МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Чикин Владимир Максимович

Деформации метрик, локальные и глобальные аспекты

Специальность 1.1.3 (01.01.04) – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Тужилин Алексей Августинович,**
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Кушнер Алексей Гурьевич,**
доктор физико-математических наук, доцент,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра физико-математических методов
управления, профессор

Богатый Семеон Антонович,
доктор физико-математических наук, доцент,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, механико-математический
факультет, кафедра общей топологии и
геометрии, профессор

Гусева Надежда Ивановна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский педагогический государственный
университет, институт математики и информатики,
кафедра геометрии, профессор

Защита диссертации состоится 23 сентября 2022 года в 16:45 на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 (МГУ.01.17) при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: sbgashkov@gmail.com

С диссертацией, а так же со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС "ИСТИНА": https://istina.msu.ru/dissertations/466439458.

Автореферат разослан 22 августа 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета, д.ф.-м.н., профессор **Гашков С. Б.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

В настоящей диссертации рассматриваются топологические пространства, на которых задан функционал длины. Как известно, функционал длины задается классом допустимых кривых, длины которых можно измерять, и длиной – отображением, которое приписывает неотрицательное число каждой кривой из этого класса. Имея функционал длины, можно определить внутреннюю метрику, индуцированную этой структурой. В этом случае расстояние между любыми двумя точками будет равно точной нижней грани длин допустимых кривых, соединяющих эти точки. В свою очередь, каждая метрика индуцирует функционал длины, классом допустимых кривых которого являются непрерывные относительно метрики кривые, а длина каждой кривой определяется как точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в эту кривую. Внутренние метрики, функционалы длины и их взаимосвязь подробно изучены [1] [2] [3] [4] [5]. Тем не менее, существует много открытых вопросов как о влиянии деформации функционала длины на соответствующую внутреннюю метрику, так и о влиянии деформации метрики на индуцированный ею функционал длины. К примеру, для многих типов пространств и типов деформаций метрики неизвестно, следует ли непрерывность расстояний из непрерывности длин кривых, а также следует ли непрерывность длин кривых из непрерывности расстояний. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые виды деформаций функционалов длины и метрик, и исследуем взаимосвязь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний, а также изучаем свойства отображений “пространства метрических компактов” Громова–Хаусдорфа в себя, индуцированных де-

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии / Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. - Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Gromov M. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces / Gromov M. - Progress in Math., 152, Birkhäuser, 1999.

[3] Khamsi M.A., Kirk W.A. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory / Khamsi M.A., Kirk W.A. - Wiley-IEEE, 2001.

[4] Busemann H. The Geometry of Geodesics / Busemann H. - Academic Press, New York, 1955.

[5] Papadopoulos A. Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature / Papadopoulos A. - IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 6, European Mathematical Society, 2005.

формациями метрик. В диссертации разрабатывается специальная теория деформаций внутренних метрик, которая имеет нетривиальные приложения в различных областях, таких как геометрия финслеровых и римановых многообразий, теория минимальных сетей и геометрия пространства Громова–Хаусдорфа.

Финслеровы и римановы многообразия. В качестве одного из приложений теории деформаций внутренних метрик, мы рассматриваем финслеровы многообразия, метрики которых непрерывно зависят от параметра. Первое обобщение римановой геометрии принадлежит Финслеру [6], который заменил квадрат элемента длины дуги кривой произвольной однородной функцией от дифференциалов локальных координат точки. Некоторые вопросы финслеровой геометрии рассматривались и в работе Нётер [7]. Подробное изучение финслеровой геометрии можно найти, например, в [8] [9] [10] [11] [12].

Минимальные сети. Впервые задача о поиске минимальной сети была поставлена Ферма до 1640 года. А именно, Ферма интересовал ответ на следующий вопрос: *как расположить на плоскости точку F так, чтобы сумма расстояний от нее до трех фиксированных точек A, B и C была наименьшей?* Общая задача о поиске связной кратчайшей сети, соединяющей данное конечное множество точек плоскости, была поставлена Ярником и Кесслером в 1934. В дальнейшем эта классическая задача получила название проблема Штейнера. Для некоторых множеств специального вида на плоскости минимальные деревья Штейнера известны. К примеру, как было показано Ярником и Кесслером [13], каждая крат-

[6] Finsler P. Uber Kerven und Flachen in allgemeinen Raumen / Basel, Verlag Birkhauser AG, 1951.

[7] Noether E. Invarianten beliebiger Differentialausdrücke / Noether E. // Nachr. Ges. Wiss. Gott., Math.-Phys. Kl., 1918, Vol. 1918, P. 37-44.

[8] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств / Москва: Наука, 1981.

[9] Antonelli P.L. Handbook of Finsler geometry / Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[10] Bao D., Chern S.S., Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry / Bao D., Chern S.S., Shen Z. - Springer-Verlag, 2000.

[11] Shen Z. Lectures on Finsler Geometry / Shen Z. - World Scientific Publishers, 2001.

[12] Shen Z. Differential geometry of spray and Finsler spaces / Shen Z. - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[13] Jarník V., Kössler. O minimálních grafech obsahujících n daných bodu / Jarník V., Kössler // PêstováníMat. (Essen), Cas, 1934, T. 63, P. 223-235.

чайшая сеть, соединяющая множество вершин правильного n-угольника, при $n > 13$ состоит из всех сторон этого n-угольника, за исключением любой одной. Кроме того, Ярник и Кесслер построили очевидные кратчайшие сети для случаев n, равного 3, 4 и 5. Лишь в 1987 Ду и Хванг [14] завершили описание кратчайших сетей, соединяющих вершины правильных многоугольников, доказав, что для $n \geq 6$ ответ такой же, как и для $n > 13$. Рубинштейном и Томасом [15] был получен результат, описывающий кратчайшие сети для данного набора точек на окружности, а именно: если M — конечное множество точек плоскости, лежащих на окружности радиуса r, и при этом не более одной стороны многоугольника M имеет строго большую чем r длину, то минимальное дерево Штейнера для множества M представляет собой объединение всех сторон этого многоугольника, за исключением самой длинной.

