого значения  $V$  мощность имеет единственный максимум  $P_{\max}$  по  $k$ . Видно, что мощность, вырабатываемая системой с двумя массами, всегда больше, чем  $P_{\max}^s$ . В то же время, отношение  $P_{\max}/P_{\max}^s$  уменьшается с ростом  $V$ : так, при  $V = 1$  выигрыш составляет примерно 17%, а при  $V = 1.5$  он снижается до примерно 11%.

Отметим, что на рис. 4.21 представлены только циклы, отвечающие частоте  $\omega_1$ . Циклы с другой частотой при выбранных значениях параметров существуют только при больших значениях скорости ветра. Влияние отношения  $m$  масс подвижных тел на характеристики притягивающих циклов проиллюстрировано на рис. 4.22 для случая  $V = 1$ . Квадратики (кружки) и сплошные (пунктирные) линии обозначают, соответственно, результаты численного интегрирования и расчетов по аппроксимационным формулам при  $m = 1$  ( $m = 0.1$ ). В случае  $m = 0.1$  видны два семейства притягивающих решений (то, которое отвечает  $\omega = \omega_1$ , обозначено черным цветом; то, которое отвечает  $\omega = \omega_2$  – серым). Следует отметить, что аппроксимации дают заниженное значение  $k$ , при котором появляется семейство с  $\omega = \omega_2$ .

Амплитуды колебаний в решениях семейства  $\omega = \omega_2$  достаточно малы и уменьшаются с ростом  $k$ . Однако  $\omega$  при этом растет, что до некоторой степени компенсирует малость амплитуд в том, что касается мощности. Тем не менее, выходная мощность на этих решениях заметно меньше, чем на решениях семей-



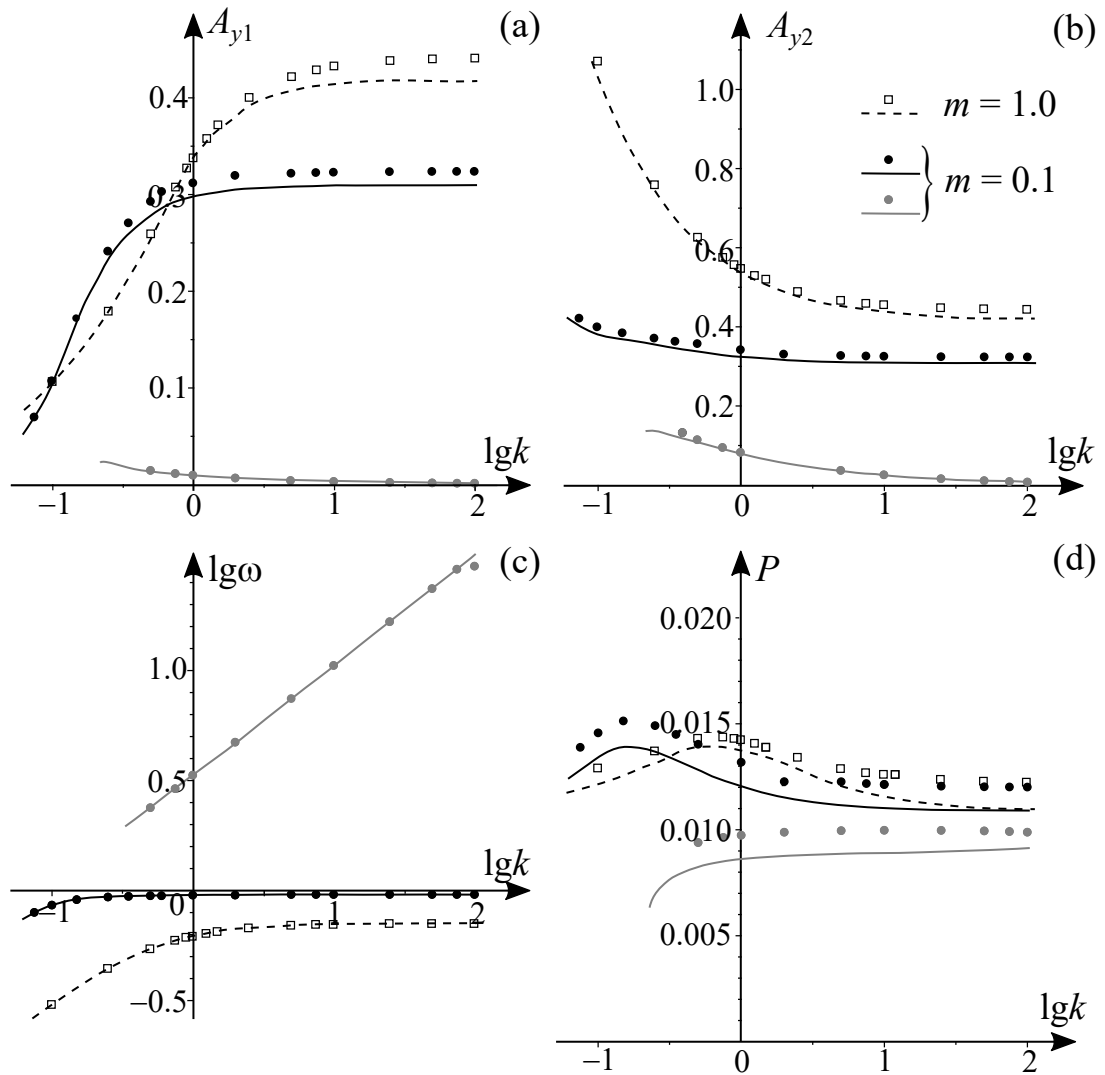


Рис. 4.22. Характеристики предельных циклов в зависимости от параметров  $k$  и  $V$ : а) амплитуда колебаний точки  $M_1$ ; б) амплитуда колебаний призмы; в) десятичный логарифм частоты; г) мощность.

ства с  $\omega = \omega_1$ . Особенно эта разница заметна при  $k$ , близких к единице, где она может достигать 40%. Поэтому представляется целесообразным избегать перехода на циклы второго семейства.

Из рис. 4.22 видно, что уменьшение  $m$  приводит к уменьшению амплитуды колебаний призмы. Однако максимальная выходная мощность оказывается даже несколько больше, чем при  $m = 1$ , причем этот максимум достигается

при меньшем значении  $k$ . В будущем представляется целесообразным провести более подробный анализ влияния отношения масс подвижных тел на производительность установки.

В заключение этого раздела заметим, что добавление материальной точки «между» призмой и неподвижным основанием сделало колебания системы «более интенсивными». Однако известно, что если прикрепить к призме материальную точку по другую сторону от неподвижного основания, то она будет играть роль динамического гасителя колебаний. Такая конфигурация может быть полезна для того, чтобы уменьшать амплитуду колебаний системы в случае, когда скорость потока становится слишком большой. Соответствующая система рассмотрена в работе [62], где предложен алгоритм регулирования колебаний, в рамках которого перемещение одной из материальных точек относительно призмы блокируется/деблокируется в зависимости от текущей скорости потока. Показано, что это позволяет заметно расширить диапазон рабочих скоростей потока.

#### **4.2.2. Динамика ветроэнергетической установки, использующей эффект флаттера**

Еще одним хорошо известным механизмом возникновения колебаний тел в потоке является флаттер. В отличие от галопирования, это явление возникает для хорошо обтекаемых тел (типа крыла), которые могут совершать изгибные и крутильные колебания в потоке среды. В данном разделе мы рассмотрим поведение ветроэнергетической установки, колебания рабочего элемента которой обусловлены флаттером.

## Уравнения движения

Рассмотрим электромеханическую систему, состоящую из аэродинамического маятника, соединенного с линейным электрогенератором (рис. 4.23). Маятник представляет собой крыло с симметричным профилем, закрепленное на державке  $O_1B$  (твердом стержне) таким образом, что хорда  $AB$  крыла расположена на этом стержне. Предположим, что центр масс  $G$  системы также лежит на прямой  $O_1B$ . Ось вращения маятника  $O_1$  вертикальна и закреплена на ползуне  $O_1E$ , который может двигаться вдоль неподвижной горизонтальной оси  $OY$ . Таким образом, маятник может совершать колебания в горизонтальной плоскости. Ползун с помощью цилиндрической пружины прикреплен к неподвижной точке  $O$ .

В точке  $E$  ползуна находится постоянный магнит. Этот магнит представляет собой сердечник линейного электрогенератора. При его возвратно-поступательном движении в обмотке генератора (катушке индуктивности) возникает электродвижущая сила (ЭДС). К обмотке генератора подключена внешняя полезная нагрузка, которая моделируется активным сопротивлением  $R$ .

Пусть система помещена в горизонтальный стационарный поток среды, скорость  $\mathbf{V}$  которого перпендикулярна оси  $OY$ .

Будем считать, что маятник находится в упругом закреплении, которое будем моделировать с помощью пружины растяжения/сжатия и спиральной пружины (см. рис. 4.23). Будем считать, что спиральная пружина не напряжена, когда державка  $O_1A$  направлена вдоль скорости потока. Введем неподвижную систему координат  $OXY$ , начало которой поместим в точку, в которой пружина растяжения/сжатия не деформирована, а ось абсцисс направим вдоль скорости набегающего потока.

Очевидно, механическая часть рассматриваемой системы имеет две степе-

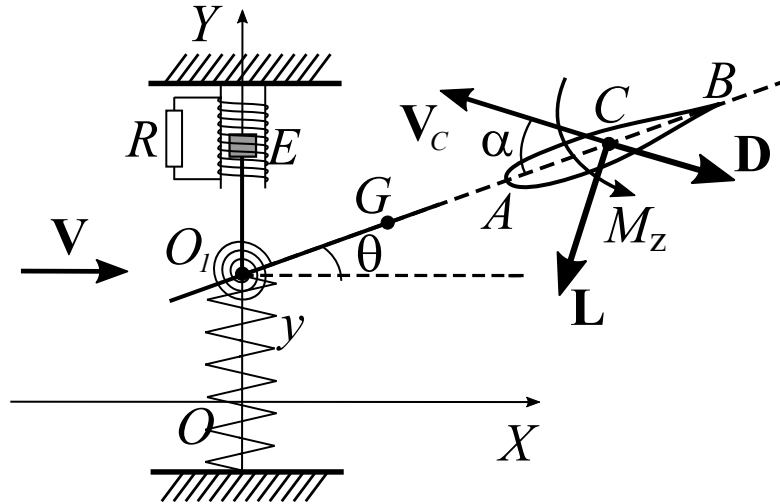


Рис. 4.23. Аэродинамический маятник с подвижной точкой подвеса.

ни свободы. Ее положение будем характеризовать двумя обобщенными координатами:  $y$  — координата точки подвеса и  $\theta$  — угол между стержнем  $O_1A$  и скоростью потока.

Предположим, что поток действует только на крыло. Будем считать, что удлинение крыла (т.е. отношение длины крыла к длине хорды) достаточно велико. Тогда можно считать, что поток вокруг крыла является двумерным. Следуя одному из вариантов квазистатического подхода, описанных в главе 1, представим аэродинамическую нагрузку в виде силы, приложенной в середине  $C$  хорды крыла, и крутящего момента вокруг этой точки. Аэродинамическую силу мы, как обычно, разложим на две составляющие: силу лобового сопротивления  $\mathbf{D}$ , направленную против воздушной скорости  $\mathbf{V}_C$  середины хорды, и подъемную силу  $\mathbf{L}$ , которая перпендикулярна  $\mathbf{V}_C$ . Подъемная сила и сила лобового сопротивления, а также аэродинамический крутящий момент описываются следующими формулами:

$$L = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_l(\alpha), D = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_d(\alpha), M = \frac{\rho S}{2} V_C^2 b C_m(\alpha). \quad (4.68)$$

Здесь  $\rho$  — плотность воздуха,  $S$  — площадь крыла,  $b$  — длина хорды  $AB$ ;  $\alpha$

— эффективный угол атаки, под которым мы будем понимать (как указано выше) угол между  $V_C$  и хордой крыла;  $C_l(\alpha)$ ,  $C_d(\alpha)$  и  $C_m(\alpha)$  — безразмерные коэффициенты подъемной силы, силы лобового сопротивления и момента, соответственно. Зависимость этих коэффициентов от угла атаки можно взять из статических экспериментов.

Угол атаки и воздушная скорость точки  $C$  определяются следующими кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned} V_C \cos \alpha &= V \cos \theta - \frac{dy}{dt} \sin \theta \\ V_C \sin \alpha &= V \sin \theta + \frac{dy}{dt} \cos \theta + r \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (4.69)$$

где  $r$  — расстояние от точки подвеса до середины  $C$  хорды.

Для описания электромеханического взаимодействия между механической и электрической частями системы воспользуемся подходом, примененным, в частности, в [98]. Составим уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} + m \xi \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta - m \xi \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta + h \frac{dy}{dt} + K(y)y &= \\ &= -\frac{\rho S}{2} V_C^2 (C_l(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + C_d(\alpha) \sin(\alpha - \theta)) - cI, \\ m (r_0^2 + \xi^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m \xi \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \theta + \delta \frac{d\theta}{dt} + K_\theta(\theta)\theta &= \\ &= \frac{\rho S}{2} V_C^2 (bC_m(\alpha) - rC_l(\alpha) \cos \alpha - rC_d(\alpha) \sin \alpha), \\ L_c \frac{dI}{dt} &= -(R + R_c) I + c \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Здесь  $m$  — масса системы,  $\xi$  — расстояние от точки подвеса до центра масс  $G$ ,  $r_0$  — радиус инерции маятника относительно центра масс,  $h$  — коэффициент демпфирования пружины растяжения/сжатия,  $\delta$  — коэффициент демпфирования спиральной пружины,  $I$  — ток в обмотках генератора и на внешнем сопротивлении  $R$ ,  $L_c$  и  $R_c$  — индуктивность и сопротивление обмоток генератора соответственно,  $c$  — коэффициент электро-механического взаимодействия.

Кроме того, предположим, что пружина растяжения/сжатия обладает нелинейной жесткостью, а коэффициент жесткости спиральной пружины постоянен:

$$K_y(y) = k + k_3 y^2, \quad K_\theta(\theta) = \kappa \quad (4.71)$$

Величины  $k$ ,  $k_3$  и  $\kappa$  являются положительными.

Таким образом, в нашей системе имеется два источника нелинейности: аэродинамика и жесткость пружины растяжения/сжатия в креплении.

Уравнения (4.70) вместе с соотношениями (4.69), (4.71) образуют замкнутую систему.

Чтобы уменьшить число параметров, введем безразмерное время  $\bar{t} = tb/U$  (где  $U$  — некоторая характерная скорость) и следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y}{b}, \quad \bar{I} = \frac{IR_c}{cU}, \quad \bar{r} = \frac{r}{b}, \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{b}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{b}, \quad \bar{V} = \frac{V}{U}, \quad \bar{V}_C = \frac{V_C}{U} \\ k &= \frac{kb^2}{mU^2}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{mU^2}, \quad \bar{h} = \frac{hb}{mU}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{mbU}, \quad \mu = \frac{\rho S b}{2m}, \quad k_3 = \frac{k_3 b^4}{mU^2} \\ \bar{L}_c &= \frac{L_c U}{R_c b}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_c}, \quad \bar{\varsigma} = \frac{c^2 b}{mUR_c} \end{aligned} \quad (4.72)$$

С учетом соотношений (4.72) безразмерные уравнения движения и кинематические соотношения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} + \bar{\xi} \frac{d^2 \theta}{d\bar{t}^2} \cos \theta - \bar{\xi} \left( \frac{d\theta}{d\bar{t}} \right)^2 \sin \theta + \bar{h} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} + \bar{\kappa} \bar{y} + \bar{k}_3 \bar{y}^3 &= \\ &= -\mu \bar{V}_C^2 (C_l(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + C_d(\alpha) \sin(\alpha - \theta)) - \bar{\varsigma} \bar{I} \\ (\bar{r}_0^2 + \bar{\xi}^2) \frac{d^2 \theta}{d\bar{t}^2} + \bar{\xi} \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} \cos \theta + \bar{\delta} \frac{d\theta}{d\bar{t}} + \bar{\kappa} \theta &= \\ &= \mu \bar{V}_C^2 (C_m(\alpha) - \bar{r} C_l(\alpha) \cos \alpha - \bar{r} C_d(\alpha) \sin \alpha) \\ \bar{L}_c \frac{d\bar{I}}{d\bar{t}} &= -(\bar{R} + 1) \bar{I} + \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_C \cos \alpha &= \bar{V} \cos \theta - \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \sin \theta, \\ \bar{V}_C \sin \alpha &= \bar{V} \sin \theta + \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \cos \theta + \bar{r} \frac{d\theta}{d\bar{t}}\end{aligned}\quad (4.74)$$

Далее (если не будет указано противное) для упрощения записи будем опускать черту над безразмерными величинами и обозначать производную по безразмерному времени точкой.

