

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**Воротников Дмитрий Игоревич**

**Процессы переноса, обусловленные  
инерционно-гравитационными внутренними  
волнами**

1.6.17 – Океанология

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Савченко Александр Максимович

Москва – 2024

## Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Обзор литературы</b> . . . . .	17
<b>Глава 1. Вертикальный перенос импульса инерционно-гравитационными внутренними волнами в бароклинном потоке</b> . . . . .	27
1.1 Постановка задачи . . . . .	27
1.2 Линейное приближение . . . . .	29
1.3 Нелинейные эффекты . . . . .	34
1.4 Результаты численного моделирования для 15-минутных внутренних волн . . . . .	36
1.5 Сравнение потоков для 5-минутных и 15-минутных внутренних волн	42
1.6 Частные случаи решения для исходной краевой задачи . . . . .	46
1.6.1 Стоксов дрейф . . . . .	47
1.6.2 Однородная стратификация, постоянный сдвиг скорости .	48
1.6.3 Двухслойная модель стратификации и градиента скорости течения . . . . .	52
1.7 Выводы к первой главе . . . . .	56
<b>Глава 2. Вертикальные потоки тепла и соли, обусловленные инерционно-гравитационными внутренними волнами в зоне шельфа</b>	58
2.1 Постановка задачи . . . . .	58
2.2 Нелинейные эффекты . . . . .	59
2.3 Результаты расчетов . . . . .	60
2.4 Выводы ко второй главе . . . . .	66
<b>Глава 3. Вертикальный перенос массы слабонелинейными инерционно-гравитационными внутренними волнами в двумерном</b>	

<b>потоке</b> . . . . .	67
3.1 Постановка задачи . . . . .	67
3.2 Стоксов дрейф. Волновые потоки массы. . . . .	69
3.3 Результаты численного моделирования . . . . .	71
3.4 Выводы к третьей главе . . . . .	78
<b>Глава 4. Генерация вертикальной тонкой структуры гидродинамических полей, индуцированная слабонелинейными инерционно-гравитационными внутренними волнами</b> . . . . .	79
4.1 Общий анзац задачи. Математическая модель . . . . .	79
4.2 Тонкая структура полей температуры, солености и плотности. Волновые потоки . . . . .	82
4.3 Результаты численного моделирования для малых глубин (шельфовой зоны) . . . . .	84
4.4 Результаты численного моделирования для глубоководной части) .	87
4.5 Выводы к четвертой главе . . . . .	98
<b>Заключение</b> . . . . .	100
<b>Список литературы</b> . . . . .	102

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Внутренние волны повсеместно присутствуют в стратифицированной морской среде благодаря источникам их порождающих: это атмосферные возмущения, гидродинамическая неустойчивость течений, взаимодействие течений и приливов с неоднородностями рельефа дна, излучение внутренних волн вихрями, генерация внутренних волн движущимися объектами и т.п. Внутренние волны играют большую роль в судоходстве, особенно в подводном мореплавании. Учет влияния внутренних волн необходим при строительстве подводных коммуникаций и трубопроводов. Земля — неинерциальная система отсчета. В ней действует сила инерции Кориолиса, которая приводит к существованию инерционных колебаний, а в стратифицированном море — инерционно-гравитационных внутренних волн. Динамика внутренних инерционно-гравитационных волн сказывается на горизонтальном и вертикальном обменах во всей толще Мирового океана. Данное явление наблюдается в придонном слое, в частности в изменении давления и возбуждении турбулентного пограничного слоя, индуцированного горизонтальным течением жидкости. Также, эти процессы сказываются на транспорте донных осадков, что приводит к размывам дна и берегов, а также оснований опор гидротехнических сооружений. Вертикальный обмен важен для решения задач диффузии примесей, органических веществ, сероводорода и кислорода.

Решение системы уравнений гидродинамики, описывающей волновые возмущения в общем виде, представляет достаточно сложную математическую задачу как с точки зрения доказательств теорем существования и единственности решений, так и с вычислительной точки зрения. В силу этого, как правило, основные результаты решения задач о генерации волновых возмущений представляются в самой общей интегральной форме. Поэтому требуется разработка моделей и методов, допускающих как качественный, так и

количественный анализ натуральных данных.

Вертикальный обмен обычно связывают с перемежаемой турбулентностью. Вертикальные потоки, обусловленные внутренними волнами, ещё плохо изучены, поэтому актуальным является исследование вклада этих потоков в вертикальный обмен и сравнение этих потоков с турбулентными, данная задача играет фундаментальное значение в понимании механизмов вертикального тепло-массопереноса.

Также, актуальным является определение волновых потоков тепла, соли, импульса и массы для зон различной глубины и исследование вклада внутренних волн в формирование вертикальной тонкой структуры гидрофизических полей.

**Степень разработанности темы исследования.** Проведена большая работа по исследованию нелинейных волновых эффектов во внутренних волнах, и связанных с ними явлениях, в первую очередь вертикального волнового переноса и стокова дрейфа. Стоит отметить дальнейшие перспективы исследования. Метод теории возмущений применительно к краевой задаче для внутренних волн с точки зрения применимости к данным исследованиям показал свою релевантность, но и при этом были выявлены пределы его применимости. Дальнейшее развитие темы данного исследования видится в построении пространственной картины и изолиний для дисперсионных кривых, расчет которых выполнен при помощи прямых вычислений. Предшествующие этапы можно считать обстоятельными и законченными работами.

#### **Цели и задачи диссертационной работы.**

- Исследование и численное моделирование процессов переноса в шельфовой зоне и глубоководной области, обусловленных инерционно-гравитационными внутренними волнами, при наличии течения с вертикальным сдвигом скорости.
- Решение краевой задачи для волновых возмущений вертикальной скорости внутренних волн. В первом порядке теории возмущений построение

дисперсионных кривых и собственной функции внутренних волн для областей с различной глубиной.

- Во втором порядке малости по амплитуде волны определить волновые потоки тепла, соли, импульса и массы, сравнить их с соответствующими турбулентными потоками. Оценить вклад наличия стокового дрейфа в вертикальный перенос. Исследовать формирование и особенности вертикальной тонкой структуры гидродинамических полей температуры, солености и плотности за счет присутствия вертикальных волновых потоков этих полей.
- Произвести численное моделирование на основе натуральных данных для данной математической модели краевой задачи для внутренних инерционно-гравитационных волн.

#### **Научная новизна.**

1. Впервые создана и численно решена модель взаимодействия двумерного течения с вертикальным сдвигом скорости при учёте вращения Земли с инерционно-гравитационными внутренними волнами в приближении Буссинеска. Рассмотрены возникающие при этом нелинейные эффекты.
2. В линейном приближении краевая задача для амплитуды вертикальной скорости внутренних слабонелинейных инерционно-гравитационных волн при учете вращения Земли в двумерном сдвиговом течении имеет комплексные коэффициенты. В данной конфигурации задачи это проделано впервые. Построены дисперсионные кривые первых двух мод. Показано, что дисперсионные кривые инерционно-гравитационных внутренних волн обрываются в низкочастотной области, что обусловлено влиянием критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера приближается к инерционной. Для второй моды колебаний обрыв дисперсионных кривых происходит при более высокой частоте чем первой.

3. Впервые найдены вертикальные волновые потоки тепла, соли, импульса и массы, обусловленные внутренними инерционно-гравитационными волнами при наличии двумерного вертикально-неоднородного течения. Эти потоки обусловлены сдвигом фаз между колебаниями вертикальной скорости и колебаниями данных термогидродинамических полей, отличным от  $\pi/2$ . Рассчитан вклад в волновой перенос вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа, которая отлична от нуля в условиях данной задачи. Показано, что на шельфе определяющий вклад в волновой поток даёт вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа. Указанные потоки могут быть сравнимы или даже превосходить турбулентные потоки на шельфе.
4. Найдены суммарные, включающие индуцированные наличием стокова дрейфа, вертикальные волновые потоки полей температуры, солёности, и массы. Исследован их вклад в формирование вертикальной тонкой структуры. Показано, что данные потоки приводят к необратимой деформации профилей средних величин этих термогидродинамических полей — тонкой структуре, генерируемой волной. Данная тонкая структура имеет необратимый характер. Доказательство этого в условиях данной задачи сделано впервые.

**Теоретическая и практическая значимость.** Данное исследование является пионерским в своей области и имеет существенные перспективы, т.к. явления переноса в водной толще Мирового океана являются чрезвычайно важными в формировании общей экосистемы и баланса физико-химического состава. Стоит отметить важность учета влияния внутренних волн на осуществление различной деятельности человека в акватории морей и океанов, включая как исследовательскую деятельность, так и промышленную (строительство гидротехнических сооружений).

**Методология и методы исследования.** В основе исследования лежит разработка численно-аналитической математической модели решения краевой задачи для внутренних инерционно-гравитационных волн в среде с вертикальной стратификацией и наличии двумерного вертикально-неоднородного бароклинного течения при учете вращения Земли. Решение данной математической модели производится посредством численного моделирования, составления программного кода для исходной модели с последующей её верификацией на натурных данных и расчётом искомым параметров. Исходя из внутренней логики задачи, на первом этапе представляется целесообразным воспользоваться теорией возмущений для её решения, и получения необходимых оценок интересующих параметров. Важным является выбор численной схемы решения дифференциального уравнения исходной краевой задачи. Отметим, что предпочтение, ввиду большей устойчивости по отношению к основному уравнению задачи, отдано в пользу неявной схемы Адамса третьего порядка точности. При этом, для лучшей производительности, выполнены автоматизация и оптимизация всей модели, доработка программного кода. В первом порядке теории возмущений неоднородная краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка для амплитуды вертикальной скорости сводится к самосопряженному виду. Из условия её разрешимости, т.ё. ортогональности правой части уравнения нетривиальному решению соответствующей однородной краевой задачи, ищется мнимая поправка к частоте. Находится единственное решение этой краевой задачи, ортогональное нетривиальному решению соответствующей однородной краевой задачи.

На основе результатов физико-математического и численного моделирования решения краевой задачи для внутренних инерционно-гравитационных волн были построены конкретные реализации профилей термогидродинамических полей с использованием натурных данных в области малых глубин (шельфовая зона) и для глубоководного случая. Натурные данные для модели получены с использованием градиентно-распределённых



датчиков (ГРАД) и *CTD/LADCP*-измерений. Рассчитанные волновые потоки массы и других геофизических полей, а также турбулентные потоки представляются в виде графиков профилей данных величин. Производится сопоставление зависимостей частоты и декремента затухания от волновых чисел, полученных в рассматриваемых областях.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Выявлено, что в области критических слоев происходит усечение дисперсионных кривых, причем для второй моды обрыв происходит на более высокой частоте, чем у первой. Это подтверждается видом дисперсионных кривых для первых двух мод 15-минутных внутренних инерционно-гравитационных волн, как при наличии среднего двумерного течения и вращения Земли, так и в его отсутствии.
2. У инерционно-гравитационных внутренних волн при наличии течения, у которого компонента скорости, нормальная к направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты мнимая часть частоты волны отлична от нуля. Возможно как слабое затухание, так и слабое усиление волны в зависимости от периода волны и номера моды.
3. Оценка вклада стокова дрейфа в формирование вертикального переноса термогидродинамических полей: тепла, соли и массы.
4. Результат численного расчёта вертикальных волновых потоков для полей температуры, солёности, импульсов и плотности, и сравнение их с соответствующими турбулентными потоками.
5. Возникновение устойчивых на масштабе волны поправок к средним величинам термогидродинамических полей, которые интерпретируются как необратимая вертикальная тонкая структура, генерируемая волной. Такая структура полей обусловлена наличием ненулевых вертикальных потоков данных величин.

**Достоверность** обеспечивается воспроизводимостью результатов и согласованностью данных, полученных взаимодополняющими друг друга теоретическими и численно-аналитическими подходами, а также согласованностью с натурными данными и результатами, полученными другими авторами с использованием отличных от оригинальных методов исследования, в том числе моделирования.

**Апробация.** Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на профильных всероссийских и международных конференциях:

1. Международная научная школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах». Москва, ИПМех РАН, Россия, 11–13 ноября 2015.
2. XXVII Международная конференция "Крымская осенняя математическая школа (КРОМШ-2016).
3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016».
4. Научная конференция «Ломоносовские чтения» 2016 года. Севастополь, 24-25 марта 2016.
5. 2-я Международная научная школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах». Москва, ИПМех РАН, Россия, 19–21 октября 2016.
6. Научная конференция «Моря России: наука, безопасность, ресурсы». Севастополь, 3–7 октября 2017.
7. Международная конференция “XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам” (КРОМШ-2017), Крым, Россия, 17–30 сентября 2017.

8. 3-я Международная научная школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах». Москва, ИПМех РАН, Россия, 1–3 ноября 2017.
9. Международная конференция “XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам” (КРОМШ-2018), Крым, пос. Батилиман, Россия, 17–29 сентября 2018.
10. Моря России: методы, средства и результаты исследований. Севастополь ФГБУН МГИ, 24–28 сентября 2018.
11. 4-я Международная научная школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах». Москва, ИПМех РАН, Россия, 24–26 октября 2018.
12. 5-я Международная научная конференция-школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах». Москва, ИПМех РАН, Россия, 23–25 октября 2019.
13. 7-я Международная научная конференция-школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах». Москва, ИПМех РАН, Россия, 20–23 октября 2021.

**Публикации.** Материалы научно-квалификационной работы (диссертации) опубликованы в 6 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах наукометрических данных Web of Science, Scopus и Russian Scientific Citation Index (RSCI/РИНЦ) общим объёмом 2,25 п.л. (личный вклад автора составляет 1,85 п.л.) и 3 статьи в сборниках трудов конференций и иных журналах общим объёмом 2,57 п.л. (личный вклад автора составляет 1,95 п.л.), а также 13 тезисов докладов на российских и международных конференциях (общий объём — 1,90 п.л.).

**Статьи в изданиях, входящих в международные базы цитирования Web of Science, Scopus и RSCI:**

1. *Слепышев А. А., Воротников Д. И.* Вертикальный перенос импульса инерционно-гравитационными внутренними волнами в бароклинном потоке // Морской гидрофизический журнал. — 2017. — № 4. — С. 3–15. DOI: 10.22449/0233-7584-2017-4-3-15.

*Slepyshev A. A., Vorotnikov D. I.* Vertical transport of momentum by inertial-gravity internal waves in a baroclinic current // Physical Oceanography. — 2017. — № 4. — P. 3–15. DOI: 10.22449/1573-160X-2017-4-3-15.

(RINC IF = 1,34 за 2021 год; Scopus/Web of Science IF = 0,70 за 5 лет)  
(0,81 п.л./авторский вклад 0,65 п.л.: анализ литературы, подготовка данных, проведение моделирования, анализ результатов, интерпретация результатов и выводы)

2. *Слепышев А. А., Воротников Д. И.* Вертикальные потоки тепла и соли, обусловленные инерционно-гравитационными внутренними волнами на морском шельфе // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 532–541. DOI: 10.22449/0233-7584-2017-4-3-15.

*Slepyshev A. A., Vorotnikov D. I.* Vertical heat and salt fluxes induced by inertia-gravity internal waves on sea shelf // Izvestiya—Atmospheric and Oceanic Physics. — 2017. — Vol. 53, № 4. — P. 467–475.

DOI: 10.1134/S0001433817040119.

(RINC IF = 1,46 за 5 лет; Scopus/Web of Science IF = 0,70 за 5 лет)  
(0,63 п.л./авторский вклад 0,5 п.л.: анализ литературы, подготовка данных, проведение моделирования, анализ результатов, интерпретация результатов и выводы, подготовка результатов к публикации)

3. *Воротников Д. И., Слепышев А. А.* Вертикальные потоки импульса,

обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2018. — № 1. — С. 23–35. DOI: 10.7868/S0568528118010036.

*Vorotnikov D. I., Slepyshev A. A.* Vertical momentum fluxes induced by weakly nonlinear internal waves on the shelf // Fluid Dynamics. — 2018. — Vol. 53, № 1. — P. 21–33. DOI: 10.1134/S0015462818010160.

(RINC IF = 0,87 за 5 лет; Scopus/Web of Science IF = 0,90 за 2022 год)  
(0,81 п.л./авторский вклад 0,7 п.л.: анализ литературы, подготовка данных, проведение моделирования, анализ результатов, интерпретация результатов и выводы, подготовка результатов к публикации)

#### **Публикации в сборниках трудов конференций и иных журналах:**

4. *Slepyshev A. A., Vorotnikov D. I.* Vertical mass transport by weakly nonlinear inertia-gravity internal waves // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes / Ed. by В. И. Карев, Д. М. Климов, К. В. Показеев. — Vol. 30 of Springer Geology. — Springer, Cham Germany, 2018. — P. 99–111. DOI: 10.1007/978-3-319-77788-7\_12. (0,81 п.л./авторский вклад 0,6 п.л.)
5. *Slepyshev A. A., Vorotnikov D. I.* Numerical calculation of vertical wave momentum fluxes on a shear flow // Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. — 2022. — P. 167–176. DOI: 10.1007/978-3-030-99504-1\_18. (0,63 п.л./авторский вклад 0,45 п.л.)
6. *Slepyshev A. A., Vorotnikov D. I.* Generation of vertical fine structure by internal waves in a shear flow // Open Journal of Fluid Dynamics. — 2019. — Vol. 9, № 2. — P. 140–157. DOI: 10.4236/ojfd.2019.92010. (1,13 п.л./авторский вклад 0,9 п.л.)

**Тезисы докладов на конференциях, индексируемых в информационно-аналитической системе научного цитирования РИНЦ:**

1. **Воротников Д. И., Слепышев А. А.** Вертикальные потоки, обусловленные инерционно-гравитационными внутренними волнами на шельфе // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. Международная научная школа молодых учёных ИПМех РАН, 11–13 ноября 2015 г. — ООО МАКС Пресс Москва: 2015. — С. 55–57. (0.19 п.л.)
2. **Слепышев А. А., Багатинский В. А., Воротников Д. И.** Процессы переноса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами в бароклинном потоке // Материалы Научной конференции Ломоносовские чтения 2015 года и Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов-2015 / Под ред. М. Э. Соколова, В. А. Иванова, Н. Н. Миленко, В. В. Хапаева, Н. В. Величко.— Т. 9 из 1. — Филиал МГУ в г. Севастополе, Севастополь: 2015. — С. 60–60. (0.063 п.л.)
3. **Воротников Д. И., Слепышев А. А.** Волновые потоки, обусловленные инерционно-гравитационными внутренними волнами // Геофизика-2015 X Международная научно-практическая конкурс-конференция молодых специалистов, 5–9 октября 2015 г.—СПбГУ, изд-во ВВМ Санкт-Петербург: 2015. — С. 100–100. (0.063 п.л.)
4. **Слепышев А. А., Воротников Д. И.** Вертикальные потоки, обусловленные инерционно-гравитационными внутренними волнами на шельфе // Физическое и математическое моделирование процессов геосредах: 2-я Международная научная школа молодых ученых; 19–21 октября 2016 г., Сборник тезисов. — ООО ПРИНТ ПРО Москва: 2016. — С. 54–56. (0.19 п.л.)
5. **Слепышев А. А., Воротников Д. И.** Вертикальный перенос импульса инерционно-гравитационными внутренними волнами // Международная конференция “XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам” (КРОМШ-2016). — Полипринт Симферополь: 2016. — С. 89–89.

(0.063 п.л.)

6. *Слепышев А. А., Воротников Д. И.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами // *Мировой океан: модели, данные и оперативная океанология. Тезисы докладов научной конференции.* — г. Севастополь, 26–30 сентября 2016 г. — ФГБУН МГИ Севастополь: 2016. — С. 136–136. (0.063 п.л.)
7. *Воротников Д. И., Слепышев А. А.* Процессы переноса, обусловленные инерционно-гравитационными внутренними волнами в вертикально-неоднородном потоке // *Международная конференция “XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам” (КРОМШ-2017),* — Полипринт Симферополь: 2017. — С. 41–43. (0.19 п.л.)
8. *Слепышев А. А., Воротников Д. И.* Вертикальный перенос массы слабонелинейными инерционно-гравитационными внутренними волнами // *Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах: 3-я международная школа молодых ученых; 1–3 ноября 2017 г., Москва: сборник материалов школы.* — ИПМех РАН Москва: 2017. — С. 189–192. (0.25 п.л.)
9. *Воротников Д. И., Слепышев А. А.* О генерации вертикальной тонкой структуры инерционно-гравитационными внутренними волнами в двумерном потоке // *Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2018.* — Полипринт Симферополь: 2018. — С. 101–103. (0.19 п.л.)
10. *Слепышев А. А., Воротников Д. И., Носова А. В., Лактионова Н. В.* О генерации вертикальной тонкой структуры инерционно-гравитационными внутренними волнами // *Моря России: методы, средства и результаты исследований / Тезисы докладов Всероссийской научной конференции.* — г. Севастополь: 2018. — С. 89–90. (0.13 п.л.)

11. *Слепышев А. А., Воротников Д. И.* Генерация вертикальной тонкой структуры слабонелинейными инерционно-гравитационными внутренними волнами // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах: 4-международная школа молодых ученых; 24-26 октября 2018 г., Сборник материалов школы. — ИПМех РАН Москва: 2018. — С. 214–216. (0.19 п.л.)
12. *Воротников Д. И., Слепышев А. А.* Генерация вертикальной тонкой структуры внутренними волнами на двумерном течении // 5-международная конференция-школа молодых ученых Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах, 23–25 октября 2019 г., ИПМ им. А. Ю. Ишлинского, г. Москва, Материалы конференции. — ИПМех РАН Москва: 2019. — С. 128–129. (0.13 п.л.)
13. *Слепышев А. А., Воротников Д. И.* Численный расчет волновых потоков импульса на двумерном стратифицированном течении // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах: 7-международная научная конференция-школа молодых ученых; 20–22 октября 2021 г., Материалы конференции / Под ред. К. В. Показеева. — ИПМех РАН Москва: 2021. — С. 210–212. (0.19 п.л.)

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикациям полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в научно-квалификационной работе (диссертации) результаты получены лично автором.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 4-х глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 108 страниц, из них 98 страницы текста, включая 54 рисунка. Библиография включает 62 наименования на 7 страницах.



## Обзор литературы

Внутренние волны существуют в стратифицированной морской среде, когда плотность морской воды растет с глубиной. Такая ситуация типична для Мирового океана. Энергетические источники внутренних волн самые разнообразные: атмосферные возмущения, гидродинамическая неустойчивость течений, взаимодействие течений и приливов с неоднородностями рельефа дна, излучение волн вихрями. Исследования внутренних волн приобрело особую актуальность в последние десятилетия и заняло одно из центральных мест в современной гидрофизике океана. Это связано прежде всего с тем, что внутренние волновые движения стратифицированной жидкости в Мировом океане присутствуют повсеместно, что побудило исследователей к созданию универсального климатического спектра внутренних волн [1]. Внутренние волны характеризуются широким диапазоном масштабов с длинами волн от десятков и сотен метров до десятков километров. Длинные волны имеют почти синусоидальный характер, короткие волны нередко распространяются в виде волновых пакетов, однако и короткие волны могут встречаться в виде модулированных квазисинусоидальных колебаний.

Внутренние волны, таким образом, имеют перемежаемый характер [2]. Одной из причин перемежаемости волнового поля является модуляционная неустойчивость, которая у внутренних волн существенно перемежаема по масштабам [3]. В длинноволновом пределе внутренние волны при отсутствии учёта вращения Земли устойчивы к продольной модуляции. При уменьшении длины волны происходит смена устойчивости к продольной модуляции, когда длина волны меньше некоторого критического значения, далее с ростом волнового числа может вновь произойти смена устойчивости в окрестности синхронизма групповой скорости пакета и фазовой скорости низкочастотной волны более высокой моды [3] и т. д. Модуляционная неустойчивость внутренних волн приводит к сложной эволюции огибающей, локализации энергии в

порождаемых волновых пакетах, которые в свою очередь могут превращаться в модулированные волны огибающей и т. д. Процесс этот определяется двумя конкурирующими факторами в ходе эволюции пакета — нелинейным сжатием и дисперсионным расплыванием. В тесной связи с нелинейной динамикой пакета находится порождение им средних на временном масштабе волны течений и возмущений плотности, которые обусловлены нелинейностью. Физической причиной генерации средних полей являются дивергенция волновых напряжений  $\rho_0 u_i \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}$ , которая отлична от нуля из-за зависимости огибающей от пространственно-временных координат (здесь  $u_i$  — поле волновых эйлеровых скоростей ( $i = 1 \div 3$ ),  $\rho$  — плотность жидкости, черта сверху означает усреднение по периоду волны). Индуцированное течение имеет масштаб огибающей пакета. Помимо индуцированного течения в волновом пакете присутствует обусловленный нелинейностью стоксов дрейф частиц жидкости, который имеет место и в плоской волне.

Одним из определяющих эффектов сказывающихся на динамике внутренних инерционно-гравитационных внутренних волн в природных стратифицированных средах, какой является Мировой океан, является наличие так называемых сдвиговых течений. Течения в океане определяются неоднородным распределением температуры по его поверхности: постоянный поток тепла из тропических областей в холодные высокие широты. Причем половина этого потока обеспечивается океаном - системой поверхностных и глубинных течений

Поэтому становится важным вопрос изучения распространения внутренних инерционно-гравитационных волн с учетом наличия в толще воды сдвиговых течений, т. е. течений, которые зависят от глубины. Если рассматривать физику взаимодействия внутренних инерционно-гравитационных волн при наличии сдвиговых течений по глубине, то необходимо учитывать такой эффект как обмен энергией между внутренними гравитационными волнами и присутствующими течениями с вертикальным сдвигом скорости. Если

вертикальный градиент сдвиговых течений велик, то течения могут отдавать энергию внутренним гравитационным волнам, как следствие возникновения внутренней гидродинамической неустойчивости. Условие устойчивости внутренних гравитационных волн на фоне сдвиговых течений — условие Майлса:

$$Ri = N^2 \left( \frac{dU}{dz} \right)^{-2} > 1/4.$$

Критерием данного условия выступает определенный порог значений числа Ричардсона, выраженного в отношении величины стратификации (частоты Брента—Вяйсяля) к градиенту сдвиговых течений — условие Майлса. Если число Ричардсона  $Ri > 0,25$ , то сдвиговая неустойчивость не наблюдается. В океанических течениях при  $Ri < 0,25$  сдвиговая неустойчивость может наблюдаться. Скорости и градиенты скоростей в придонных течениях меньше, чем в течениях у поверхности океана, но эта разница компенсируется более слабой стратификацией и меньшей частой плавучести в придонных слоях. Анализ натуральных данных, использованных в настоящей работе, свидетельствует о том, что на большей части глубины число Ричардсона превышает 0,25. Это позволяет считать стратифицированное течение динамически устойчивым и использовать численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Изменения плотности в океане с глубиной не превышают 3–4 процентов, поэтому в уравнении баланса импульса плотность при умножении на производную скорости течения полагается постоянной. В этом состоит суть приближения Буссинеска [3]. Оно широко используется, в частности при моделировании внутренних волн [3]. Расчёты при постоянной частоте Брента—Вяйсяля показывают, что на дисперсионных кривых внутренних волн приближение Буссинеска практически не сказывается на морском шельфе.