Конечное множество M точек плоскости называется *зигзагом*, если существует ломаная L, множество вершин которой совпадает с M, а звенья которой "поворачивают в разные стороны". Последнее означает, что если фиксировать некоторую ориентацию ломаной L, и каждой паре последовательных векторов-звеньев ломаной L поставить в соответствие знак ориентированного угла от первого звена ко второму, то получится знакопеременная последовательность. Ду, Хванг и Венг [16] получили результаты, описывающие кратчайшие сети для зигзагов определенного типа. Под руководством Рубинштейна выполнен цикл работ [17] [18] [19], описывающих различные свойства кратчайших сетей, затягивающих конечное множество M вершин стандартной квадратной решетки. Эти работы

[14] Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. Steiner Minimal Trees for Regular Polygons / Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. - Springer Verlag, New York, 1987.

[15] Rubinstein J.H., Thomas A.D. Graham's problem on shortest networks for points on a circle / Rubinstein J.H., Thomas A.D. // 7, Algorithmica, 1992, P. 193-218.

[16] Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. Steiner Minimal Trees for points on a zig-zag lines / Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. // v. 95, №4, Trans. Amer. Math. Soc., 1985, P. 149-156.

[17] Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. Full minimal Steiner trees on lattice sets / Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. // J. Comb. Theory Series A. 78, 1997, P. 51-91.

[18] Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. Minimal Steiner trees for $2^k \times 2^k$ square lattices / Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. // J. Comb. Theory Series A. 73, 1996, P. 91-110.

[19] Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. Minimal Steiner trees for rectangular arrays of lattice points / Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C. - Research Report N 24, Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia, 1995.

развивают результаты, полученные в [20] и [21], в первой из которых были исследованы кратчайшие сети, затягивающие так называемые лестницы, т.е. все вершины с координатами (m, n), где $1 \leq m \leq m_0$, $n = 1, 2$, а во второй — высказана гипотеза о том, как устроены кратчайшие сети для решетки, составленной из всех вершин вида (m, n), где $1 \leq m \leq 2^k$ si $1 \leq n \leq 2^k$.

Естественным обобщением проблемы Штейнера является задача описания минимальных сетей на замкнутых двумерных многообразиях. На них возникает новый тип локально минимальных сетей — замкнутые сети, т.е. сети, все вершины которых имеют степень три и отсутствуют граничные точки. Для замкнутых локально минимальных сетей Ивановым и Тужилиным [22] [23] был получен ряд результатов. В работе Heppes [24] они были классифицированы на стандартной двумерной сфере. Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах была получена в работе Иванова, Птициной и Тужилина [25]. Также Птициной [26] [27] была получена классификация на плоских бутылках Клейна и равногранных тетраэдрах. Ивановым и Тужилиным [28], а также Вдовиной и Селивановой [29] были приведены примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Примеры таких сетей на поверхностях многогранников приведены в

[20] Chung F.R.K., Graham R.L. Steiner trees for ladders / Chung F.R.K., Graham R.L. // v. 2, Ann. Disc. Math, 1978, P. 173-200.

[21] Chung F.R.K., Gardner M., Graham R.L. Steiner trees on a ckeckerboard / Chung F.R.K., Gardner M., Graham R.L. // v. 62, Math. Magazine, 1989, P. 83-96.

[22] Иванов А.О., Тужилин А.А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато / Иванов А.О., Тужилин А.А. // 47:2(284), УМН., 1992, P. 53-115.

[23] Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей / Иванов А.О., Тужилин А.А. - Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

[24] Heppes A. Isogotal spherischet Netze / Heppes A. // v. 7, Ann. Univ. Sci., Budapest, Sect. Math., 1964, P. 41-48.

[25] Иванов А.О., Птицына И.В., Тужилин А.А. Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах / Иванов А.О., Птицына И.В., Тужилин А.А. // Матем. сб., 183:12, 1992, P. 3-44.

[26] Птицына И.В. Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна / Птицына И.В. // Вестник МГУ, 1995, №5, P. 15-22.

[27] Птицына И.В. Классификация замкнутых минимальных сетей на тетраэдрах / Птицына И.В. // Матем. сб., 185:5, 1994, P. 11-138.

[28] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations / Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. - CRC Press, 1994.

[29] Вдовина А.А., Селиванова Е.Н. Локально минимальные сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны / Вдовина А.А., Селиванова Е.Н. // Матем. сб., 1997, №6, P. 15-17.

работах Стрелковой [30] [31], Иванова и Тужилина [32].

Пространство Громова–Хаусдорфа. "Пространства пространств" и "пространства подмножеств" часто возникают в различных важных приложениях, а также имеют чисто теоретическое значение и привлекают внимание самых разных специалистов на протяжении многих лет. Один из естественных подходов к изучению таких пространств — определение на них функции расстояния как "меры несхожести" соответствующих объектов. Еще в 1914 г. Ф. Хаусдорф [33] определил неотрицательную симметричную функцию на парах непустых подмножеств метрического пространства X, равную точной нижней границе таких неотрицательных чисел r, что одно множество содержится в r-окрестности другого и наоборот. Позднее Д. Эдвардс [34] и независимо М. Громов [35] обобщили конструкцию Хаусдорфа на семейство всех компактных метрических пространств, использовав их изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства. Полученная функция называется расстоянием Громова–Хаусдорфа, а соответствующее метрическое пространство $\mathcal{M}$ метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, называется пространством Громова–Хаусдорфа. Как оказалось, геометрия этого пространства довольно причудлива, она активно изучается специалистами, в том числе и потому, что "пространство всех пространств" имеет ряд очевидных применений. Хорошо известно, что $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное, сепарабельное, геодезическое метрическое пространство, не являющееся ограниченно компактным. Подробное введение в геометрию

[30] Стрелкова Н.П. Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров / Стрелкова Н.П. // Матем. сб., 202:1, 2011, P. 141-160.