Будем считать, что индуктивность обмоток генератора достаточно мала, так что  $L_c \ll 1$  — малый параметр. Это означает, что электрические процессы происходят существенно быстрее, чем механические. Нетрудно показать, что условия теоремы Тихонова для системы (4.73) выполнены. Рассмотрим вырожденную систему:

$$\begin{aligned}\ddot{y} + \xi \ddot{\theta} \cos \theta - \xi \dot{\theta}^2 \sin \theta + \chi \dot{y} + ky + k_3 y^3 &= \\ &= -\mu V_C^2 (C_l(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + C_d(\alpha) \sin(\alpha - \theta)) \\ (r_0^2 + \xi^2) \ddot{\theta} + \xi \dot{y} \cos \theta + \delta \dot{\theta} + \kappa \theta &= \\ &= \mu V_C^2 (C_m(\alpha) - r C_l(\alpha) \cos \alpha - r C_d(\alpha) \sin \alpha) \\ I &= \frac{\dot{y}}{R + 1}\end{aligned}\quad (4.75)$$

Здесь  $\chi = h + \varsigma (1 + R)^{-1}$ . Этот параметр отражает суммарное влияние демпфирования в пружине и нагрузки в электрической цепи и играет роль, так сказать, эффективного демпфирования.

Исследуем положения равновесия и периодические режимы системы (4.75) и обсудим возможность управления за счет изменения параметров.

## Положения равновесия

Найдем положения равновесия  $\theta \equiv \theta_* = const$ ,  $y \equiv y_* = const$  системы (4.75). Из (4.74) следует, что в равновесии  $\alpha = \theta_*$  и  $V_C = V$ . Следовательно,

уравнения равновесия принимают вид

$$y_* (k + k_3 y_*^2) = \mu V^2 C_l(\theta_*) \quad (4.76)$$

$$\kappa \theta_* = \mu V^2 (C_m(\theta_*) - r C_l(\theta_*) \cos \theta_* - r C_d(\theta_*) \sin \theta_*) \quad (4.77)$$

Уравнение (4.77) содержит только  $\theta_*$ , так что уравнение (4.76) можно рассматривать как уравнение на  $y$ . Заметим, что, поскольку  $k > 0$  и  $k_3 > 0$ , это (4.76) имеет единственное решение при каждом  $\theta_*$ .

Функции  $C_m(\alpha)$ ,  $C_l(\alpha)$  и  $C_d(\alpha)$ , естественно, являются  $2\pi$ -периодичными по углу атаки  $\alpha$ . Кроме того, из экспериментов известно, что для симметричных профилей  $C_m(\alpha)$  и  $C_l(\alpha)$  являются нечетными функциями, а  $C_d(\alpha)$  — четной и положительной при всех  $\alpha$ . Следовательно, функция в правой части (4.77) является нечетной. Это означает, что при разных значениях  $\kappa$  уравнение (4.77) может иметь несколько решений. Более того, число этих решений стремится к бесконечности, когда  $\kappa$  стремится к нулю.

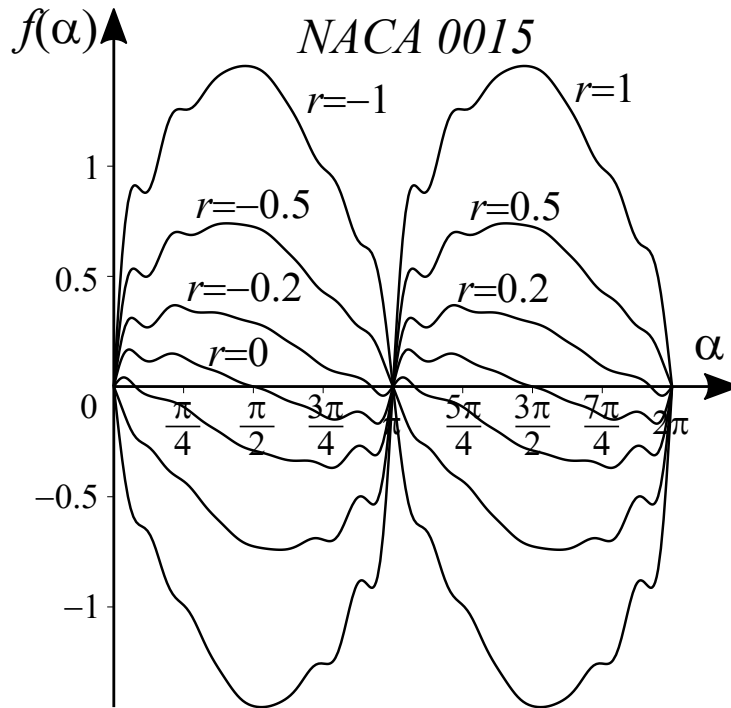


Рис. 4.24. Функция  $f(\alpha)$  для разных  $r$ .



Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = C_m(\alpha) - rC_n(\alpha) \quad (4.78)$$

Здесь  $C_n(\alpha) = C_l(\alpha) \cos \alpha + C_d(\alpha) \sin \alpha$  — коэффициент нормальной силы, т.е. компоненты аэродинамической силы, нормальной к хорде крыла.

Зависимости (4.78) приведены на рис. 4.24 для различных значений  $r$  (отрицательные значения  $r$  соответствуют ситуации, когда точка подвеса находится ниже по потоку, чем точка  $C$ ). Аэродинамические характеристики соответствуют симметричному профилю НАСА 0015 [178].

По результатам статических испытаний, выполняемых в аэродинамических трубах, для относительно тонких симметричных аэродинамических поверхностей может быть установлено следующее неравенство:

$$|\alpha f_{\alpha 0}| \geq |f(\alpha)|, \quad \text{где} \quad f_{\alpha 0} = \left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (4.79)$$

Из (4.79) следует, что если

$$\kappa > \mu V^2 f_{\alpha 0}, \quad (4.80)$$

то существует только одно положение равновесия, а именно, тривиальное. Если  $f_{\alpha 0} > 0$ , то для достаточно маленьких  $\kappa$  это неравенство нарушается, и существуют дополнительные пары равновесий (очевидно, если  $(y_*, \theta_*)$  — равновесие, то и  $(-y_*, -\theta_*)$  также является равновесием). Отметим, что при  $f_{\alpha 0} > 0$  увеличение скорости потока также ведет к нарушению (4.80) и возникновению дополнительных равновесий.

Пусть  $(y_*, \theta_*)$  — некоторое положение равновесия. Рассмотрим отклонения от этого положения:  $y = y_* + \Delta y$ ,  $\theta = \theta_* + \Delta \theta$  и запишем уравнения в отклоне-

ниях в матричной форме:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{y} \\ \Delta \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{\theta} \end{pmatrix} + \mathbf{C} \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta \theta \end{pmatrix} = 0 \quad (4.81)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi \cos \theta_* & r_0^2 + \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} k & \mu V^2 C_{l_*}^\alpha \\ 0 & \kappa - \mu V^2 f_{\alpha_*} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \chi + \mu V (C_{l_*}^\alpha + C_{d_*}) & r \mu V (C_{d_*} \cos \theta_* + 2 C_{l_*} \sin \theta_* + C_{l_*}^\alpha \cos \theta_*) \\ -\mu V f_{\alpha_*} & \delta - r \mu V (2 f_* \sin \theta_* + f_{\alpha_*} \cos \theta_*) \end{pmatrix}$$

Здесь

$$C_{d_*} = C_d(\alpha)|_{\alpha=\theta_*}, \quad C_{l_*} = C_l(\alpha)|_{\alpha=\theta_*}, \quad C_{l_*}^\alpha = \left. \frac{dC_l}{d\alpha} \right|_{\alpha=\theta_*},$$

$$f_* = f(\alpha)|_{\alpha=\theta_*}, \quad f_{\alpha_*} = \left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\theta_*}.$$

Матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , очевидно, не являются симметричными, так что в системе присутствуют и диссипативные, и гироскопические, и потенциальные, и позиционные неконсервативные силы.

Отметим также, что для тривиального положения равновесия ( $\theta_* = 0, y_* = 0$ ) матрица сил, зависящих от скорости и имеющих аэродинамическую природу, принимает следующий вид:

$$\mathbf{B}_{aero} = \mu V \begin{pmatrix} C_{l_0}^\alpha + C_{d_0} & r(C_{d_0} + C_{l_0}^\alpha) \\ -f_{\alpha 0} & -r f_{\alpha 0} \end{pmatrix}$$

Ее ранг равен 1. Выпишем соответствующую матрицу диссипативных сил:

$$\mathbf{D}_{aero} = \mu V \begin{pmatrix} C_{l_0}^\alpha + C_{d_0} & \frac{1}{2} (r(C_{d_0} + C_{l_0}^\alpha) - f_{\alpha 0}) \\ \frac{1}{2} (r(C_{d_0} + C_{l_0}^\alpha) - f_{\alpha 0}) & -r f_{\alpha 0} \end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что, с учетом (4.78), ее определитель в этом случае равен

$$\det \mathbf{D} = -\frac{1}{4}\mu^2 V^2 (\xi(C_{d0} + C_{l0}^\alpha) + f_{\alpha 0})^2 = -\frac{1}{4}\mu^2 V^2 (C_{m0}^\alpha)^2 < 0$$

Таким образом, имеет место антидиссипация, обусловленная аэродинамическим воздействием.

Из вида матрицы  $C$  можно легко найти достаточное условие неустойчивости:

$$\kappa < \mu V^2 f_{\alpha*} \quad (4.82)$$

При выполнении этого условия (что, разумеется, возможно только в случае, когда  $f_{\alpha*} > 0$ ) соответствующее равновесие представляет собой седло.

Сравнивая (4.80), (4.82) и (4.79), мы можем заключить, что «косые» равновесия существуют, когда тривиальное равновесие является седлом.

Условия асимптотической устойчивости положений равновесия довольно громоздки. Поэтому рассмотрим некоторые частные случаи.

**Центр масс совпадает с точкой подвеса, демпфирование и внешняя нагрузка отсутствуют** Пусть центр масс находится в точке подвеса маятника ( $\xi = 0$ ) и, кроме того, демпфирование в пружинах отсутствует ( $\delta = h = 0$ ), а электрическая цепь разомкнута (это означает, что  $\chi = 0$ ). Ограничимся обсуждением устойчивости тривиального равновесия. Устойчивость «косых» равновесий более подробно анализируется в [172].

Характеристический полином этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} r_0^4 \lambda^4 - V\mu (f_{\alpha 0} r - r_0^2 (C_{l0}^\alpha + C_{d0})) \lambda^3 + \\ + (-\mu V^2 f_\alpha + k r_0^2 + \kappa) \lambda^2 - V\mu (V^2 f_\alpha \mu C_{d0} + f_\alpha k r - \kappa (C_{l0}^\alpha + C_{d0})) \lambda + \\ + k (\kappa - \mu V^2 f_\alpha) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Пусть положение равновесия не является седлом:

$$\kappa > \mu V^2 f_{\alpha 0}$$

Рассмотрим случай «тяжелого» крыла. В принятых обозначениях это означает, что можно ввести малый параметр  $\varepsilon = \sqrt{\mu} \ll 1$ , причем  $\kappa = \tilde{\kappa}\mu$  и  $k = \tilde{k}\mu$ , где  $\tilde{k} \sim 1$  и  $\tilde{\kappa} \sim 1$ .

Будем искать корни характеристического полинома (4.87) в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$ .

Нетрудно показать, что имеют место следующие аппроксимационные формулы:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm i \sqrt{\tilde{k}} \varepsilon - \frac{\varepsilon^2 V C_{d0}}{2} - \frac{\varepsilon^2 C_{l0}^\alpha (\tilde{\kappa} - \tilde{k} r_0^2)}{2(\tilde{\kappa} - V^2 f_{\alpha 0} - \tilde{k} r_0^2)} + o(\varepsilon^2) \\ \lambda_{3,4} &= \pm i \frac{\sqrt{\tilde{\kappa} - V^2 f_{\alpha 0}}}{r_0} \varepsilon + \frac{\varepsilon^2 V r f_{\alpha 0}}{2r_0^2} + \frac{\varepsilon^2 V^3 f_{\alpha 0} C_{l0}^\alpha}{2(\tilde{\kappa} - V^2 f_{\alpha 0} - r_0^2 \tilde{k})} + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.84)$$

Заметим, что формулы (4.84) можно использовать только тогда, когда выражение, стоящее в знаменателе, не является малой величиной, т.е.

$$|\tilde{\kappa} - V^2 f_{\alpha 0} - r_0^2 \tilde{k}| \sim 1$$

Рассмотрим отдельно случай, когда выражение  $\tilde{\kappa} - V^2 f_{\alpha 0} - r_0^2 \tilde{k}$  обращается в нуль, т.е.  $\tilde{k} = \tilde{k}_* = m(\tilde{\kappa} - \mu V^2 f_{\alpha 0})/r_0^2$ . Вновь будем искать корни характеристического полинома в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$ . Получим:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= i \sqrt{\tilde{k}_*} \varepsilon \pm \frac{V(1+i)}{2\sqrt{2}r_0} \sqrt{\frac{V f_{\alpha 0} C_{l0}^\alpha}{\sqrt{\tilde{k}_*}}} \varepsilon^{3/2} + O(\varepsilon^2) \\ \lambda_{3,4} &= -i \sqrt{\tilde{k}_*} \varepsilon \pm \frac{V(1-i)}{2\sqrt{2}r_0} \sqrt{\frac{V f_{\alpha 0} C_{l0}^\alpha}{\sqrt{\tilde{k}_*}}} \varepsilon^{3/2} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Очевидно, среди значений  $\lambda_{1-4}$  из (4.85) есть два с положительной действительной частью, и соответствующее положение равновесия неустойчиво.

Напомним, что для тонких профилей  $C_{l0}^\alpha > 0$ . Пусть, кроме того,  $f_{\alpha 0} < 0$  (это неравенство заведомо выполнено, если  $r$  достаточно велико, см. рис. 4.24). Тогда условия (4.82) не выполняются, а из (4.84) следует, что как для достаточно малых, так и для достаточно больших  $k$  выполнено  $Re(\lambda_{1-4}) < 0$  (учитывая, что  $C_d > 0$  для всех  $\alpha$ ), и соответствующее положение равновесия асимптотически устойчиво. В то же время, при сделанных предположениях  $\tilde{k}_* > 0$ .

Это означает, что в данной ситуации возникает следующий интересный эффект. Если у нас есть система с достаточной «мягкой» линейной пружиной, то тривиальное равновесие асимптотически устойчиво. Но если мы установим параллельно с ней еще одну пружину с большей жесткостью (такой, что получившийся в итоге коэффициент жесткости будет близок к  $k_*$ ), то равновесие станет неустойчивым. Иными словами, увеличение жесткости линейной пружины приводит к дестабилизации равновесия. Однако если установить достаточно «жесткую» пружину, то равновесие снова будет асимптотически устойчивым.