В 1847г. Стоксом [4] впервые было показано, что плоская волна конечной амплитуды на поверхности однородной жидкости приводит к ненулевому среднему дрейфу частиц жидкости в направлении распространения волны.

Эффект имеет второй порядок малости по амплитуде волны, т. е. обусловлен нелинейностью. Этот ненулевой средний дрейф возникает у волн конечной амплитуды из-за размыкания орбит движения частиц жидкости, вследствие зависимости амплитуды орбит от вертикальной координаты. Поверхностные волны развиваются на границе раздела двух сред: вода–воздух, причём к этой границе примыкают пограничные слои. Физические явления, происходящие в пограничных слоях, играют особую роль: именно через них океан и атмосфера воздействуют друг на друга, а термогидродинамические поля претерпевают резкие изменения. Как следствие этого возникают большие потоки импульса, механической энергии и тепла, а также значительная диссипация энергии и передача её от одних масштабов к другим. Без понимания процессов, формирующих пограничные слои и явлений, протекающих в них, принципиально невозможно исследование ветровых волн, теплообмена между океаном и атмосферой и процессов переноса тепла в них самих. Эксперименты [5] продемонстрировали нелинейный характер волновых полей в пограничных слоях, завихренность в которых, в основном, определяется турбулентностью. В пограничном слое, кроме того, волны вносят возмущение в поле воздушного потока, вследствие чего он перестраивается, что определяет поток энергии от ветра к волнам [6]. В придонном слое амплитуда волны резко изменяется, там также присутствует стоксов дрейф. Лабораторными и выполненными в море исследованиями [7, 8, 9] показано, что волновые возмущения приводят к возникновению у дна стационарных потоков, которые осуществляют направленный усреднённый перенос масс.

Полученная Стоксом [4] лагранжева скорость дрейфа частиц жидкости квадратична по амплитуде волны и определяется по формуле:

$$u_s = \frac{a^2 \omega k}{2 \operatorname{sh}^2(kH)} \operatorname{ch}(2k(H - z)), \quad (1)$$

где введены обозначения:  $\omega$  — частота волны,  $k$  — волновое число,  $H$  — глубина жидкости, ось  $z$  направлена вниз.

Величина стокова потока массы в поле поверхностной волны, проинтегрированная по глубине, удовлетворяет соотношению, полученному в работе [10]:

$$J_{1s} = \rho_0 \int_0^H u_s dz = -\rho_0 \overline{u_1 \zeta} \Big|_{z=0}, \quad (2)$$

здесь  $\zeta$  — вертикальное смещение границы вода–воздух,  $u_1$  — горизонтальная компонента волновой скорости. Таким образом, стоков перенос определяется импульсом между вершинами и впадинами волн.

Полученная Стоксом формула (1) для скорости дрейфа частиц жидкости в поле поверхностной волны не соответствовала экспериментальным данным из-за наличия приповерхностного и придонного погранслоёв, которые ввиду предположения об идеальности жидкости не учитывались.

Лонге—Хиггинс рассчитал скорость дрейфа частиц при учёте турбулентной вязкости в приповерхностном и придонном слоях, однако полученная им формула давала неограниченный рост скорости при  $kH \rightarrow \infty$ . Указанное «нефизическое» поведение скорости дрейфа было устранено в [5] путём учёта наряду с вязкостью нелинейного искажения профиля волны (второй гармоники). В итоге, индуцируемое волной за счёт волновых напряжений неосциллирующее эйлерово поле скорости, ограничено и скорость лагранжева дрейфа частиц также ограничена.

Учёт действия тангенциального напряжения ветра, вязкости, вращения Земли также даёт ограниченную величину скорости дрейфа [11]. Поверхностные волны оказывают влияние на процессы теплообмена в поверхностном слое океана. Волновые потоки тепла по данным экспериментов имеют максимум в окрестности энергонесущих волн [5].

В [5] при учёте турбулентной вязкости и диффузии определены эйлеровы скорости среднего течения, индуцированного поверхностной волной в приповерхностном слое за счёт нелинейности. Придонные эйлеровы скорости течения получены для волн Кельвина и Свердрупа в придонном слое [12, 13].

Суммарная скорость дрейфа частиц жидкости  $\mathbf{u}_{др}$  складывается из скорости стокова дрейфа  $\mathbf{u}_s$  и эйлеровой скорости среднего течения  $\mathbf{U}_{ср}$  [11]:

$$\mathbf{u}_{др} = \mathbf{u}_s + \mathbf{U}_{ср}. \quad (3)$$

В работе [5] определялись волновые потоки тепла и импульса в приповерхностном слое. Вертикальный поток импульса в поверхностной волне отличен от нуля при учёте турбулентной вязкости [5].

В работе Езерского А. В. и Папко В. В. [14] было показано, что волновой пакет на поверхности идеальной жидкости за счёт работы волновых напряжений генерирует внутри жидкости неосциллирующее эйлерово поле скорости, пространственный масштаб которого по горизонтали равен масштабу огибающей пакета, свободная поверхность в области пакета прогибается вниз. Были проведены лабораторные эксперименты, в которых был обнаружен этот эффект. Индуцируемое течение имеет вид циркуляционной ячейки, распространяющейся вместе с пакетом. На переднем и заднем склоне пакета вертикальные скорости индуцированного течения противоположны по направлению. Суммарный средний импульс, переносимый пакетом, с учётом стокова дрейфа равен нулю.

Любое пространственно-неоднородное, периодическое во времени течение вызывает дрейф частиц жидкости со средней скоростью, называемой скоростью стокова дрейфа  $\mathbf{u}_s$  [15]:

$$\mathbf{u}_s = \overline{\left( \int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t') dt' \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{u}$  — поле волновых эйлеровых скоростей, черта сверху означают усреднение по периоду волны.

У трёхмерных внутренних волн с волновым вектором  $\mathbf{k}$  при условии, что масштаб изменения частоты Брента—Вяйсяля много больше соответствующего масштаба волны из уравнения неразрывности следует, что  $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Следовательно, скорость стокова дрейфа равна нулю и смещение частиц

жидкости при отсутствии средних течений в среднем равно нулю. У плоских внутренних волн фиксированной моды, так же как и у поверхностных волн, горизонтальная скорость стокова дрейфа не равна нулю и квадратична по амплитуде волны:

$$u_{1s} = \frac{2}{k\omega} \frac{d}{dz} \left( u_3^0 \frac{du_3^0}{dz} \right); \quad (5)$$

здесь  $2u_3^0$  — амплитуда вертикальной скорости,  $u_3 = u_3^0(z)e^{ikx-i\omega t} + \text{к. с.}$ ,  
к. с. — комплексно-сопряжённые слагаемые.

Найдём величину горизонтального стокова потока массы в поле внутренней волны, проинтегрированного по глубине:

$$\begin{aligned} J_{1s} &= \rho_0 \int_0^H u_s dz = \frac{2\rho_0}{k\omega} u_3^0 \frac{du_3^0}{dz} \Big|_0^H - \frac{2}{k\omega} \int_0^H \frac{d\rho_0}{dz} u_3^0 \frac{du_3^0}{dz} dz = \\ &= -\rho_0 \overline{u_1 \zeta} \Big|_{z=0} + \int_0^H \overline{\rho u_1} dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегральный горизонтальный поток массы в области внутренней волны отличается от потока в поверхностной волне (2) наличием второго слагаемого в (6).

Вертикальная скорость стокового дрейфа у фиксированной моды плоских внутренних волн с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны равна нулю при отсутствии учета вращения Земли и вертикально-неоднородных течений, либо при неучете турбулентной вязкости и диффузии, т.е. при отсутствии диссипации волны на турбулентности.

При наличии среднего течения с компонентой  $U_2^0$ , направленной поперёк направления распространения волны, отлична от нуля поперечная к горизонтальному волновому вектору компонента скорости стокова дрейфа [16]:

$$\begin{aligned} u_{2s} &= -\frac{dU_2^0}{dz} \frac{d}{dz} \left( u_3^0 \right)^2 - \frac{u_3^0}{\omega} \frac{d}{dz} \left( u_3^0 \frac{dU_2^0}{dz} \right) + u_3^0 \frac{d}{dz} \left( u_3^0 \frac{dU_2^0}{dz} \right), \\ \Omega &= \omega - kU_1^0. \end{aligned} \quad (7)$$

У слабонелинейного волнового пакета помимо скорости стоковского дрейфа присутствует и среднее течение, индуцированное за счёт нелинейности, эйлерова скорость которого находилась в работах [10, 17]. Физически это течение объясняется дивергенцией волновых напряжений, которая обусловлена зависимостью огибающей от пространственно-временных координат.

Вертикальная составляющая скорости стоковского дрейфа в области пакета в третьем порядке малости по крутизне волны отлична от 0:

$$u_{3s} = -\frac{1}{\omega k} u_{30} \frac{du_{30}}{dz} \frac{\partial(A \cdot A^*)}{\partial \xi} \varepsilon^3, \quad (8)$$

здесь  $u_{30}A(\xi, t)\varepsilon$  — амплитуда вертикальной волновой орбитальной скорости в волне [16],  $\xi = \varepsilon x_1$  — «медленная» переменная. Нетрудно видеть, что в результате прохождения пакета суммарное вертикальное смещение частиц жидкости равно 0, т. е. вертикальные волновые потоки массы на переднем и заднем склоне пакета противоположны. Действительно, заменив действие оператора  $\frac{\partial(AA^*)}{\partial \xi}$  на  $\frac{\partial(AA^*)}{c_{g1}\partial t}$  ( $c_{g1}$  — групповая скорость), после интегрирования по времени прохождения пакета  $\tilde{t}$  убеждаемся, что  $\int_0^{\tilde{t}} u_{3s} dt = 0$ . Средний импульс в области пакета, проинтегрированный по глубине с учётом индуцированного среднего течения имеет вид:

$$J_{1s} = \int_0^H \rho_0(u_s + u_{1\text{инд}}) dz = \int_0^H \rho_0 u_{1\text{инд}} dz + \int_0^H \overline{\rho' u'_1} dz - \rho_0(0) \overline{u'_1 \zeta'} \Big|_{z=0}. \quad (9)$$

Заметим, что при подстановке в (9) полученного в [17] в приближении Буссинеска при граничном условии на поверхности — условии «твёрдой крышки» и наличии индуцированного течения интегральный горизонтальный средний импульс в области пакета равен нулю. Аналогичный результат для пакета поверхностных волн получен в работе [10].

Тонкая вертикальная структура гидрофизических полей в океане была открыта во второй половине прошлого века после создания высокоразрешающей зондирующей аппаратуры [18–21]. Оказалось, что вертикальные профили



температуры и солености сильно изрезаны по вертикали. Как правило, слои с низким градиентом температуры и солености чередуются с прослойками, где градиенты указанных характеристик имеют достаточно большие значения [22]. До середины 70-х годов прошлого века в качестве основного источника генерации вертикальной тонкой структуры вдали от фронтальных зон и берегов рассматривались внутренние волны. Вызываемые короткопериодными внутренними волнами возмущения профилей температуры, солености и плотности рассматривалась как обратимая тонкая структура, обусловленная кинематическим эффектом внутренних волн [22]. Однако, внутренние волны могут испытывать обрушения, что приводит к генерации пятен турбулентности, эволюция которых и приводит к необратимой тонкой и микроструктуре в виде блинов «ископаемой турбулентности» [22, 23]. Гидродинамическая неустойчивость внутренних волн и течений порождают перемежаемую турбулентность и микроструктуру в океане [23–25].

Если температура и соленость убывают с глубиной при устойчивой стратификации возможен механизм генерации ступенчатых структур за счет «двойной диффузии» [26]. Натурные оптические наблюдения привели к обнаружению в высокоградиентных прослойках ячеек «солевых пальцев» [27, 28]. Наблюдаемая ступенчатая структура поддерживается турбулентной конвекцией в квазиоднородных слоях, вызванной переносом массы через высокоградиентные прослойки «солевыми пальцами».

Если температура и соленость растут с глубиной, то возможно развитие «послойной конвекции», тоже приводящей к формированию ступенчатых структур [26].

В районах фронтов возможен механизм «интрузионного расслоения», когда происходит взаимное проникновение вод с различными  $T$ ,  $S$  характеристиками ( $T$  — температура,  $S$  — соленость). Тонкая структура «интрузионного типа» имеет ярко выраженные инверсии по температуре и солености при устойчивой стратификации [29]. Иногда на фоне таких инверсий

развиваются ступенчатые структуры вследствие механизма двойной диффузии.

Наиболее типичной является ситуация, когда температура убывает с глубиной, а соленость растет. В этом случае «двойная диффузия» не работает и ключевым фактором генерации вертикальной тонкой структуры являются внутренние волны.

Говоря о волновом механизме формирования тонкой структуры нельзя не отметить роль нелинейных взаимодействий при распространении внутренних волн. Нелинейные эффекты при распространении пакетов внутренних волн проявляются в генерации средних на временном масштабе волны течений и поправки к плотности, пропорциональных квадрату текущей амплитуды [30, 31]. Данная поправка к плотности зависит от вертикальной координаты и может рассматриваться как вертикальная тонкая структура, генерируемая волновым пакетом. После прохождения волнового пакета невозмущенный профиль стратификации восстанавливается и генерируемая вертикальная тонкая структура имеет обратимый характер.

Внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии затухают [32–34]. Вертикальные волновые потоки тепла и соли при этом отличны от нуля [34]. Указанные волновые потоки отличны от нуля и без учета турбулентной вязкости и диффузии для инерционно-гравитационных внутренних волн при наличии течения, компонента скорости которого, нормальная к направлению распространения волны зависит от вертикальной координаты [35]. В этом случае уравнение для амплитуды вертикальной скорости имеет комплексные коэффициенты, собственная функция и частота волны комплексные и указанные волновые потоки отличны от нуля. Ниже будет показано, что эти потоки приводят к деформации профиля средней плотности — к тонкой структуре, генерируемой волной, которая имеет необратимый характер.

# Глава 1. Вертикальный перенос импульса инерционно-гравитационными внутренними волнами в бароклинном потоке

## 1.1 Постановка задачи

Рассматриваются свободные внутренние волны в безграничном бассейне постоянной глубины при учете вращения Земли, при этом две компоненты скорости течения зависят от вертикальной координаты. В линейном приближении находятся дисперсионное соотношение и вертикальное распределение амплитуды внутренних волн. Уравнение для амплитуды вертикальной скорости имеет комплексные коэффициенты, поэтому собственная функция внутренних волн и частота волны — комплексные, т. е. имеет место слабое затухание волны. Во втором порядке малости по амплитуде волны находятся вертикальные волновые потоки импульса и скорость стоковского дрейфа. Уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска для волновых возмущений имеют вид [3, С. 302]

$$\frac{Du}{Dt} - fv + w \frac{dU_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + w \frac{dV_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (1.2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0(0)}, \quad (1.3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.5)$$

где  $u, v, w$  — две горизонтальные и вертикальная компоненты волновой скорости течения соответственно;  $\rho, P$  — волновые возмущения плотности и давления;  $\rho_0(z)$  — профиль средней плотности;  $x, y, z$  — две горизонтальные и вертикальная координаты, ось  $z$  направлена вертикально вверх;  $f$  — параметр Кориолиса;  $U_0(z), V_0(z)$  — две компоненты скорости среднего течения; действие оператора  $\frac{D}{Dt}$  раскрывается по формуле  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial}{\partial x} + (v + V_0) \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ ;  $g$  — ускорение свободного падения. В океане от поверхности до дна плотность

воды меняется не более чем на 3–4 % [3], а при глубине моря в 100 м менее чем на 1 % [38], поэтому в приближении Буссинеска в знаменателе правых частей формул (1.1)—(1.3) усредненная по глубине плотность принимается равной плотности на поверхности моря [3].

Воспользовавшись геострофическими соотношениями [39], произведем оценку горизонтальных масштабов изменения средней плотности:

$$L_x = \rho_0 / \frac{\partial \rho_0}{\partial x} = g / \left( f \max \left| \frac{\partial V_0}{\partial z} \right| \right), \quad L_y = \rho_0 / \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = g / \left( f \max \left| \frac{\partial U_0}{\partial z} \right| \right).$$

Вертикальные профили компонент скорости течения и их производных показаны на рис. 1.1. Максимальные значения вертикальных градиентов компонент скорости течения  $U_0$ ,  $V_0$  составляют 0,019 и 8,086  $\cdot 10^{-3}$  с<sup>-1</sup> соответственно. Горизонтальные масштабы изменения плотности  $L_x = 1,16 \cdot 10^7$  м,  $L_y = 5 \cdot 10^6$  м много больше длины волны, поэтому горизонтальным изменением плотности можем пренебречь.

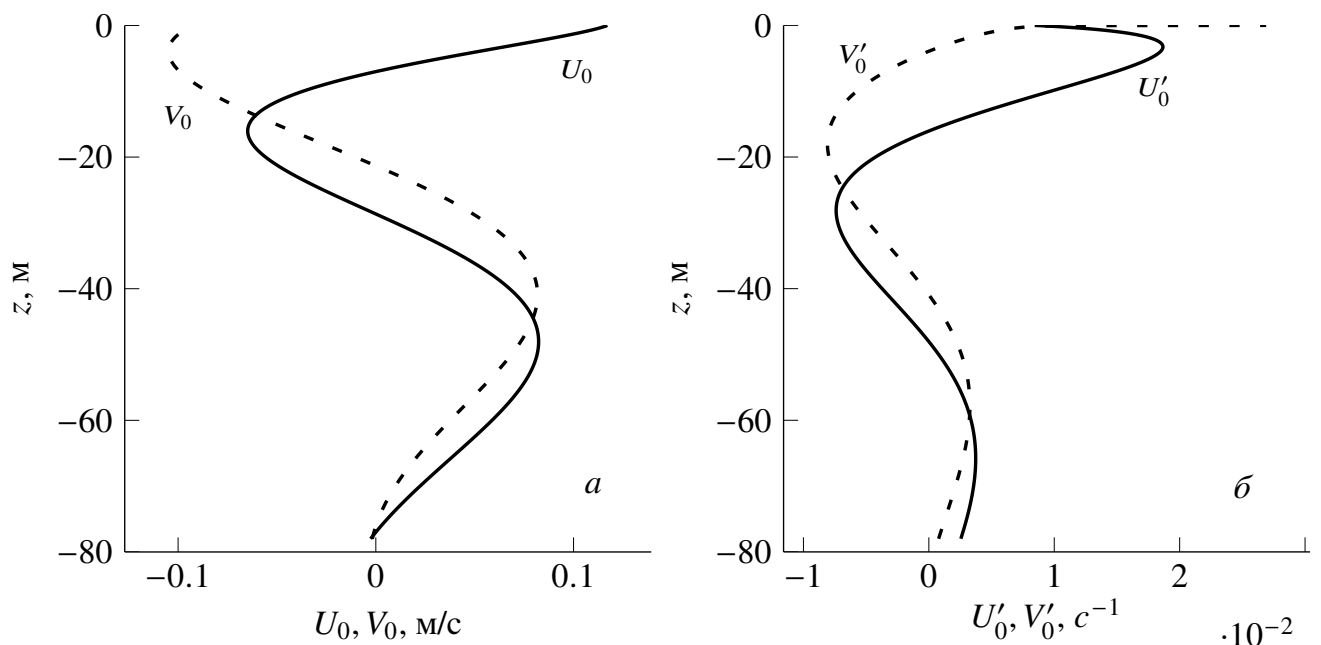


Рис. 1.1 Вертикальные профили компонент скорости течения  $U_0$  (—),  $V_0$  (- - -) — а; градиентов компонент скорости течения  $U'_0$  (—),  $V'_0$  (- - -) — б

Граничное условие на поверхности моря  $z = 0$  — условие «твёрдой крышки»,

которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных [3]:

$$w(0) = 0. \quad (1.6)$$

Граничное условие на дне — условие непротекания:

$$w(-H) = 0. \quad (1.7)$$

## 1.2 Линейное приближение

Решения линейного приближения ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с. с.}, & v_1 &= v_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с. с.}, & w_1 &= w_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с. с.}, \\ P_1 &= P_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с. с.}, & \rho_1 &= \rho_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с. с.}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где с. с. — комплексно-сопряженные слагаемые;  $A$  — амплитудный множитель;  $\theta$  — фаза волны,  $\partial\theta/\partial x = k$ ,  $\partial\theta/\partial t = -\omega$ ,  $k$  — горизонтальное волновое число,  $\omega$  — частота волны. Предполагается, что волна распространяется вдоль оси  $x$ . Подставляя (1.8) в систему (1.1)–(1.4) находим связь амплитудных функций  $u_{10}$ ,  $v_{10}$ ,  $\rho_{10}$ ,  $P_{10}$  с функцией  $w_{10}$ :

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{dw_{10}}{dz}, \quad v_{10} = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} - iw_{10} \frac{dV_0}{dz} \right), \quad (1.9)$$

$$\frac{P_{10}}{\rho_0(0)} = \frac{i}{k} \left[ \frac{\Omega}{k} \frac{dw_{10}}{dz} + \frac{dU_0}{dz} w_{10} + \frac{f}{\Omega} \left( i \frac{dV_0}{dz} w_{10} - \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right], \quad (1.10)$$

$$\rho_{10} = -\frac{i}{\Omega} w_{10} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad \Omega = \omega - k \cdot U_0. \quad (1.11)$$

Функция  $w_{10}$  удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + k \left[ \frac{if \frac{dV_0}{dz}}{\Omega^2 - f^2} - \frac{f^2 \frac{dU_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] \frac{dw_{10}}{dz} + \\ + kw_{10} \left[ \frac{k(N^2 - \Omega^2) + \Omega \frac{d^2 U_0}{dz^2} + if \frac{d^2 V_0}{dz^2}}{\Omega^2 - f^2} + \frac{ifk \frac{dU_0}{dz} \frac{dV_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $N^2 = -\frac{g}{\rho_0(0)} \frac{d\rho_0}{dz}$  — квадрат частоты Брента—Вяйсяля.

Граничные условия для  $w_{10}$ :

$$\text{при } z = 0 \quad w_{10} = 0, \quad (1.13)$$

$$\text{при } z = -H \quad w_{10} = 0. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.12) имеет комплексные коэффициенты, мнимая часть которых мала, поэтому сделаем переход к безразмерным переменным (штрихом обозначены безразмерные физические величины):

$$\begin{aligned} z = Hz', \quad t = t'/\omega_*, \quad V_0 = V'_0 V_{0*}, \quad U_0 = U'_0 V_{0*}, \quad k = k'/H, \\ f = f'\omega_*, \quad \omega = \omega'\omega_*, \quad N = N'\omega_*, \quad \Omega = \Omega'\omega_*, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $H$  — глубина моря;  $\omega_*$  — характерное значение частоты волны;  $V_{0*}$  — характерное значение скорости течения, поперечной к направлению распространения волны.