[31] Стрелкова Н.П. Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях выпуклых многогранников / Стрелкова Н.П. // Модел. и анализ информ. систем, 20:5, 2013, P. 117-147.

[32] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. The Steiner problem and its generalizations / Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. - BocaRaton, Ann Arbor, London, Tokyo: CRC Press, 1994.

[33] Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre / Hausdorff F. - Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].

[34] Edwards D. The Structure of Superspace / Edwards D. // Studies in Topology, Ed. by N.M. Stavrakas, K.R. Allen. N. Y.; London; San Francisco: Academic Press, Inc., 1975.

[35] Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps / Gromov M. // Publications Mathematiques I.H.E.S., 1981. **Vol. 53.**

пространства Громова–Хаусдорфа можно найти в работах [36] [37].

Функции, сохраняющие метрики. Ряд интересных задач возникает при рассмотрении преобразований метрик, которые задают отображения пространства Громова–Хаусдорфа. Важным классом преобразований метрик является применение к ним так называемых функций, сохраняющих метрики. Впервые функции, сохраняющие метрики, упоминаются в [38], хотя первое детальное исследование таких функций было выполнено Т. К. Сринивасаном в 1947 г. [39]. Некоторые свойства функций, сохраняющих метрики, встречаются в классическом тексте "Общей топологии" Дж. Л. Келли [40]. К настоящему моменту получено много результатов, связанных с функциями, сохраняющими метрики, в частности изучена связь этих функций с непрерывностью и дифференцируемостью. Подробный перечень известных свойств функций, сохраняющих метрики, можно найти в монографии [41].

Цели и задачи диссертации

Настоящая диссертации посвящена развитию теории деформаций внутренних метрик, исследованию деформаций функционалов длины и внутренних метрик и изучению связи непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний при этих деформациях. Основной целью исследования является вывод условий, достаточных для непрерывности расстояний при наличии непрерывности длин кривых в случае деформации внутренней метрики. Еще одной целью является изучение минимальных сетей для произвольных границ в малых окрестностях точек

[36] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии / Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. - Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[37] Иванов А.О., Тужилин. А.А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа: случай компактов / Иванов А.О., Тужилин. А.А. - М.: Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, 2017.

[38] Wilson W.A. On certain types of continuous transformations of metric spaces / Wilson W.A. // Amer. J. Math. 1935. **57**. P. 62-68.

[39] Sreenivasan T.K. Some properties of distance functions / Sreenivasan T.K. // J. Indian Math. Soc. (N.S.) 1947. **11**. P. 38-43.

[40] Kelley J.L. General Topology / Kelley J.L. - N. Y.: Van Nostrand, 1955.

[41] Dobos J. Metric Preserving Functions / Dobos J. - Amer. Math. Soc. Kosice Technical University, 1998.

полных римановых многообразий с помощью разработанных инструментов, а именно описание множества возможных топологических типов минимальных сетей для произвольных границ в малых окрестностях точек полных римановых многообразий, а также полное описание кратчайших сетей для достаточно малых правильных многоугольников на полных двумерных римановых многообразиях. Помимо этого, ставится задача исследования свойств отображений пространства Громова–Хаусдорфа в себя, индуцированных деформациями метрик, заданными функциями, сохраняющими метрики.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются оригинальными и получены автором самостоятельно. Исследована связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний в случае однопараметрических деформаций функционалов длины. Построены примеры как компактных, так и не ограниченно компактных пространств, в которых длины кривых непрерывно зависят от параметра, но при этом функции расстояния не являются непрерывно зависящими от параметра. Сформулированы условия, которые в совокупности с непрерывностью длин кривых являются достаточными для непрерывности функции расстояния. Описаны бинарные типы минимальных деревьев Штейнера для произвольных малых границ на полных гладких римановых многообразиях. Полностью вычислены минимальные деревья Штейнера для вершин достаточно малых правильных n-угольников на полных двумерных гладких римановых многообразиях. Описан класс отображений пространства Громова–Хаусдорфа в себя, заданных функциями, сохраняющими метрики. Вычислена формула преобразования длин кривых при применении к метрике функции, сохраняющей метрики. Получен критерий непрерывности длин кривых при деформациях метрик, заданных зависящими от параметра функциями, сохраняющими метрики.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту:

1. Существуют как компактные, так и не ограниченно компактные пространства с внутренней метрикой, индуцированной функционалом длины, зависящим от параметра, такие, что длины кривых непрерывно зависят от параметра, в то время как расстояния между некоторыми точками не являются непрерывно зависящими от этого параметра. Получен набор условий, накладываемых на функционалы длины, достаточных для непрерывности расстояний между точками в соответствующей внутренней метрике как для случая компактов, так и для случая произвольных пространств. На компактных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей (финслеровой или римановой) метрики от параметра выполнены достаточные условия непрерывности расстояний между точками относительно этого параметра. На полных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра расстояния между любыми точками непрерывно зависят от этого параметра.

2. Множество бинарных типов кратчайших сетей для произвольной достаточно малой границы на гладком полном римановом многообразии вложено во множество бинарных типов кратчайших сетей для этой границы относительно некоторой евклидовой метрики. Для фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и точки на гладком полном двумерном римановом многообразии существует такая окрестность U этой точки, что для любого множества из n точек V, лежащего в U, кратчайшая сеть, соединяющая V, лежит в выпуклой оболочке $\operatorname{conv} V$ множества V. На любом полном двумерном гладком римановом многообразии для каждого $n \geq 7$ и любой точки существует такая достаточно малая окрестность этой точки, что для вершин любого лежащего в ней правильного n-угольника с центром в этой точке кратчайшей сетью является граница этого n-угольника без его наибольшей стороны. Для данного $n \geq 7$ существует такой радиус $r_0 > 0$, что для вершин любого правильного n-угольника радиуса $r < r_0$ на двумерной сфере (а также на плоскости Лобачевского) кратчайшей сетью является граница этого n-угольника без любой его стороны.