Таким образом, в этой системе возможна двукратная смена характера устойчивости положения равновесия при изменении коэффициента жесткости по одной из обобщенных координат (см. главу 2).

Проследим за эволюцией характера устойчивости тривиального равновесия при изменении жесткости спиральной пружины. При этом будем считать, что величина  $r$  отрицательна (точка  $C$  находится выше по потоку, чем точка подвеса), так что  $f_{\alpha 0} > 0$ . Пусть, кроме того, жесткость  $k$  достаточно велика (или скорость потока достаточно мала):

$$kr_0^2 > \mu V^2 f_{\alpha 0}$$

При малых  $\kappa$  (когда выполнено (4.82)) имеет место неустойчивость.

Пусть  $\kappa$  принадлежит интервалу  $(\mu V^2 f_{\alpha 0}, r_0^2 k)$ . Тогда выражения для действительных частей корней характеристического полинома в формулах (4.84)

будут отрицательными, так что положение равновесия асимптотически устойчиво.

Пусть теперь  $\kappa = Jk/m + u^2 f_{\alpha 0}$ . При этом  $mu^2 f_{\alpha 0} + Jk - m\kappa = 0$ , и для определения  $\lambda$  следует пользоваться формулами (4.85) (подставив вместо  $\kappa$  его выражение через  $k$ ). Как было отмечено выше, при этом два корня характеристического полинома имеют положительную правую часть, и положение равновесия неустойчиво.

Пусть, наконец,  $\kappa$  велико. Тогда, как видно из (4.84), вещественные части всех  $\lambda$  вновь становятся отрицательными.

Итак, характер устойчивости при увеличении  $\kappa$  меняется три раза. Как было показано в главе 2, это максимальное количество смен характера устойчивости при изменении жесткости по одной из обобщенных координат в системе с 2 степенями свободы.

**Центр масс не совпадает с точкой подвеса, длинная державка** Рассмотрим теперь случай, когда точка  $G$  не совпадает с точкой  $O_1$  подвеса маятника, т.е.  $\xi \neq 0$ . Чтобы несколько уменьшить количество параметров, будем считать, что характерная скорость равна  $U = b\sqrt{k/m}$  (здесь все величины размерные). Тогда безразмерная жесткость будет равна 1.

Из статических экспериментов (например, [67]) известно, что для тонких симметричных профилей  $|C_m(\alpha)/C_n(\alpha)| \leq 0.3$  для всех значений угла атаки, причем эта величина стремится к максимуму при  $\alpha \rightarrow 0$ . Кроме того,  $C_n(\alpha) \sin \alpha \geq 0$  при всех  $\alpha$ , и  $C_n(\alpha)$  обращается в нуль только при  $\alpha = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Следовательно, при выполнении условия

$$r > \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_m(\alpha)}{C_n(\alpha)} = \frac{C_m^\alpha}{C_n^\alpha} \quad (4.86)$$

где  $C_n^\alpha = dC_n/d\alpha|_{\alpha=0}$ ,  $C_m^\alpha = dC_m/d\alpha|_{\alpha=0}$ , знак выражения  $C_m(\theta_*) - C_n(\theta_*)r$

определяется знаком  $C_n(\theta_*)$ , а значит, уравнение (4.77) имеет единственный корень на интервале  $[-\pi, \pi]$ , а именно,  $\theta_* = 0$ . Таким образом, если державка достаточно длинная, то у системы имеется только одно положение равновесия на этом интервале. Однако следует отметить, что в случае, когда  $\kappa$  мало или  $V$  велико, имеются положения равновесия, в которых  $|\theta_*| > \pi$ . В частности, при  $\kappa = 0$  равновесиями будут все точки  $y_* = 0, \theta_* = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

В дальнейшем мы будем считать, что условие державка достаточно длинная, так что условие (4.86) выполнено.

Характеристическое уравнение для системы (4.81) в окрестности тривиального равновесия можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} r_0^2 \lambda^4 + ((\zeta - C_n^\alpha \xi) (r - \xi) V \mu + r_0^2 C_n^\alpha V \mu + \delta + (r_0^2 + \xi^2) \chi) \lambda^3 + \\ + ((\zeta - C_n^\alpha \xi) V^2 \mu + \zeta \chi r \mu V + C_{d0} V^2 \xi \mu + \delta C_n^\alpha V \mu + r_0^2 + \xi^2 + \kappa + \delta \chi) \lambda^2 + \\ + (\zeta (C_{d0} V^2 \mu + V \chi + r) \mu V + \kappa C_n^\alpha V \mu + \delta + \chi \kappa) \lambda + \zeta V^2 \mu + \kappa = 0 \quad (4.87) \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение  $\zeta = C_n^\alpha r - C_m^\alpha$ .

С учетом (4.86) имеем  $\zeta > 0$ .

Достаточным условием асимптотической устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического полинома и третьего минора  $H_3$  матрицы Гурвица. Выражение для  $H_3$  в общем случае сравнительно громоздкое. Рассмотрим вначале ситуацию, когда демпфирование и внешняя

нагрузка отсутствуют:  $\delta = h = \chi = 0$ . При этом

$$H_3 = \mu^4 C_{d0} \zeta (\zeta - C_n^\alpha \xi) (C_l^\alpha (r_0^2 + \xi^2 - r\xi) + \zeta (r - \xi)) (V^2 - u_1) (V^2 - u_2) \quad (4.88)$$

$$u_1 = \frac{\zeta (C_n^\alpha (r_0^2 + \xi^2 - r\xi) + C_m^\alpha \xi) - \kappa C_n^\alpha (\zeta - C_n^\alpha \xi)}{\mu C_{d0} \zeta (\zeta - C_n^\alpha \xi)},$$

$$u_2 = \frac{r (r_0^2 + \xi^2 - r\xi) - \kappa (r - \xi)}{\mu (C_l^\alpha (r_0^2 + \xi^2 - r\xi) + \zeta (r - \xi))}$$

Пусть  $r < \xi$ . Тогда  $\zeta - C_n^\alpha \xi < 0$  и  $u_1 < 0$ . С учетом того, что  $C_{d0} \ll 1$ , получаем, что  $u_2 > 0$ . Нетрудно показать, что при  $V < \sqrt{u_2}$  третий минор Гурвица положителен. В данной ситуации все коэффициенты характеристического полинома также положительны, и равновесие асимптотически устойчиво. При  $V > \sqrt{u_2}$  имеет место неустойчивость.

Пусть  $\xi < r < \xi + r_0^2/\xi$  и  $r < \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha$ . Тогда  $\zeta - C_n^\alpha \xi < 0$  и  $u_1 < 0$ . Если, кроме того,  $\kappa < r (r_0^2 + \xi^2 - r\xi) (r - \xi)^{-1}$ , то  $u_2 > 0$ , и, как и ранее, асимптотическая устойчивость имеет место при  $V < \sqrt{u_2}$ . Если  $\kappa$  больше этой величины, то  $u_2 < 0$ , и равновесие неустойчиво при всех положительных значениях скорости потока.

Пусть  $\xi < r < \xi + r_0^2/\xi$  и  $r > \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha$ . Тогда  $\zeta - C_n^\alpha \xi > 0$ , и при малых  $\kappa$  имеем  $u_1 > 0$  и  $u_2 > 0$ . Соответственно, в промежутке  $\min(\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2}) < V < \max(\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2})$  имеет место неустойчивость, а вне него (при положительных  $V$ ) — асимптотическая устойчивость. Таким образом, в этой ситуации увеличение скорости потока вначале приводит к потере устойчивости, но когда  $V$  превышает некоторое критическое значение, устойчивость восстанавливается.

Пусть  $r > \xi + r_0^2/\xi$  и  $r < \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha$ . Тогда  $\zeta - C_n^\alpha \xi < 0$  и  $u_1 < 0$ . Если при этом  $u_2 > 0$ , то положение равновесия неустойчиво при  $V < \sqrt{u_2}$  и устойчиво при  $V > \sqrt{u_2}$ . Если же  $u_2 < 0$ , то положение равновесия неустойчиво при всех  $V$ .



Пусть  $r > \xi + r_0^2/\xi$  и  $\xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha < r < \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha + r_0^2/(\xi + \kappa C_n^\alpha)$ . Тогда  $u_2 < 0$  и  $u_1 > 0$ . При  $V < \sqrt{u_1}$  имеет место неустойчивость, а при  $V > \sqrt{u_1}$  асимптотическая устойчивость.

Таким образом, при определенном выборе значений параметров тривиальное равновесие неустойчиво в области малых скоростей потока, а рост  $V$  приводит к стабилизации. Этот эффект может быть полезен с прикладной точки зрения, поскольку при больших скоростях ветра ветроэнергетические системы, как правило, требуется «останавливать», чтобы избежать их разрушения вследствие чрезмерных нагрузок.

Пусть, наконец,  $r > \xi + r_0^2/\xi$  и  $r > \xi + C_m^\alpha/C_n^\alpha + r_0^2/(\xi + \kappa C_n^\alpha)$ . Тогда  $u_2 < 0$  и  $u_1 < 0$ . В этой ситуации асимптотическая устойчивость имеет место при любых значениях скорости потока. Иными словами, увеличение расстояния от крыла до точки подвеса маятника ведет к стабилизации равновесия.

Обсудим теперь влияние демпфирования. Нетрудно показать, что в отсутствие потока тривиальное положение маятника асимптотически устойчиво, если  $\xi \neq 0$ ,  $\kappa \neq 0$  и хотя бы один из коэффициентов демпфирования не равен нулю. Соответственно, при выполнении этих условий асимптотическая устойчивость имеет место и при достаточно малых скоростях потока.

Выражение для  $H_3$  представляет собой кубический полином относительно как  $\delta$ , так и  $\chi$ , причем коэффициент при  $\delta^3$  имеет вид  $C_n^\alpha \mu V + h > 0$ , а коэффициент при  $\chi^3$  представляет собой выражение  $(\zeta \mu V^2 + \kappa)(rV\mu\zeta + \delta)(r_0^2 + \xi^2) > 0$ . Значит, при достаточно больших значениях  $\delta$  и/или  $\chi$  тривиальное равновесие, как и следовало ожидать, асимптотически устойчиво.

На рис. 4.25 изображена область неустойчивости тривиального равновесия на плоскости  $(\chi, V)$  при разных значениях  $\delta$  и  $\kappa$ . Для расчетов использованы

следующие значения остальных безразмерных параметров:

$$r = 1, \quad \xi = 0.6, \quad r_0 = 0.8, \quad \mu = 0.1, \quad C_n^\alpha = 6.0, \quad C_m^\alpha = 1.5, \quad C_{d0} = 0.1$$

Видно, что эффект двукратного изменения характера устойчивости при увеличении скорости потока и стабилизации при больших значениях  $V$  сохраняется в некотором диапазоне значений коэффициентов демпфирования. Увеличение

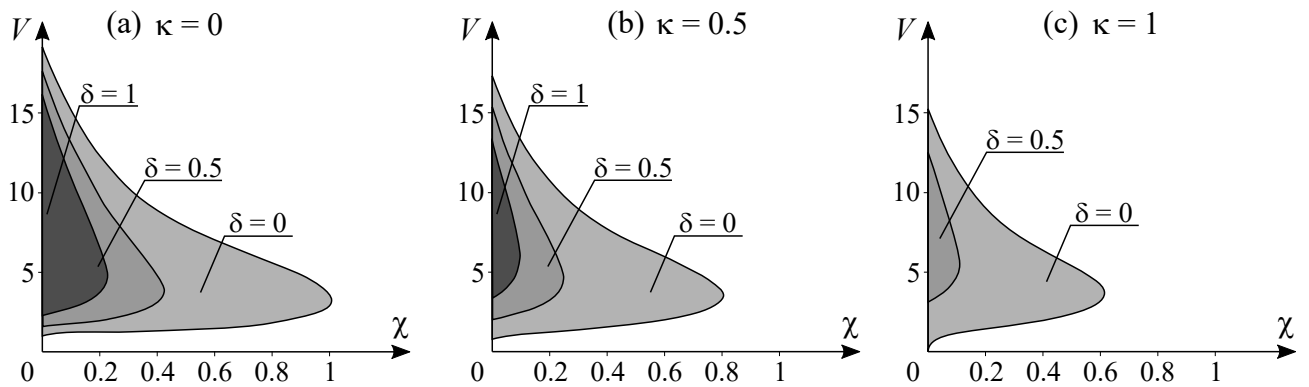


Рис. 4.25. Область неустойчивости на плоскости параметров  $(\chi, V)$  при разных значениях  $\delta$  и  $\kappa$ : (a)  $\kappa = 0$ ; (b)  $\kappa = 0.5$ ; (c)  $\kappa = 1$ .

жесткости спиральной пружины при выбранных значениях прочих параметров ведет к уменьшению области неустойчивости.

Вообще говоря, выражение  $H_3$ , рассматриваемое как полином относительно  $\delta$  или  $\chi$ , может иметь три действительных положительных корня. В таком случае характер устойчивости равновесия будет изменяться 3 раза при изменении соответствующего коэффициента демпфирования от нуля до бесконечности.

Это проиллюстрировано на рис. 4.26, где серым цветом показана область неустойчивости на плоскости  $(V, \ln \delta)$  при разных значениях  $\kappa$ . Пунктирными линиями отмечены значения скорости, соответствующие изменению характера устойчивости (бифуркации Андронова-Хопфа) при  $\delta = 0$ . Для расчетов исполь-

зованы следующие значения:

$$\xi = 0.7, \quad r_0 = 0.3, \quad \mu = 0.01, \quad \chi = 0.1$$

Для остальных параметров приняты те же значения, что и ранее. Видно, что

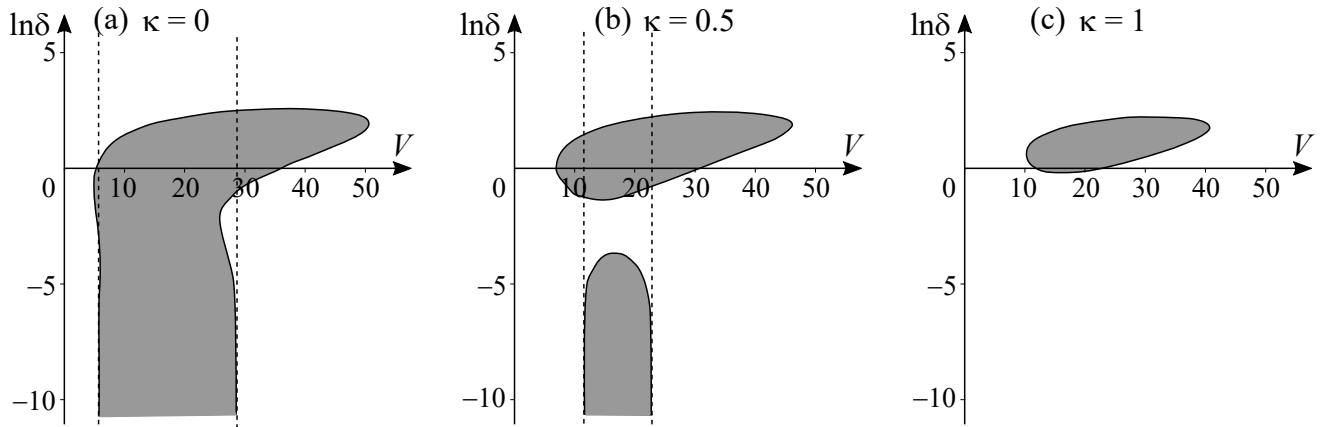


Рис. 4.26. Область неустойчивости на плоскости параметров  $(V, \ln \delta)$  при разных значениях  $\kappa$ : (a)  $\kappa = 0$ ; (b)  $\kappa = 0.5$ ; (c)  $\kappa = 1$ .