Уравнение (1.12) тогда приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w'_{10}}{dz'^2} + k' \left[ \frac{i\varepsilon f' \frac{dV'_0}{dz'}}{\Omega'^2 - f'^2} - \frac{\varepsilon f'^2 \frac{dU'_0}{dz'}}{\Omega'(\Omega'^2 - f'^2)} \right] \frac{dw'_{10}}{dz'} + \\ + k' w'_{10} \left[ \frac{k'(N'^2 - \Omega'^2) + \varepsilon \Omega' \frac{d^2 U'_0}{dz'^2} + i\varepsilon f' \frac{d^2 V'_0}{dz'^2}}{\Omega'^2 - f'^2} + \frac{i\varepsilon^2 f' k' \frac{dU'_0}{dz'} \frac{dV'_0}{dz'}}{\Omega'(\Omega'^2 - f'^2)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\varepsilon = V_{0*}/H\omega_*$  — малый параметр. Мнимая часть коэффициентов в уравнении (1.16) порядка  $\varepsilon$ , поэтому мнимая часть решения  $w'_{10}$  также пропорциональна  $\varepsilon$ , т. е. решение уравнения (1.16) представим в виде:

$$w'_{10} = w'_0(z') + \varepsilon i w'_1(z'), \quad (1.17)$$

где  $w'_0(z')$  и  $w'_1(z')$  — действительные функции. Частота также представляется в виде разложения по параметру  $\varepsilon$ :

$$\omega' = \omega'_0 + \varepsilon \sigma'_1 + \dots, \quad (1.18)$$

тогда  $\Omega' = \Omega'_0 + \varepsilon\sigma'_1 + \dots$ . После подстановки (1.17), (1.18) в (1.16) получаются краевые задачи для  $w'_0(z')$  и  $w'_1(z')$ . Функция  $w'_0(z')$  удовлетворяет уравнению (с точностью до членов  $\sim \varepsilon$ ):

$$\frac{d^2 w'_0}{dz'^2} - \varepsilon k' \frac{dw'_0}{dz'} \frac{dU'_0}{dz'} \frac{f'^2}{\Omega'_0(\Omega'^2_0 - f'^2)} + \frac{k'w'_0}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} \left[ k'(N'^2 - \Omega'^2_0) + \varepsilon\Omega'_0 \frac{d^2 U'_0}{dz'^2} \right] = 0. \quad (1.19)$$

Граничные условия для  $w'_0$ :

$$w'_0(0) = 0, \quad w'_0(-1) = 0. \quad (1.20)$$

Функция  $w'_1(z')$  удовлетворяет уравнению (с точностью до членов  $\sim \varepsilon$ ):

$$\frac{d^2 w'_1}{dz'^2} - \varepsilon k' \frac{dw'_1}{dz'} \frac{dU'_0}{dz'} \frac{f'^2}{\Omega'_0(\Omega'^2_0 - f'^2)} + \frac{k'w'_1}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} \left[ k'(N'^2 - \Omega'^2_0) + \varepsilon\Omega'_0 \frac{d^2 U'_0}{dz'^2} \right] = F'(z'), \quad (1.21)$$

где

$$F'(z') = -k' \frac{dw'_0}{dz'} \frac{dV'_0}{dz'} \frac{f'}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} + ik' \frac{dw'_0}{dz'} \frac{dU'_0}{dz'} \frac{\sigma'_1 f'^2 (3\Omega'^2_0 - f'^2)}{\Omega'^2_0 (\Omega'^2_0 - f'^2)^2} - \frac{k'w'_0}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} \left[ k' \frac{2i\Omega'_0 \sigma'_1 (N'^2 - f'^2)}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} + i\varepsilon \frac{d^2 U'_0}{dz'^2} \frac{\sigma'_1 (\Omega'^2_0 + f'^2)}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} + f' \frac{d^2 V'_0}{dz'^2} + \varepsilon \frac{f'k'}{\Omega'_0} \frac{dU'_0}{dz'} \frac{dV'_0}{dz'} \right].$$

Граничные условия для  $w'_1$ :

$$w'_1(0) = 0, \quad w'_1(-1) = 0. \quad (1.22)$$

После перехода к размерным переменным уравнение (1.19) приобретает вид:

$$\frac{d^2 w_0}{dz^2} - k \frac{dw_0}{dz} \frac{dU_0}{dz} \frac{f^2}{\Omega_0(\Omega_0^2 - f^2)} + \frac{k w_0}{(\Omega_0^2 - f^2)} \left[ k(N^2 - \Omega_0^2) + \Omega_0 \frac{d^2 U_0}{dz^2} \right] = 0, \quad (1.23)$$

где  $\Omega_0 = \omega_0 - kU_0$  — частота волны со сдвигом Доплера. Уравнение (1.23) следует дополнить граничными условиями:

$$w_0(0) = 0, \quad w_0(-H) = 0. \quad (1.24)$$

При отсутствии течения ( $U_0 = 0$ ) краевая задача (1.23), (1.24) имеет при фиксированном волновом числе  $k$  дискретный спектр частот, лежащих в интервале  $f < \omega_0 < \max(N)$ . Каждому значению  $k$  соответствует определенное значение частоты для данной моды. При  $U_0(z) \neq 0$  дискретного спектра может не существовать [9], что обусловлено наличием сингулярностей в уравнении (1.23) при  $\Omega_0 = 0$  и  $\Omega_0 = \pm f$  (рассматриваются гидродинамически устойчивые течения). В этом случае присутствует критический слой [10], где  $\Omega_0 = 0$  (фазовая скорость волны при этом равна скорости течения). Учет вращения Земли приводит к тому, что критический слой смещается на уровень, где  $\Omega_0 = f$  [11]. Влияние этого критического слоя на дисперсионные кривые иллюстрируют приводимые ниже расчеты. Пусть  $a(z) = -\frac{f^2 k}{\Omega_0(\Omega_0^2 - f^2)} \frac{dU_0}{dz}$ ,

$b(z) = \frac{k}{(\Omega_0^2 - f^2)} \left[ k(N^2 - \Omega_0^2) + \Omega_0 \frac{d^2 U_0}{dz^2} \right]$ , тогда уравнение (1.23) запишется в виде:

$$\frac{d^2 w_0}{dz^2} + a(z) \frac{dw_0}{dz} + b(z) w_0 = 0. \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) приводится к самосопряженному виду путем умножения обеих частей уравнения на  $p(z) = \exp\left(\int a(z) dz\right)$ :

$$\frac{d}{dz} \left( p(z) \frac{dw_0}{dz} \right) - q(z) w_0 = 0, \quad (1.26)$$

здесь  $q(z) = -b(z)p(z)$ .



После перехода к размерным переменным уравнение (1.21) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} + a(z) \frac{dw_1}{dz} + b(z) w_1 = F(z), \quad (1.27)$$

где

$$F(z) = -k \frac{dw_0}{dz} \frac{dV_0}{dz} \frac{f}{(\Omega_0^2 - f^2)} + ik \frac{dw_0}{dz} \frac{dU_0}{dz} \frac{\sigma_1 f^2 (3\Omega_0^2 - f^2)}{\Omega_0^2 (\Omega_0^2 - f^2)^2} - \frac{k w_0}{(\Omega_0^2 - f^2)} \left[ k \frac{2i\Omega_0 \sigma_1 (N^2 - f^2)}{(\Omega_0^2 - f^2)} + i \frac{d^2 U_0}{dz^2} \frac{\sigma_1 (\Omega_0^2 + f^2)}{(\Omega_0^2 - f^2)} + f \frac{d^2 V_0}{dz^2} + \frac{f k}{\Omega_0} \frac{dU_0}{dz} \frac{dV_0}{dz} \right].$$

Граничные условия для функции  $w_1$ :

$$w_1(0) = 0, \quad w_1(-H) = 0. \quad (1.28)$$

Левая часть неоднородного линейного дифференциального уравнения (1.27) сводится к самосопряженному виду после умножения обеих частей на функцию  $p(z)$ :

$$\frac{d}{dz} \left( p(z) \frac{dw_1}{dz} \right) - q(z) w_1 = F_1(z), \quad (1.29)$$

где  $F_1(z) = p(z) F(z)$ .

Условие разрешимости краевой задачи (1.28), (1.29) имеет вид [12]

$$\int_{-H}^0 F_1 w_0 dz = 0, \quad (1.30)$$

отсюда находим выражение для  $\sigma_1$ :

$$\sigma_1 = q/r,$$

где

$$q = ifk \int_{-H}^0 \frac{p w_0}{\Omega_0^2 - f^2} \left( \frac{d}{dz} \left( w_0 \frac{dV_0}{dz} \right) + w_0 \frac{k}{\Omega_0} \frac{dU_0}{dz} \frac{dV_0}{dz} \right) dz,$$

$$r = \int_{-H}^0 \frac{pkw_0}{(\Omega_0^2 - f^2)^2} \left[ w_0 \left( 2k\Omega_0(N^2 - f^2) + \frac{d^2U_0}{dz^2}(\Omega_0^2 + f^2) \right) - \right. \\ \left. - f^2 \frac{dw_0}{dz} \frac{dU_0}{dz} \frac{(3\Omega_0^2 - f^2)}{\Omega_0^2} \right] dz.$$

Величина  $\sigma_1$  чисто мнимая, т. е.  $\delta\omega = \sigma_1/i$  — декремент затухания волны.

### 1.3 Нелинейные эффекты

Для определения скорости стокова дрейфа частиц жидкости используется связь между скоростью течения в представлении Эйлера  $\mathbf{u}$  и Лагранжа  $\mathbf{u}_L$  с точностью до членов второго порядка по крутизне волны [24]:

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u} + \left( \int_0^t (\mathbf{u}_L d\tau \nabla) \mathbf{u} \right). \quad (1.31)$$

Интегральное уравнение (1.31) решается методом итераций с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны, после осреднения по периоду волны следует выражение для средней лагранжевой скорости:

$$\overline{\mathbf{u}_L} = \mathbf{U} + \overline{\left( \int_0^t (\mathbf{u}_L d\tau \nabla) \mathbf{u} \right)}, \quad (1.32)$$

где  $\mathbf{U}(U_0, V_0)$  — скорость среднего течения,  $\mathbf{u}$  — поле волновых эйлеровых скоростей, черта сверху означает усреднение по периоду волны. Скорость стокова дрейфа частиц жидкости представлена вторым слагаемым в (1.32) и определяется по формуле [25]:

$$\mathbf{u}_s = \overline{\int_0^t (\mathbf{u} d\tau \nabla) \mathbf{u}}, \quad (1.33)$$

Горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа, направленная вдоль волнового вектора, с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны, имеет вид:

$$u_s = \frac{A_1 A_1^*}{k} \left[ \frac{1}{\omega} \frac{d}{dz} \left( w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right) + \text{c. c.} \right], \quad (1.34)$$

где  $A_1 = A \exp(\delta\omega \cdot t)$ .

Поперечная к направлению распространения волны горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа определяется по формуле:

$$v_s = A_1 A_1^* \left[ \frac{1}{\omega \Omega^* k} \frac{dw_{10}}{dz} \left( if \frac{dw_{10}^*}{dz} - k \frac{dV_0}{dz} w_{10}^* \right) \right] - A_1 A_1^* \frac{w_{10}^*}{\omega^* \Omega^2} \times \\ \times \left[ \Omega \left( \frac{dw_{10}}{dz} \frac{dV_0}{dz} + \frac{if}{k} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + w_{10} \frac{d^2 V_0}{dz^2} \right) + k \frac{dV_0}{dz} \left( w_{10} \frac{dV_0}{dz} + \frac{if}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right] + \text{с. с.} \quad (1.35)$$

При наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости  $V_0$  зависит от вертикальной координаты, величина горизонтальной компоненты скорости стокова дрейфа  $v_s$  отлична от нуля.

Лагранжеву скорость стокова дрейфа частиц жидкости следует отличать от эйлеровой скорости среднего на масштабе волны течения, индуцированного волновым пакетом [26]. Горизонтальная скорость этого течения пропорциональна квадрату текущей амплитуды волны [8–10] (так же как и скорость стокова дрейфа) и имеет масштаб, равный масштабу огибающей волнового пакета. Для поверхностных волн показано, что суммарный горизонтальный волновой поток массы (с учетом индуцированного течения), проинтегрированный по глубине равен нулю, т. е. импульс волнового пакета равен нулю [26, 27]. Однако, переданный волновому пакету импульс при его генерации (квазиимпульс [27–29] или псевдоимпульс в [30]) передается длинноволновым возмущениям с масштабом порядка огибающей волнового пакета, генерируемым волновым пакетом [28]. Определение индуцированных пакетом инерционно-гравитационных внутренних волн течений при наличии среднего двумерного вертикально-неоднородного течения станет предметом дальнейших исследований.

Найдем вертикальные волновые потоки импульса  $\overline{uw}$ ,  $\overline{vw}$ , учитывая разложения (1.17), (1.18):

$$\overline{uw}/|A_1^2| = \frac{i}{k} \left( w_{10}^* \frac{dw_{10}}{dz} - w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right), \quad (1.36)$$

$$\overline{vw}/|A_1^2| = \frac{iw_{10}w_{10}^*}{\Omega\Omega^*}(\Omega - \Omega^*)\frac{dV_0}{dz} + \frac{f}{k\Omega\Omega^*} \left( \Omega^*w_{10}^*\frac{dw_{10}}{dz} + \Omega w_{10}\frac{dw_{10}^*}{dz} \right). \quad (1.37)$$

Вертикальный волновой поток импульса  $\overline{vw}$  отличен от нуля и при отсутствии течения, поток импульса  $\overline{iw}$  отличен от нуля только при наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости  $V_0$  зависит от вертикальной координаты.

#### 1.4 Результаты численного моделирования для 15-минутных внутренних волн

Для определения вертикальных волновых потоков импульса используем результаты третьего этапа 44-го рейса НИС «Михаил Ломоносов» (северо-западный шельф Черного моря). По данным градиентно-распределенных датчиков температуры (приборы ГРАД) построен временной ход вертикальных смещений изолиний температуры (рис. 1.2) [14]. Приборы располагались один над другим и пересекали слои 5–15 м (первый прибор), 15–25 м (второй), 25–35 м (третий), 35–60 м (четвертый). Легко видеть, что мощные 15-минутные колебания в интервале глубин 25–60 м находятся в противофазе с колебаниями в слое 15–25 м, что свидетельствует о присутствии внутренних волн второй моды. Максимальная амплитуда этих волн составила 0,5 м, и это позволило найти нормирующий множитель  $A_1$ . Действительно, вертикальная скорость связана с вертикальным смещением  $\zeta$  соотношением  $\frac{d\zeta}{dt} = w$ . Отсюда находятся  $\zeta$  и выражение для  $A_1$ :

$$\zeta = \frac{iw_0}{\Omega_0} A_1 \exp(ikx - i\omega_0 t) + \text{c. c.}, \quad (1.38)$$

$$A_1 = \frac{\max \zeta}{2 \max |w_0/\Omega_0|}.$$

Из (1.38) следует, что максимум  $\zeta$  соответствует максимуму функции  $w_0/\Omega_0$ ,

максимальное по модулю значение этого отношения, по данным расчетов, достигается как раз в точке максимума функции  $w_0$ . Собственная функция внутренних волн второй моды имеет максимум на глубине 50 м (рис. 1.3, а), т.е. соответствует максимальным возвышениям, согласно данным эксперимента (рис. 1.2). Краевая задача (1.23), (1.24) по определению  $w_0$  решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Вертикальный профиль частоты Брента—Вяйсяля показан на 1.3, б.

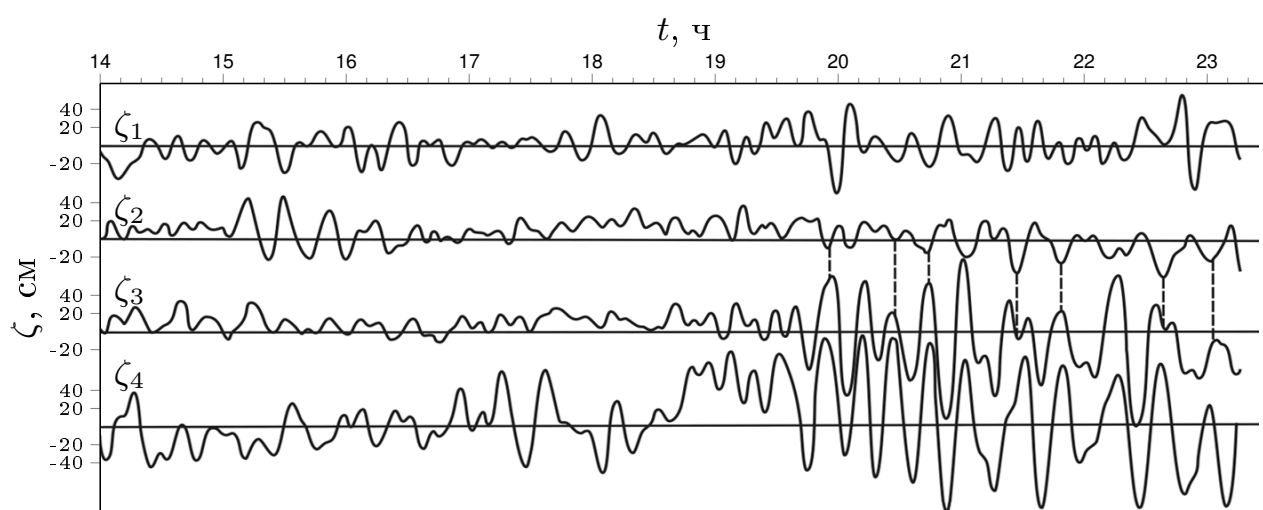


Рис. 1.2 Временной ход вертикальных смещений изолиний температуры

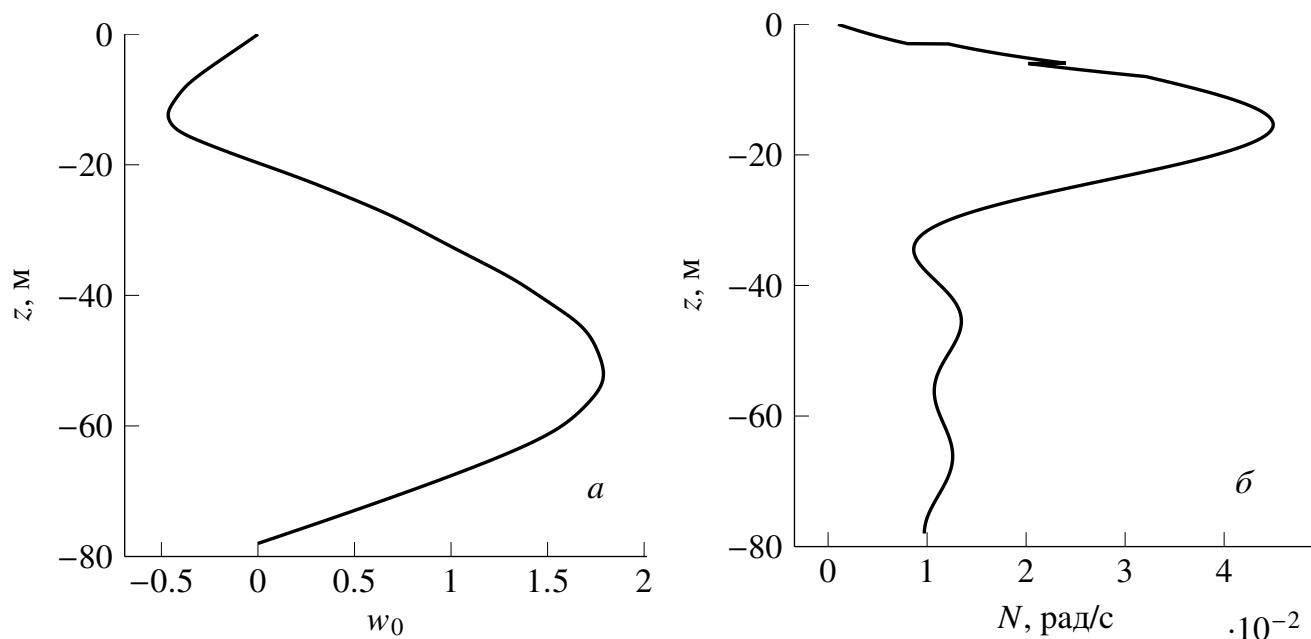


Рис. 1.3 Собственная функция 15-минутных внутренних волн второй моды — *a* и профиль частоты Брента—Вяйсяля — *б*

Волновое число  $k$  при фиксированной частоте волны находится методом пристрелки (из необходимости выполнения граничных условий (1.24)). Дисперсионные кривые первых двух мод приведены на рис. 1.5, *a*. Обращает на себя внимание тот факт, что в низкочастотной области дисперсионные кривые не достигают инерционной частоты, причем минимальное значение частоты у второй моды выше, чем у первой. Это обусловлено сингулярностью в уравнении (1.23), где частота волны со сдвигом Доплера  $\Omega_0$  равна инерционной.

Дисперсионные кривые при отсутствии течения показаны на рис. 1.4, *a*. Никакого обрезания в низкочастотной области нет, так как нет критических слоев. При этом дисперсионные кривые, рассчитанные без учета вращения Земли, но при наличии течения (рис. 1.4, *б*), как и следовало ожидать, не испытывают загибания вблизи инерционной частоты  $f$ . Однако, обрезание дисперсионных кривых все же происходит при  $\Omega_0 = 0$ , когда фазовая скорость волны сравнивается со скоростью течения (в уравнении (1.9) присутствуют сингулярности). Поправку следующего приближения по параметру  $\varepsilon$  определяем, решая неоднородную краевую задачу (1.28), (1.29). Из условия разрешимости (1.30) этой краевой

задачи находим комплексную поправку к частоте волны, т.е. декремент затухания  $\delta\omega = -1,12 \cdot 10^{-5}$  рад/с. Краевая задача (1.28), (1.29) решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Находится единственное решение, ортогональное решению  $w_0$  соответствующей однородной краевой задачи (1.23), (1.24). Зависимость декремента затухания от волнового числа показана на рис. 1.5, б. В низкочастотной области эта зависимость ведет себя по-разному для первой и второй мод. Это обусловлено обрыванием дисперсионных кривых в низкочастотной области, причем обрывание у второй моды происходит на более высокой частоте, чем у первой. При фиксированном волновом числе декремент затухания у второй моды по абсолютной величине больше, чем у первой.

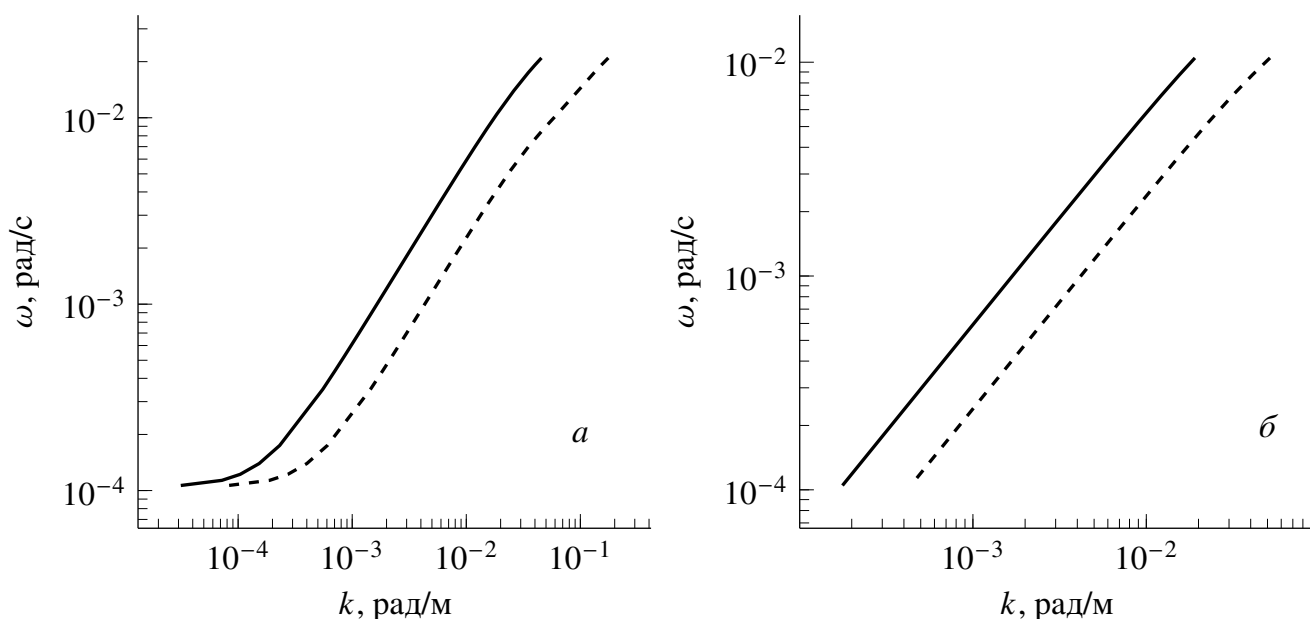


Рис. 1.4 Дисперсионные кривые первой и второй моды; без течения (с учетом вращения Земли) — а; без учета вращения Земли (при наличии течения) — б. Первая мода — сплошные линии, вторая мода — штриховые

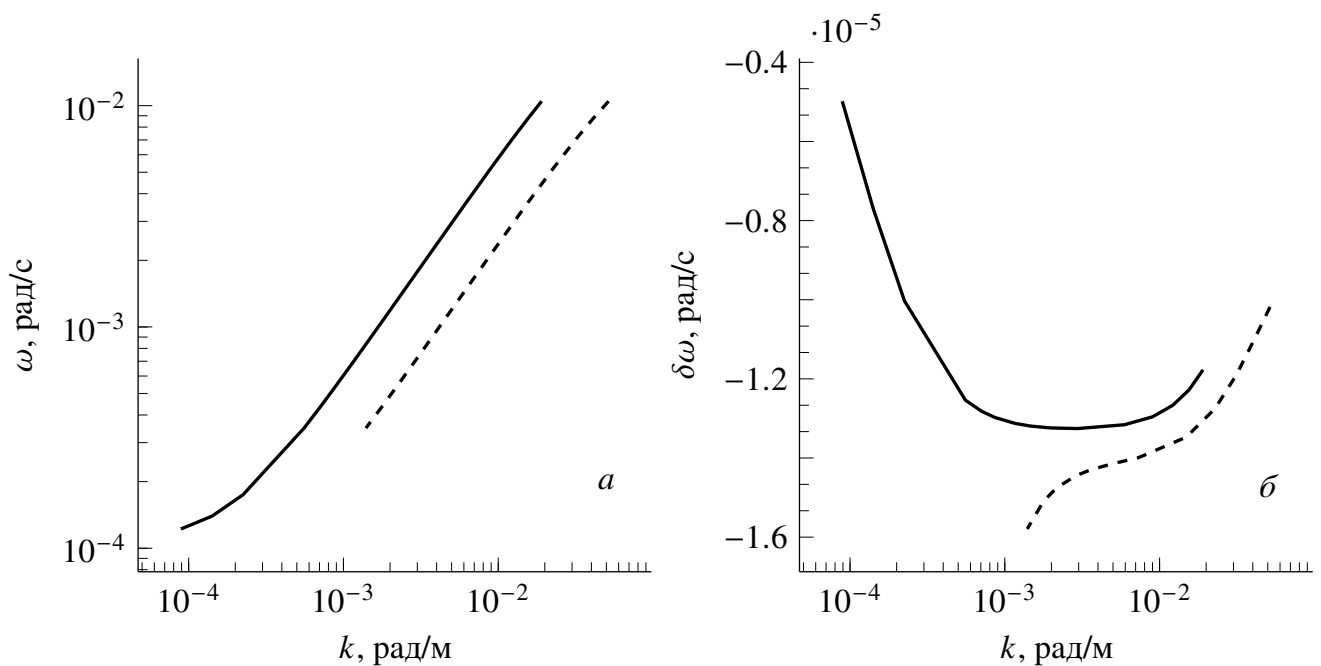


Рис. 1.5 Дисперсионные кривые первой и второй моды — *а*; зависимость декремента затухания волны от волнового числа — *б*. Первая мода — сплошные линии, вторая мода — штриховые

На рис. 1.6, *а* показаны вертикальные профили горизонтальной компоненты скорости стокова дрейфа, нормированной на квадрат максимальной амплитуды волны для первой и второй моды 15-минутных внутренних волн. Профиль поперечной к направлению распространения волны скорости стокова дрейфа (1.35) приведен на рис. 1.6, *б*. Поперечная компонента скорости стокова дрейфа на порядок меньше продольной. При этом скорость стокова дрейфа у второй моды меньше, чем у первой, только в пикноклине (область резкого скачка плотности ниже перемешанного слоя).