3. Функции, сохраняющие метрики (ФСМ), определяют отображения пространства Громова–Хаусдорфа (обозначим это пространство через $\mathcal{M}$) в себя по следующему принципу: ФСМ f сопоставляет компакту (X,ρ) компакт $\bigl(X,f(\rho)\bigr)$. Непрерывные и только непрерывные ФСМ корректно задают отображения пространства $\mathcal{M}$ в себя. Любое отображение $\mathcal{M}$ в себя, индуцированное непрерывной ФСМ, является непрерывным. Отображение $\mathcal{M}$ в себя, индуцированное некоторой ФСМ, является липшицевым тогда и только тогда, когда липшицевой является соответствующая ему ФСМ, причем константы Липшица этих отображений равны. Отображение $\mathcal{M}$ в себя, индуцированное непрерывной монотонной ФСМ, является гомеоморфизмом на образ. Отображение $\mathcal{M}$ в себя, индуцированное непрерывной ФСМ, производная которой в нуле меньше 1, имеет единственную неподвижную точку — одноточечное пространство.

4. Если непрерывная ФСМ f имеет в нуле конечную производную $f'(0)$, то при ее применении к произвольной метрике множество спрямляемых кривых не изменится, а длина каждой кривой умножится на $f'(0)$. ФСМ, производная которой в нуле конечна, переводит внутренние метрики во внутренние тогда и только тогда, когда она является линейным отображением, т.е. имеет вид $f(t)=kt$ при некотором $k>0$.

5. Пусть при любом $s\in[0,1]$ функция $f(t,s)$ от переменной $t\ge 0$ является непрерывной ФСМ, $f'(t,s)$ – частная производная функции f по первой переменной, (X,ρ) – компактное метрическое пространство и ρ_s, $s\in[0,1]$ – однопараметрическое семейство метрик, определяемое равенством $\rho_s=f(\rho,s)$. Если $f'(0,s)<+\infty$ для любого $s\in[0,1]$, то все пространства (X,ρ_s) обладают одним и тем же множеством спрямляемых кривых. При этом, для каждой фиксированной кривой γ ее длина непрерывно зависит от s тогда и только тогда, когда $f'(0,s)$ является непрерывной функцией от s.

Методы исследования

В диссертации используются методы математического анализа, метрической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, евклидовой геометрии, теории графов и теории минимальных сетей.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области минимальных сетей, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии и метрической геометрии. Разработанные техники могут быть использованы для эффективного анализа деформаций различных метрик и функционалов, а также для поиска минимальных сетей в различных пространствах для различных границ.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и опубликованы в 3 статьях [1-3], в том числе 3 статьях по теме диссертации, из которых 3 опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI. Результаты диссертации были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2015”, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 13 – 17 апреля 2015
- XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2016”, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 11 – 15 апреля 2016
- Семинар “Узлы и теория представлений” под руководством проф. В. О. Мантурова, Д. П. Ильютко и И. М. Никонова, МГУ, 2016

- Международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2016”, Воронеж, Россия, 25 – 31 января 2016

- Международная конференция “Геометрический анализ и его приложения”, Волгоград, Россия, 30 мая – 3 июня 2016

- Международная научная конференция “Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения”, Воронеж, Россия, 23 – 25 декабря 2016

- Семинар “Геометрия в целом” под руководством проф. И. Х. Сабитова, МГУ, 5 мая 2017

- Петербургский геометрический семинар им. А. Д. Александрова под руководством проф. Ю. Д. Бураго, Санкт-Петербург, Россия, 3 декабря 2020

- Семинар “Дискретная геометрия и геометрия чисел” под руководством проф. Н. П. Долбилина, проф. Н. Г. Мощевитина и проф. М. Д. Ковалева, МГУ, 23 марта 2021

- Семинар “Теория экстремальных сетей” под руководством проф. А. А. Тужилина и проф. А. О. Иванова, МГУ, 2017–2021

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Текст работы изложен на 89 страницах и содержит 5 иллюстраций. Список литературы содержит 47 наименований. Первая глава диссертации имеет вспомогательный и обзорный характер. Во второй главе изучаются однопараметрические деформации внутренних метрик. В третьей главе работы изучается приложение разработанной теории деформаций внутренних метрик к решению задач из теории минимальных сетей. В четвертой главе изучаются преобразования метрических пространств, индуцированные функциями, сохраняющими метрики.

Краткое содержание работы

Во введении приводится историческая справка по исследуемой области, раскрывается актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, перечислены используемые методы, а также основные результаты и положения диссертации, выносимые на защиту. Также приведена информация о публикациях и апробации работы.

Содержание главы 1

В первой главе даются необходимые определения и предварительные сведения из теории функционалов длины и внутренних метрик, теории минимальных сетей, теории функций, сохраняющих метрики, а также приводятся предварительные сведения о пространстве Громова–Хаусдорфа.

Содержание главы 2

Во второй главе диссертации изучаются однопараметрические деформации функционалов длины и соответствующих внутренних метрик. Мы предполагаем наличие функционалов длины, непрерывно зависящих от параметра, и рассматриваем внутренние метрики, порожденные этими функционалами длины. Мы изучаем дополнительные условия, которых будет достаточно для непрерывности расстояний.

Рассмотрим топологическое пространство X с заданным на нем семейством функционалов длины $l_t, t \in [0, 1]$. Мы будем считать, что все функционалы семейства l_t определены на одном и том же классе допустимых кривых, а также, что для любой допустимой кривой γ ее длина $l_t(\gamma)$ конечна и непрерывно зависит от t. Пусть ρ_t, $t \in [0, 1]$ – соответствующее семейство внутренних метрик на X. Мы будем считать метрики этого семейства эквивалентными и конечными, что равносильно наличию допустимой кривой конечной длины между любыми двумя точками пространства.