можно выбрать значения параметров таким образом, что при увеличении  $\delta$  от нуля до бесконечности будет наблюдаться «чередование» характера устойчивости равновесия: неустойчивость при малых  $\delta$ , стабилизация при некотором увеличении  $\delta$ , дестабилизация при дальнейшем увеличении  $\delta$ , и, наконец, снова стабилизация. Этот эффект наиболее отчетливо выражен на рис. 4.26, б.

Возможна также ситуация, когда  $H_3$  обращается в нуль при двух положительных значениях  $\delta$ . В частности, на рис. 4.26, с тривиальное равновесие при  $\delta = 0$  асимптотически устойчиво при всех скоростях потока. Однако если  $V$  не слишком мало, то увеличение  $\delta$  приводит к дестабилизации положения равновесия. Устойчивость восстанавливается, только когда  $\delta$  становится больше некоторого критического значения, зависящего от скорости потока.

Надо отметить, что и при маленьких, и при больших значениях  $V$  асимптотическая устойчивость имеет место при всех  $\delta$ . Найти физически осмысленные

значения параметров системы, при которых подобные эффекты наблюдались бы при изменении коэффициента  $h$ , не удалось.

## Периодические решения и оценка выходной мощности

Исследуем периодические решения, существующие в рассматриваемой системе. Предположим, что пружина растяжения/сжатия имеет характеристику с упрочнением, так что коэффициент  $k_3$  велик:  $\varepsilon = 1/\sqrt{k_3} \ll 1$ .

Будем искать периодические решения вида

$$y = \varepsilon y_1 \sin \omega t + o(\varepsilon), \quad \theta = \varepsilon \theta_1 \sin \omega t + \varepsilon \theta_2 \cos \omega t + o(\varepsilon) \quad (4.89)$$

Для поиска периодических решений автономных динамических систем существует множество методов (например, [27]). Мы воспользуемся методом гармонического баланса.

Из статических экспериментов известно, что в области малых углов атаки имеют место следующие соотношения:  $C_l(\alpha) = C_{l0}^\alpha \alpha$ ,  $C_m(\alpha) = C_{m0}^\alpha \alpha$ ,  $C_d(\alpha) = C_{d0} + C_{d2} \alpha^2$ .

Тогда, подставив (4.89) в уравнения (4.75) и (4.74) и оставляя только члены первого порядка малости, получим следующие уравнения для неизвестных  $y_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\omega$ :

$$\begin{aligned} & -(\xi \theta_1 + y_1) \omega^2 - C_n^\alpha \mu V \omega r \theta_2 + \mu V^2 C_l^\alpha \theta_1 + \frac{3}{4} y_1^3 + y_1 = 0 \\ & -\xi \theta_2 \omega^2 + (\mu V r C_n^\alpha \theta_1 + (\mu V C_n^\alpha + \chi) y_1) \omega + \mu V^2 C_l^\alpha \theta_2 = 0 \\ & -((r_0^2 + \xi^2) \theta_1 + \xi y_1) \omega^2 - (\mu \zeta V r + \delta) \theta_2 \omega + (\zeta \mu V^2 + \kappa) \theta_1 = 0 \\ & -(r_0^2 + \xi^2) \theta_2 \omega^2 + (\mu \zeta V r + \delta) \theta_1 \omega + \mu V \zeta y_1 \omega + (\zeta \mu V^2 + \kappa) \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

Из (4.90) получаем формулу для частоты:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{B_2^2 \pm 4B_4B_0}{2B_4}} \quad (4.91)$$

$$B_4 = (C_n^\alpha \Psi + C_m^\alpha \xi) V \mu \Psi + \chi L^4 + \delta \xi^2$$

$$B_2 = (\chi r^2 \zeta \mu - 2hL^2 - V \mu (C_n^\alpha \Psi + C_m^\alpha \xi)) \zeta \mu V^2 + (C_n^\alpha \mu V + \chi) (\delta^2 + Vr \zeta \mu \delta - 2L^2 \kappa) + V \zeta \mu \delta r \chi - V^2 \xi \mu \delta C_n^\alpha + \mu V \xi \kappa (\zeta + r C_n^\alpha) + V \mu C_{d0} (\delta V \xi - \Psi \mu V^2 \zeta)$$

$$B_0 = (\chi \zeta \mu V^2 + \kappa (C_n^\alpha \mu V + \chi) + \zeta \mu^2 V^3 C_{d0}) (\zeta \mu V^2 + \kappa)$$

Здесь

$$\Psi = r_0^2 + \xi^2 - r \xi, \quad L = \sqrt{r_0^2 + \xi^2}$$

Таким образом, в системе может существовать до 2 циклов данного типа.

Величины  $y_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  для периодического решения, отвечающего корню  $\omega$  уравнения (4.91), имеют следующий вид:

$$y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} (\omega^2 - 1 + (C_n^\alpha \mu^2 V^2 - \omega^2 \xi) (\omega^2 \xi (L^2 \omega^2 - \mu V^2 \zeta - \kappa) + \omega^2 V \zeta \mu \delta) \Delta^{-1} + C_n^\alpha \mu \omega^4 V r (\Psi \mu V \zeta - \delta \xi) \Delta^{-1} - \mu^2 V^2 \zeta \omega^2 r (\omega^2 \xi \zeta + C_n^\alpha \kappa) \Delta^{-1} - \omega^2 V^2 C_{d0} (V \mu \zeta (\mu r V \zeta + \delta) - V^2 \mu \zeta \xi + \xi (L^2 \omega^2 - \kappa)) \Delta^{-1})^{1/2} \quad (4.92)$$

$$\theta_1 = -y_1 \omega^2 \Delta^{-1} (\mu^2 r V^2 \zeta^2 + L^2 \omega^2 \xi - \xi (\mu V^2 \zeta + \kappa) + V \mu \zeta \delta)$$

$$\theta_2 = y_1 \omega \Delta^{-1} (V \mu \Psi \zeta \omega^2 - \xi \delta \omega^2 - \mu V \zeta (\mu V^2 \zeta + \kappa))$$

$$\Delta = (\delta + \mu r V \zeta)^2 \omega^2 + (L^2 \omega^2 - \mu V^2 \zeta - \kappa)^2$$

Вообще говоря, не каждой величине  $\omega$ , определяемой выражением (4.91), соответствует периодический режим, даже если она положительна: необходимо еще, чтобы величина  $y_1$  была действительной и отличной от нуля.

Рассмотрим случай, когда спиральная пружина отсутствует ( $\kappa = \delta = 0$ ) и эффективное демпфирование  $\chi$  равно нулю. Тогда решения уравнения (4.91) имеют следующий вид:

$$\omega_1 = V \sqrt{\frac{\mu \zeta}{\Psi}}, \quad \omega_2 = V \sqrt{\frac{C_{d0} \zeta}{C_n^\alpha \Psi + C_m^\alpha \xi}}$$

Формулы (4.92) при этом упрощаются:

$$\omega = \omega_1 :$$

$$y_{11} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{V^2 \mu (\zeta(r - \xi) + \Psi C_l^\alpha)}{r \Psi}} - 1, \quad \theta_1 = -\frac{y_{11}}{r}, \quad \theta_2 = 0$$

$$\omega = \omega_2 :$$

$$y_{12} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-1 + C_{d0} V^2 \mu \frac{\zeta - C_n^\alpha \xi}{C_n^\alpha \Psi + C_m^\alpha \xi}},$$

$$\theta_1 = -y_{12} C_{d0} \frac{\zeta r \mu (C_n^\alpha \Psi + C_m^\alpha \xi) - \xi (C_l^\alpha L^2 - \zeta \xi)}{(C_l^\alpha L^2 - \zeta \xi)^2 + \zeta r \mu C_{d0} (C_n^\alpha \Psi + C_m^\alpha \xi)},$$

$$\theta_2 = -y_{12} \frac{(C_l^\alpha L^2 - \zeta \xi + C_{d0} r \xi) \sqrt{C_{d0} \mu \zeta (C_n^\alpha \Psi + C_m^\alpha \xi)}}{(C_l^\alpha L^2 - \zeta \xi)^2 + \zeta r \mu C_{d0} (C_n^\alpha \Psi + C_m^\alpha \xi)}$$

Как отмечалось выше, величина  $C_{d0}$  для тонких крыльев мала. Поэтому подкоренное выражение в формуле для  $y_{12}$  отрицательно, по крайней мере, для сравнительно небольших скоростей потока. Соответственно, в системе существует только один цикл указанного типа. Разумеется, эта ситуация сохраняется и в случае, когда коэффициент  $\chi$  отличен от нуля, но достаточно мал.

Рассмотрим еще случай, когда центр масс расположен достаточно близко к оси вращения, так что  $\xi < r$ , а радиус инерции мал, так что  $\Psi < 0$  и  $\text{sign}(C_n^\alpha \Psi + C_m^\alpha \xi) = \text{sign}(C_n^\alpha r_0^2 - \xi(\zeta - C_n^\alpha \xi)) = -\text{sign}(\xi(\zeta - C_n^\alpha \xi))$ . Нетрудно видеть, что в этой

ситуации величины  $\omega_1$  и  $y_{12}$  оказываются мнимыми, и циклы рассматриваемого вида не существуют.

Проведем численное моделирование динамики системы, чтобы изучить поведение предельных циклов в более широком диапазоне значений параметров. Для расчетов выберем следующие значения параметров:

$$r = 1.6, \quad r_0 = 0.8, \quad \kappa = \delta = 0, \quad \mu = 0, \quad k_3 = 50$$

Эволюция амплитуд  $A_\theta$  (по углу) и  $A_y$  (по положению), а также частоты  $\omega$  цикла при изменении коэффициента демпфирования в пружине растяжения/сжатия при различных значениях параметра  $\xi$  и  $V = 2$  представлена на рис. 4.27. Кругами и квадратами изображены результаты, полученные путем численного интегрирования уравнений движения (4.75)-(4.74). Сплошными и пунктирными линиями представлены результаты расчетов по формулам (4.91)-(4.92). Видно,

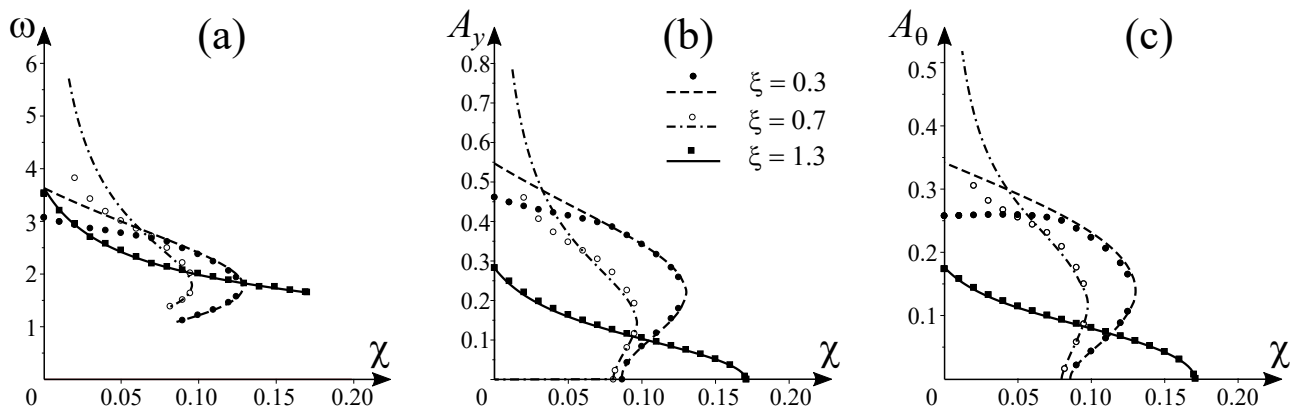


Рис. 4.27. Эволюция характеристик предельных циклов при изменении коэффициента  $\chi$  при разных значениях  $\xi$ : (a) частота цикла; (b) амплитуда по  $y$ ; (c) амплитуда по  $\theta$ . Точками изображены результаты численного интегрирования, линиями — расчет по аппроксимационным формулам.

что в тех случаях, когда амплитуды циклов не слишком велики, качество аппроксимации достаточно хорошее (причем как для притягивающих, так и для отталкивающих циклов).

При всех рассмотренных значениях  $\xi$  положение равновесия неустойчиво при  $\chi \in [0, \chi_*)$ . При достаточно больших расстояниях  $\xi$  от центра масс до оси вращения бифуркация Андронова-Хопфа, происходящая при  $\chi = \chi_*$ , является суперкритической. В системе наблюдается только один цикл (притягивающий) указанного типа. При уменьшении  $\xi$  эта бифуркация становится субкритической. Появляется интервал значений  $\chi$ , в котором существует притягивающий и отталкивающий циклы.

В определенном диапазоне  $\xi$  (и, в частности, при  $\xi = 0.7$ ) в области малых  $\chi$  цикла рассматриваемого типа не существует. Вместо этого в системе наблюдаются два симметричных относительно начала координат притягивающих цикла. Ни при  $\xi = 1.3$ , ни при  $\xi = 0.3$  эти циклы не наблюдаются. Этот эффект требует отдельного исследования.

Зависимость амплитуд циклов от скорости потока представлена на рис. 4.28 для случая  $\xi = 0.3$ ,  $r_0 = 1$ ,  $\chi = 0.1$ . Притягивающие циклы отмечены черными кружками, отталкивающие — серыми.

При выбранных значениях параметров выполнены неравенства  $\xi < r < \xi + r_0^2/xi$ , так что существует интервал значений скорости потока  $V \in (\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2})$  (см. ф-лу (4.88)), в котором тривиальное равновесие неустойчиво. Вне этого интервала имеет место асимптотическая устойчивость.

Отметим, что бифуркации Андронова-Хопфа, происходящие на границах этого интервала, имеют различный характер: на левой границе бифуркация является суперкритической, на правой — субкритической. Численное моделирование показывает, что такая картина наблюдается в достаточно широком диапазоне значений параметров системы.