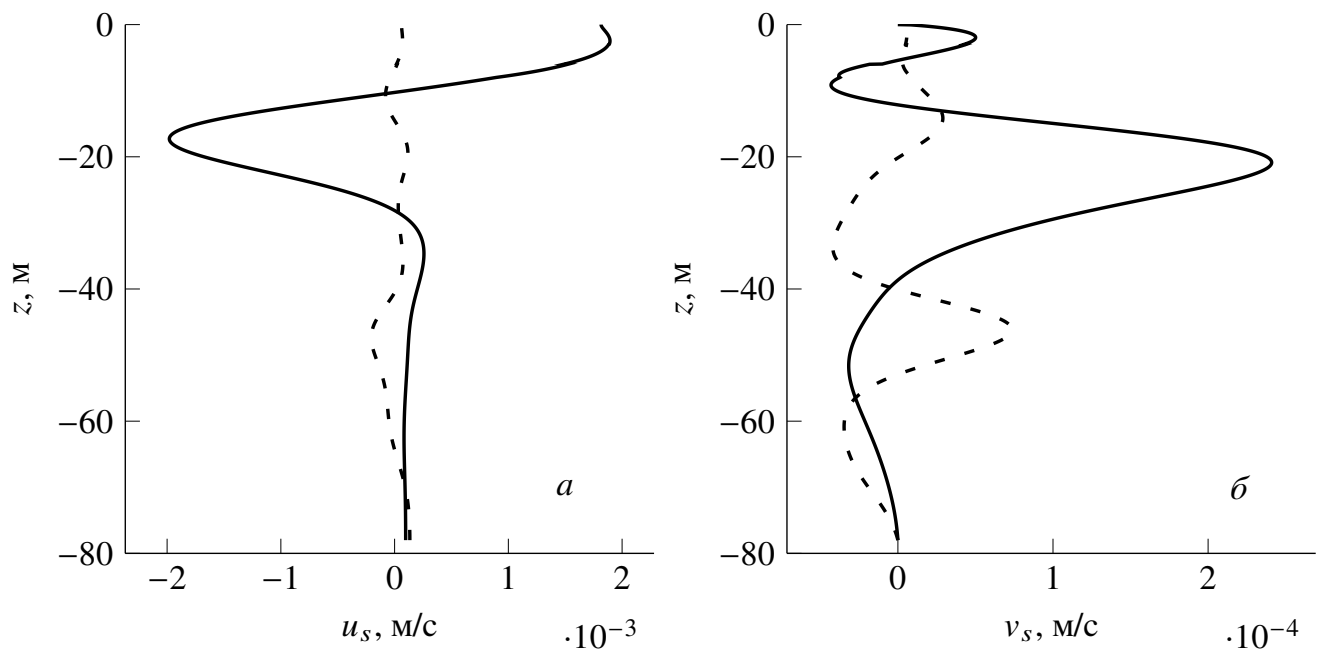


Рис. 1.6 Скорость стокова дрейфа для первой (сплошная) и второй (штриховая) моды — *a*; поперечная к направлению распространения волны горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа для первой (сплошная) и второй (штриховая) моды — *б*

Вертикальные профили волнового  $\overline{uw}$  и турбулентного  $\overline{u'w'}$  потоков импульса показаны на рис. 1.7, *a*. Турбулентный поток импульса определялся по формуле

$$\overline{u'w'} = -K_z \frac{dU_0}{dz},$$

где  $K_z$  — коэффициент вертикального турбулентного обмена, определяется выражением  $K_z \cong 0,93 \cdot 10^{-4} N_c^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$  ( $N_c$ , цикл/ч — частота Брента—Вяйсяля) [15]. Волновой поток нормировался на квадрат амплитуды волны. В верхнем 10-метровом слое турбулентный поток превышает волновой, глубже эти потоки сравнимы по величине, причем в пикноклине волновой поток доминирует. Профили вертикальных потоков импульса  $\overline{vw}$  и  $\overline{v'w'} = -K_z \frac{dV_0}{dz}$  показаны на рис. 1.7, *б*. У второй моды поток меньше, чем у первой, в верхнем 40-метровом слое. Турбулентный поток преобладает всюду над волновым, кроме пикноклина, где он сравним по величине с потоком у первой моды.

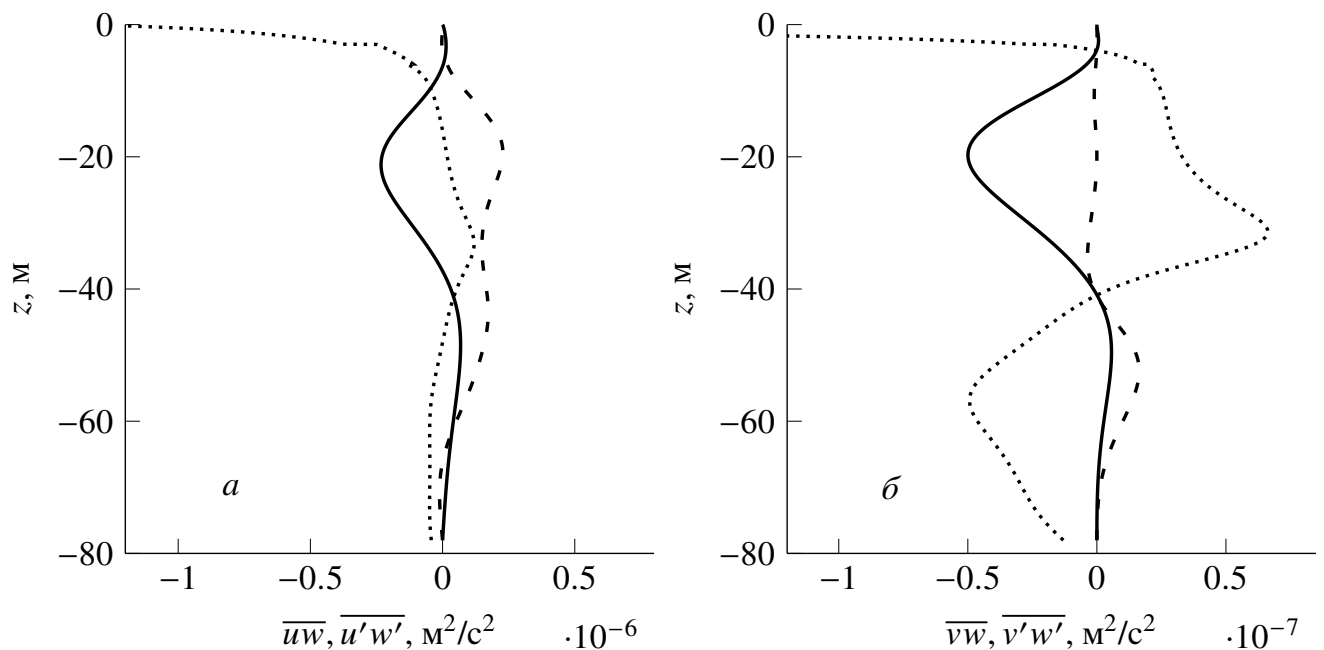


Рис. 1.7 Профили вертикальных потоков импульса (сплошная линия—первая мода, штриховая—вторая мода, пунктир—турбулентный поток). Профили волнового  $\overline{uw}$  и турбулентного  $\overline{u'w'}$  вертикальных потоков импульса — *a*, потоков  $\overline{vw}$  и  $\overline{v'w'}$  — *б*

### 1.5 Сравнение потоков для 5-минутных и 15-минутных внутренних волн

На рис. 1.8, *a* показаны вертикальные профили горизонтальной компоненты скорости стокова дрейфа (1.34), нормированной на квадрат максимальной амплитуды волны для первой моды 15-минутных и 5-минутных внутренних волн (пунктирная кривая). У 5-минутных волн первой моды максимальные значения скорости стокова дрейфа выше, чего нельзя сказать о второй моде рис. 1.8, *б*. У второй моды 15-минутных внутренних волн скорость стокова дрейфа выше в приповерхностном и придонном слое, в остальной толще моря сравнима со скоростью стокова дрейфа для 5-минутных волн.

Профили поперечной к направлению распространения волны скорости стокова дрейфа (1.35) показаны на рис. 1.9. Поперечная к направлению распространения волны компонента скорости стокова дрейфа отлична от нуля только при наличии вертикально-неоднородной компоненты скорости среднего течения, поперечной к направлению распространения волны. Поперечная к направлению распространения волны скорость стокова дрейфа на порядок

меньше продольной. У 5-минутных внутренних волн первой моды (рис. 1.9, *а*) поперечная скорость стокова дрефа больше, чем у 15-минутных в верхнем 20-метровом слое, в остальной толще моря эти величины сопоставимы. У второй моды (рис. 1.9, *б*) поперечная скорость стокова дрейфа больше у 15-минутных внутренних волн в верхнем 35-метровом слое и в придонном слое.

Вертикальные профили волнового потока импульса (1.36), нормированного на квадрат амплитуды волны, для первой моды 15-минутных и 5-минутных внутренних волн показан на рис. 1.10, *а*. В верхнем 20-метровом слое у 5-минутных волн он больше, но в нижнем 40-метровом слое больше поток у 15-минутных волн. У второй моды (рис. 1.10, *б*) волновой поток 5-минутных волн доминирует.

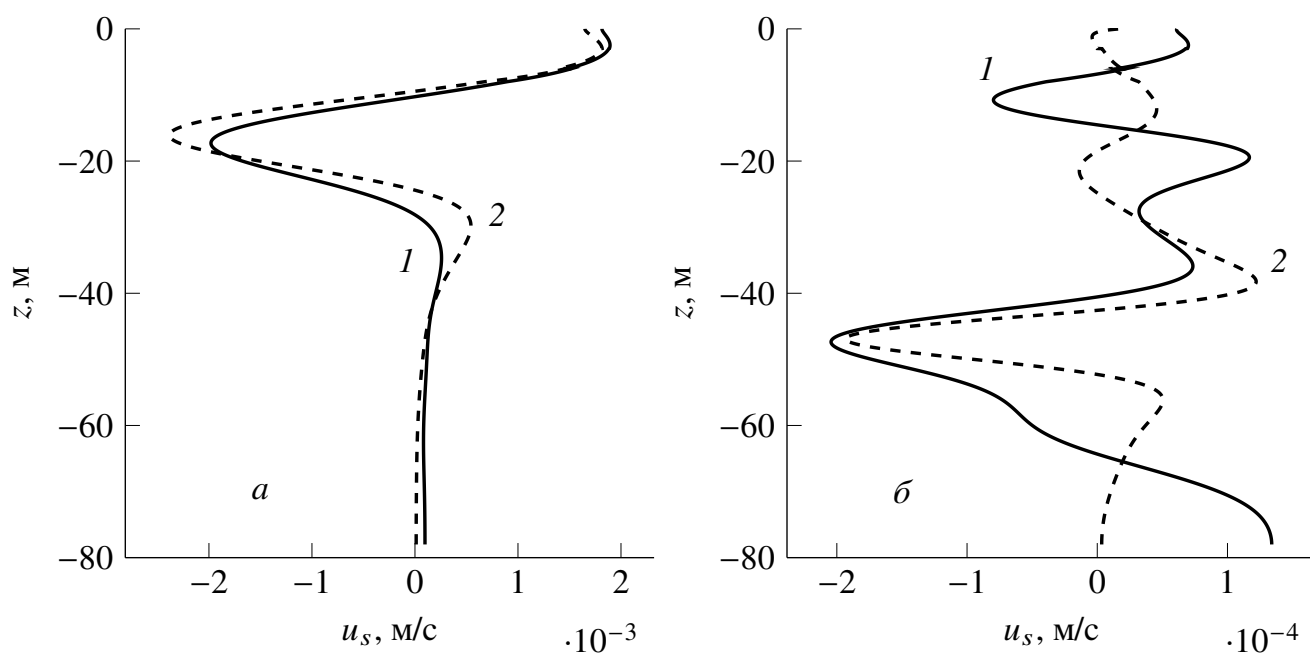


Рис. 1.8 Скорость стокова дрейфа для 15-минутных (1) и 5-минутных (2) внутренних волн первой моды — *а*; второй моды — *б*

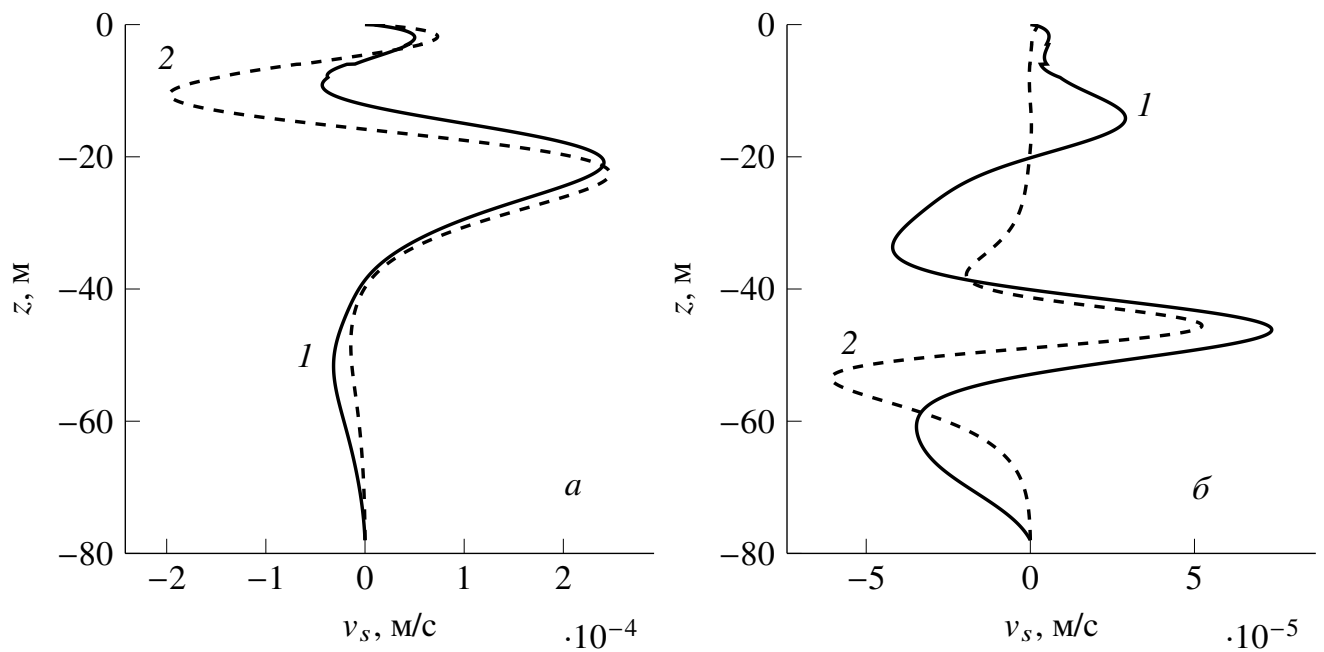


Рис. 1.9 Поперечная к направлению распространения волны горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа для 15-минутных (1) и 5-минутных (2) внутренних волн первой моды — *a*; второй моды — *б*

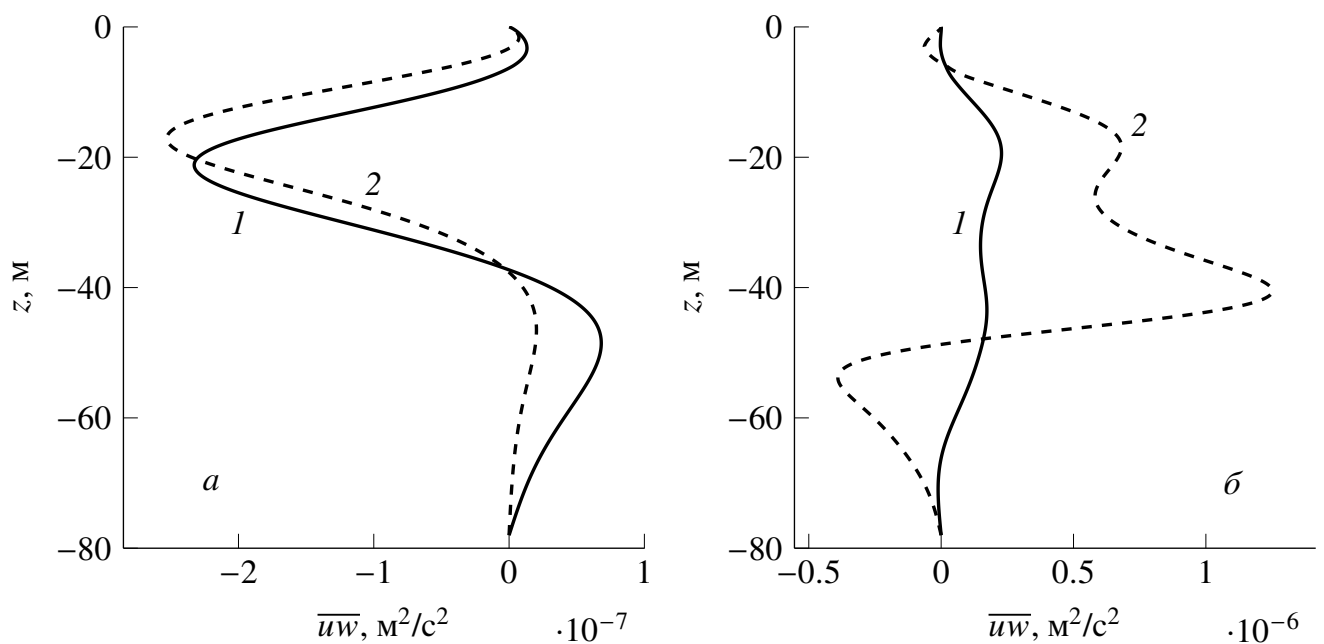


Рис. 1.10 Профили волнового потока импульса  $\overline{uw}$  для 15-минутных (1) и 5-минутных (2) внутренних волн первой моды — *a*; второй моды — *б*

Профили вертикальных потоков импульса  $\overline{vw}$  (1.37) для первой моды 15-минутных и 5-минутных внутренних волн представлены на рис. 1.11, *а*. У 15-минутных волн этот поток больше. У второй моды (рис. 1.11, *б*) поток 15-минутных волн доминирует только в верхнем 35-метровом слое и в нижнем 30-метровом слое.

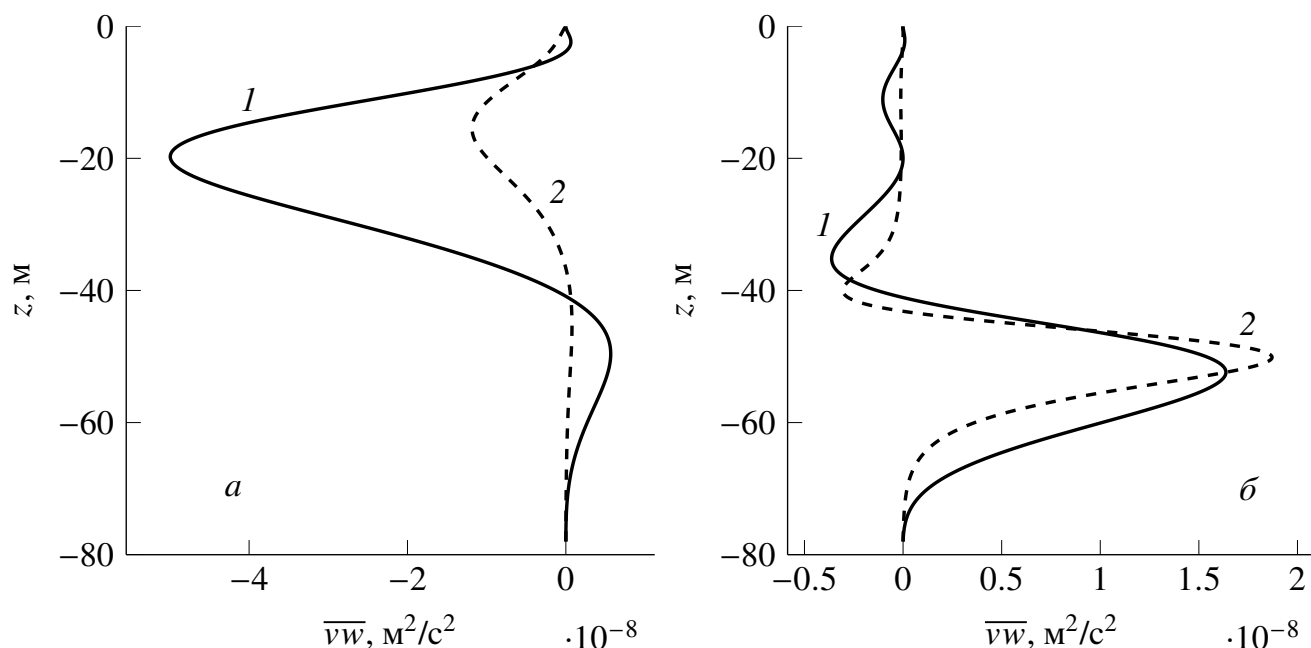


Рис. 1.11 Профили волнового потока импульса  $\overline{vw}$  для 15-минутных (1) и 5-минутных (2) внутренних волн первой моды — *а*; второй моды — *б*

Отметим, что волновой поток  $\overline{vw}$  отличен от нуля и при отсутствии течения. На рис. 1.12 представлены волновые потоки  $\overline{vw}$  при наличии и отсутствии течения для 15-минутных внутренних волн первых двух мод. При наличии течения (рис. 1.12, *а*) волновой поток  $\overline{vw}$  у первой моды больше в верхнем 40-метровом слое, чем у второй моды. При отсутствии течения поток больше у второй моды (рис. 1.12, *б*), причем величины потоков на два порядка меньше, чем при наличии течения.

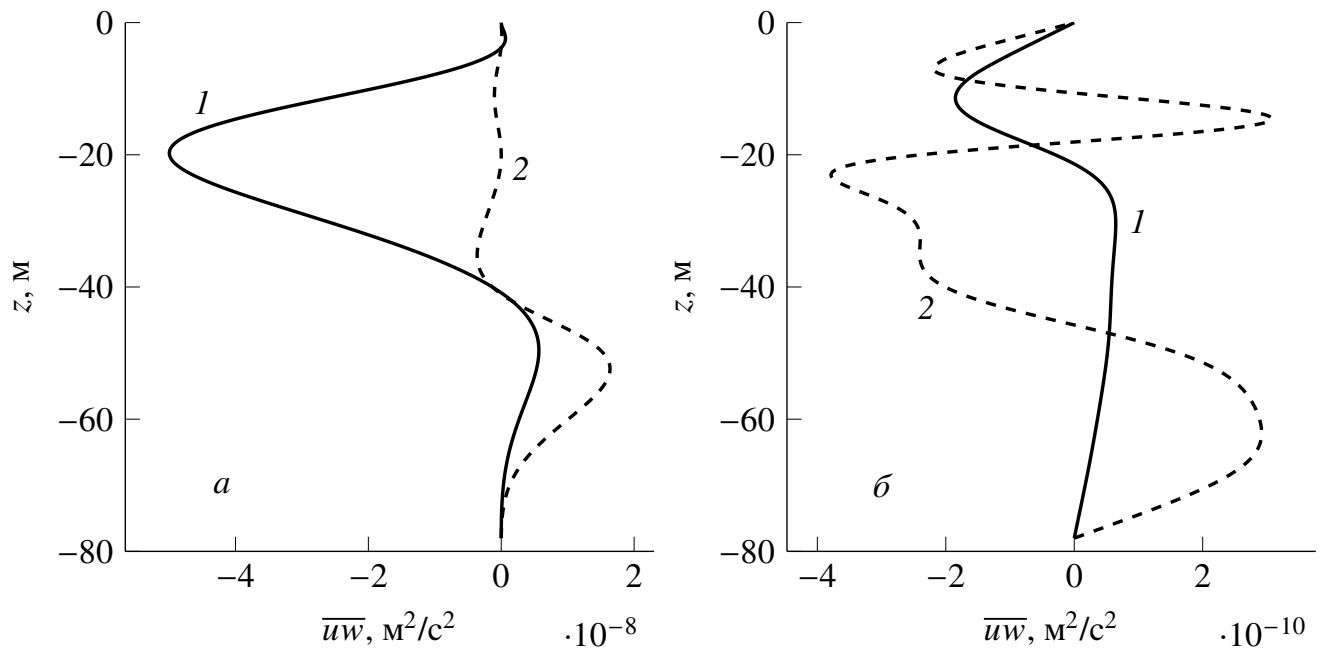


Рис. 1.12 Профили вертикального потока импульса  $\overline{uw}$  15-минутных внутренних волн первых двух мод при наличии течения — *a*; и при его отсутствии — *б*; (1) — первая мода, (2) — вторая

### 1.6 Частные случаи решения для исходной краевой задачи

Рассмотрим вновь свободные инерционно-гравитационные внутренние волны в присутствии плоскопараллельного стратифицированного течения с вертикальным сдвигом скорости и учёте вращения Земли в безграничном бассейне постоянной глубины. Компонента скорости течения  $V_0(z)$ , поперечная к направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты.

Следуя работе [62], рассмотрим исходную модель для внутренних инерционно-гравитационных внутренних волн (1.1)–(1.5) только в условиях, когда мы имеем плоскопараллельное течение с линейным профилем скорости перпендикулярное волновому вектору, т.е. его направление перпендикулярно направлению распространения волны. Теперь система уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска для волновых возмущений примет вид:

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.39)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + w \frac{dV_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (1.40)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0(0)}, \quad (1.41)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.43)$$

Обозначения сохраняются в соответствии с применяемыми ранее для системы (1.1)–(1.5). Граничные условия также остаются прежними, т. е. на поверхности моря ( $z = 0$ ) — условие «твёрдой крышки» ( $w(0) = 0$ ), и на дне ( $z = -H$ ) — условие «непротекания» ( $w(-H) = 0$ ).