Определение. Будем называть семейство функционалов длины l_t *гло-*

бально непрерывным, если выполнено следующее условие: пусть $\mathfrak{F}_{a,t}$ — множество кривых γ таких, что $l_t(\gamma) \leq a$. Тогда для любого $a > 0$, любого $t_0 \in [0,1]$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено соотношение $\mathfrak{F}_{a,t} \subset \mathfrak{F}_{(1+\varepsilon)a,t_0}$.

Теорема. *Пусть выполнены перечисленные выше условия, а также семейство функционалов длины l_t является глобально непрерывным. Тогда для любых A, $B \in X$ функция $\rho_t(A, B)$ непрерывно зависит от t.*

Утверждение. *Условие глобальной непрерывности не вытекает из остальных условий. Более того, если все условия, кроме условия глобальной непрерывности выполнены, то расстояние может быть разрывным.*

Для доказательства последнего утверждения в диссертации приведен специальный пример метрического пространства, которое не является ограниченно компактным. Таким образом, из непрерывной зависимости изменения длин кривых не вытекает непрерывность расстояния между точками во время деформации метрики. Далее в работе показывается, что непрерывности длин кривых и компактности пространства также не достаточно для непрерывности расстояний между точками, и приводятся достаточные условия непрерывности расстояний для случая ограниченно компактных пространств. Сформулируем специальные условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t.

Определение. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 1, если при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых.

Определение. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 2, если для любой последовательности допустимых кривых γ_n, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, из того, что последовательность чисел $l_{t_n}(\gamma_n)$ ограничена, следует, что последовательность чисел $l_{t_0}(\gamma_n)$ тоже ограничена.

Определение. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 3, если для любой сходящейся последовательности допустимых кривых γ_n такой, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C$, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, выполнено следующее соотношение: $l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Через $\hat{l}_t$ в работе обозначается функционал длины, индуцированный внутренней метрикой ρ_t, который в общем случае не обязан совпадать с изначальным функционалом длины l_t:

$$\hat{l}_t(\gamma) = \sup_{A_1 A_2 \ldots A_n \subset \gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \rho_t(A_i, A_{i+1}).$$

Определение. Будем называть семейство функционалов длины l_t *семейством типа* 4, если для любой последовательности допустимых кривых γ_n, сходящейся к некоторой кривой γ_0, непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, $t \in [0, 1]$, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geq \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$.

Для доказательства следующего утверждения в работе приводится пример специального компактного пространства.

Утверждение. *Существуют хаусдорфово топологическое пространство X и однопараметрическое семейство функционалов длины l_t на нем, $t \in [0, 1]$, такие, что все метрики семейства ρ_t эквивалентны, для любого $t \in [0, 1]$ метрические пространства (X, ρ_t) компактны и линейно связны, длины всех допустимых кривых непрерывно зависят от параметра t, семейство функционалов длины l_t является семейством типов* 1 *и* 2, *но не является семейством типов* 3 *и* 4, *а расстояние $\rho_t(A, B)$ разрывно по t между некоторой парой точек A и B.*

Далее, в работе доказываются теоремы, демонстрирующие некоторые варианты достаточных условий для непрерывности расстояний между точками в случае ограниченно компактных пространств при наличии непрерывности длин кривых, а также показывается, как эти условия могут быть переформулированы в терминах Г-сходимости функционалов длины.

Теорема. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0, 1]$, а семейство функционалов длины l_t яв-*

ляется семейством типов 1, 2 *и* 3. *Тогда расстояние* $\rho_t(A, B)$ *между любыми двумя точками* $A, B \in X$ *непрерывно зависит от* t.

Теорема. *Пусть метрические пространства* (X, ρ_t) *ограниченно компактны для любого* $t \in [0, 1]$, *а семейство функционалов длины* l_t *является семейством типов* 2 *и* 4. *Тогда расстояние* $\rho_t(A, B)$ *между любыми двумя точками* $A, B \in X$ *непрерывно зависит от* t.

Также в данной главе изучается непрерывность расстояний между точками на римановых и финслеровых многообразиях. Мы рассматриваем k-мерное связное гладкое многообразие M с заданой на его касательном расслоении TM функцией $F_t(x, \xi), x \in M, \xi \in T_xM$, которая является финслеровой метрикой на M при каждом $t \in [0, 1]$ и непрерывно зависит от параметра t. В работе рассматриваются финслеровы метрики, которые являются нормами на касательных пространствах T_xM для всех $x \in M$. Для каждого $t \in [0, 1]$ финслерова метрика $F_t(x, \xi)$ определяет функционал длины, классом допустимых кривых которого является класс кусочно-гладких кривых. Показывается, что длина каждой кусочно-гладкой кривой в финслеровой метрике F_t непрерывно зависит от t. В силу связности многообразия при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$ для любых двух точек из M найдется кусочно-гладкая кривая конечной длины, соединяющая их. Обозначим через $\rho_t, t \in [0, 1]$, соответствующее семейство внутренних метрик на M. В работе доказываются следующие результаты:

Утверждение. *Непрерывно зависящее от* t *семейство финслеровых метрик* F_t *на гладком компактном многообразии* M *задает семейство функционалов длины, которое является семейством функционалов длины типов* $1, 2$ *и* 3 *одновременно.*

Теорема. *Пусть гладкое финслерово многообразие* M *компактно, а его метрика* F_t *непрерывно зависит от параметра* $t \in [0, 1]$. *Тогда расстояние* $\rho_t(A, B)$ *между любыми двумя точками* $A, B \in M$ *непрерывно зависит от* t.