В качестве оценки эффективности данной системы как устройства преобразования энергии потока представляется естественным использовать безразмер-



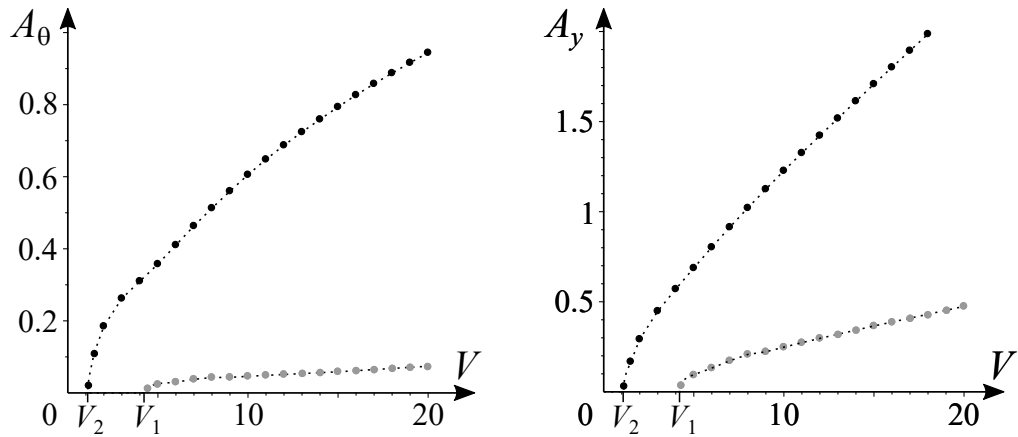


Рис. 4.28. Зависимость амплитуд циклов по углу ( $A_\theta$ ) и по смещению точки подвеса ( $A_y$ ) от скорости потока; черные точки — притягивающие циклы, серые — отталкивающие

ный коэффициент мощности. Предположим, что в системе существует притягивающий цикл с периодом  $T$ . Как и в работе [162], определим коэффициент мощности для этого предельного цикла как отношение мощности, вырабатываемой системой, к мощности потока, проходящей через сечение, ометаемое крылом в ходе колебаний. В терминах введенных выше безразмерных величин получаем следующую формулу:

$$C_p = \frac{P}{2Y_w V^3}$$

Здесь  $P$  — безразмерная мощность, а  $Y_w$  — максимум на множестве ординат всех точек крыла, взятый на периоде, т.е.

$$Y_w = \max \left( \max_{\tau \in [0, T)} (y + 0.5 \sin \theta), \max_{\tau \in [0, T)} (y - 0.5 \sin \theta) \right)$$

Если коэффициент демпфирования пружины мал по сравнению с коэффициентом, характеризующим полезную нагрузку, то можно считать, что полезная мощность, вырабатываемая генератором на рассматриваемом цикле, определяется следующей формулой:

$$P = \frac{\chi}{T} \int_0^T \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dt$$

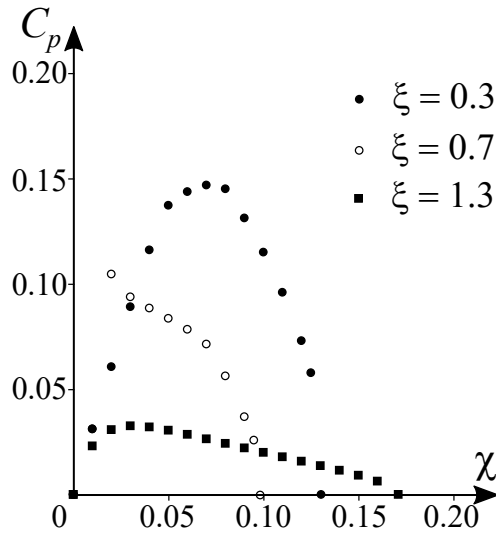


Рис. 4.29. Зависимость коэффициента мощности от  $\chi$  при разных значениях  $\xi$ .

Зависимость коэффициента мощности от эффективного коэффициента демпфирования  $\chi$  при различных значениях  $\xi$  и  $V = 2$  представлена на рис. 4.29. Видно, что для каждого  $\xi$  существует некоторое «оптимальное» значение параметра  $\chi$ , при котором  $C_p$  достигает максимума.

На рис. 4.30 проиллюстрировано влияние положения центра масс на максимальное значение  $C_p^{\max}$  коэффициента мощности. Расчеты выполнены при безразмерной скорости потока  $V = 2$ . Зависимость  $C_p$  от  $\xi$  немонотонная, и выбор величины  $\xi$  может существенно повлиять на вырабатываемую мощность. На рис. 4.31 приведена зависимость максимума  $C_p$  от скорости потока. Расчеты проведены при  $\xi = 0.4$ . Интересно, что зависимость максимума коэффициента мощности от скорости потока также немонотонная: при малых значениях  $V$  циклы отсутствуют, с ростом скорости величина  $C_p^{\max}$  возрастает, а затем начинает убывать.

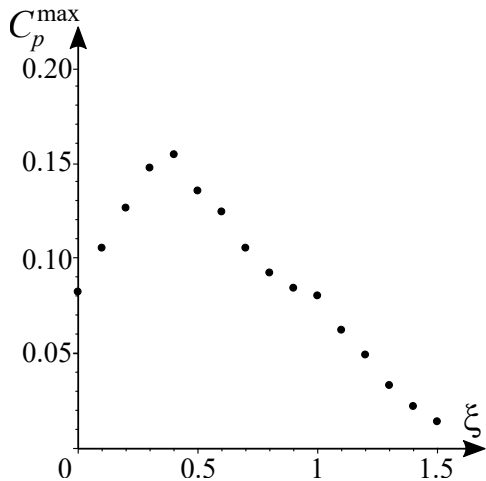


Рис. 4.30. Зависимость максимума коэффициента мощности от  $\xi$ .

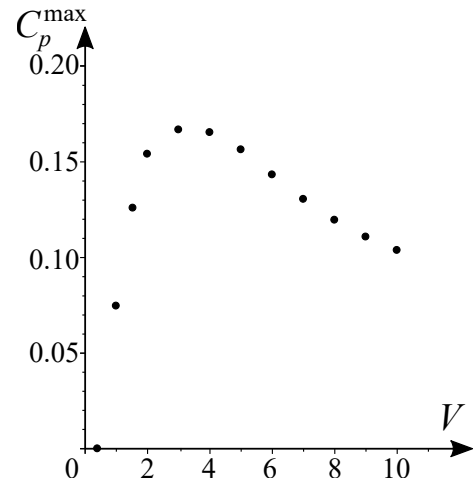


Рис. 4.31. Зависимость максимума коэффициента мощности от скорости потока.

### Управление колебаниями аэродинамического маятника с подвижной точкой подвеса

Необходимо отметить, что отдельной проблемой в динамике ветроэнергетических установок является необходимость их торможения, когда скорость потока становится слишком большой (во избежание поломки), и разгона, когда эта скорость возвращается в допустимые пределы. Поэтому целесообразно предусмотреть возможность управления в этих системах. Одним из способов управления является регулирование нагрузки (для автономных малых ветроэнергетических установок с вертикальной осью вращения такое управление описано, в частности, в [35, 37]). Кроме того, в ряде работ (например, [80, 129]) описывается пассивное управление ветроэнергетическими установками, осуществляемое за счет перемещения внутренних масс и направленное на повышение производительности.

Напомним, что с точки зрения преобразования энергии потока необходимо, чтобы маятник совершал колебания. Это означает, что рассматриваемое положение равновесия должно быть неустойчивым или, по крайней мере, иметь

сравнительно маленькую область притяжения. С другой стороны, когда скорость потока становится относительно большой, необходимо «гасить» колебания, чтобы избежать поломки устройства. Это значит, что положение равновесия должно быть асимптотически устойчивым (или иметь достаточно большую область притяжения).

Эти требования, очевидно, противоречат друг другу. Следовательно, в системе требуется управление. Его можно обеспечить с помощью привода в шарнире, но тогда управляющий момент должен будет «парировать» аэродинамическую нагрузку, которая быстро растет с увеличением скорости потока, и обеспечение питания привода может оказаться достаточно серьезной проблемой, особенно с учетом того, что установка должна работать в автономном режиме. Поэтому представляется целесообразным исследовать возможность параметрического управления. Ограничимся анализом влияния двух параметров: суммарного коэффициента демпфирования  $\chi$  и радиуса инерции  $r_0$ . С технической точки зрения, первый из них можно регулировать, изменяя сопротивление во внешней цепи. Второй параметр можно изменять, например, перемещая две точечные массы таким образом, чтобы они все время были расположены симметрично относительно главной центральной оси инерции маятника, перпендикулярной плоскости движения. При этом величины всех остальных параметров системы останутся неизменными.

Рассмотрим влияние параметров  $\chi$  и  $r_0$  на область существования притягивающего колебательного режима. Построим область существования притягивающего цикла на плоскости  $(V, \chi)$ , используя метод продолжения по параметру. Значение радиуса инерции примем фиксированным:  $r_0 = 1$ . Результаты расчетов приведены на рис. 4.32,а. Штриховкой изображена область, в которой флюгерное равновесие неустойчиво, а сплошной заливкой — область, в которой

существует притягивающий колебательный режим. Видно, что есть область зна-

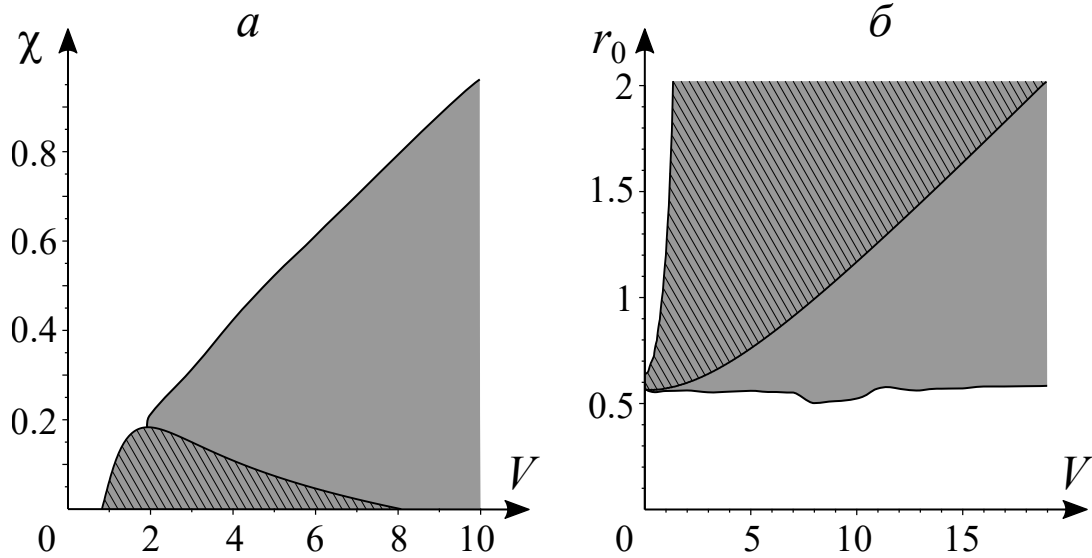


Рис. 4.32. Области неустойчивости равновесия (выделены штриховкой и заливкой) и существования притягивающего цикла (выделены заливкой) на плоскостях параметров: а)  $(V, \chi)$ , б)  $(V, r_0)$ .

чений параметров, в которой положение равновесия асимптотически устойчиво, но при этом существует притягивающий цикл. Таким образом, для гарантированного гашения колебаний при фиксированной скорости потока  $V$  (а не просто обеспечения асимптотической устойчивости равновесия) требуется достаточно сильно увеличить нагрузку:  $\chi > \chi_{cr}(V)$ . Заметим, что в диапазоне скоростей  $V > 2$  критическая величина  $\chi_{cr}$  почти линейно растет с ростом  $V$ . В то же время, возможности изменения величины  $\chi$  за счет внешнего сопротивления ограничены, поскольку  $\chi \leq h + \varsigma$  при любых значениях  $R$ .

Теперь рассмотрим влияние радиуса инерции на область существования притягивающего колебательного режима. Расчеты будем проводить при  $\chi = 0$ , поскольку случай, когда демпфирование в пружине и нагрузки отсутствуют, по-видимому, представляет собой «наихудший» вариант с точки зрения стабилизации положения равновесия.

Результаты численного моделирования проиллюстрированы на рис. 4.32,б. Область неустойчивости на плоскости  $(V, r_0)$  выделена пунктиром, а область существования притягивающего колебательного режима – сплошной заливкой. Видно, что при радиусе инерции  $r_0 \leq 0.5$  притягивающий предельный цикл отсутствует при всех рассмотренных значениях скорости потока. Соответственно уменьшение момента инерции не только стабилизирует флюгерное положение равновесия, но и обеспечивает для него достаточно большую область притяжения.

Таким образом, алгоритм управления может выглядеть следующим образом: в случае увеличения скорости ветра сверх критического значения радиус инерции уменьшается до величины порядка 0.5. Притягивающий цикл исчезает, и маятник приходит в асимптотически устойчивое флюгерное положение равновесия. При уменьшении скорости ветра до безопасного значения радиус инерции увеличивается, принимая «рабочее» значение. При этом флюгерное положение дестабилизируется, и маятник выходит на притягивающий колебательный режим. Вообще говоря, для некоторого ускорения переходных процессов можно регулировать нагрузку: увеличивать ее до максимума ( $\chi = h + \zeta$ , внешняя электрическая цепь замкнута накоротко) при торможении и уменьшать ее до минимального возможного значения ( $\chi = h$ , электрическая цепь разомкнута) при разгоне.

Проведем численное моделирование поведения маятника в случае, когда скорость потока представляет собой кусочно-постоянную функцию:

$$V = \begin{cases} V_1, & \tau \leq \tau_1, \\ V_2, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \\ V_1, & \tau \geq \tau_2. \end{cases} \quad (4.93)$$

Будем считать, что управление радиусом инерции осуществляется следующим

образом:

$$r_0 = \begin{cases} r_{0\max}, & V \leq V_*, \\ r_{0\min}, & V > V_*. \end{cases} \quad (4.94)$$

Пусть целевая величина нагрузки составляет  $\chi = \chi_0 = 0.1$ . Рассмотрим два варианта управления нагрузкой: без управления и с управлением в соответствии со следующим алгоритмом:

$$\chi = \begin{cases} \chi_0, & \tau \leq \tau_2, \\ h, & \tau_2 \leq \tau < \tau_2 + T, \\ \chi_0, & \tau \geq \tau_2 + T. \end{cases} \quad (4.95)$$

Здесь  $\tau_2$  — момент, когда скорость потока становится меньше порогового значения  $V_*$ , а  $T$  — длительность задержки до возврата к целевому значению нагрузки.

Примем следующие значения параметров управления:

$$h = 0.01, \quad T = 100, \quad r_{0\min} = 0.5, \quad r_{0\max} = 1.0$$

Пусть  $V_1 = 2$ ,  $V_2 = 10$ ,  $\tau_1 = 50$ ,  $\tau_2 = 100$ . Для остальных параметров будем использовать те же значения, что и ранее. Кроме того, проведем моделирование без управления как радиусом инерции, так и нагрузкой. Результаты расчетов представлены на рис. 4.33. Видно, что в случае, когда управление отсутствует, увеличение скорости потока приводит к существенному росту амплитуды и частоты колебаний. В то же время предложенный алгоритм управления обеспечивает торможение установки при увеличении скорости потока. Следует отметить, что выход на режим после возвращения скорости к нормальному значению происходит достаточно медленно. Однако управление нагрузкой позволяет заметно ускорить этот процесс.

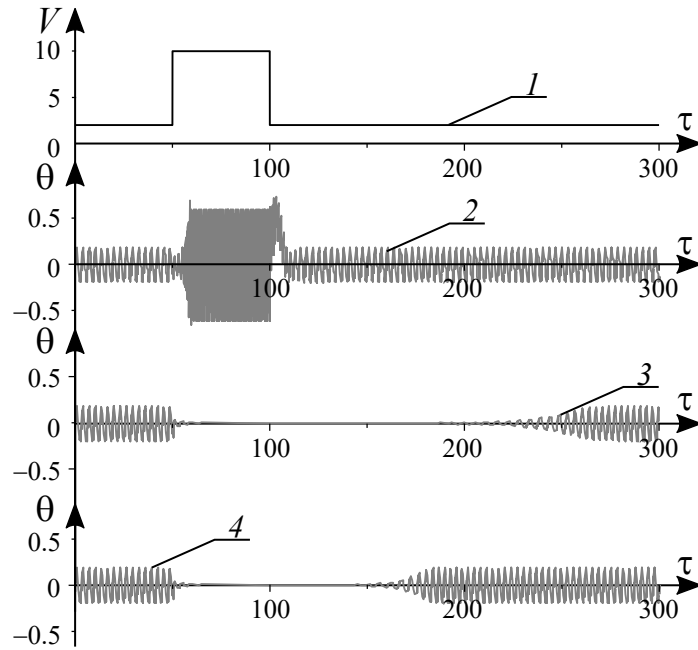


Рис. 4.33. Угловые колебания системы при кусочно-постоянной скорости ветра: 1 — зависимость скорости ветра от времени; 2 — без управления; 3 — с управлением радиусом инерции; 4 — с управлением радиусом инерции и нагрузкой.

## Выводы

Для малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения в случае, когда электромеханическое взаимодействие является линейным, существует диапазон значений внешней нагрузки (сопротивления), в котором у системы имеется два притягивающих стационарных режима. При изменении внешней нагрузки возникает гистерезис выходной мощности (и угловой скорости ветротурбины).