Систему (1.39)–(1.43) линеаризуется путём подстановки в виде (1.8) и находим связь амплитудных функций  $u_{10}$ ,  $v_{10}$ ,  $\rho_{10}$ ,  $P_{10}$  с  $w_{10}$  как и само уравнение для  $w_{10}$ :

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{dw_{10}}{dz}, \quad dv_{10} = \frac{1}{\omega} \left( \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} - iw_{10} \frac{dV_0}{dz} \right), \quad (1.44)$$

$$\rho_{10} = -\frac{i}{\omega} w_{10} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (1.45)$$

$$\frac{P_{10}}{\rho_0(0)} = \frac{i}{k} \left[ \frac{\omega}{k} \frac{dw_{10}}{dz} + \frac{f}{\omega} \left( i \frac{dV_0}{dz} w_{10} - \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right]. \quad (1.46)$$

Функция  $w_{10}$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + \frac{ik}{\omega^2 - f^2} f \frac{dV_0}{dz} \frac{dw_{10}}{dz} + \frac{k w_{10}}{\omega^2 - f^2} \left[ k(N^2 - \omega^2) + if \frac{d^2 V_0}{dz^2} \right] = 0. \quad (1.47)$$

Граничные условия для  $w_{10}$ :

$$w_{10}(0) = w_{10}(-H) = 0. \quad (1.48)$$

### 1.6.1 Стоксов дрейф

Выражение для направленной вдоль волнового вектора горизонтальной компоненты скорости стоксова дрейфа  $u_s$  останется без изменений, в виде (1.34). В свою очередь, вид уравнения для поперечной к направлению распространения волны горизонтальной компоненты скорости стоксова дрейфа приобретёт следующий вид:

$$v_s = AA^* \frac{ik}{\omega \omega^* k} \frac{dV_0}{dz} \frac{dw_{10}}{dz} w_{10}^* - AA^* \frac{w_{10}^*}{\omega^* \omega} \left[ \frac{dw_{10}}{dz} \frac{dV_0}{dz} + \frac{if}{k} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + w_{10} \frac{d^2 V_0}{dz^2} \right] + \text{c. c.} \quad (1.49)$$

Вертикальные волновые потоки импульса для поперечной и продольной компонент скорости  $\overline{uw}$  и  $\overline{vw}$  находятся аналогичным с (1.36)–(1.37) образом, с заменой  $\Omega \leftrightarrow \omega$ . Как уже было отмечено, при  $\frac{dV_0}{dz} \neq 0$  волновой поток импульса  $\overline{uw}$  как и поперечная компонента скорости стокова дрейфа  $v_s$  при учете вращения Земли отличны от нуля. Поток импульса  $\overline{vw}$  отличен от нуля и при отсутствии течения, но при учете вращения Земли. Нормирующий множитель  $A$  находится по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений в соответствии с формулой (1.38).

Рассмотрим несколько частных случаев аналитического решения уравнения (1.47).

### 1.6.2 Однородная стратификация, постоянный сдвиг скорости

В данном случае  $N = \text{const}$ ,  $\frac{dV_0}{dz} = V_{00} = \text{const}$ ,  $V_0(z) = V_{00} \cdot (z - H)$ ,  $H < 0$ . Тогда уравнение (1.47) приводится к виду:

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + ia \frac{dw_{10}}{dz} + b w_{10} = 0, \quad (1.50)$$

где  $a = \frac{fkV_{00}}{\omega^2 - f^2}$ ,  $b = k^2 \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - f^2}$ .

Решение краевой задачи (1.48), (1.50) имеет вид:

$$w_{10}(z) = e^{-\frac{iaz}{2}} \cdot \sin \left( z \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \right). \quad (1.51)$$

При этом верно дисперсионное соотношение, следующее из граничного условия (1.48) при  $z = -H$ :

$$\omega^2 = f^2 - \frac{f^2 V_{00}^2}{2(N^2 - f^2) - 2\sqrt{(N^2 - f^2)^2 + f^2 V_{00}^2 \left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{k^2 H^2}\right)}}, \quad (1.52)$$



где  $n$  — номер моды. При  $V_{00} \rightarrow 0$  дисперсионное соотношение (1.52) переходит в известное соотношение для однородной стратификации [3, с. 216; 34, с. 363]:

$$\omega^2 = f^2 + \frac{k^2(N^2 - f^2)}{k^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}. \quad (1.53)$$

Из (1.36), (1.37), используя (1.51) находим вертикальные потоки импульса:

$$\overline{uw} = \frac{A^2 f V_{00}}{\omega^2 - f^2} \sin^2 \left( z \sqrt{\frac{f^2 k^2 V_{00}^2}{4(\omega^2 - f^2)} + \frac{k^2(N^2 - \omega^2)}{\omega^2 - f^2}} \right). \quad (1.54)$$

$$\overline{vw} = \frac{A^2 f}{\omega k} \sqrt{\frac{f^2 k^2 V_{00}^2}{4(\omega^2 - f^2)} + \frac{k^2(N^2 - \omega^2)}{\omega^2 - f^2}} \sin(2z \times \\ \times \sqrt{\frac{f^2 k^2 V_{00}^2}{4(\omega^2 - f^2)} + \frac{k^2(N^2 - \omega^2)}{\omega^2 - f^2}}). \quad (1.55)$$

Две компоненты скорости стокового дрейфа находятся из (1.34), (1.49) с использованием (1.51):

$$u_s = \frac{2A^2 \chi^2}{k\omega} \cos 2\chi z, \quad (1.56)$$

$$v_s = -A^2 \chi V_{00} \frac{(2\omega^2 - f^2)}{\omega^2(\omega^2 - f^2)} \sin 2\chi z, \quad (1.57)$$

где  $\chi = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ . Нормирующий множитель  $A$  находится по известной максимальной амплитуде вертикальных смещений  $\zeta_{\max}$  (1.38):

$$A = \frac{\omega \zeta_{\max}}{2 \max |\sin \chi z|}.$$

На рис. 1.13 показаны дисперсионные кривые первых двух мод, рассчитанные по формуле (1.52) при  $N = 5 \frac{\text{цикл}}{\text{ч}}$ ,  $H = -100$  м,  $V_{00} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ .

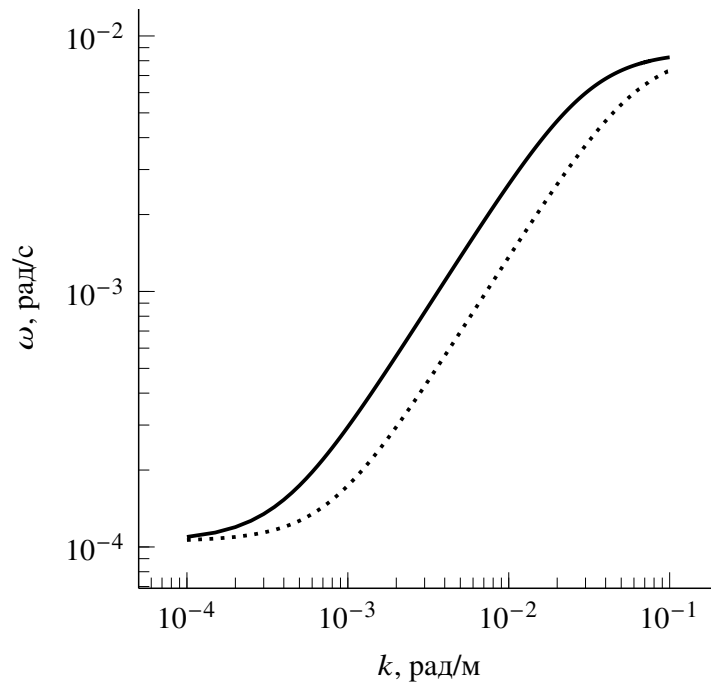


Рис. 1.13 Дисперсионные кривые первых двух мод при однородной стратификации (первая мода — сплошная линия, вторая мода — пунктир)

Турбулентный вертикальный поток  $\overline{v'w'}$  импульса рассчитывался полуфеноменологически с использованием коэффициента вертикального турбулентного обмена  $K_z \cong 9,36 \cdot 10^{-5} / N_c \frac{m^2}{c}$ , здесь  $N_c$  — частота Брента—Вяйсяля в цикл/ч [48]:

$$\overline{v'w'} = -K_z \cdot \frac{dV_0}{dz}.$$

Сравнение волновых (1.36), (1.37) и турбулентного потоков импульса проводится на рис. 1.14 для внутренней волны низшей моды при  $k = 0,01$  рад/м,  $\zeta_{\max} = 1$  м.

Две компоненты скорости стокова дрейфа частиц жидкости для внутренней волны первой моды при  $k = 0,01$  рад/м и  $\zeta_{\max} = 1$  м показаны на рис. 1.15. Продольная компонента скорости стокова дрейфа  $u_s$  по абсолютной величине, в целом, превышает поперечную  $v_s$ .

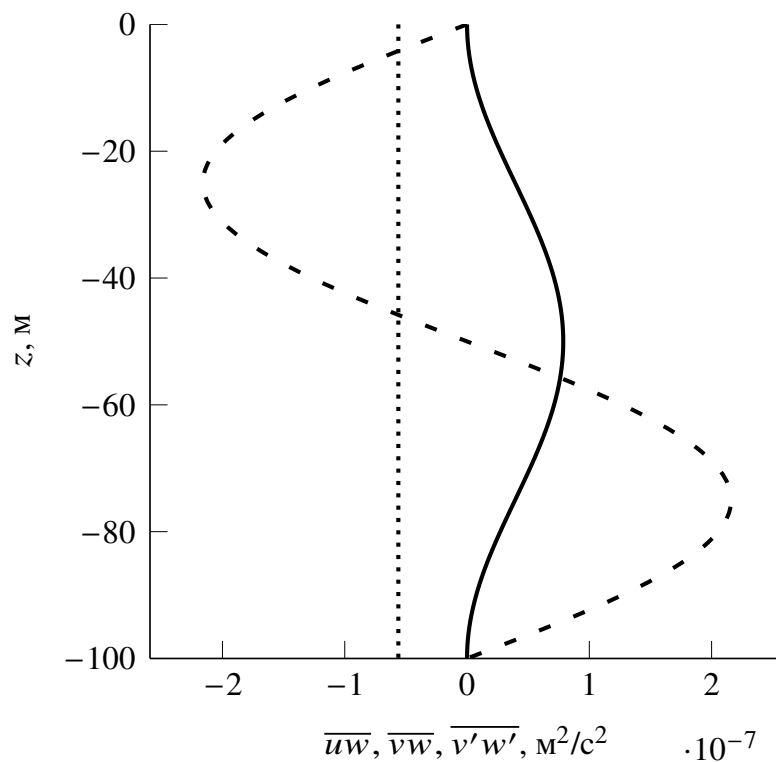


Рис. 1.14 Профили вертикальных потоков импульса (сплошная линия — поток  $\overline{u'w'}$ , штриховая —  $\overline{v'w'}$ , пунктир — турбулентный поток  $\overline{v'w'}$ )

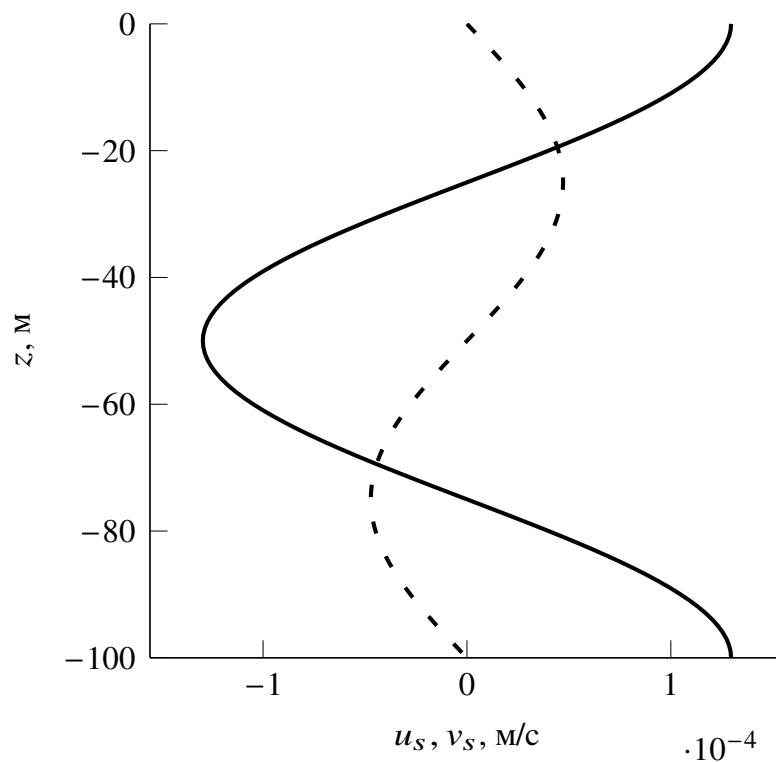


Рис. 1.15 Продольная (сплошная) и поперечная (штриховая) к направлению распространения волны горизонтальные компоненты скорости стокова дрейфа

### 1.6.3 Двухслойная модель стратификации и градиента скорости течения

Пусть частота Брента—Вяйсяля имеет постоянные значения  $N_1$  и  $N_2$  в нижнем и верхнем слое соответственно (рис. 1.16, *a*).

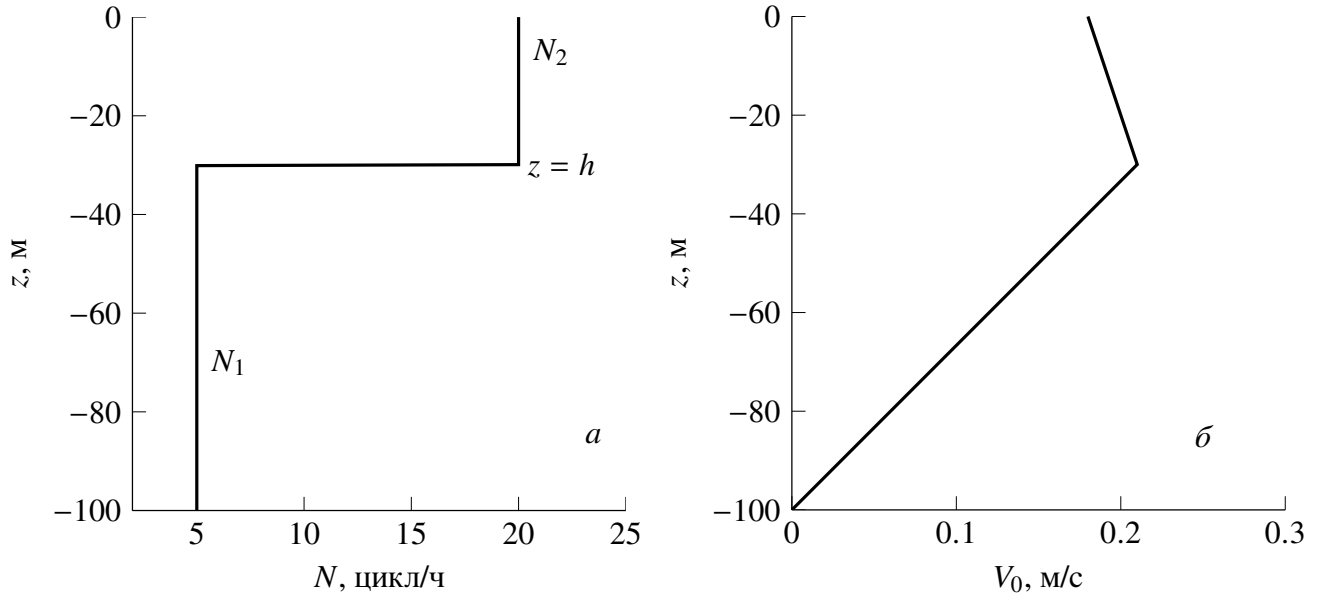


Рис. 1.16 Вертикальные профили: частоты Брента—Вяйсяля — *a*; скорости течения — *б*

Вертикальную координату границы раздела слоев обозначим как  $h$ , координату дна моря — за  $H$  ( $h < 0, H < 0$ ). В нижнем и верхнем слое пусть скорость течения меняется по линейному закону и непрерывна на границе раздела слоев (рис. 1.16, *б*).

Вертикальный градиент скорости течения в нижнем слое  $V_{100}$ , в верхнем —  $V_{200}$ . Уравнение (1.47) для функции  $w_{10}(z)$  запишется в каждом слое: В первом (нижнем) слое:

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + ia_1 \frac{dw_{10}}{dz} + b_1 w_{10} = 0, \quad (1.58)$$

Во втором (верхнем) слое:

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + ia_2 \frac{dw_{10}}{dz} + b_2 w_{10} = 0, \quad (1.59)$$

где коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  определяются по формулам:

$$a_1 = \frac{fkV_{i00}}{\omega^2 - f^2}, \quad b_1 = k \frac{N_i^2 - \omega^2}{\omega^2 - f^2}, \quad (i = 1, 2). \quad (1.60)$$

Граничные условия на поверхности моря и на дне — условия «твердой крышки»

$$w_{10}(0) = w_{10}(-H) = 0. \quad (1.61)$$

Условия «сшивки» решений на границе раздела слоев: непрерывность вертикальных смещений и непрерывность давления.

$$w_{10}(h-0) = w_{10}(h+0), \quad (1.62)$$

$$ifV_{100}w_{10}(z) + \frac{\omega^2 - f^2}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \Big|_{z=h-0} = ifV_{200}w_{10}(z) + \frac{\omega^2 - f^2}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \Big|_{z=h+0}. \quad (1.63)$$

Решение краевой задачи (1.58)–(1.63) имеет вид:

при  $h \leq z \leq 0$ :

$$w_{10}(z) = \frac{\exp(\lambda_{11}h) - \exp((\lambda_{11} - \lambda_{12})H + \lambda_{12}h)}{\exp(\lambda_{21}h) - \exp(\lambda_{22}h)} (\exp(\lambda_{21}z) - \exp(\lambda_{22}z)), \quad (1.64)$$

при  $H \leq z \leq h$ :

$$w_{10}(z) = \exp(\lambda_{11}z) - \exp(\exp(\lambda_{11} - \lambda_{12})H + \lambda_{12}z). \quad (1.65)$$

где  $\lambda_{11}, \lambda_{12}$  — корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + ia_1\lambda + b_1 = 0$ ;  
 $\lambda_{21}, \lambda_{22}$  — корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + ia_2\lambda + b_2 = 0$

$$\lambda_{11} = -\frac{ia_1}{2} + i\sqrt{\frac{a_1^2}{4} + b_1}, \quad \lambda_{12} = -\frac{ia_1}{4} - i\sqrt{\frac{a_1^2}{4} + b_1}, \quad (1.66)$$

$$\lambda_{21} = -\frac{ia_2}{2} + i\sqrt{\frac{a_2^2}{4} + b_2}, \quad \lambda_{22} = -\frac{ia_2}{4} - i\sqrt{\frac{a_2^2}{4} + b_2}. \quad (1.67)$$

Дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega^2 - f^2}{k} [\lambda_{11} \exp(\lambda_{11}h) - \exp(\lambda_{12}h + (\lambda_{11} - \lambda_{11})H)] + \\
& \quad + ifV_{100} [\exp(\lambda_{11}h) - \exp(\lambda_{12}h + (\lambda_{11} - \lambda_{11})H)] = \\
& = \left\{ \frac{\omega^2 - f^2}{k} [\lambda_{21} \exp(\lambda_{21}h) - \lambda_{22} \exp(\lambda_{22}h)] + ifV_{200} [\exp(\lambda_{21}h) - \exp(\lambda_{22}h)] \right\} \times \\
& \quad \times \frac{\exp(\lambda_{11}h) - \exp(\lambda_{12}h + (\lambda_{11} - \lambda_{12})H)}{\exp(\lambda_{21}h) - \exp(\lambda_{22}h)}. \quad (1.68)
\end{aligned}$$

Дисперсионные кривые первых двух мод показаны на рис. 1.17.

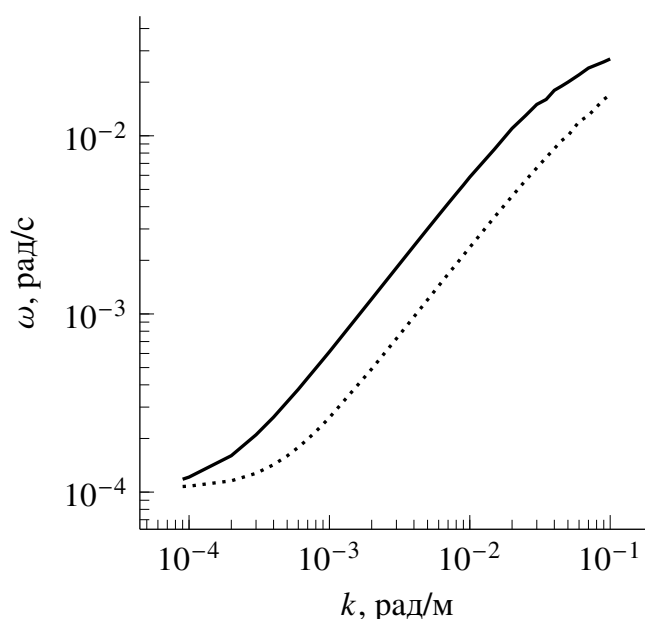


Рис. 1.17 Дисперсионные кривые первых двух мод при двухслойной стратификации (первая мода — сплошная линия, вторая мода — пунктир)

На рис. 1.18 показаны волновые  $\overline{uw}$ ,  $\overline{vw}$  и турбулентный  $\overline{v'w'}$  вертикальные потоки импульса для низшей моды внутренних волн при  $k = 0,01$  рад/м,  $\zeta_{\max} = 1$  м. Турбулентный поток определяется по тем же формулам, что и в однослойной модели.

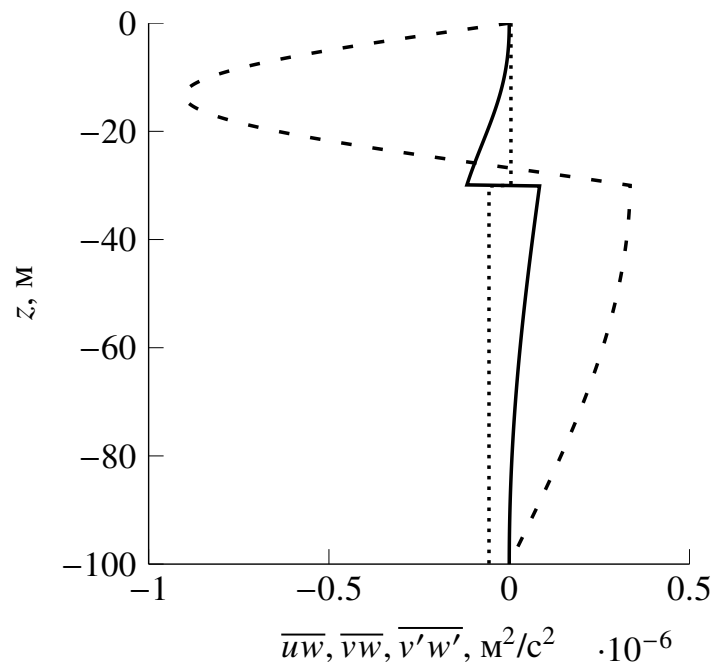


Рис. 1.18 Волновые и турбулентный потоки импульса для двухслойной стратификации (сплошная линия — продольный поток, штриховая — поперёк, пунктир — поперечный турбулентный поток)

Волновой поток  $\overline{uw}$  испытывает скачек на границе раздела слоев с переменной знака, т.к. меняет знак градиент скорости течения. Если градиент скорости при  $z = h$  знака не меняет, то и поток  $\overline{uw}$  также не меняет знак. Если градиент скорости течения равен нулю, то поток  $\overline{vw}$  скачка не испытывает и скорость течения на него почти не влияет. Этот поток значительно превышает по абсолютной величине поток  $\overline{uw}$  и турбулентный поток  $\overline{v'w'}$ . Абсолютные величины двух последних потоков сопоставимы.

Две компоненты скорости стокова дрейфа определяются по формулам (1.37), (1.49). Нормирующий множитель  $A$  определяется по формуле (1.38). Вертикальные профили двух компонент скорости стокова дрейфа для низшей моды внутренних волн при  $k = 0,01$  рад/м,  $\zeta_{\max} = 1$  м показаны на рис. 1.19. Скорость стокова дрейфа вдоль направления распространения волны почти на два порядка превосходит скорость поперек направления распространения волны. Если градиент скорости течения равен нулю, то  $v_s = 0$ .

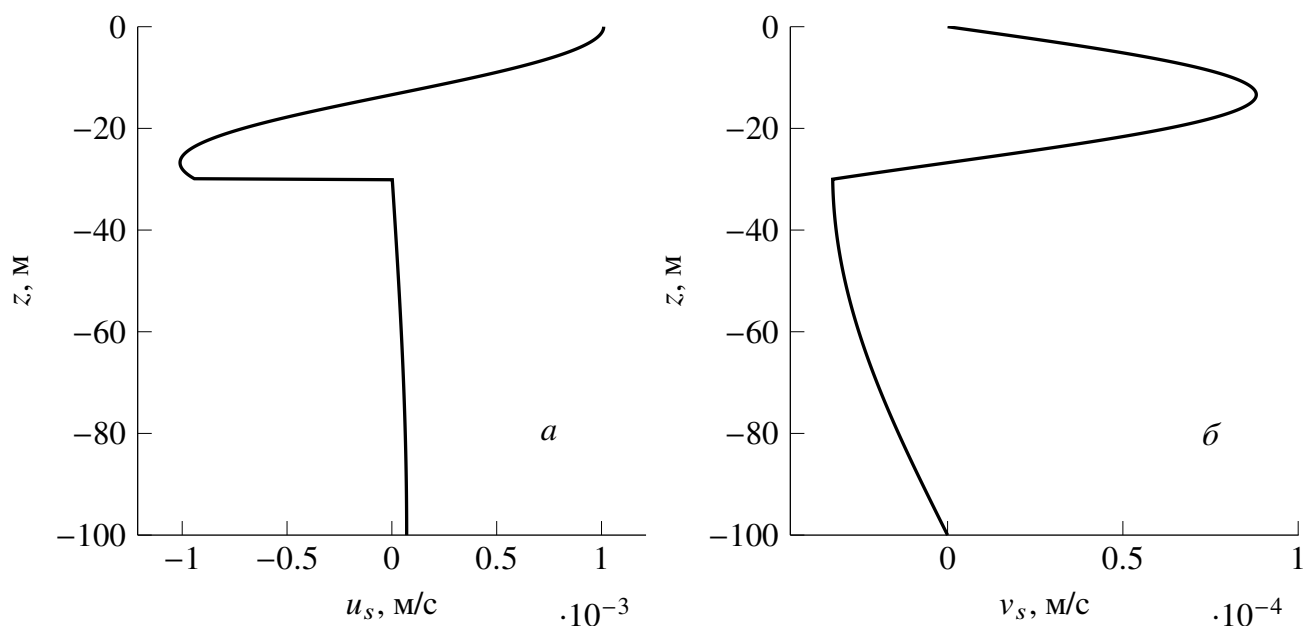


Рис. 1.19 Профили двух компонент скорости стокова дрейфа для двухслойной модели: продольная компонента — *a* и поперечная — *б*

### 1.7 Выводы к первой главе

1. Показано, что дисперсионные кривые инерционно-гравитационных внутренних волн испытывают обрезание в низкочастотной области, что обусловлено влиянием критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной. Обрезание второй моды происходит на более высокой частоте, чем первой.
2. Вертикальные волновые потоки импульса у инерционно-гравитационных внутренних волн отличны от нуля в бароклинном потоке и могут быть сравнимы с турбулентными потоками (либо их превышать).
3. Волновой посток  $\overline{uw}$  отличен от нуля только при наличии течения, компонента скорости которого, поперечная к направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты. В этом случае поперечная к направлению распространения волны компонента скорости стокова дрейфа отлична от нуля и на порядок меньше продольной.
4. Также можно сделать вывод о том, что вертикальный волновой поток



импульса  $\overline{uw}$  у инерционно-гравитационных внутренних волн отличен от нуля при наличии течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости течения зависит от вертикальной координаты. Поперечная скорость стокова дрейфа при этом отлична от нуля и на порядок меньше продольной. Волновой поток  $\overline{uw}$  может превышать турбулентный в пикноклине. У второй моды 5-минутных внутренних волн волновой поток  $\overline{uw}$  больше по абсолютной величине, чем у 15-минутных внутренних волн. У первой моды 15-минутных внутренних волн волновой поток  $\overline{vw}$  по модулю больше потока 5-минутных внутренних волн той же моды. Волновой поток  $\overline{vw}$  отличен от нуля и при отсутствии течения, однако он на два порядка меньше потока при наличии течения.