Последняя теорема может быть распространена на ограниченно компактные финслеровы многообразия. Отметим, что ограниченная компактность конечномерного финслерова многообразия равносильна условию его полноты.

Теорема. *Пусть M – гладкое связное многообразие, а функция F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$ и является финслеровой метрикой на M при каждом $t \in [0,1]$. Если финслерово многообразие (M, F_t) является полным метрическим пространством при каждом $t \in [0,1]$, то расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in M$ непрерывно зависит от t.*

Как известно, финслерова метрика является обобщением римановой метрики. Таким образом, результаты, полученные для финслеровых многообразий, имеют место и в римановом случае. В результате, в диссертации приводятся аналогичные теоремы для римановых многообразий.

Содержание главы 3

В третьей главе с помощью разработанной теории деформаций внутренних метрик получен результат, описывающий типы минимальных сетей для произвольных малых границ на полном римановом многообразии. В качестве следствия из этого результата, в диссертации полностью описаны кратчайшие сети, соединяющие вершины достаточно малых правильных $n-$угольников на полных римановых многообразиях для $n \geq 7$.

Напомним основные понятия из теории минимальных сетей. *Границей* графа будем называть некоторое выделенное множество его вершин. *Бинарным деревом* будем называть дерево с границей, вершины которого имеют степени 1 и 3, а граница совпадает с множеством вершин степени 1. Будем рассматривать всевозможные бинарные деревья $G_i = (Z, E_i)$ с одним и тем же множеством вершин $Z = \{1, 2, \ldots, 2n-2\}$, $M = \{1, 2, \ldots, n\} \subset Z$ — множество граничных вершин (степени 1) каждого из рассматриваемых деревьев. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\varphi \colon M \to X$ — фиксированное граничное отображение, а $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset X, v_i = \varphi(i), i = 1, \ldots, n,$ — его образ.

Сетью Γ *типа* G_i *с границей* φ будем называть пару $(G_i, f \colon Z \to X)$ такую, что $f|_M = \varphi$ (*тип* — это бинарное дерево с данным множеством вершин). Для сети Γ полагаем $s_i = f(n+i), i = 1, ..., n-2$, — положения ее внутренних вершин. Заметим, что множество типов конечно — обозначим их $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Определим длину $\rho(\Gamma)$ сети $\Gamma = (G_i, f)$ в метрике ρ: $\rho(\Gamma) = \sum_{vw \in E} \rho\big(f(v), f(w)\big)$ — сумма расстояний между образами смежных вершин. Сеть фиксированного типа G с фиксированным множеством граничных вершин V минимально возможной длины называется *минимальной параметрической сетью. Кратчайшим деревом*, или *кратчайшей сетью*, соединяющей множество V, будем называть минимальную параметрическую сеть, длина которой не превосходит длин любых других сетей, соединяющих множество V. Отметим, что для фиксированного множества граничных вершин существует лишь конечное число возможных бинарных типов. Таким образом, кратчайшая сеть, соединяющая множество V – это самая короткая сеть из всех минимальных параметрических сетей, соединяющих множество V (их может быть несколько, и в этом случае их длины будут равны). Кратчайшие сети также называются *минимальными деревьями Штейнера.*

В дальнейшем мы будем рассматривать гладкое связное полное риманово многообразие M_k размерности k. Пусть $O \in M_k$ и $x^1, \ldots, x^k$ — локальные координаты в некоторой окрестности W точки O, такие, что $O = (0, \ldots, 0)$, и в этих координатах множество W — звездно, т.е. для любой точки $(x^1_*, x^2_*, \ldots, x^k_*) \in W$ и для любого $C \in [0,1]$ точка $(C\,x^1_*, C\,x^2_*, \ldots, C\,x^k_*)$ корректно определена и лежит в W. Пусть также в карте W заданы n граничных точек. Рассмотрим на W евклидову метрику, индуцированную евклидовой метрикой касательного пространства к многообразию M_k в точке O. Ясно, что для евклидовой метрики при преобразовании подобия границы типы минимальных деревьев Штейнера не меняются. Пусть минимальные деревья Штейнера для данной границы в этой евклидовой метрике известны, а $G_1, \ldots, G_p$ — их типы (их может быть несколько). *Операцией сжатия в C раз* назовем изменение данной границы, точки которой имели координаты $(x^1_i, x^2_i, \ldots, x^k_i), i = 1, \ldots, n$, на границу, точки которой имеют координаты $(x^1_i, x^2_i, \ldots x^k_i)/C, i = 1, \ldots, n$. Основным результатом данной главы, который доказывается с помощью разработанной теории деформаций внутренних метрик, является следующая теорема.

Теорема. *Существует окрестность U точки O такая, что для каждого граничного множества из n точек, содержащегося в U, найдется $C_0 > 0$ такое, что для этого граничного множества, сжатого в C раз при каждом $C > C_0$, типы минимальных деревьев Штейнера относительно метрики многообразия принадлежат множеству $\{G_1, \ldots, G_p\}$.*

Далее, в работе изучаются минимальные деревья Штейнера для правильных многоугольников на римановых многообразиях. Рассмотрим касательное пространство к многообразию M_k в точке O и выберем в нем двумерную плоскость Π. Определим множество вершин правильного n-угольника с центром в O на многообразии M_k как образ множества вершин правильного n-угольника с центром в O, лежащего в плоскости Π, при экспоненциальном отображении. Рассмотрим также евклидову метрику в окрестности точки O, индуцированную экспоненциальным отображением из касательного пространства. *Радиусом* правильного многоугольника на многообразии будем называть расстояние от любой его вершины до его центра.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вершины правильного многоугольника на многообразии, O — его центр. Рассмотрим сеть, соединяющую $A_1, A_2, \ldots, A_n$, тип которой — бинарное дерево с вершинами $\{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_{n-2}\}$ (B_i — внутренние вершины сети) и множеством ребер $\big\{(B_i, B_{i+1}), i = 1, \ldots, n-3, (B_j, A_{j+1}), j = 1, \ldots, n-2, (B_1, A_1), (B_{n-2}, A_n)\big\}$. Обозначим этот тип через G_1 (рис. 1). Заметим, что граница многоугольника без стороны A_1A_n — сеть бинарного типа G_1 (некоторые ребра вырождены). Тогда кратчайшее дерево в классе сетей бинарного типа G_1 является минимальным деревом Штейнера относительно евклидовой метрики. В случаях $n = 3$, 4, 5 это проверяется непосредственно. Случай $n \geq 6$ вытекает из следующей теоремы.