Для малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения в случае, когда электромеханическое взаимодействие является нелинейным, семейство стационарных режимов претерпевает перестройку, когда величина скорости потока проходит через некоторое критическое значение. Если скорость меньше этого критического значения, то существует диапа-



зон значений нагрузочного сопротивления, в котором стационарный «высокоскоростной» режим отсутствует; если же скорость больше этого критического значения, то стационарный «высокоскоростной» режим существует при всех значениях сопротивления.

Если в ветроэнергетическую установку, рабочий элемент которой представляет собой плохообтекаемое тело, совершающее галопирование в потоке среды, добавить еще одно тело (материальную точку), пружинно соединенное с первым телом и с неподвижным основанием, то при надлежащем выборе параметров критическая скорость потока, при которой возникает галопирование, уменьшится, а средняя мощность, производимая при установившихся колебаниях системы, возрастет.

В ветроэнергетической установке, рабочим элементом которой является упруго закрепленный аэродинамический маятник, точка подвеса которого может двигаться вдоль неподвижной прямой, максимум безразмерного коэффициента выходной мощности (по нагрузке) немонотонно зависит от расстояния от точки подвеса до центра масс: при смещении центра масс в сторону крыла этот максимум вначале возрастает, а затем начинает уменьшаться. Увеличение момента инерции маятника приводит к дестабилизации тривиального равновесия, а его уменьшение — к стабилизации этого равновесия и исчезновению предельных циклов в достаточно широком диапазоне значений скорости потока.

# Заключение

Основные результаты проведенного исследования можно сформулировать следующим образом:

1. Показано, что уравнения движения тела в потоке, полученные с помощью модели присоединенного осциллятора, приводятся к интегро-дифференциальной форме, аналогичной уравнениям, получаемым в рамках известного подхода к описанию нестационарного аэродинамического воздействия, использующего интеграл Дюамеля с экспоненциальным ядром.
2. Рассмотрено поступательное движение тела типа тонкого крыла поперек потока среды в случае, когда мгновенный угол атаки мал (движение достаточно медленное). С помощью модели присоединенного осциллятора показано, что при достаточно большой величине производной коэффициента нормальной силы по углу атаки коэффициент при ускорении тела, обусловленный наличием нестационарного аэродинамического воздействия, оказывается отрицательным, что дает основание говорить не о «присоединенной», а об «отсоединенной» массе.
3. Для линейной голономной системы с  $s$  степенями свободы показано, что при изменении диагонального элемента матрицы потенциальных сил характер устойчивости положения равновесия может изменяться не более  $2s - 1$  раз. Для любого конечного значения  $s$  существует система, в которой число изменений характера устойчивости равно максимально возможному.
4. Показано, что для линейной голономной системы с 2 степенями свободы существуют достаточные условия того, что при увеличении жесткости

по одной из обобщенных координат от некоторого фиксированного значения (возможно, отрицательного) до бесконечности характер устойчивости равновесия изменится 3 раза (неустойчивость — асимптотическая устойчивость — неустойчивость — асимптотическая устойчивость).

5. Для линейной голономной системы с 2 степенями свободы найдены достаточные условия того, что при увеличении жесткости по одной из обобщенных координат от некоторого фиксированного значения (возможно, отрицательного) до бесконечности характер устойчивости равновесия изменится 2 раза. Этот эффект возможен, в частности, в случае полной диссипации, если в системе присутствуют циркуляционные силы.
6. Рассмотрена задача о торможении тонкого крыла, поступательно движущегося поперек потока среды. Показано, что в случае равномерного торможения нормальная сила, действующая на крыло, не меняет направление, если ускорение крыла меньше определенного критического значения, и меняет направление два раза (один на фазе торможения, второй — на фазе последствия), если ускорение превышает это критическое значение. При этом на некотором интервале времени в ходе фазы торможения указанная сила препятствует торможению.
7. Исследована динамика однозвенного аэродинамического маятника. Показано, что для него существует диапазон значений длины державки, в котором положение равновесия «по потоку» является асимптотически устойчивым, если момент инерции маятника относительно точки подвеса меньше определенного критического значения, и неустойчивым, если момент инерции больше этого значения.
8. Рассмотрена динамика малых автономных ветроэнергетических устано-

вок с горизонтальной осью вращения. Показано, что в случае, когда электромеханическое взаимодействие является линейным, существует диапазон значений внешней нагрузки (сопротивления), в котором у системы имеется два притягивающих стационарных режима (один — «высокоскоростной», второй — «низкоскоростной»). При изменении внешней нагрузки возникает гистерезис выходной мощности (и угловой скорости ветротурбины).

9. Исследована динамика малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения в случае, когда электромеханическое взаимодействие является нелинейным. Показано, что семейство стационарных режимов претерпевает перестройку, когда величина скорости потока проходит через некоторое критическое значение. Если скорость меньше этого критического значения, то существует диапазон значений нагрузочного сопротивления, в котором стационарный «высокоскоростной» режим отсутствует; если же скорость больше этого критического значения, то стационарный «высокоскоростной» режим существует при всех значениях сопротивления.
10. Рассмотрена динамика ветроэнергетической установки колебательного типа, рабочий элемент которой представляет собой плохообтекаемое тело, совершающее галопирование в потоке среды. Показано, что если в эту систему добавить еще одно тело (материальную точку), пружинно соединенное с первым телом и с неподвижным основанием, то при надлежащем выборе параметров критическая скорость потока, при которой возникает галопирование, уменьшится, а средняя мощность, производимая при установившихся колебаниях системы, возрастет.

11. Исследована динамика ветроэнергетической установки, рабочим элементом которой является упруго закрепленный аэродинамический маятник, точка подвеса которого может двигаться вдоль неподвижной прямой, перпендикулярной набегающему потоку. Показано, что максимум безразмерного коэффициента выходной мощности (по нагрузке) немонотонно зависит от расстояния от точки подвеса до центра масс маятника: при смещении центра масс в сторону крыла этот максимум вначале возрастает, а затем начинает уменьшаться. Увеличение момента инерции маятника приводит к дестабилизации тривиального равновесия, а его уменьшение — к стабилизации этого равновесия и исчезновению предельных циклов в достаточно широком диапазоне значений скорости потока.

### **Перспективы дальнейшего развития тематики диссертации**

Одним из направлений дальнейших исследований является разработка модификаций квазистатического подхода, которые позволили бы обеспечить более точное описание аэродинамики вращающихся (или совершающих угловые колебания) тел в потоке среды, в том числе, при больших значениях мгновенного угла атаки. Это даст возможность, в частности, проводить эффективный параметрический анализ задач динамики малых ветроэнергетических установок с вертикальной осью вращения.

Актуальной задачей в рамках исследования различных типов колебательных ветроэнергетических установок является систематический анализ влияния на их динамику различных типов устройств генерации электроэнергии (генераторов различных типов, пьезоэлементов и т.д.), а также различных типов потребителей (в частности, стабилизаторов напряжения, аккумуляторов и т.п.), включенных в электрическую цепь.

Еще одним важным направлением является развитие модели малой ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения с целью учета возможности поворота установки вокруг вертикальной оси. Такой поворот необходим для адаптации к изменению направления ветра. Это приводит к существенному усложнению системы, в частности, в силу того, что когда угол между осью турбины и скоростью набегающего потока обтекание лопастей оказывается отличным от нуля, обтекание лопастей становится «косым». Для описания возникающих при этом аэродинамических сил и моментов потребуется внести модификации в используемую математическую модель.

## Список литературы

1. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Издательство Московского университета, 2006. 184 с.
2. Андронов П.Р., Досаев М.З., Дынникова Г.Я., Селюцкий Ю.Д., Стрекалов С.Д. Моделирование ветродвигателя колебательного типа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 4. С. 86–91.
3. Андронов А.А., Леонтович Е.В., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка М.: Наука, 1966. 568 с.
4. Астапов И.С., Белоцерковский С.М., Качапов Б.О., Кочетков Ю.А. О системах интегро-дифференциальных уравнений, описывающих неустановившееся движение тел в сплошной среде // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1628–1637.
5. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.
6. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Локтев Б.Е., Томшин В.М. Линейные и квазилинейные задачи динамики жесткого аппарата с отклоняющимися рулями // Труды Военно-воздушной инженерной академии имени профессора Н.Е. Жуковского. М.: издание Академии, 1971. № 1302. С. 110–146.
7. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
8. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М.: Наука, 1975. 424 с.
9. Бюшгенс Г.С. (ред.). Аэродинамика и динамика полёта магистральных са-

- молётов. М.-Пекин, Издательский отдел ЦАГИ, Авиа-издательство КНР, 1995. 772 с.
10. Головин А.А., Досаев М.З., Климина Л.А., Локишин Б.Я., Меснянкин С.Ю., Селюцкий Ю.Д. Об экспериментальном исследовании малогабаритной горизонтально-осевой ВЭУ. Отчет о НИР № 5148. М.: НИИ механики МГУ, 2011. 45 с.
  11. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. О влиянии упругого крепления на колебания двухзвенного аэродинамического маятника // Труды Московского физико-технического института. 2017. Т. 9, № 3. С. 8–13.
  12. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. О влиянии жёсткости крепления на динамику двухзвенного аэродинамического маятника // Доклады Академии наук. 2018. Т. 481, № 3. С. 254–257.
  13. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. Двухзвенный маятник в упругом подвесе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 6. С. 380–386.
  14. Гребешов Э.П., Шакарвене Е.П. Нестационарные характеристики трех прямоугольных крыльев различного удлинения // Труды ЦАГИ. 1989. № 2485 С. 3–31.
  15. Гроссман Е.П., Кричевский С.С., Борин А.А. К вопросу о потере устойчивости конструкцией крыла в полете // Труды ЦАГИ. 1935. № 202. 63 с.
  16. Гроссман Е.П., Келдыш М.В., Пархомовский Я.М. Вибрации крыла с эледроном. // Труды ЦАГИ. 1937. № 337. 98 с.
  17. С.В. Гувернюк, Г.Я. Дынникова Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 3–14.
  18. Диевский В.А. Приложение неголономной механики к общей теории электрических машин. М.: Лань, 2009. 120 с.



19. Досаев М.З., Климина Л.А. Методика исследования влияния параметров генератора на эффективность малых ветроэнергетических установок // Вопросы современной науки и практики. Университет имени В.И. Вернадского. Тамбов. 2014. Т. 4, № 54. С. 94–102.
20. Досаев М.З., Кобрин А.И., Лю В.-Л., Линь Ч.-Х., Селюцкий Ю.Д. Об особенностях функционирования миниветроэлектростанций // Вестник Московского энергетического института. 2007. № 1. С. 71–76.
21. Досаев М.З., Кобрин А.И., Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Ч. 1, 2. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007. 164 с.
22. Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О динамике малой ветроэлектростанции // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 1. С. 50–53.
23. Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Лю В.-Л., Линь Ч.-Х. Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 59–66.
24. Досаев М.З., Линь Ч.-Х., Лю В.-Л., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Качественный анализ стационарных режимов малых ветровых электростанций // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 3. С. 368–374.
25. Досаев М.З., Климина Л.А., Локшин Б.Я., Селюцкий Ю.Д. Об оптимизации формы лопасти ветротурбины // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 104–112.
26. Жуковский Н. Е. О парении птиц (Сообщено в Московском Математическом обществе 1891, октября 22). Берлин: Бюро иностр. науки и техники, 1922. 30 с.
27. Журавлёв В. Ф. Обобщение теоремы Рэля на гироскопические системы //

- Прикладная математика и механика. 1976. Vol. 40, № 4. P. 606–610.
28. Журавлёв В. Ф. Двумерный осциллятор Ван дер Поля с внешним управлением // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 211–222.
  29. Зевин А.А. К теории линейных неконсервативных систем // Прикладная математика и механика. 1988. Vol. 52, № 3. P. 386–391.
  30. Зенкин А.Н., Привалов В.А., Самсонов В.А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 4. С. 73–78.
  31. Иванов А.П. Об устойчивости механических систем с позиционными неконсервативными силами // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, № 5. С. 707–712.
  32. Карапетян А.В., Сумин Т.С. Перманентные вращения подвешенного на стержне тела с вязким наполнителем // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 3. С. 355–373.
  33. Карликов В.П., Малик Л.В., Пономаренко А.А., Фоминых В.В., Хомяков А.Н. Нестационарные динамические характеристики профиля НАСА-0018. Отчет о НИР № 4042. М.: НИИ механики МГУ, 1991. 29 с.
  34. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. К теории колеблющегося крыла // Технические заметки ЦАГИ. № 45. М.: ЦАГИ, 1935. С. 48–52.
  35. Климина Л.А. Метод формирования авторотаций в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2020. № 6. С. 3-14.
  36. Климина Л.А. Метод формирования асинхронных автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 2. С. 152–171.
  37. Климина Л.А. Ветрогенератор типа Дарье-Магнуса: динамика и управление

- ние // Известия Российской академии наук. Теория и систему управления. 2021. № 5. С. 91-104.
38. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: издательство МГУ, 1986. С. 86.
39. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. М.: издательство МГУ, 1992. 75 с.
40. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Об одной эвристической модели аэродинамического маятника. // *Фундаментальная и прикладная математика.* 1998. Т. 4, №. 3. С. 1047–1061.
41. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Авторотационные и автоколебательные режимы движения аэродинамического маятника // *Прикладная математика и механика.* 2013. Т. 77, № 4. С. 501–513.
42. *Люсин В.Д., Рябинин А.Н.* О галопировании призм в потоке газа или жидкости // *Труды ЦНИИ имени академика А. Н. Крылова.* 2010. Вып. 53 (337). С. 79–84.
43. *Махортых Г.В., Щеглова М.Г.* Экспериментальное исследование коэффициентов производных нормальной силы прямоугольных крыльев при поступательных колебаниях // *Ученые записки ЦАГИ.* 1990. Т. XXI, № 1. С. 11–19.
44. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
45. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: издательство механико-математического факультета МГУ, 1995. 224 с.
46. *Остославский И.В., Стражева И.В.* Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 500 с.

47. Привалов В.А., Привалова О.Г., Самсонов В.А. О динамике бумеранга // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 52–66.
48. Привалов В.А., Самсонов В.А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 55, № 2. С. 37–48.
49. Самсонов В.А. О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // Прикладная математика и механика. 1981. Vol. 45, № 3. С. 512–520.
50. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2004. № 4. С. 24–31.
51. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Феноменологическая модель взаимодействия пластины с потоком среды // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, № 7. — С. 43–62.
52. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Сопоставление различных форм записи уравнений движения тела в потоке среды // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 171–178.
53. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Математическая модель поведения малых ветровых электростанций // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 2. С. 85–95.
54. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О влиянии жесткости на устойчивость положения равновесия механической системы при отсутствии полной диссипации // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 4. С. 597–607.
55. Седов Л.И. Теория нестационарного глиссирования и движения крыла со сбегающими вихрями // Труды ЦАГИ. 1936. № 252. 40 с.