5. При рассмотрении модели с постоянной частотой Брента—Вяйсяля, когда плоскопараллельное течение с линейным профилем скорости перпендикулярно волновому вектору, т. е. перпендикулярно направлению распространения волны, решение краевой задачи представляется аналитически. В случае двухслойной модели точное аналитическое решение краевой задачи комплексное, но частота волны действительная. При наличии двумерного сдвигового течения и учёта вращения Земли ситуация иная — частота волны также комплексная.

## Глава 2. Вертикальные потоки тепла и соли, обусловленные инерционно-гравитационными внутренними волнами в зоне шельфа

### 2.1 Постановка задачи

Влияние мелкомасштабной турбулентности на внутренние волны рассматривалось в ряде работ [34, 35, 49]. Показано, что внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии затухают. Вертикальные волновые потоки тепла и соли при этом отличны от нуля [50]. Представляет интерес найти эти потоки в вертикально-неоднородном течении для инерционно-гравитационных внутренних волн (при учёте вращения Земли). Примечательно, что волновые потоки в этом случае отличны от нуля даже при неучёте турбулентной вязкости и диффузии. Ниже будет показано, что при наличии двумерного течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости зависит от вертикальной координаты, краевая задача для внутренних волн при учете вращения Земли имеет комплексные коэффициенты, поэтому частота волны и собственная функция — комплексные. Это означает слабое затухание волны и отличие от нуля вертикальных волновых потоков тепла  $\overline{Tw}$  и соли  $\overline{Sw}$  ( $T$ ,  $S$ ,  $w$  — волновые возмущения температуры, солёности и вертикальной скорости). Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа также отлична от нуля и вносит свой вклад в вертикальный перенос.

Вновь рассмотрим исходную постановку задачи первой главы 1.1. Таким образом, имеем свободные внутренние волны при наличии бароклинного течения с учётом вращения Земли в неограниченном бассейне постоянной глубины. Две компоненты скорости среднего горизонтального стратифицированного течения зависят от вертикальной координаты. В линейном приближении находится дисперсионное соотношение. Во втором порядке малости по амплитуде волны находятся вертикальные волновые потоки импульса и скорость стокова дрейфа. Система уравнений гидродинамики для волновых возмущений в приближении

Буссинеска имеет вид

$$\frac{Du}{Dt} - fv + w \frac{dU_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + w \frac{dV_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2.2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0(0)}, \quad (2.3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

где  $x, y, z$  — пространственные координаты, ось  $z$  направлена вертикально вверх;  $u, v, w$  — соответствующие данным координатам проекции волновой скорости течения;  $\rho$  и  $P$  — волновые возмущения плотности и давления;  $H$  — глубина моря,  $\rho_0(z)$  — профиль средней плотности;  $f$  — параметр Кориолиса,  $U_0(z), V_0(z)$  — компоненты скорости среднего течения,  $g$  — ускорение свободного падения, действие оператора  $\frac{D}{Dt}$  раскрывается по формуле  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial}{\partial x} + (v + V_0) \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ .

Граничные условия на поверхности моря ( $z = 0$ ) — условие “твёрдой крышки”, которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных [3, с. 30]:

$$w(0) = 0. \quad (2.6)$$

Граничные условия на дне — условие “непротекания”:

$$w(-H) = 0. \quad (2.7)$$

## 2.2 Нелинейные эффекты

Одним из проявлений нелинейности (квадратичен по амплитуде волны  $w_{10}$ ) является стоксов дрейф, его определение дано в разделе 1.1 первой главы.

Вертикальная компонента скорости стоковского дрейфа:

$$w_s = iA_1 A_1^* \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \right) \frac{d}{dz} (w_{10} w_{10}^*), \quad (2.8)$$

где  $A_1 = A \exp(\delta\omega \cdot t)$ ,  $\delta\omega = \sigma/i$  — декремент затухания волны, величина  $\sigma_1$  чисто мнимая.

При наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости  $V_0$  зависит от вертикальной координаты, величина  $w_s$  отлична от нуля.

Вертикальные волновые потоки тепла и соли определяются по формулам:

$$\overline{T_w}/|A_1|^2 = -w_{10}w_{10}^* \left[ \frac{i}{\Omega} - \frac{i}{\Omega^*} \right] \frac{dT_0}{dz}, \quad (2.9)$$

$$\overline{S_w}/|A_1|^2 = -w_{10}w_{10}^* \left[ \frac{i}{\Omega} - \frac{i}{\Omega^*} \right] \frac{dS_0}{dz}. \quad (2.10)$$

### 2.3 Результаты расчетов

Рассчитаем волновые потоки тепла и соли для внутренних волн, которые наблюдались в ходе натурного эксперимента в третьем этапе 44-го рейса научно-исследовательского судна “Михаил Ломоносов” на северо-западном шельфе Черного моря [38].

Данные по реализации возвышений изолиний температуры, полученные с помощью приборов ГРАД (градиентно-распределенные датчики температуры) изображены на рис. 1.2 первой главы.

Как уже было отмечено, интерес представляет вторая мода колебаний, потому как мощные колебания с периодом 15 мин. в слое 25–60 м находятся в противофазе с колебаниями в слое 15–25 м, что и говорит о колебаниях второй моды. Вертикальные профили частоты Брента—Вяйсяля и двух компонент скорости течения показаны на рис. 1.1, а, 1.3 и рис. б. Вертикальный профиль температуры показан на рис. 2.1

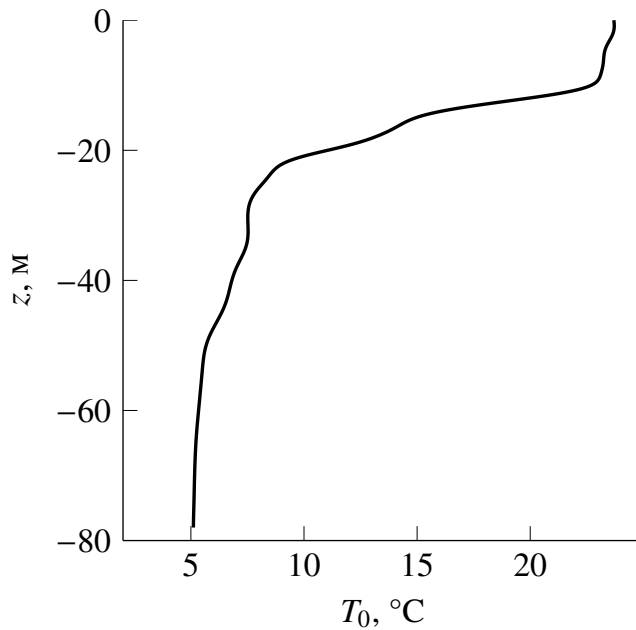


Рис. 2.1 Вертикальный профиль средней температуры

Краевая задача (1.23), (1.24) для внутренних волн решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Волновое число находится методом пристрелки из необходимости выполнения граничных условий (1.24). Собственная функция 15-минутных внутренних волн второй моды показана на рис. 2.2, а.

Волновое число равно 0,032 рад/м. Нормирующий множитель  $A_1$  найдем по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений. Для этого выразим вертикальное смещение  $\zeta$ , используя соотношение  $\frac{d\zeta}{dt} = w$ :

$$\zeta = \frac{iw_0}{\Omega_0} A_1 \exp(ikx - i\omega_0 t) + \text{с. с.}$$

Отсюда следует

$$A_1 = \frac{\max \zeta}{2 \max |w_0/\Omega_0|}.$$

Таким образом, амплитуда вертикальных смещений пропорциональна  $|w_0/\Omega_0|$ . Экстремумы функции  $w_0$  соответствуют максимальным вертикальным смещениям по данным эксперимента (рис. 1.2, 2.2, а), т.е. в эксперименте наблюдалась вторая мода. Длина волны пятнадцатиминутных внутренних волн второй моды равна 196 м. Дисперсионные кривые первых двух мод показаны на рис. 2.2, б.

Если бы течение не учитывалось, то дисперсионные кривые в низкочастотной области начинались бы с минимальной частоты, равной инерционной. При учете течения из-за влияния сингулярности, когда  $\Omega_0 = f$  происходит обрезание дисперсионных кривых в области низких частот. Минимальная частота первой моды соответствует  $1,22 \cdot 10^{-4}$  рад/с, для второй моды —  $3,49 \cdot 10^{-4}$  рад/с (для сравнения укажем, что частота Кориолиса равна  $1,048 \cdot 10^{-4}$  рад/с).

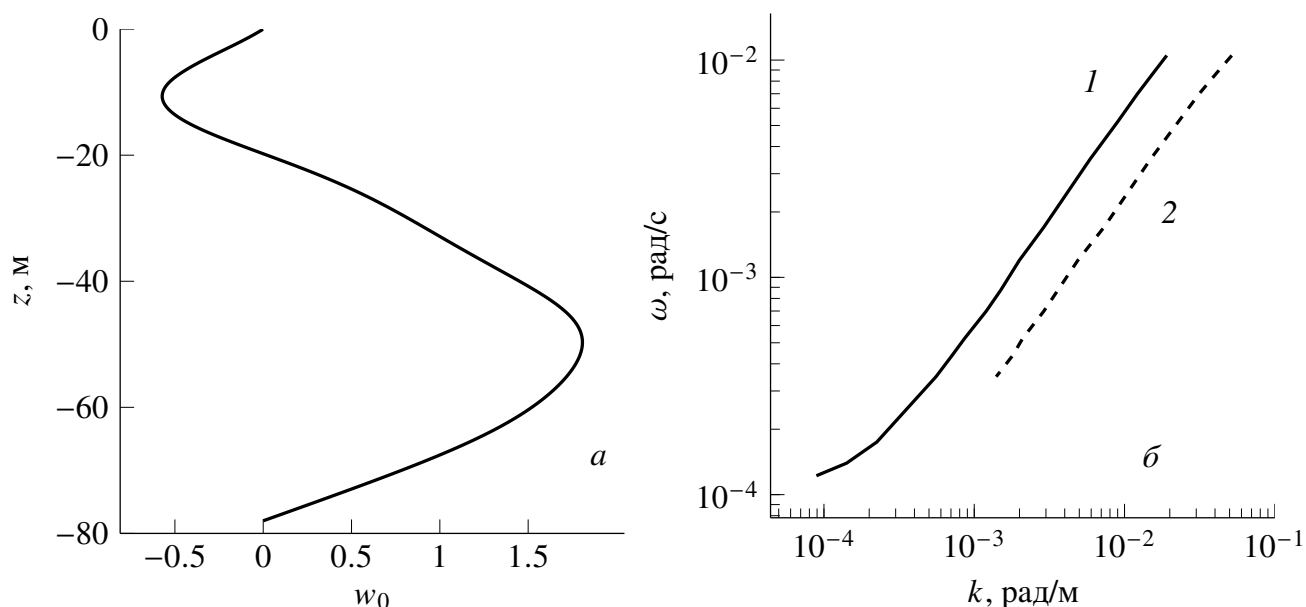


Рис. 2.2 Собственная функция второй моды 15-минутных внутренних волн — *а*; дисперсионные кривые, I мода (1); II мода (2) — *б*

Краевую задачу по определению функции  $w_1$  (1.27), (1.28) решаем численно по неявной схеме Адамса 3-го порядка точности, находим единственное решение, ортогональное  $w_0$  и декремент затухания волны  $\delta\omega = -1,12 \cdot 10^{-5}$  рад/с. Декремент затухания на два порядка меньше частоты волны.

Вертикальный волновой поток тепла складывается из потока  $\overline{Tw}$  (2.9) и потока за счет вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа  $\mathcal{J}_{qs} = T_0(z)w_s$ , ( $T_0(z)$  — средний профиль температуры,  $w_s$  — вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа (2.8),  $T$  — волновое возмущение температуры). Сравнение этих двух потоков, нормированных на квадрат амплитуды волны, приводится на рис. 2.3, *а* для первой моды, на рис. 2.3, *б* — для второй.

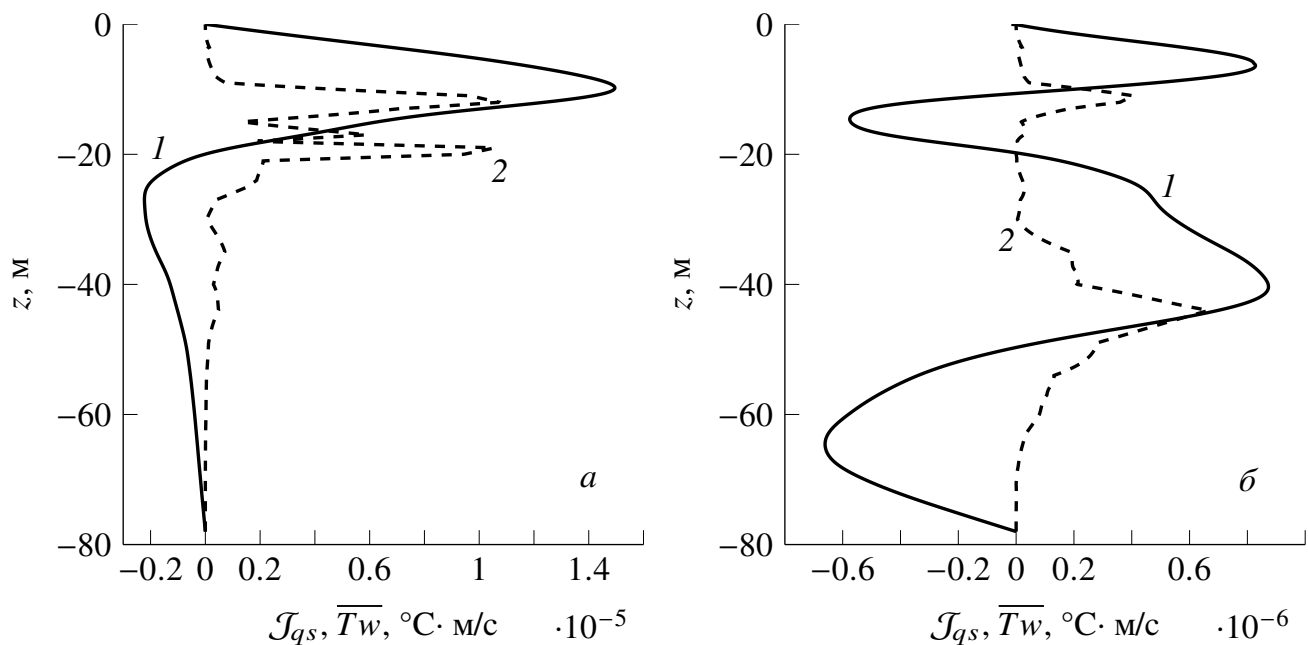


Рис. 2.3 Сравнение волновых потоков тепла  $\mathcal{J}_{qs}$  (1),  $\overline{T_w}$  (2): I мода — *a*; II мода — *б*

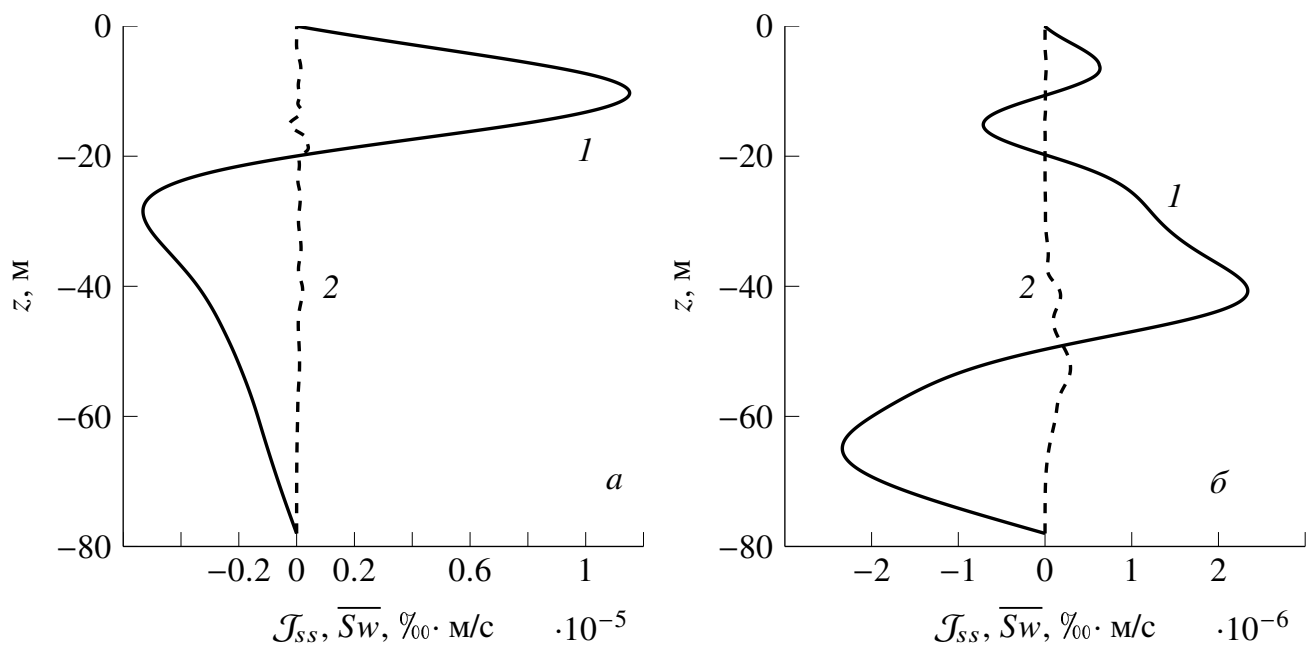


Рис. 2.4 Сравнение волновых потоков соли  $\mathcal{J}_{ss}$  (1),  $\overline{S_w}$  (2): I мода — *a*; II мода — *б*

У первой моды поток  $\mathcal{J}_{qs}$  преобладает по абсолютной величине над потоком  $\overline{T'w}$  вне пикноклина над потоком, расположенного в интервале глубин 10–20 м. У второй моды доминирует поток за счет вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа. Аналогичное сравнение потоков соли приводится на рис. 2.4, *а* для первой моды, и на рис. 2.4, *б* — для второй. Поток за счет вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа  $\mathcal{J}_{ss}$  всюду преобладает над волновым потоком  $\overline{S'w}$ .

Суммарный волновой поток тепла определяется по формуле  $\mathcal{J}_q = \overline{T'w} + T_0(z)w_s$ , турбулентный поток —  $\overline{T'w'} = -M_z \frac{dT_0}{dz}$ . Коэффициент вертикального турбулентного обмена оценивается по формуле  $M_z \cong 0,93 \cdot 10^{-4} N_c^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $N_c$  соответствует частоте Брента—Вяйсяля в цикл/ч (подробнее в четвёртом пункте главы 1). Вертикальный профиль и солёности показан на рис. 2.5. Вертикальные волновые потоки тепла, нормированные на квадрат амплитуды волны, сравниваются с турбулентным потоком (рис. 2.6, *а*). Первая мода доминирует в верхнем 20-метровом слое, глубже эти потоки сравнимы по величине (рис. 2.6, *а*). У второй моды поток меньше турбулентного в верхнем 40-метровом слое, глубже волновой и турбулентный потоки сравнимы по величине. Аналогично определяются волновые и турбулентные потоки соли:  $\mathcal{J}_s = \overline{S'w} + S_0(z)w_s$ ,  $\overline{S'w'} = -M_z \frac{dS_0}{dz}$ . Волновой поток соли первой моды превышает турбулентный (рис. 2.6, *б*). У второй моды в верхнем 20-метровом слое поток сравним с турбулентным, глубже этот поток превышает турбулентный.

Сравнение суммарных волновых потоков на рис. 2.6, *а* и рис. 2.6, *б* с потоками за счет вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа (рис. 2.3, 2.4) показывает, что определяющий вклад в волновой перенос соли вносит вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа. В вертикальный волновой поток тепла вносит заметный вклад поток  $\overline{T'w}$ , особенно для первой моды.



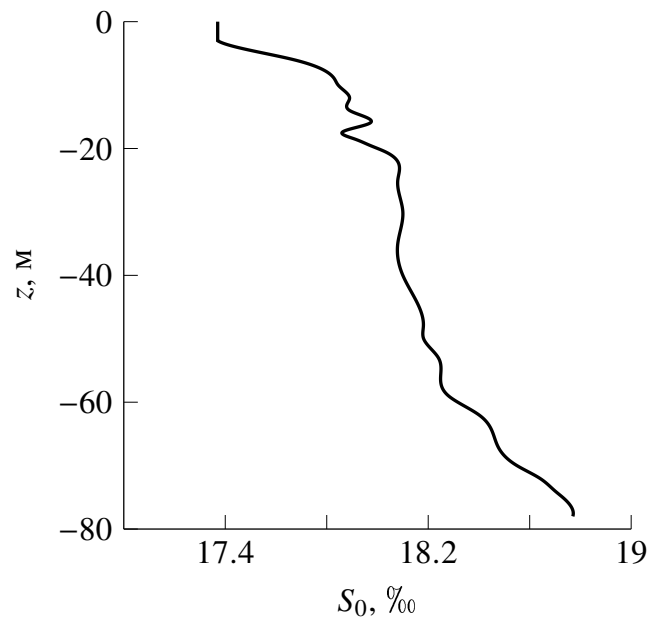


Рис. 2.5 Вертикальный профиль средней солености

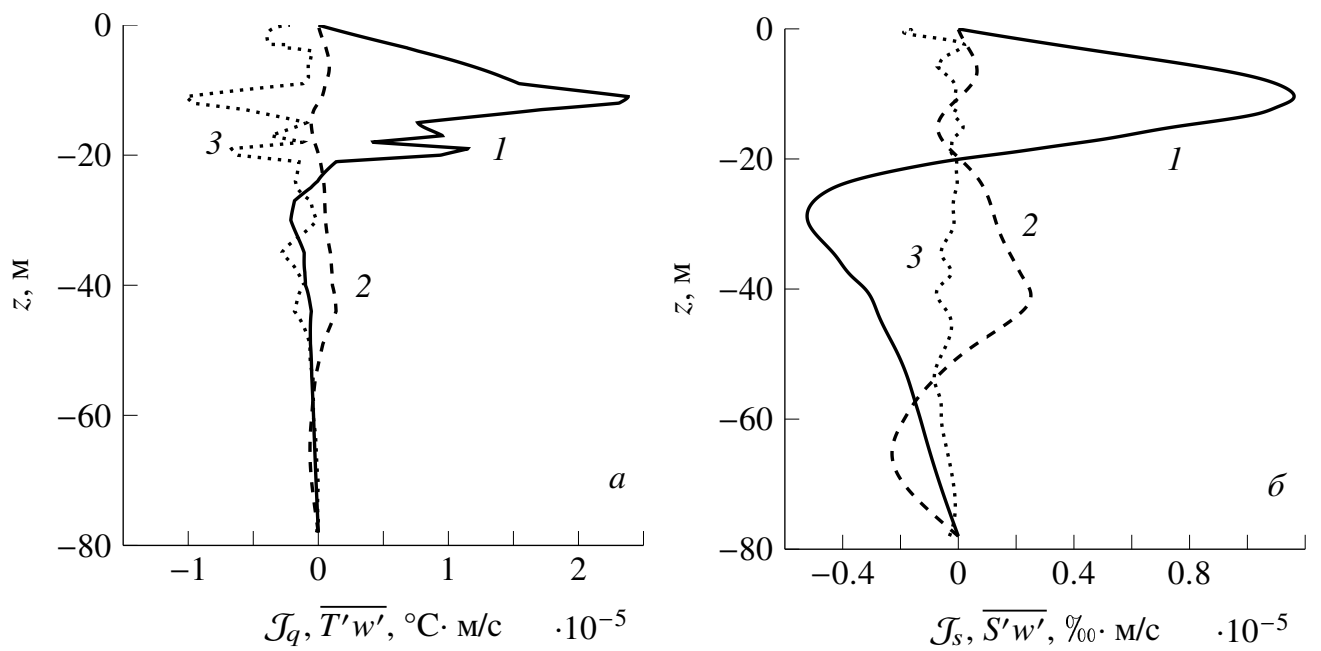


Рис. 2.6 Профили вертикальных потоков тепла I мода (1); II мода (2); турбулентный поток (3) — *a*;  
Профили вертикальных потоков соли I мода (1); II мода (2); турбулентный поток (3) — *б*

## 2.4 Выводы ко второй главе

1. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа у внутренних волн отлична от нуля и вносит определяющий вклад в волновой перенос соли.
2. Волновой поток тепла первой моды превосходит турбулентный в приповерхностном 20-метровом слое, глубже эти потоки сравнимы. У второй моды волновой поток меньше турбулентного в верхнем 40-метровом слое.
3. Вертикальный волновой поток соли у первой моды превышает турбулентный, у второй моды поток превышает турбулентный глубже 20 м.

### Глава 3. Вертикальный перенос массы слабонелинейными инерционно-гравитационными внутренними волнами в двумерном потоке

#### 3.1 Постановка задачи

В данной главе, при исходной постановке задачи 1.1, рассмотрим вертикальные волновые потоки массы, которые возникают, вследствие отличного от  $\pi/2$  фазового сдвига между колебаниями плотности и вертикальной скорости. Также, во втором порядке по крутизне волны, определяется скорость стокова дрейфа. Её вертикальная составляющая, в свою очередь, вносит вклад в волновой перенос. Проявлением нелинейности задачи и непосредственным следствием является возникновение неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к средней плотности, которая трактуется, как необратимая вертикальная тонкая структура [32, 33], генерируемая волной.