Теорема. (*Jarnik, Kössler* [42], *Du, Hwang, Weng* [43]) *При $n \geq 6$ минимальным деревом Штейнера для вершин правильного n-угольника на евклидовой плоскости является его граница без любой стороны.*

[42] Jarník V., Kössler. O minimálních grafech obsahujících n daných bodu / Jarník V., Kössler // PêstováníMat. (Essen), Cas, 1934, T. 63, P. 223-235.

[43] Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. Steiner Minimal Trees for Regular Polygons / Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. - Springer Verlag, New York, 1987.

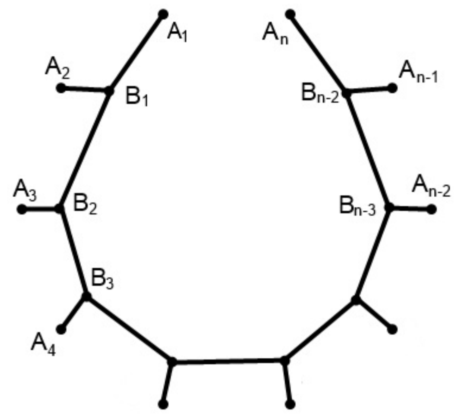

Рис. 1: Граф G_1.

Заметим, что при $n \geq 6$ существует еще $n-1$ бинарное дерево, изоморфное G_1 (обозначим их $G_2, \ldots, G_n$), такое, что граница многоугольника без стороны A_iA_{i+1} есть кратчайшее дерево в классе сетей бинарного типа G_{i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$, относительно евклидовой метрики. Обозначим через Ω_n множество типов, реализующих минимальные деревья Штейнера для вершин правильного n-угольника в евклидовой метрике: $\Omega_n = \{G_1, \ldots, G_n\}$. Из основной теоремы главы получается следующий вывод.

Следствие. Для данного n существует $r_0 > 0$ такое, что для вершин любого правильного n-угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$ на римановом многообразии M_k типы минимальных деревьев Штейнера принадлежат множеству Ω_n.

Далее в главе доказывается результат, в точности описывающий кратчайшие сети для достаточно малых правильных n-угольников при $n \geq 7$ на двумерных полных гладких римановых многообразиях, а также ряд вспомогательных утверждений и ряд следствий.

Теорема. *Пусть M_2 – двумерное полное гладкое риманово многообразие. Для точки $O \in M_2$ и данного $n \geq 7$ существует такое $r_0 > 0$, что для вершин любого правильного n-угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$ на многообразии M_2 минимальным деревом Штейнера является граница этого n-угольника без его наибольшей стороны.*

Содержание главы 4

В четвертой главе рассматриваются преобразования метрических пространств, индуцированные функциями, сохраняющими метрики. Функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ называется *функцией, сохраняющей метрики* (ФСМ), если для любого метрического пространства (X, ρ) функция $f(\rho)$ тоже будет метрикой на X. Через $\mathcal{M}$ мы обозначаем пространство Громова–Хаусдорфа – пространство всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, относительно метрики Громова–Хаусдорфа. В главе показывается, что непрерывные и только непрерывные ФСМ корректно определяют отображение $\mathcal{M}$ в себя, а также приводится ряд свойств этих отображений.

Утверждение. *Если ФСМ f непрерывна, а метрическое пространство (X, ρ) компактно, то и $\big(X, f(\rho)\big)$ компактно.*

Утверждение. *Пусть f — разрывная ФСМ. Тогда существует компактное метрическое пространство (X, ρ), такое, что метрическое пространство $\big(X, f(\rho)\big)$ уже не является компактным.*

Из этих утверждений следует, что для непрерывной и только непрерывной ФСМ f корректно определено отображение $\mathrm{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, сопоставляющее компакту (X, ρ) компакт $\big(X, f(\rho)\big)$: $\mathrm{F}\big((X, \rho)\big) = \big(X, f(\rho)\big)$. Ясно, что если метрические пространства X_1 и X_2 изометричны, то изометричны $\mathrm{F}(X_1)$ и $\mathrm{F}(X_2)$. Отображение $\mathrm{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ будем называть *отображением, индуцированным ФСМ f*. Далее перечислены основные результаты главы.

Теорема. *Любое отображение $\mathrm{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, индуцированное некоторой непрерывной ФСМ f, является непрерывным отображением метрических пространств.*

Теорема. *Пусть f — непрерывная монотонная ФСМ. Тогда индуцированное отображение $\mathrm{F} : \mathcal{M} \to \operatorname{Im}\mathrm{F}$ является гомеоморфизмом на образ.*

Теорема. *Отображение $\mathrm{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ является липшицевым тогда и только тогда, когда липшицевой является соответствующая ему*

ФСМ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, причем константы Липшица этих отображений равны.