56. *Селюцкий Ю.Д.* О моделировании взаимодействия тела с потоком при угловых колебаниях тела // Труды конференции–конкурса молодых ученых 12–17 октября 2005 года. М.: Издательство Московского университета, 2006. С. 85–91.
57. *Селюцкий Ю.Д.* О динамике малых ветроэнергетических установок // Математическое моделирование. 2018. Т. 30, № 1. С. 31–39.
58. *Селюцкий Ю.Д.* О смене характера устойчивости положения равновесия при изменении жесткости по одной из обобщенных координат // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 491. С. 58–61.
59. *Селюцкий Ю.Д.* Динамика аэродинамического маятника с упруго закрепленной точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 4. С. 130–143.
60. *Селюцкий Ю.Д.* Об управлении движением аэродинамического маятника с упруго закрепленной точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2022. № 3. С. 31–40.
61. *Селюцкий Ю.Д.* Предельные циклы в динамике упруго закрепленного аэродинамического маятника // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 1. С. 133–144.
62. *Селюцкий Ю.Д.* О регулировании колебаний ветроэнергетической системы, использующей эффект галопирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2023. Т. 24, № 1. С. 46–56.
63. *Селюцкий Ю.Д.* Динамика ветроэнергетической установки с двумя подвижными массами, использующей эффект галопирования // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 2. С. 55–69.
64. *Сергеев В.С.* Об устойчивости равновесия крыла в нестационарном потоке

- // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64, № 2. С. 227–236.
65. *Сергеев В.С.* О резонансных колебаниях в некоторых системах с последствием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, № 5. С. 615–626.
66. *Сухоруков А.Л., Титов М.А., Чернышев И.А.* Об использовании численных методов динамики вязкой жидкости для определения коэффициентов вращательных производных гидродинамических сил и моментов // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2016. Т. 9, № 2. С. 52–61.
67. *Табачников В.Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки. // Труды ЦАГИ. 1974. Выпуск 1621. С. 79–93.
68. *Харитонов В.П.* Автономные ветроэлектрические установки. М.: Издательство ГНУ ВИЭСХ, 2006. 280 с.
69. *Храбров А.Н.* Математическое моделирование нестационарных аэродинамических характеристик в условиях развития отрыва потока при автоколебаниях модели на динамической установке свободных колебаний по тангажу // Ученые записки ЦАГИ. 2008. Т. 39, №. 4. С. 9–15.
70. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
71. *Abdelkefi A.* Aeroelastic energy harvesting: A review // International Journal of Engineering Science. 2016. Vol. 100. P. 112–135. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.10.006>.
72. *Abdelkefi A., Ghommem M., Nuhait A., Hajj M.R.* Nonlinear analysis and enhancement of wing-based piezoaeroelastic energy harvesters // Journal of Sound and Vibration. 2014. Vol. 333, № 1. P. 166–177. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.08.032>.
73. *Abdel-Rohman M.* Design of Tuned Mass Dampers for Suppression of Galloping in Tall Prismatic Structures // Journal of Sound & Vibration. 1994. Vol. 171,

- № 3. P. 289–299. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1121>.
74. *Abdelsalam A.M., Ramalingam V.* Wake prediction of horizontal-axis wind turbine using full-rotor modeling // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2014. Vol. 124. P. 7–19. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2013.11.005>.
75. *Abdullatif M., Mukherjee R., Hellum A.* Stabilizing and destabilizing effects of damping in non-conservative systems: some new results // Journal of Sound and Vibration. 2018. Vol. 413. P. 442 – 455. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.09.018>.
76. *Abohamer M.K., Awrejcewicz J., Starosta R., Amer T.S., Bek M.A.* Influence of the motion of a spring pendulum on energy-harvesting devices // Applied Sciences. 2021. Vol. 11. P. 8658. <https://doi.org/10.3390/app11188658>.
77. *Agafonov S.A.* The stability and stabilization of the motion of non-conservative mechanical systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. Vol. 74, № 4. P. 401–405. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.005>.
78. *Amandolese X., Michelin S., Choquel M.* Low speed flutter and limit cycle oscillations of a two-degree-of-freedom flat plate in a wind tunnel // Journal of Fluids and Structures. 2013. Vol. 43. P. 244–255. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.09.002>.
79. *Awrejcewicz J., Losyeva N., Puzyrov V.* Pervasive damping in mechanical systems and the role of gyroscopic forces // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2019. Vol. 99, № 4. P. e201800119. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800119>.
80. *Azadi Y.E.* Optimal Control of a Broadband Vortex-Induced Vibration Energy Harvester // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2020. Vol.

- 31, № 1. P. 137–151. <https://doi.org/10.1177/1045389X19888>.
81. *Barrero-Gil A., Alonso G., Sanz-Andres A.* Energy Harvesting from Transverse Galloping // *Journal of Sound & Vibration*. 2010. Vol. 329. P. 2873–2883. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.01.028>.
82. *Barrero-Gil A., Pindado S., Avila S.* Extracting energy from Vortex-Induced Vibrations: A parametric study // *Applied Mathematical Modelling*. 2012. Vol. 36, № 7. P. 3153–3160. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.09.085>.
83. *Bearman P. W.* Vortex Shedding from Oscillating Bluff Bodies // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1984. Vol. 16, № 1. P. 195–222. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.16.010184.001211>.
84. *Bearman P.W., Gartshore I.S., Maull D.J., Parkinson G.V.* Experiments on Flow-Induced Vibration of a Square-Section Cylinder // *Journal of Fluids & Structures*. 1987. Vol. 1, № 1. P. 19–34. [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(87\)90158-7](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(87)90158-7).
85. *Beddoes T.S.* Practical Computations of Unsteady Lift // *Vertica*. 1984. Vol. 8, № 1. P. 55–71.
86. *Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K.* Method of Discrete Vortices. USA: CRC Press. 1997. 454 p.
87. *Bertagnolio F., Sørensen N.N., Johansen J., Fuglsang P.* Wind turbine airfoil catalogue. Technical Report Risø-R-1280(EN). Roskilde: RisøNational, 2001. 152 p.
88. *Bianchini A., Ferrara G., Ferrari L.* Design guidelines for H-Darrieus wind turbines: Optimization of the annual energy yield // *Energy Conversion and Management*. 2015. Vol. 89. P. 690–707. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2014.10.038>.
89. *Bielawa R.L.* Development of an oscillating vane concept as an innovative wind



- energy conversion system. Technical Report SERI/TR-98085-2. USA: Solar Energy Research Institute, 1982.
90. *Birnbaum W.* Das ebene Problem des schlagenden Flügels // ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1924. Vol. 4, № 4. P. 277–292.
  91. *Blackwell B.F., Sheldahl R.E.* Selected wind tunnel test results for the Darrieus wind turbine // Journal of Energy. 1977. Vol. 1, № 6. P. 382–386. <https://doi.org/10.2514/3.47948>.
  92. *Brunton S., Rowley C.* Empirical state-space representations for Theodorsen's lift model // Journal of Fluids and Structures. 2013. Vol. 38. P. 174–186. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.10.005>.
  93. *Bryant M., Garcia E.* Modeling and Testing of a Novel Aeroelastic Flutter Energy Harvester // ASME Journal of Vibration and Acoustics. 2011. Vol. 133, № 1. Art. 011010. <https://doi.org/10.1115/1.4002788>.
  94. *Bulatovic R.M.* On the Stability of Potential Systems under the Action of Non-conservative Positional Forces // Regular and Chaotic Dynamics. 2020. Vol. 25. P. 330–337. <https://doi.org/10.1134/S1560354720040024>.
  95. *Cao H.V., Wentz Jr W.H.* Performance and aerodynamic braking of a horizontal-axis wind turbine from small-scale wind tunnel tests. Technical Report NASA-CR-180812. USA: National Aeronautics and Space Administration, 1987.
  96. *Caracoglia L.* Modeling the coupled electro-mechanical response of a torsional-flutter-based wind harvester with a focus on energy efficiency examination // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2018. Vol. 174. P. 437–450. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2017.10.017>.
  97. *Dai H., Yue X., Xie D., Atluri S.N.* Chaos and chaotic transients in an

- aeroelastic system // Journal of Sound and Vibration. 2014. Vol. 333, № 26. P. 7267–7285. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.08.034>.
98. *Dai H.L., Abdelkefi A., Javed U., Wang L.* Modeling and Performance of Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations // Smart Materials & Structures. 2015. Vol. 24, № 4. P. 045012. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/4/045012>.
99. *de Paor A.M.* Steady-state optimum resistive load control for wind-driven permanent magnet alternators // Applied Energy. 1982. Vol. 12, № 4. P. 317–325. [https://doi.org/10.1016/0306-2619\(82\)90067-8](https://doi.org/10.1016/0306-2619(82)90067-8).
100. *de Paor A.M.* Wind-driven permanent magnet alternators having appreciable inductance: Some aspects of steady-state behaviour and control // Applied Energy. 1984. Vol. 16, № 3. P. 163–174. [https://doi.org/10.1016/0306-2619\(84\)90018-7](https://doi.org/10.1016/0306-2619(84)90018-7).
101. *Den Hartog J.P.* Transmission Line Vibration Due to Sleet // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. 1932. Vol. 51. P. 1074–1086. <https://doi.org/10.1109/T-AIEE.1932.5056223>.
102. *Dimitriadis G., Li J.* Bifurcation Behavior of Airfoil Undergoing Stall Flutter Oscillations in Low-Speed Wind Tunnel // AIAA Journal. 2009. Vol. 47, № 11. P. 2577–2596. <https://doi.org/10.2514/1.39571>.
103. *Dosaev M.Z., Selyutskiy Y.D.* On dynamics of double pendulum in airflow // Proceedings of the 6th EUROMECH Nonlinear Oscillations Conference. 2008. P. 1–4.
104. *Dosaev M.* Interaction Between Internal and External Friction in Rotation of Vane with Viscous Filling // Applied Mathematical Modelling. 2019. Vol. 68. P. 21–28. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>.
105. *Dumitrescu H., Cardoso V.* Predictions of unsteady HAWT aerodynamics by

- lifting line theory // *Mathematical and Computer Modelling*. 2001. Vol. 33, № 4. P. 469–481. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(00\)00255-7](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(00)00255-7).
106. *Duncan W.J.* The Fundamentals of Flutter // *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 1945. Vol. 17, № 2. P. 32–38. <https://doi.org/10.1108/eb031215>.
107. *Edwards J.W., Ashley H., Breakwell J.V.* Unsteady aerodynamic modeling for arbitrary motions // *AIAA Journal*. 1979. Vol. 17, № 4. P. 365–374. <https://doi.org/10.2514/3.7348>.
108. *Erturk A., Inman D. J.* Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters // *Smart Materials and Structures*. 2008. Vol. 17, № 6. Art. 065016. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/17/6/065016>.
109. *Erturk A., Vieira W. G. R., De Marqui C., Inman D. J.* On the energy harvesting potential of piezoaeroelastic systems // *Applied Physics Letters*. 2010 Vol. 96, № 18. Art. 184103. <https://doi.org/10.1063/1.3427405>.
110. *Eugeni M., Elahi H., Fune F., Lampani L., Mastroddi F., Romano G.P., Gaudenzi P.* Numerical and experimental investigation of piezoelectric energy harvester based on flag-flutter // *Aerospace Science and Technology*. 2020. Vol. 97. P. 105634. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105634>.
111. *Facchinetti M.L., de Langre E., Biolley F.* Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations // *Journal of Fluids and Structures*. 2004. Vol. 19, № 2. P. 123–140. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2003.12.004>.
112. *Gallina P.* About the stability of non-conservative undamped systems // *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 262, № 4. P. 977 – 988. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01428-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01428-1).
113. *Gao G.-Z., Zhu L.-D.* Nonlinear Mathematical Model of Unsteady Galloping

- Force on a Rectangular 2:1 Cylinder // Journal of Fluids & Structures. 2017. Vol. 70. P. 47–71. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.01.013>.
114. *Gattulli V., Di Fabio F., Luongo A.* Simple and double Hopf bifurcations in aeroelastic oscillators with tuned mass dampers // Journal of the Franklin Institute. 2001. Vol. 338, № 2. P. 187–201. [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(00\)00077-6](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(00)00077-6).
115. *Gattulli V., Di Fabio F., Luongo A.* One to one resonant double Hopf bifurcation in aeroelastic oscillators with tuned mass dampers // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 262, № 2. P. 201–217. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01135-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01135-5).
116. *Ghommam M., Nayfeh A.H., Hajj M.R.* Control of limit cycle oscillations of a two-dimensional aeroelastic system // Mathematical Problems in Engineering. Vol. 2010. P. 1–13. <https://doi.org/10.1155/2010/782457>.
117. *Glauert H.* The force and moment on oscillating aerofoil. Vorträge Aus Dem Gebiete Der Aerodynamik Und Verwandter Gebiete. Berlin, Heidelberg: Springer, 1930. P. 88–95. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16).
118. *Goman M., Khrabrov A.* State-space representation of aerodynamic characteristics of an aircraft at high angles of attack // Journal of Aircraft. 1994. Vol. 31, № 5. P. 1109–1115. <https://doi.org/10.2514/3.46618>.
119. *Hagedorn P., Eckstein M., Heffel E., Wagner A.* Self-Excited Vibrations and Damping in Circulatory Systems // Journal of Applied Mechanics. 2014. Vol. 81, № 10. <https://doi.org/10.1115/1.4028240>.
120. *Halfman R.L.* Experimental aerodynamic derivatives of a sinusoidally oscillating airfoil in two-dimensional flow. NACA Technical Report № 1108. 1951. 44 p.
121. *Hansen M. H., Gaunaa M., Aagaard Madsen H.* A Beddoes-Leishman type

- dynamic stall model instate-space and indicial formulations. Technical Report Risø-R-1354(EN). Roskilde: RisøNational Laboratory, 2004. 41 p.
122. *Hansen M. O. L.* Aerodynamics of Wind Turbines (second edition). London: Earthscan, 2008. 192 p.
  123. *Hau E.* Wind Turbines. Fundamentals, Technologies, Application, Economics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. 784 p.
  124. *Hemon P., Amandolese X., Andrienne T.* Energy Harvesting from Galloping of Prisms: A Wind Tunnel Experiment // Journal of Fluids & Structures. 2017. Vol. 70. P. 390–402. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.006>.
  125. *Iswahyudi S., Sutrisno, Prajitno, Wibowo S.B.* Effect of blade tip shapes on the performance of a small HAWT: An investigation in a wind tunnel // Case Studies in Thermal Engineering. 2020. Vol. 19. P. 100634. <https://doi.org/10.1016/j.csite.2020.100634>.
  126. *Jafari M., Hou F., Abdelkefi A.* Wind-induced vibration of structural cables // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 100. P. 351–421. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05541-6>.
  127. *Javed U., Abdelkefi A., Akhtar I.* An Improved Stability Characterization for Aeroelastic Energy Harvesting Applications // Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation. 2016. Vol. 36. P. 252–265. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.12.001>.
  128. *Jekel D., Hagedorn P.* Stability of weakly damped MDGKN-systems: The role of velocity proportional terms // Z. Angew. Math. Mech. 2017. Vol. 97, № 9. P. 1128–1135. <https://doi.org/10.1002/zamm.201600288>.
  129. *Jin C., Kang H.Y., Kim M.H., Bakti F.P.* Performance Evaluation of Surface Riding Wave Energy Converter with Linear Electric Generator // Ocean Engineering. 2020. Vol. 218. P. 108141.

- <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108141>.
130. *Jones K.D., Davids S.T., Platzer M.F.* Oscillating-wing power generator // 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conf., USA. 1999. P. 1-6.
  131. *Karlicic D., Cajic M., Adhikari S.* Dual-Mass Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations and Base Excitation // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2021. Vol. 235, № 20. P. 4768–4783. <https://doi.org/10.1177/0954406220948910>.
  132. *Khaled M., Ibrahim M.M., Abdel Hamed H.E., AbdelGwad A.F.* Investigation of a small Horizontal–Axis wind turbine performance with and without winglet // Energy. 2019. Vol. 187. P. 115921. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.115921>.
  133. *Kim H., Lee S., Lee S.* Numerical analysis on the aerodynamics of HAWTs using nonlinear vortex strength correction // Current Applied Physics. 2010. Vol. 10, № 2, Supplement. P. S311–S315. <https://doi.org/10.1016/j.cap.2009.11.033>.
  134. *Kirillov O.N., Seyranian A.P.* Metamorphoses of characteristic curves in circulatory systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2002. Vol. 66, № 3. P. 371 – 385. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)00046-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00046-1).
  135. *Kirillov O.N., Verhulst F.* Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney’s umbrella? // Z. Angew. Math. Mech. 2010. Vol. 90, № 6. P. 462–488. DOI 10.1002/zamm.200900315.
  136. *Kishinami K., Taniguchi H., Suzuki J., Imano H., Kazunou, T., Turuhami M.* Theoretical and experimental study on the aerodynamic characteristics of a horizontal axis wind turbine //Energy. 2005. Vol. 30, № 11. P. 2089–2100. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2004.08.015>.