В линейном приближении краевая задача для амплитуды вертикальной скорости имеет комплексные коэффициенты, поэтому решение ее — комплексная функция, частота волны также комплексная величина (показано, что имеет место слабое затухание волны). Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа и волновой поток массы находятся во втором порядке по амплитуде. Данный поток вызывает необратимую деформацию профиля плотности — тонкую структуру, генерируемую волной. Таким образом, будем отталкиваться от задачи (1.1)–(1.5) с граничными условиями на поверхности моря ( $z = 0$ ) — условие «твёрдой крышки», которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных [3, с. 30]:  $w(0) = 0$ ; граничное условие на дне — условие «непротекания»:  $w(-H) = 0$ ,  $H$  — глубина моря.

**Линейное приближение.** Решения в линейном приближении представляются в виде системы (1.8). После подстановки данного решения в исходную систему (1.1)–(1.5) выразим связь амплитудных

функций  $u_{10}$ ,  $v_{10}$ ,  $\rho_{10}$ ,  $P_{10}$  с  $w_{10}$ :

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{dw_{10}}{dz}, \quad \Omega = \omega - k \cdot U_0. \quad (3.1)$$

$$v_{10} = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} - iw_{10} \frac{dV_0}{dz} \right), \quad \rho_{10} = -\frac{i}{\Omega} w_{10} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (3.2)$$

$$\frac{P_{10}}{\rho_0(0)} = \frac{i}{k} \left[ \frac{\Omega}{k} \frac{dw_{10}}{dz} + \frac{dU_0}{dz} w_{10} + \frac{f}{\Omega} \left( i \frac{dV_0}{dz} w_{10} - \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right], \quad (3.3)$$

Дальнейшие выкладки полностью повторяют выкладки ход повествования первой части главы 1. Краевая задача (1.23), (1.24) для внутренних волн решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Волновое число находится методом пристрелки из необходимости выполнения граничных условий (1.24). Профиль частоты Брента—Вяйсяля и собственная функция 15-минутных внутренних волн второй моды показаны на рис. 3.1, *а*, *б*.

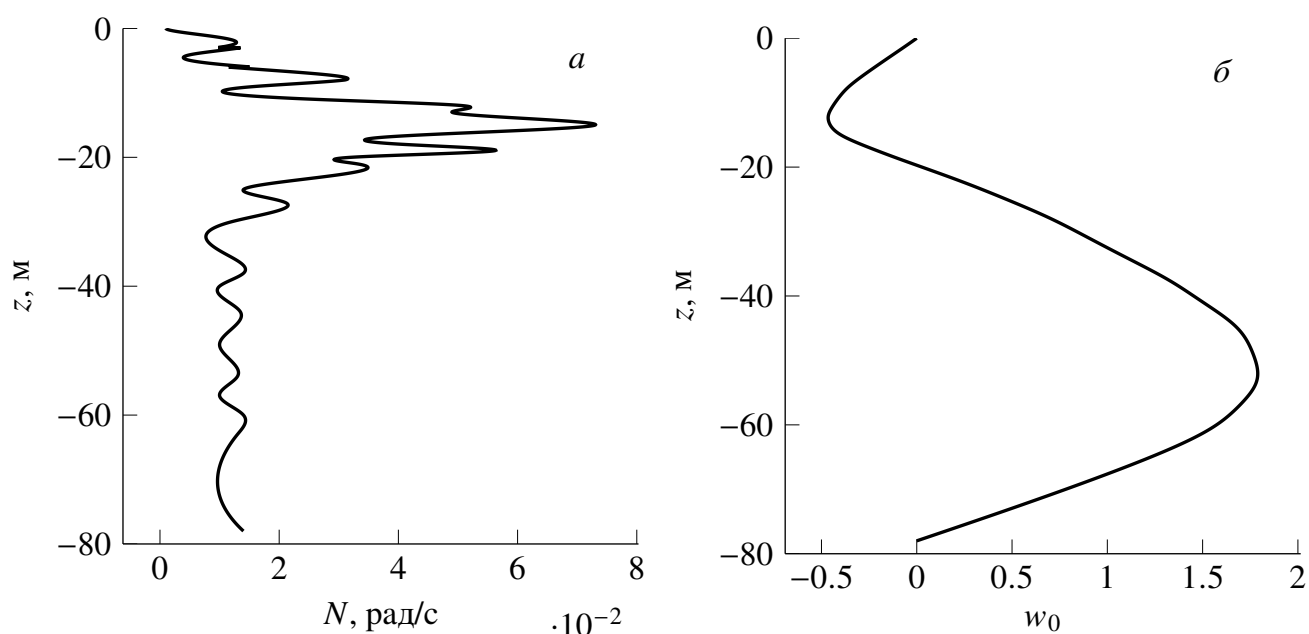


Рис. 3.1 Вертикальные профили: частоты Брента—Вяйсяля — *а*; собственная функция 15-минутных внутренних волн второй моды — *б*

### 3.2 Стоксов дрейф. Волновые потоки массы.

Нелинейные эффекты при распространении пакетов внутренних волн проявляются в генерации средних течений и неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к средней плотности, которая трактуется, как тонкая структура, генерируемая волной [32, 33]. При этом известно, что внутренние волны распространяются преимущественно цугами — локализованными в пространстве волновыми пакетами [56, 24, 57]. Указанные поправки пропорциональны квадрату текущей амплитуды волны и после прохождения волнового пакета невозмущенный профиль плотности восстанавливается. Внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии затухают [34, 35, 50]. Вертикальные волновые потоки тепла и соли при этом отличны от нуля [50, 51] из-за сдвига фаз между колебаниями температуры, солёности и вертикальной скорости, отличным от  $\pi/2$ . Представляет интерес найти суммарный вертикальный волновой поток массы и исследовать его вклад в формирование вертикальной тонкой структуры. Указанный поток приведет к необратимой тонкой структуре, генерируемой волной.

В общем случае скорость стоксова дрейфа определяется по формуле (1.33). Нас же интересует в первую очередь ее вертикальная компонента, которая выражается согласно формуле

$$w_s = iA_1A_1^* \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \right) \frac{d}{dz} (w_{10}w_{10}^*), \quad (3.4)$$

где  $A_1 = A \exp(\delta\omega \cdot t)$ ,  $A = A_1$  в начальный момент времени при  $t = 0$ .

При наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости  $V_0$  зависит от вертикальной координаты, величина  $w_s$  отлична от нуля.

Вертикальный волновой поток массы определяется по формуле:

$$\overline{\rho w} = -w_{10}w_{10}^* |A_1|^2 \left( \frac{i}{\Omega} - \frac{i}{\Omega^*} \right) \frac{d\rho_0}{dz}. \quad (3.5)$$

Наличие вертикального волнового потока массы приводит к необратимой деформации поля плотности, которая может рассматриваться как вертикальная

тонкая структура, генерируемая волной. Уравнение для неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к средней плотности  $\bar{\rho}$  с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} + w_s \frac{d\rho_0}{dz} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} + w_s \frac{d\rho_0}{dz} = 0. \quad (3.6)$$

Проинтегрируем уравнение (3.6) по времени

$$\Delta \bar{\rho} = - \int_0^t \left( \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} + w_s \frac{d\rho_0}{dz} \right) dt'. \quad (3.7)$$

Подставляя  $\bar{\rho} w$  (3.5) и вертикальную компоненту скорости стоковского дрейфа  $w_s$  (3.4) в (3.7), получим после интегрирования

$$\overline{\Delta \rho} = \left[ \frac{\partial \overline{\rho} w}{\partial z} + w_{s0} \frac{d\rho_0}{dz} \right] \cdot \frac{1}{2\delta\omega} \left( 1 - e^{2\delta\omega t} \right), \quad (3.8)$$

где  $\overline{\rho} w_0 = i|A|^2 w_{10} w_{10}^* \left( \frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega^*} \right) \frac{d\rho_0}{dz}$ ,  $w_{s0} = i|A|^2 \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \right) \frac{d}{dz} (w_{10} w_{10}^*)$ .

Переходя в (3.4) к пределу при  $t \rightarrow \infty$  с учетом того, что  $\delta\omega < 0$  находим  $\overline{\Delta \rho}$ :

$$\overline{\Delta \rho} = \left[ \frac{\partial \overline{\rho} w_0}{\partial z} + w_{s0} \frac{d\rho_0}{dz} \right] \cdot \frac{1}{2\delta\omega}. \quad (3.9)$$

Величина  $\overline{\Delta \rho}$ , зависящая от вертикальной координаты, представляет собой неосциллирующую на временном масштабе волны поправку к средней плотности — вертикальную тонкую структуру, генерируемую волной. В работах [32, 33] определялась неосциллирующая поправка к плотности, пропорциональная квадрату текущей амплитуды волны, после прохождения волнового пакета невозмущенный профиль стратификации восстанавливается, и тонкая структура имеет обратимый характер. Поправка (3.9) пропорциональна квадрату максимальной амплитуде волны и представляет собой необратимую тонкую структуру, продуцированную волной.

### 3.3 Результаты численного моделирования

Вертикальные профили двух компонент скорости течения показаны на рис. 3.2. Волновое число равно  $0,032$  рад/м. Нормирующий множитель  $A_1$  находится по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений (1.38). Длина наблюдаемой в эксперименте 1.1 внутренней волны второй моды составляет  $196$  м. Дисперсионные кривые первых двух мод показаны на рис. 3.3, а. Если течение не учитывать, то дисперсионные кривые в низкочастотной области начинаются с минимальной частоты, практически равной инерционной (рис. 3.3, б). При учете течения из-за влияния сингулярности  $\Omega_0 = f$  происходит обрезание дисперсионных кривых в области низких частот (рис. 3.3, а). Минимальная частота первой моды соответствует  $1,13 \cdot 10^{-4}$  рад/с, для второй моды —  $3,49 \cdot 10^{-4}$  рад/с (для сравнения укажем, что частота Кориолиса равна  $1,048 \cdot 10^{-4}$  рад/с). Обрезание дисперсионных кривых происходит вследствие влияния критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной.

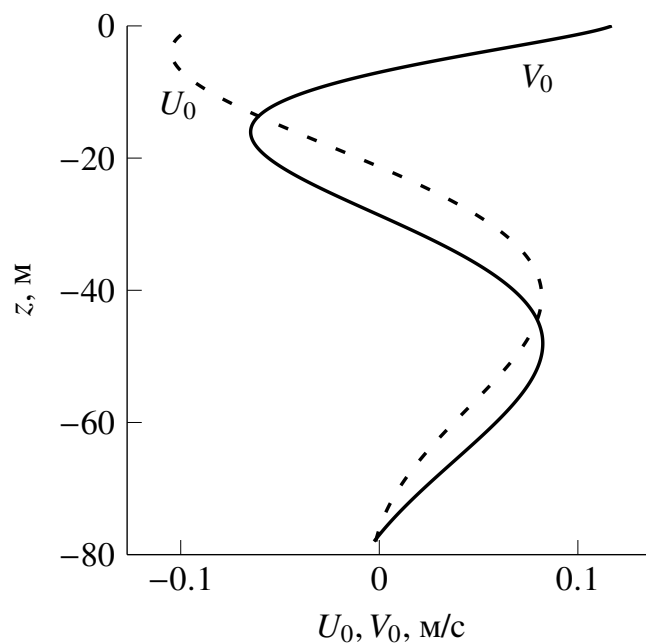


Рис. 3.2 Вертикальные профили компонент скорости течения  $U_0, V_0$

В результате численного решения неоднородной краевой задачи (1.27), (1.28) для функции  $w_1$  находится единственное решение, ортогональное  $w_0$  и декремент затухания волны  $\delta\omega = \text{Im } \sigma_1$  из 1.2. У 15-минутных внутренних волн второй моды декремент затухания равен  $\delta\omega = -1.15 \cdot 10^{-5}$  рад/с. Декремент затухания на два порядка меньше частоты волны. Зависимость декремента затухания волны от волнового числа для первых двух мод показана на рис. 3.4. Различие в поведении  $\delta\omega$  в низкочастотной области обусловлено обрезанием дисперсионных кривых в окрестности инерционной частоты.

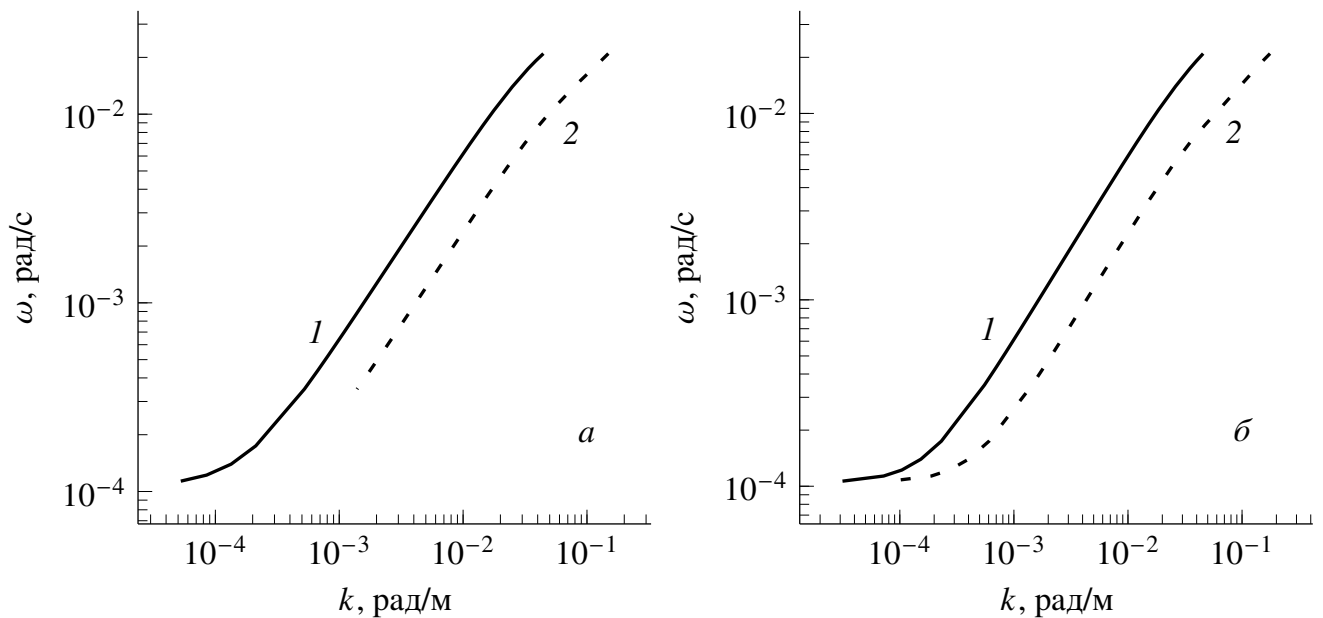


Рис. 3.3 Дисперсионные кривые первой (1) и второй (2) мод при наличии течения (а) и без течения — (б)

Вертикальные потоки массы  $\overline{\rho w}$  (3.5) сравниваются для первых двух мод 15-минутных внутренних волн на рис. 3.5. Волновой поток первой моды доминирует в верхнем 30-метровом слое, глубже эти потоки сравнимы по величине.



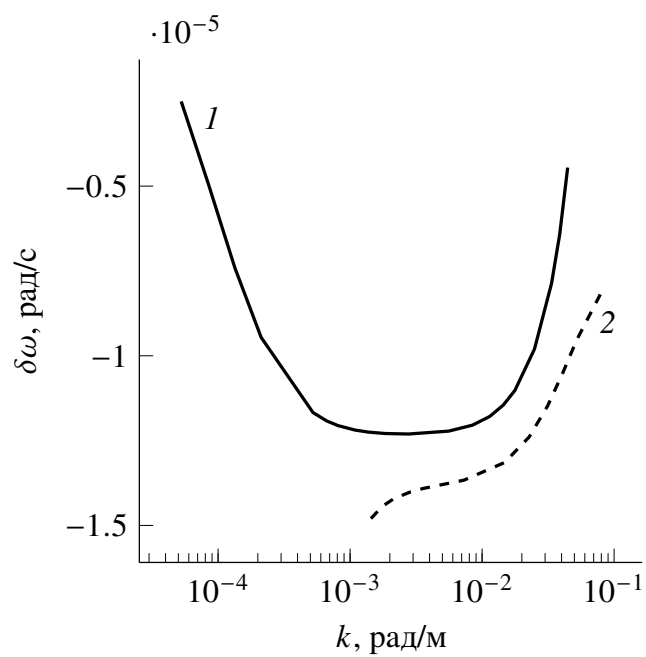


Рис. 3.4 Зависимость декремента затухания волны от волнового числа для первой (1) и второй (2) моды

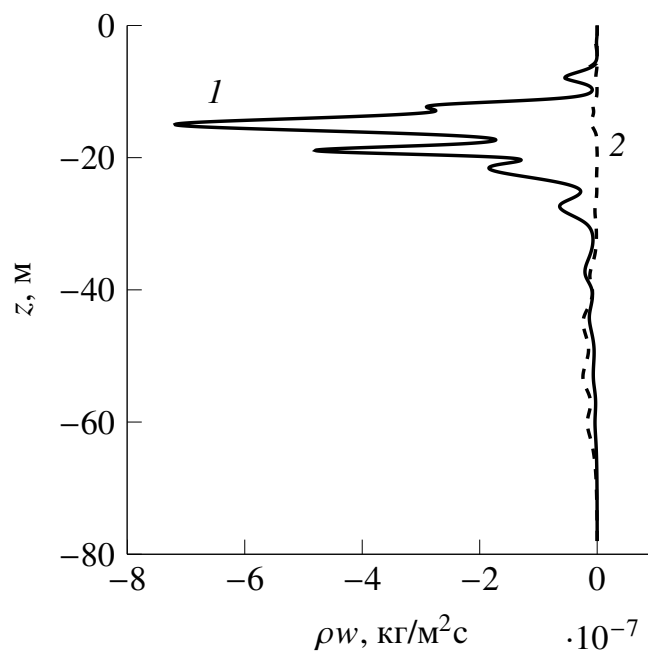


Рис. 3.5 Вертикальные волновые потоки массы  $\overline{\rho w}$  для первой (1) и второй (2) моды

Суммарный вертикальный волновой поток массы  $\mathcal{J}_\rho$  складывается из потока  $\overline{\rho w}$  (3.5) и потока за счет вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа  $\mathcal{J}_{\rho_s} = \rho_0(z)w_s$ . Сравнение суммарных потоков для первых двух мод с соответствующим турбулентным потоком  $\overline{\rho'w'}$  показано на рис. 3.6. Турбулентный поток определяется по формуле  $\overline{\rho'w'} = -M_z \frac{d\rho_0}{dz}$ . Коэффициент вертикальной турбулентной диффузии оценивается по эмпирической формуле [54]:

$$M_z = \frac{\nu}{(1 + \alpha \text{ Ri})} + k_b, \quad (3.10)$$

где число Ричардсона Ri:

$$\text{Ri} = \frac{N^2}{\left(\frac{dU_0}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dV_0}{dz}\right)^2}$$

и  $k_b = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\nu$  — вертикальная турбулентная вязкость, которая определяется по формуле [54]:

$$\nu = \frac{\nu_0}{(1 + \alpha \text{ Ri})^2} + \nu_b, \quad (3.11)$$

здесь  $\nu_b = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , величина  $\nu_0 \sim 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$  на северо-западном шельфе Черного моря [55, 52].

Первая мода доминирует в верхнем 40-метровом слое, глубже волновые потоки сравнимы по величине (рис. 3.6). Волновые потоки превышают по абсолютной величине турбулентный поток.

Вертикальный профиль плотности показан на рис. 3.7, а. В определение неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к средней плотности  $\overline{\Delta\rho}$  (3.8) входит величина  $|A|^2$ , которая в точности равна  $|A_1|^2$  в начальный момент времени. Неосциллирующая поправка к средней плотности (3.8) показана на рис. 3.7, б и представляет собой тонкую вертикальную структуру, генерируемую волной, которая имеет необратимый характер, причем инверсий в поле средней плотности она не вносит. Профиль вертикальной тонкой структуры градиента электропроводности по данным зондирования прибором «Зонд – М2» показан на рис. 3.9 [38] (в первом приближении плотность

линейно зависит от удельной электропроводности [53]). Максимумы градиентов электропроводности наблюдаются в пикноклине, т. е. в слое, где наиболее ярко проявляется вертикальная тонкая структура поля плотности на рис. 3.7, б. Масштаб вертикальных неоднородностей градиента электропроводности (2–4 м) согласуется с масштабом тонкой структуры, генерируемой волной (рис. 3.7, б).

По аналогии с расчётом для неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к средней плотности (3.6), вычисляются поправки к средним значениям полей температуры  $T_0$  и солёности  $S_0$ . Графики зависимости от вертикальной координаты для величин данных поправок, в том числе с учётом процедуры сглаживания, показаны на рис. 3.8, а и б.

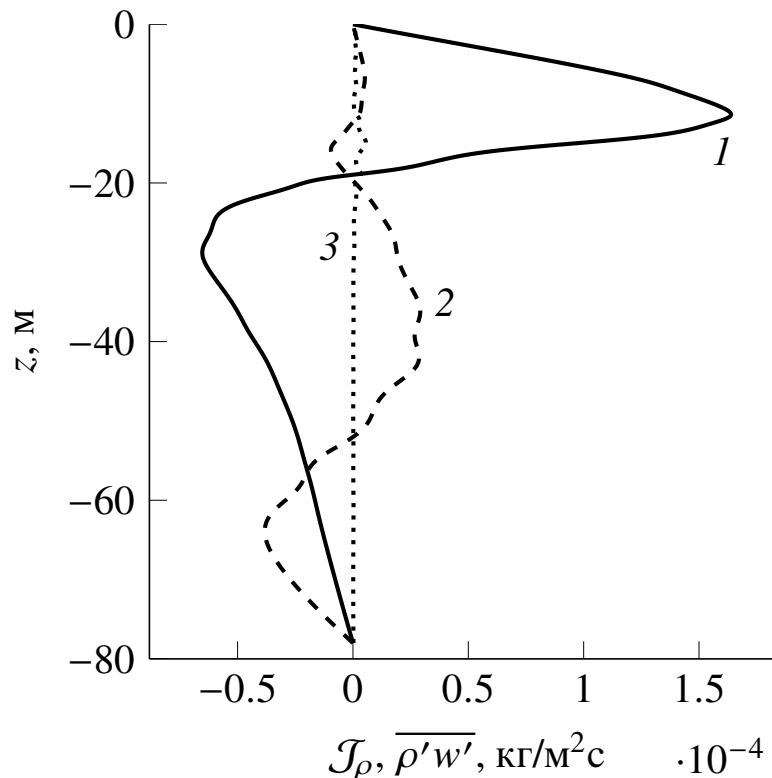


Рис. 3.6 Сравнение суммарных волновых и турбулентных (3) потоков массы для первой (1) и второй (2) мод

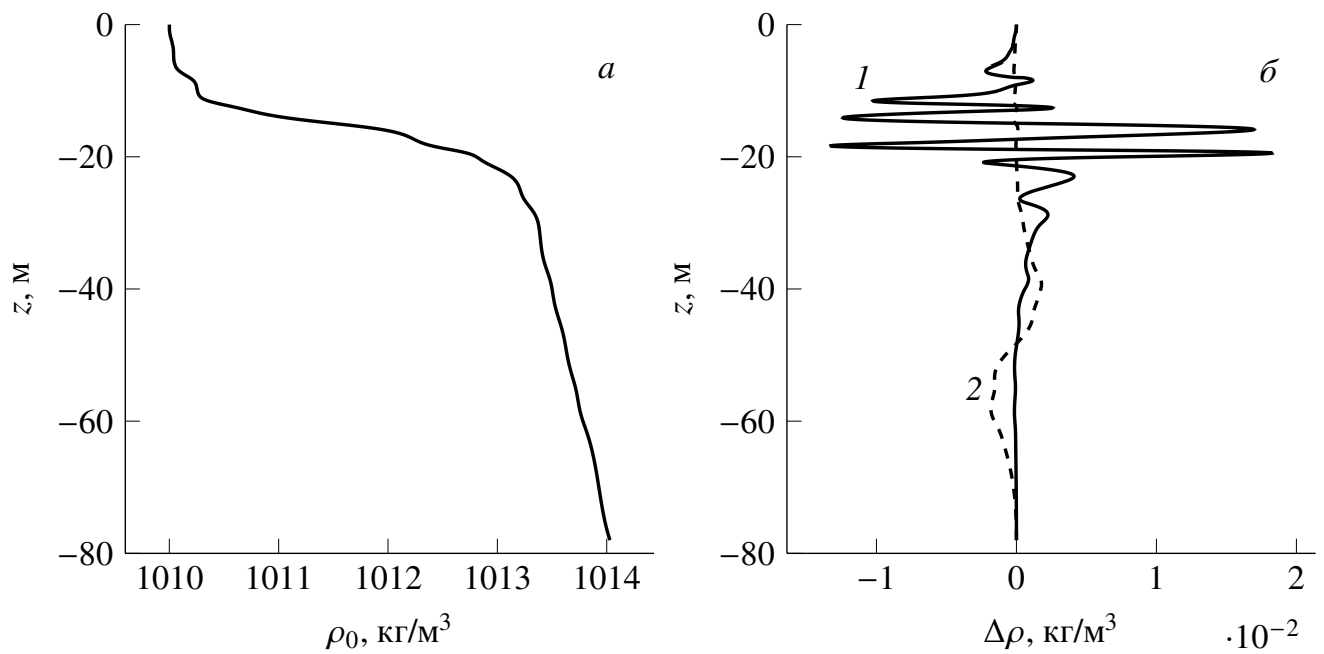


Рис. 3.7 Вертикальные профили средней плотности (а) и неосциллирующей на масштабе волны поправки к плотности (б) для первой (1) и второй (2) мод