Теорема. *Производная ФСМ f в нуле конечна тогда и только тогда, когда отображение $\mathrm{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ является липшицевым, причем его константа Липшица в этом случае равна $f'(0)$.*

Далее, в главе изучаются однопараметрические деформации произвольных метрик, заданные ФСМ, и приводится критерий непрерывности длин кривых при таких деформациях метрик. Пусть X — произвольное метрическое пространство, ρ — метрика на нем, а f — непрерывная ФСМ. Из свойств ФСМ следует, что метрические пространства (X, ρ) и $\big(X, f(\rho)\big)$ обладают одними и теми же топологическими свойствами, в частности, в них совпадают множества непрерывных кривых. Будем обозначать длину кривой $\gamma : [0,1] \to X$ относительно метрики ρ через $l_\rho(\gamma)$. Рассмотрим взаимосвязь длин кривых в метрических пространствах X и $\big(X, f(\rho)\big)$. Напомним, что кривые конечной длины называются *спрямляемыми.*

Теорема. *Если $f'(0) < +\infty$, то множество спрямляемых кривых относительно метрики $f(\rho)$ совпадает с множеством спрямляемых кривых относительно метрики ρ, а при переходе от ρ к $f(\rho)$ длина каждой кривой умножается на $f'(0)$: $l_{f(\rho)}(\gamma) = f'(0) l_\rho(\gamma)$. Если $f'(0) = +\infty$, то каждая спрямляемая относительно метрики ρ кривая ненулевой длины не является спрямляемой относительно метрики $f(\rho)$.*

Следствие. ФСМ f, производная в нуле которой конечна, переводит внутренние метрики во внутренние тогда и только тогда, когда она является линейным отображением, т.е. имеет вид $f(t) = kt$ при некотором $k > 0$.

Далее, рассмотрим непрерывную ФСМ $f(t,s)$, которая зависит от параметра $s \in [0,1]$. Подразумевается, что при каждом фиксированном s функция $f(t,s)$ от переменной $t \geq 0$ является непрерывной ФСМ. Через $f'(t,s)$ будем обозначать частную производную функции f по первой переменной. Рассмотрим на X однопараметрическое семейство метрик ρ_s, $s \in [0,1]$, которые определяются равенством $\rho_s = f(\rho, s)$. Из непрерывности f при каждом фиксированном s следует, что все метрики ρ_s, $s \in [0,1]$, определяют на X одну и ту же топологию.

Теорема. *Если $f'(0,s) < +\infty$ для любого $s \in [0,1]$, то все пространства (X, ρ_s) обладают одним и тем же множеством спрямляемых кривых. При этом для каждой фиксированной кривой γ ее длина $l_{\rho_s}(\gamma)$ непрерывно зависит от s тогда и только тогда, когда $f'(0,s)$ является непрерывной функцией от s.*

Заключение

В настоящей диссертации рассматриваются некоторые виды деформаций функционалов длины и метрик, и изучается взаимосвязь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний между точками при этих деформациях. Как показано в работе, существуют примеры пространств и заданных на них функционалов длины, в которых при деформации этих функционалов длины из непрерывности изменения длин допустимых кривых не следует непрерывность изменения расстояний между точками, причем эти пространства могут быть как компактны, так и не ограниченно компактны относительно соответствующих внутренних метрик. Как для случая ограниченно компактных пространств, так и для случая произвольных пространств с внутренней метрикой, в диссертации формулируются специальные условия, которые могут быть наложены на функционалы длины, и доказывается их достаточность для непрерывности расстояний между точками. Далее, в диссертации показывается, что в случаях непрерывных деформаций римановых и финслеровых метрик на компактных многообразиях выполнены эти достаточные условия непрерывности расстояний. В качестве следствия выводится, что на полных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра расстояния между любыми точками непрерывно зависят от этого параметра.

В качестве приложения разработанных техник, в диссертации получен ряд нетривиальных результатов о минимальных деревьях Штейнера на римановых многообразиях, в частности, описаны бинарные типы минимальных сетей для произвольных малых границ на полном римановом многообразии. Также, введено понятие правильного многоугольника на полном двумерном римановом многообразии, и полностью описаны кратчайшие сети, соединяющие вершины достаточно малых правильных многоугольников. Помимо прочего, в диссертации приводится полное описание типов кратчайших деревьев, лежащих в достаточно малых шаровых окрестностях точек полных римановых многообразий постоянной кривизны.

Помимо этого, в диссертации изучаются функции, сохраняющие метрики (ФСМ), и индуцируемые ими отображения пространства Громова-Хаусдорфа в себя. Показано, что непрерывные ФСМ и только они корректно определяют индуцированное отображение пространства Громова-Хаусдорфа в себя, и что такое отображение является липшицевым тогда и только тогда, когда липшицевой является соответствующая ФСМ, причем их константы Липшица совпадают. Описаны образы таких отображений пространства Громова-Хаусдорфа в себя. Показано, как изменяются длины кривых при применении отображений, индуцированных ФСМ, к метрическим компактам. Также изучаются однопараметрические деформации произвольных метрик, заданные функциями, сохраняющими метрики, и приводится критерий непрерывности длин кривых при таких деформациях метрик.

Благодарности

Автор искренне благодарит своего научного руководителя профессора А. А. Тужилина и профессора А. О. Иванова за постановки задач, плодотворные обсуждения и поддержку.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

1. Чикин В.М. Минимальные деревья Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий / Чикин В.М. // Матем. сб., 2017,

Т. 208, №7. P. 145-171.
Англ. пер.: Chikin V.M. Steiner minimal trees in small neighbourhoods of points in Riemannian manifolds //Sbornik: Mathematics. – 2017. – Vol. 208. – №. 7. – P. 1049.

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 0.865.

2. Чикин В.М. Функции, сохраняющие метрики, и пространство Громова–Хаусдорфа / Чикин В.М. // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, изд-во Моск. ун-та (М.), 2021, № 4, P. 11-17.
Англ. пер.: Chikin V.M. Functions Preserving Metrics, and Gromov–Hausdorff Space //Moscow University Mathematics Bulletin. – 2021. – Vol. 76. – №. 4. – P. 154-160.

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 0.284.

3. Чикин В.М. Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных метрических пространств // Чебышевский сборник, 2021, Т. 22, вып. 4, P. 288-304.

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 0.392.