137. *Krechetnikov R., Marsden J.E.* On destabilizing effects of two fundamental nonconservative forces // *Physica D*. 2006. Vol. 214. P. 25–32. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2005.12.003>.
138. *Krogstad P.-A., Adaramola M. S.* Performance and near wake measurements of a model horizontal axis wind turbine // *Wind Energy*. 2012. Vol. 15, № 5. P. 743–756. <https://doi.org/10.1002/we.502>.
139. *Lazarus A., Thomas O.* A Harmonic-Based Method for Computing the Stability of Periodic Solutions of Dynamical Systems // *Comptes Rendus Mécanique*. 2021. Vol. 338, № 9. P. 510-517. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2010.07.020>.
140. *Lee B.H.K., Price S.J., Wong Y.S.* Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos // *Progress in Aerospace Sciences*. 1999. Vol. 35, № 3. P. 205–334. [https://doi.org/10.1016/S0376-0421\(98\)00015-3](https://doi.org/10.1016/S0376-0421(98)00015-3).
141. *Lee M.-H., Shiah Y.C., Bai C.-J.* Experiments and numerical simulations of the rotor-blade performance for a small-scale horizontal axis wind turbine // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2016. Vol. 149. P. 17–29. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2015.12.002>.
142. *Leishman J. G., Nguyen K. Q.* State-space representation of unsteady airfoil behavior // *AIAA Journal*. 1990. Vol. 28, № 5. P. 836–844. <https://doi.org/10.2514/3.25127>.
143. *Leishman J., Beddoes T.* A semi-empirical model for dynamic stall // *Journal of the American Helicopter Society*. 1989. Vol. 34. P. 3–17. <https://doi.org/10.4050/JAHS.34.3.3>.
144. *Lerbet J., Absi E., Rigolot A.* About the stability of nonconservative undamped elastic systems: some new elements // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2009. Vol. 09, № 02. P. 357–367.

<https://doi.org/10.1142/S0219455409003065>.

145. *Li Z., Wu Y., Hong J., Zhang Z., Chen W.* The study on performance and aerodynamics of micro counter-rotating HAWT // *Energy*. 2018. Vol. 161. P. 939–954. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.07.049>.
146. *Luo Q., Tong L.* Design and testing for shape control of piezoelectric structures using topology optimization // *Engineering Structures*. 2015. Vol. 97. P. 90–104. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.04.006>.
147. *Luo S.C., Chew Y.T., Ng Y.T.* Hysteresis Phenomenon in the Galloping Oscillation of a Square Cylinder // *Journal Fluids & Struct.* 2003. Vol. 18, № 1. P. 103–118. [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(03\)00084-7](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(03)00084-7).
148. *Luongo A., D'Annibale F.* On the destabilizing effect of damping on discrete and continuous circulatory systems // *Journal of Sound and Vibration*. 2014. Vol. 333, № 24. P. 6723–6741. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.07.030>.
149. *Mailybaev A.A., Seyranian A.P.* The effect of nonconservative forces on the stability of systems with multiple frequencies and the Nicolai paradox // *Doklady Physics*. 2011. Vol. 56, № 1. P. 32–38. <https://doi.org/10.1134/S1028335810901215>.
150. *Mannini C., Marra A.M., Bartoli G.* VIV-galloping instability of rectangular cylinders: Review and new experiments // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2014. Vol. 132. P. 109–124. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2014.06.021>.
151. *Marsden C.C., Price S.J.* The aeroelastic response of a wing section with a structural freeplay nonlinearity: An experimental investigation // *Journal of Fluids and Structures*. 2005. Vol. 21. P. 257–276. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2005.05.015>.
152. *Massai T., Zhao J., Lo Jacono D., Bartoli G., Sheridan J.* The effect



- of angle of attack on flow-induced vibration of low-side-ratio rectangular cylinders // *J. Fluids and Structures*. 2018. Vol. 82. P. 375–393. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2018.07.011>.
153. *McCarthy J., Watkins S., Deivasigamani A., John S.* Fluttering energy harvesters in the wind: A review // *Journal of Sound and Vibration*. 2016. Vol. 361. P. 355–377. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.043>.
154. *McKinney W., DeLaurier J.* Wingmill: An Oscillating-Wing Windmill // *Journal of Energy*. 1981. Vol. 5, № 2. P. 109-115. <https://doi.org/10.2514/3.62510>.
155. *Nemat-Nasser S., Prasad S.N., Herrmann G.* Destabilizing effect of velocity-dependent forces in nonconservative continuous systems // *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4, № 7. P. 1276–1280. <https://doi.org/10.2514/3.3659>.
156. *No T.S., Kim J.-E., Moon J.H., Kim S.J.* Modeling, control, and simulation of dual rotor wind turbine generator system // *Renewable Energy*. 2009. Vol. 34, № 10. P. 2124–2132. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2009.01.019>.
157. *Oka S., Ishihara T.* Numerical Study of Aerodynamic Characteristics of a Square Prism in a Uniform Flow // *Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics*. 2009. Vol. 97. P. 548–559. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2009.08.006>.
158. *Parkinson G.V., Brooks N.P.H.* On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders // *ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1961. Vol. 28, № 2. P. 252–258. <https://doi.org/10.1115/1.3641663>.
159. *Parkinson G.V., Smith J.D.* The Square Prism as an Aeroelastic Non-Linear Oscillator // *The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*. 1964. Vol. 17, N. 2. P. 225–239. <https://doi.org/10.1093/qjmam/17.2.225>.
160. *Pereira R., Schepers G., Pavel M.D.* Validation of the Beddoes-Leishman

- dynamic stall model for horizontal axis wind turbines using MEXICO data // Wind Energy. 2012. Vol. 16, № 2. P. 207–219. <https://doi.org/10.1002/we.541>.
161. *Pesmajoglou S.D., Graham J.M.R.* Prediction of aerodynamic forces on horizontal axis wind turbines in free yaw and turbulence // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2000. Vol. 86, № 1. P. 1–14. [https://doi.org/10.1016/S0167-6105\(99\)00125-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6105(99)00125-7).
162. *Pigolotti L., Mannini C., Bartoli G., Thiele K.* Critical and post-critical behaviour of two-degree-of-freedom flutter-based generators // Journal of Sound and Vibration. 2017. Vol. 404. P. 116–140. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.024>.
163. *Prandtl L.* Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben // Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). 1924. P. 18–33.
164. *Runyan H.R.* Single-degree-of-freedom-flutter calculations for a wing in subsonic potential flow and comparison with an experiment. NACA Technical Report № 1089. 1952. P. 1–8.
165. *Saettone S., Taskar B., Regener P.B., Steen S., Andersen P.* A Comparison Between Fully-Unsteady and Quasi-Steady Approach for the Prediction of the Propeller Performance in Waves // Applied Ocean Research. 2020. Vol. 99. Art. 102011. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2019.102011>.
166. *Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Y.D.* Methods of qualitative analysis in the problem of rigid body motion in medium // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2011. Vol. 21, № 10. P. 2955–2961. <https://doi.org/10.1142/S021812741103026X>.
167. *Sarioglu M., Akansu Y.E., Yavuz T.* Flow Around a Rotatable Square Cylinder–Plate Body // AIAA Journal. 2006. Vol. 44, № 5. P. 1065–1072.

- <https://doi.org/10.2514/1.18069>.
168. *Sarpkaya T.* Vortex-Induced Oscillations: A Selective Review // Journal of Applied Mechanics. 1979. Vol. 46, № 2. P. 241–258. <https://doi.org/10.1115/1.3424537>.
169. *Schoeftner J., Buchberger G.* A contribution on the optimal design of a vibrating cantilever in a power harvesting application — Optimization of piezoelectric layer distributions in combination with advanced harvesting circuits // Engineering Structures. 2013. Vol. 53. P. 92–101. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.03.022>.
170. *Selwanis M.M., Franzini G.R., Beguin C., Gosselin F.P.* Wind Tunnel Demonstration of Galloping Mitigation with a Purely Nonlinear Energy Sink // Journal of Fluids & Structures. 2021. Vol. 100. P. 103169. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103169>.
171. *Selyutskiy Y.D., Samsonov V.A., Andronov P.R.* On oscillations of aerodynamic pendulum // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2013. Vol. 13, № 7. P. 1–7. <https://doi.org/10.1142/S0219455413400105>.
172. *Selyutskiy Y.D.* On dynamics of an aeroelastic system with two degrees of freedom // Applied Mathematical Modelling. 2019. Vol. 67. P. 449–455. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.010>.
173. *Selyutskiy Y., Dosaev M., Holub A., Ceccarelli M.* Wind power harvester based on an aerodynamic double pendulum // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2022. Vol. 236, № 18. P. 10025–10032. <https://doi.org/10.1177/09544062221085483>.
174. *Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z.* Elastically Mounted

- Double Aerodynamic Pendulum // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2019. Vol. 19, № 5. P. 1–13. <https://doi.org/10.1142/S0219455419410074>.
175. *Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Lin C.H.* Piezoaeroelastic system on the basis of a double aerodynamic pendulum // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2021. Vol. 101. P. 1–12. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000092>.
176. *Selyutskiy Y.D., Klimina L.A., Masterova A.A., Hwang S.S., Lin C.H.* Savonius rotor as a part of complex systems // Journal of Sound & Vibration. 2019. Vol. 442. P. 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.10.020>.
177. *Selyutskiy Y.D.* Potential Forces and Alternation of Stability Character in Non-Conservative Systems // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 90. P. 191-199. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.070>.
178. *Sheldahl R.E., Klimas P.C.* Aerodynamic characteristics of seven symmetrical airfoil sections through 180-degree angle of attack for use in aerodynamic analysis of vertical axis wind turbines // Sandia Technical Report № SAND-80-2114. 1981. 120 p.
179. *Sicot C., Devinant P., Loyer S., Hureau J.* Rotational and turbulence effects on a wind turbine blade. Investigation of the stall mechanisms // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2008. Vol. 96, № 8. P. 1320–1331. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2008.01.013>.
180. *Singh R.K., Ahmed M.R., Zullah M.A., Lee Y.-H.* Design of a low Reynolds number airfoil for small horizontal axis wind turbines // Renewable Energy. 2012. Vol. 42. P. 66–76. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2011.09.014>.
181. *Sørensen J.N.* General Momentum Theory for Horizontal Axis Wind Turbines. Springer International Publishing, 2016. 194 P.

182. *Strganac T.W., Ko J., Thompson D.E., Kurdila A.J.* Identification and control of limit cycle oscillations in aeroelastic systems // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2000. Vol. 23, № 6. P. 1127–1133. <https://doi.org/10.2514/2.4664>.
183. *Sudhamshu A.R., Manik C.P., Nivedh S., Satish N.S., Vivek M., Ratna K.V.* Numerical study of effect of pitch angle on performance characteristics of a HAWT // *Engineering Science and Technology, an International Journal*. 2016. Vol. 19, № 1. P. 632–641. <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2015.09.010>.
184. *Sun Z., Haghghat S., Liu H.T., Bai J.* Time-domain modeling and control of a wing-section stall flutter / // *Journal of Fluids and Structures*. 2015. Vol. 340. P. 221–238. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.10.028>.
185. *Tao J.X., Viet N.V., Carpinteri A., Wang Q.* Energy harvesting from wind by a piezoelectric harvester // *Engineering Structures*. 2017. Vol. 133. P. 74–80. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.12.021>.
186. *Theodorsen T.* General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Technical Report № 496. 1935. P. 1–26.
187. *Theodorsen T., Garrick I.E.* Mechanism of Flutter: a Theoretical and Experimental Investigation of the Flutter Problem. NACA. Technical Report № 685, 1940. P. 1–46.
188. *Thornycroft J.I.* Wind Motor. U.S. Patent № 1 490 787. 1944.
189. *Timmer W.A., Bak C.* 4 Aerodynamic characteristics of wind turbine blade airfoils // *Advances in Wind Turbine Blade Design and Materials* / Ed. by P. Brøndsted, R.P.L. Nijssen. Woodhead Publishing, 2013. P. 109–149. <https://doi.org/10.1533/9780857097286.1.109>.
190. *Tummala A., Velamati R.K., Sinha D.K., Indraja V., Hari Krishna V.* A review on small scale wind turbines // *Renewable*

- and Sustainable Energy Reviews. 2016. Vol. 56. P. 1351–1371.  
<https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.12.027>.
191. *Udwadia F.E.* Stability of dynamical systems with circulatory forces: generalization of the Merkin theorem // AIAA Journal. 2017. Vol. 55, № 9. P. 2853–2858. <https://doi.org/10.2514/1.J056109>.
192. *Vicente-Ludlam D., Barrero-Gil A., Velazquez A.* Enhanced Mechanical Energy Extraction from Transverse Galloping Using a Dual Mass System // Journal of Sound & Vibration. 2015. Vol. 339. P. 290–303. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.11.034>.
193. *Wagner H.* Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1925. Vol. 5, № 1. P. 17–35.
194. *Wang K.F., Wang B.L., Gao Y., Zhou J.Y.* Nonlinear Analysis of Piezoelectric Wind Energy Harvesters with Different Geometrical Shapes // Archive of Applied Mechanics. 2020. Vol. 90. P. 721–736. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01636-8>.
195. *Williams D.R., Reißner F., Greenblatt D., Müller-Vahl H., Strangfeld C.* Modeling Lift Hysteresis on Pitching Airfoils with a Modified Goman–Khrabrov Model // AIAA Journal. 2017 Vol. 55, № 2. P. 403–409. <https://doi.org/10.2514/1.J054937>.
196. *Wojna M., Wijata A., Wasilewski G., Awrejcewicz J.* Numerical and experimental study of a double physical pendulum with magnetic interaction // Journal of Sound and Vibration. 2018. Vol. 430. P. 214–230. [10.1016/j.jsv.2018.05.032](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.05.032).
197. *Wu Y., Li D., Xiang J., Da Ronch A.* A modified airfoil-based piezoaeroelastic energy harvester with double plunge degrees of freedom //

- Theoretical and Applied Mechanics Letters. 2016. Vol. 6, № 5. P. 244–247.  
<https://doi.org/10.1016/j.taml.2016.08.009>.
198. *Xu K., Ge Y., Zhang D.* Wake oscillator model for assessment of vortex-induced vibration of flexible structures under wind action // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2015. Vol. 136. P. 192–200.  
<https://doi.org/10.1016/j.jweia.2014.11.002>.
199. *Yang Y., Zhao L., Tang L.* Comparative study of tip cross-sections for efficient galloping energy harvesting // Applied Physics Letters. 2013. Vol. 102, № 6. P. 064105. <https://doi.org/10.1063/1.4792737>.
200. *Zhang M., Zhang C., Abdelkefi A., Yu H., Gaidai O., Qin X., Zhu H., Wang J.* Piezoelectric Energy Harvesting from Vortex-Induced Vibration of a Circular Cylinder: Effect of Reynolds Number // Ocean Engineering. 2021. Vol. 235. P. 109378. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109378>.
201. *Zhao D., Hu X., Tan T., Yan Zh., Zhang W.* Piezoelectric Galloping Energy Harvesting Enhanced by Topological Equivalent Aerodynamic Design // Energy Conversion & Management. 2020. Vol. 222. P. 113260. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2020.113260>.
202. *Zhu Q.* Energy harvesting by a purely passive flapping foil from shear flows // Journal of Fluids and Structures. 2012. Vol. 34. P. 157–169.  
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.05.013>