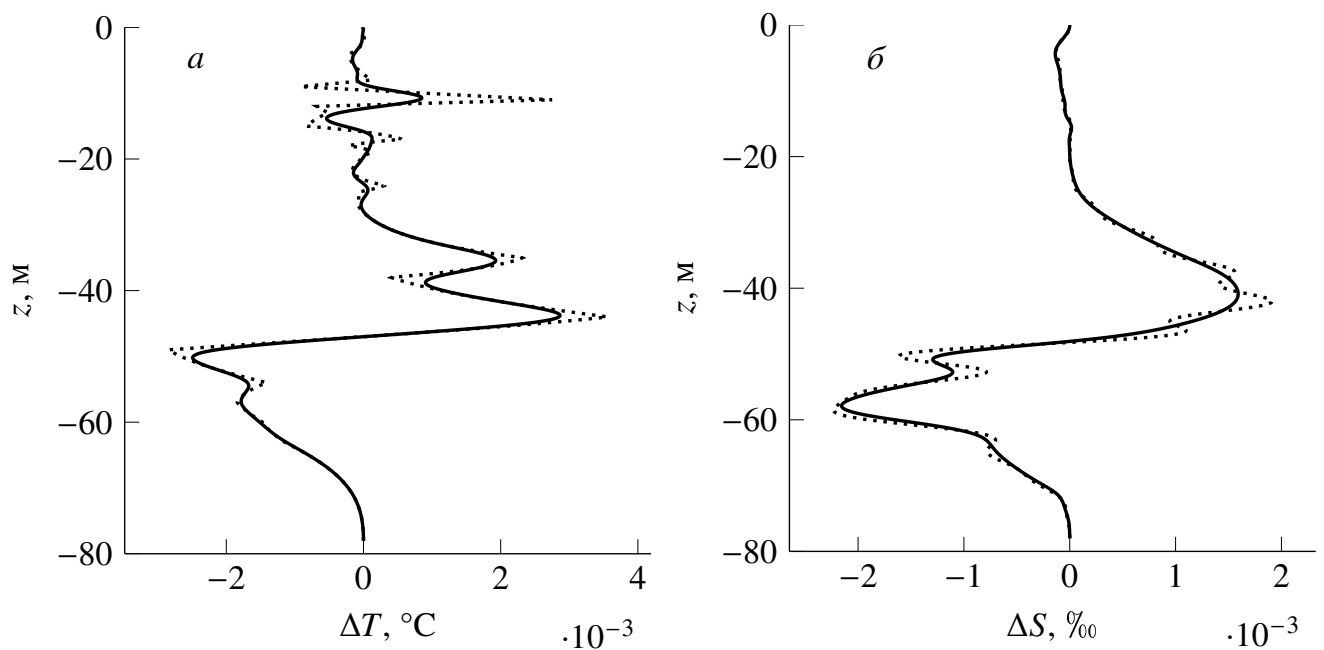


Рис. 3.8 Неосциллирующие на масштабе волны поправки к температуре (а) и солёности (б). Сплошная кривая — сглаженный профиль, пунктир — начальные данные

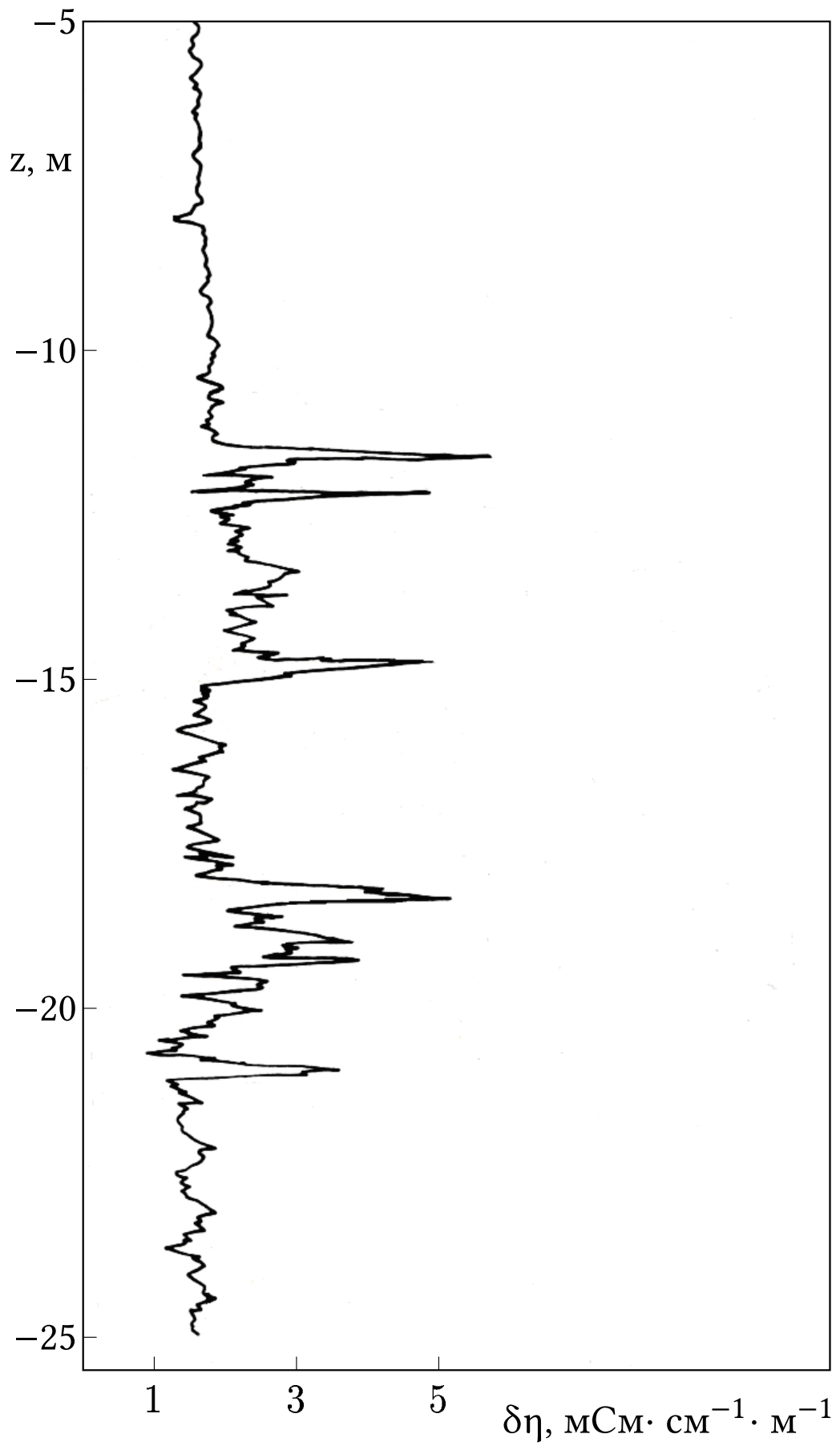


Рис. 3.9 Вертикальное распределение градиента электропроводности  $\delta\eta$  по данным зондирования

### 3.4 Выводы к третьей главе

1. Вертикальный волновой поток массы отличен от нуля у инерционно-гравитационных внутренних волн при наличии течения, у которого компонента скорости, поперечная к направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа вносит определяющий вклад в волновой перенос.
2. Вертикальный волновой поток массы приводит к необратимой деформации профиля средней плотности — тонкой структуре, генерируемой волной.
3. Волновой поток первой моды в верхнем 40-метровом слое превышает поток второй моды. Волновые потоки доминируют над турбулентным.

## Глава 4. Генерация вертикальной тонкой структуры гидродинамических полей, индуцированная слабонелинейными инерционно-гравитационными внутренними волнами

### 4.1 Общий анзац задачи. Математическая модель

Рассмотрим такое явление как возникновение тонкой структуры для гидродинамических полей плотности, температуры и солёности. Как было показано в главе 3, в условиях задачи (1.1) для свободных внутренних волн в приближении Буссинеска при учёте вращения Земли и при наличии двумерного бароклинного течения, возникают ненулевые волновые потоки. В частности, речь идет о вертикальных потоках импульса, которые обсуждались в первой главе, потоках тепла и соли, их рассматривали во второй, и вертикальных потоках массы или плотности. Отличие от нуля данных потоков, даже без учета турбулентной вязкости и диффузии, обусловлено зависимостью от вертикальной координаты компоненты скорости течения, поперечной к направлению распространения волны. Как следствие, задача сводится к решению уравнения для амплитуды вертикальной скорости, которое имеет комплексные коэффициенты, собственная функция и частота внутренних волн при этом тоже комплексные (показано, что имеет место слабое затухание волны). В этом случае сдвиг фаз между колебаниями вертикальной скорости и температуры (солёности или плотности) отличен от  $\pi/2$  и потому вертикальные волновые потоки тепла  $\overline{Tw}$ , соли  $\overline{Sw}$  и массы  $\overline{\rho w}$  отличны от нуля.

Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа, суть нелинейное явление, также отлична от нуля и вносит свой вклад в волновой перенос. Вертикальные волновые потоки тепла, соли и массы приводят к необратимой деформации профилей полей средней температуры, солёности и плотности — к тонкой структуре, генерируемой волной. Генерация вертикальной тонкой структуры внутренними волнами рассматривалась в работах [58, 32, 33]. Вращение Земли не учитывалось, в силу этого рассматриваемые в настоящей

работе вертикальные волновые потоки тепла, соли и массы — нулевые. Поэтому необратимая тонкая структура в [58, 32, 33] не генерировалась. В данных работах, в рамках теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн, получены неосциллирующие на временном масштабе волны поправки к плотности, пропорциональные квадрату текущей амплитуды волны. После прохождения волнового пакета невозмущенный профиль плотности восстанавливается и генерируемая в [58, 32, 33] тонкая структура имеет обратимый характер.

Вновь воспроизведем вид исходной системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{Du}{Dt} - fv + w \frac{dU_0}{dz} &= -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial x}, \\
 \frac{Dv}{Dt} + fu + w \frac{dV_0}{dz} &= -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial y}, \\
 \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0(0)}, \\
 \frac{D\rho}{Dt} &= -w \frac{d\rho_0}{dz}, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где  $x, y, z$  — пространственные координаты (ось  $z$  направлена вертикально вверх);  $u, v, w$  — компоненты вектора волновой скорости течения;  $\rho$  и  $P$  — волновые возмущения плотности и давления,  $H$  — глубина моря,  $\rho_0(z)$  — профиль средней плотности,  $f$  — параметр Кориолиса,  $U_0(z), V_0(z)$  — компоненты среднего течения,  $g$  — ускорение свободного падения. Оператор  $\frac{D}{Dt}$  записывается в виде:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial}{\partial x} + (v + V_0) \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Граничные условия для системы (4.1) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 w|_{z=0} &= 0, \\
 w|_{z=-H} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Далее, после подстановки решения в виде (1.8), имеем в итоге краевую задачу для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн  $w_{10}$ :



$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + k \left[ \frac{if \frac{dV_0}{dz}}{\Omega^2 - f^2} - \frac{f^2 \frac{dU_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] \frac{dw_{10}}{dz} +$$

$$+ k w_{10} \left[ \frac{k(N^2 - \Omega^2) + \Omega \frac{d^2 U_0}{dz^2} + if \frac{d^2 V_0}{dz^2}}{\Omega^2 - f^2} + \frac{ifk \frac{dU_0}{dz} \frac{dV_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] = 0 \quad (4.3)$$

с граничными условиями на поверхности

$$w_{10}|_{z=0} = 0, \quad (4.4)$$

и на дне

$$w_{10}|_{z=-H} = 0. \quad (4.5)$$

Краевая задача (4.3)–(4.5) решается методом возмущений, когда собственная функция (решение краевой задачи) и частота волны раскладываются в ряд по малому параметру  $\varepsilon = V_0^*/(H\omega_*)$ , где  $V_0^*$  — характерное значение скорости течения,  $\omega_*$  — характерная частота волны. Общий вид её решения был описан в первых двух главах настоящей работы (см. главы 1, 2). В численном решении данной задачи применяется неявная схема Адамса третьего порядка точности.

Для упрощения решения поставленной задачи произведем оценку горизонтальных масштабов изменчивости средней плотности для случая больших глубин (аналогичные оценки для мелководья делались в главе 1). Для этого воспользуемся оценкой геострофических соотношений [39]:

$$L_x = \rho_0 / \frac{\partial \rho_0}{\partial x} = g/f \max \left| \frac{\partial V_0}{\partial z} \right|,$$

$$L_y = \rho_0 / \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = g/f \max \left| \frac{\partial U_0}{\partial z} \right|.$$

Вертикальные профили компонент скорости течения и их вертикальные градиенты показаны на рис. 4.1, а, б. Максимальные значения модуля вертикальных градиентов компонент скорости течения  $U_0, V_0$  составляют 0,089 и 0,058  $\text{с}^{-1}$  соответственно. Горизонтальные масштабы изменения плотности

равны  $L_x = 1,64 \cdot 10^6$  м,  $L_y = 1,056 \cdot 10^6$  м соответственно, и они много больше длины волны (сотни метров по порядку величины), вследствие этого горизонтальным изменением плотности можно не учитывать.

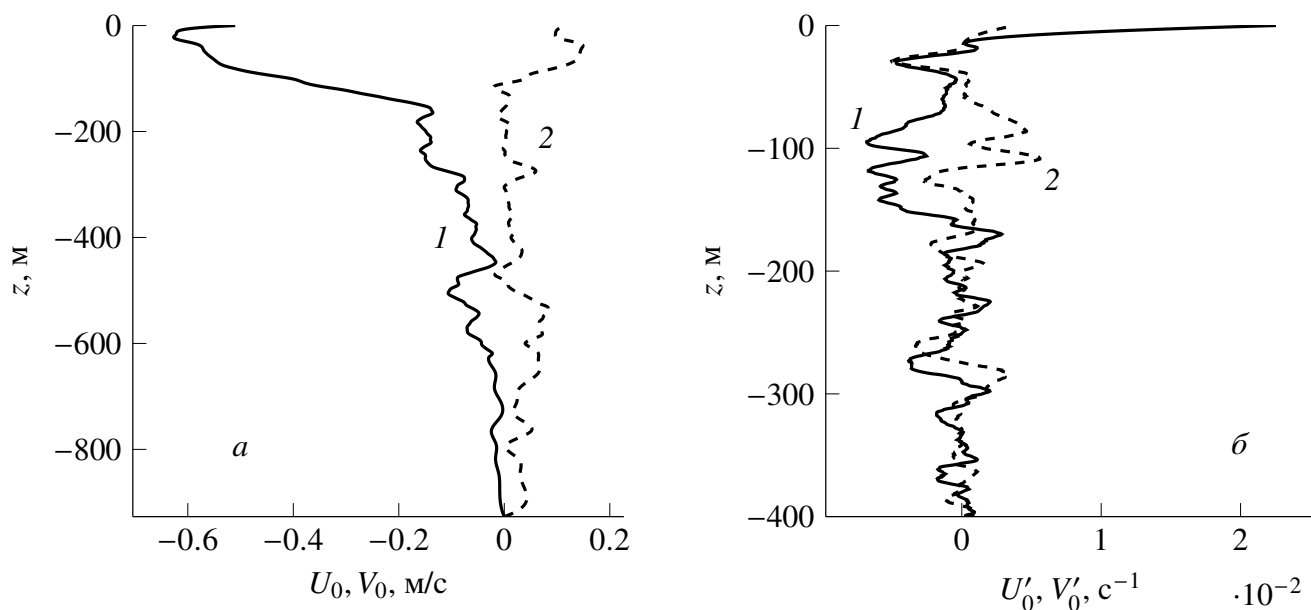


Рис. 4.1 Вертикальные профили компонент скорости течения  $U_0$  (1),  $V_0$  (2) — а, и их производных  $U'_0$  (1),  $V'_0$  (2) — б

## 4.2 Тонкая структура полей температуры, солёности и плотности. Волновые потоки

Как уже упоминалось ранее в разделе 3.2, величина скорости стокова дрейфа  $w_s$  отлична от нуля при учете вращения Земли и при наличии среднего сдвигового течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости  $V_0$  зависит от вертикальной координаты. И, таким образом, мы получаем вклад в вертикальный перенос за счет данного эффекта. Сама же вертикальная проекция скорости стокова дрейфа определяется по формуле

$$w_s = iA_1A_1^* \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \right) \frac{d}{dz} (w_{10}w_{10}^*), \quad (4.6)$$

где  $A_1 = A \exp(\delta\omega \cdot t)$ ,  $A = A_1$  в начальный момент времени при  $t = 0$ .

Вертикальные волновые потоки массы (рассматривались подробно в главе 3),

тепла и соли определяются по формулам:

$$\overline{\rho w} = -w_{10} w_{10}^* |A_1|^2 \left( \frac{i}{\Omega} - \frac{i}{\Omega^*} \right) \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (4.7)$$

$$\overline{T w} = -w_{10} w_{10}^* |A_1|^2 \left( \frac{i}{\Omega} - \frac{i}{\Omega^*} \right) \frac{dT_0}{dz}, \quad (4.8)$$

$$\overline{S w} = -w_{10} w_{10}^* |A_1|^2 \left( \frac{i}{\Omega} - \frac{i}{\Omega^*} \right) \frac{dS_0}{dz}. \quad (4.9)$$

Здесь  $T, S$  — волновые возмущения температуры и солености. Наличие вертикальных волновых потоков массы, тепла и соли приводит к необратимой деформации поля температуры и солености, которая может рассматриваться как вертикальная тонкая структура, генерируемая волной. Уравнение для неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к средней температуре  $\overline{T}$  с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{T} u}{\partial x} + \frac{\partial \overline{T} v}{\partial y} + \frac{\partial \overline{T} w}{\partial z} + w_s \frac{dT_0}{dz} = 0.$$

Отсюда в горизонтально-однородном случае

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{T} w}{\partial z} + w_s \frac{dT_0}{dz} = 0. \quad (4.10)$$

Проинтегрируем уравнение (4.10) по времени

$$\overline{\Delta T} = - \int_0^t \left( \frac{\partial \overline{T} w}{\partial z} + w_s \frac{dT_0}{dz} \right) dt'. \quad (4.11)$$

Подставляя  $\overline{T w}$  (4.8) и вертикальную компоненту скорости стокова дрейфа  $w_s$  (4.6) в (4.11), получим после интегрирования

$$\overline{\Delta T} = \left[ \frac{\partial \overline{T w}^0}{\partial z} + w_s^0 \frac{dT_0}{dz} \right] \cdot \frac{1}{2\delta\omega} \left( 1 - \exp^{2\delta\omega t} \right), \quad (4.12)$$

где  $\overline{T w}^0 = i |A_1|^2 w_{10} w_{10}^* \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \right) \frac{dT_0}{dz}$ ,  $w_s^0 = i |A_1|^2 \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \frac{d}{dz} (w_{10} w_{10}^*)$ .

В пределе  $t \rightarrow \infty$ , при этом знаем, что  $\delta\omega < 0$ , находим  $\overline{\Delta T}$

$$\overline{\Delta T} = \left[ \frac{\partial \overline{T w}^0}{\partial z} + w_s^0 \frac{dT_0}{dz} \right] \cdot \frac{1}{2\delta\omega}. \quad (4.13)$$

Продельвая аналогичные вычисления, получим выражения для  $\overline{\Delta S}$  и  $\overline{\Delta \rho}$ :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta S} &= \left[ \frac{\partial \overline{S w^0}}{\partial z} + w_s^0 \frac{d S_0}{dz} \right] \cdot \frac{1}{2 \delta \omega}, \\ \overline{\Delta \rho} &= \left[ \frac{\partial \overline{\rho w^0}}{\partial z} + w_s^0 \frac{d \rho_0}{dz} \right] \cdot \frac{1}{2 \delta \omega}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

В определение неосциллирующих на временном масштабе волны поправок  $\overline{\Delta T}$ ,  $\overline{\Delta S}$ ,  $\overline{\Delta \rho}$  входит величина  $|A|^2$ , которая в точности равна  $|A_1|^2$  в начальный момент времени. Величины данных поправок (4.13) и (4.13) составляют тонкую структуру, генерируемую волной, и, что важно, носящую необратимый характер.

### 4.3 Результаты численного моделирования для малых глубин (шельфовой зоны)

Вводные данные для численного расчета в северо-западной шельфовой зоне Черного моря были получены из натурального эксперимента в ходе третьего этапа 44-го рейса научно-исследовательского судна «Михаил Ломоносов». В разделе 1.3 можно увидеть данные, полученные с помощью ГРАД (градиентно-распределенные датчики температуры) для этой области шельфа.

Вертикальные профили двух компонент скорости течения показаны на рис. 4.2, *а*, частоты Брента—Вяйсяля — на рис. 4.2, *б*, собственной функции второй моды — на рис. 4.18. Численный счет для краевой задачи (4.1), (4.2) для внутренних волн производился по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Волновое число находится методом пристрелки из необходимости выполнения граничных условий (4.2). Волновое число у 15-минутных внутренних волн второй моды равно 0,032 рад/м.

Нормирующий множитель  $A_1$  находится по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений  $\zeta \sim 0,5$  м. Таким образом, нормировку найдем, используя связь  $\zeta$  и  $w$ :  $\frac{d\zeta}{dt} = w$

$$\zeta = \frac{iw_0}{\Omega_0} A_1 \exp(ik - i\omega_0 t) + \text{c. c.}$$

Отсюда следует

$$A_1 = \frac{\max \zeta}{2 \max |w_0/\Omega_0|}.$$

Таким образом, амплитуда вертикальных смещений пропорциональна  $w_0/\Omega_0$ . Экстремумы функции  $w_0/\Omega_0$  соответствуют максимальным вертикальным смещениям по данным эксперимента (рис. 4.18).

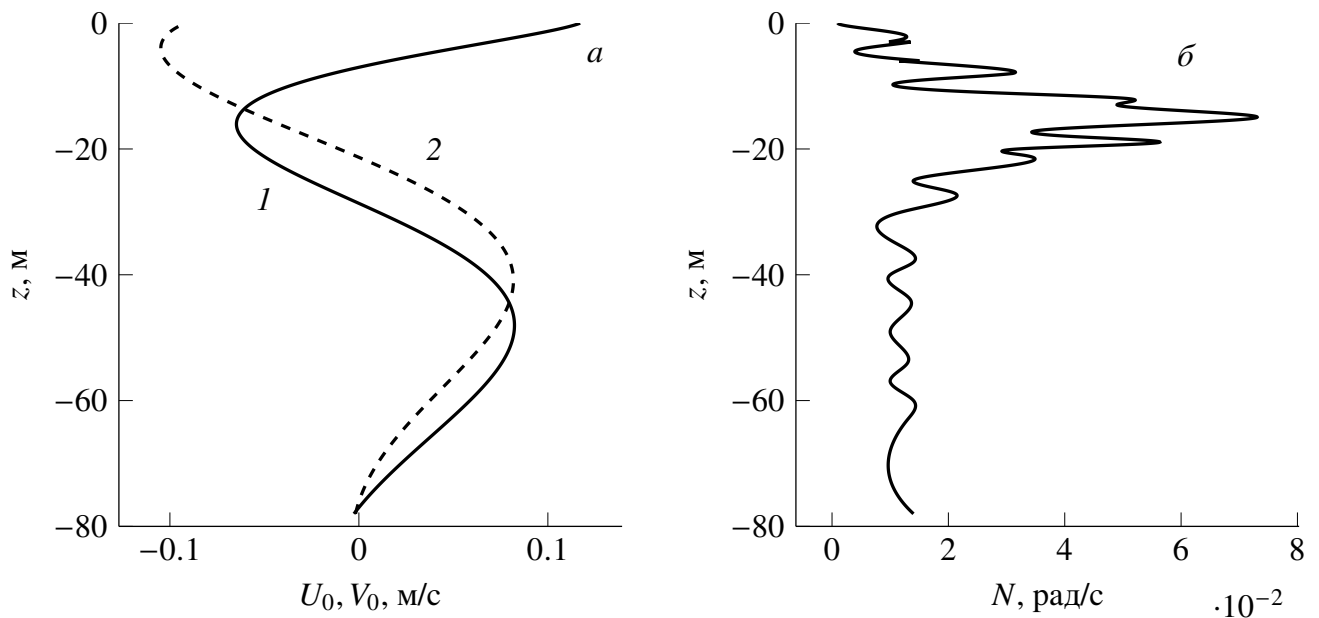


Рис. 4.2 Вертикальные профили: компонент скорости течения  $U_0, V_0$  — *a*; частоты Брента—Вяйсяля — *б*; собственной функции 15-минутных внутренних волн второй моды — *в*

Длина волны пятнадцатиминутных внутренних волн второй моды равна 196 м. Дисперсионные кривые первых двух мод показаны на рис.4.4, *a*. Если течение не учитывать, то дисперсионные кривые в низкочастотной области начинаются с минимальной частоты, практически равной инерционной (рис.4.4, *б*). Обрезание дисперсионных кривых происходит вследствие влияния критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной ( $\Omega_0 = f$ ).

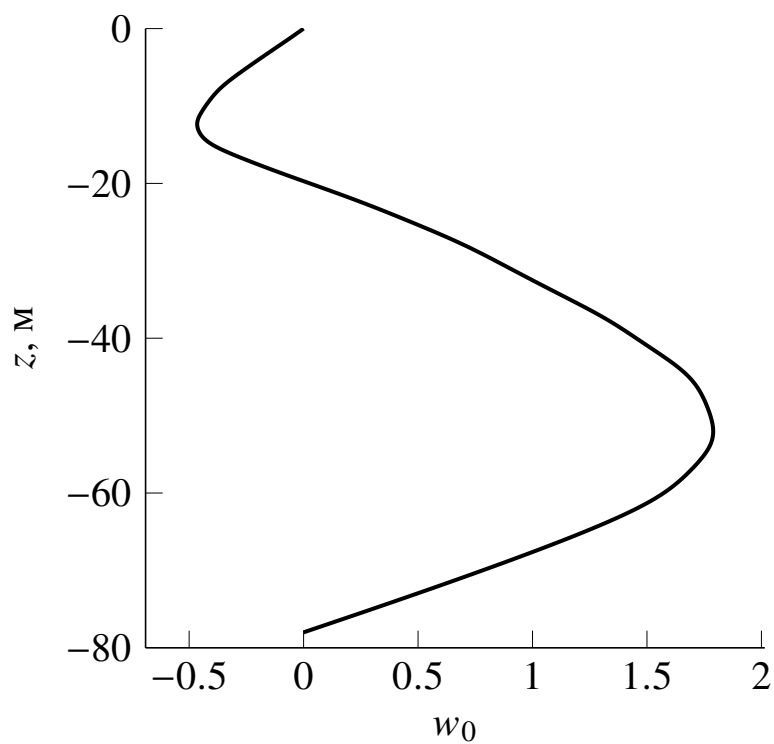


Рис. 4.3 Вертикальный профиль собственной функции 15-минутных внутренних волн второй моды

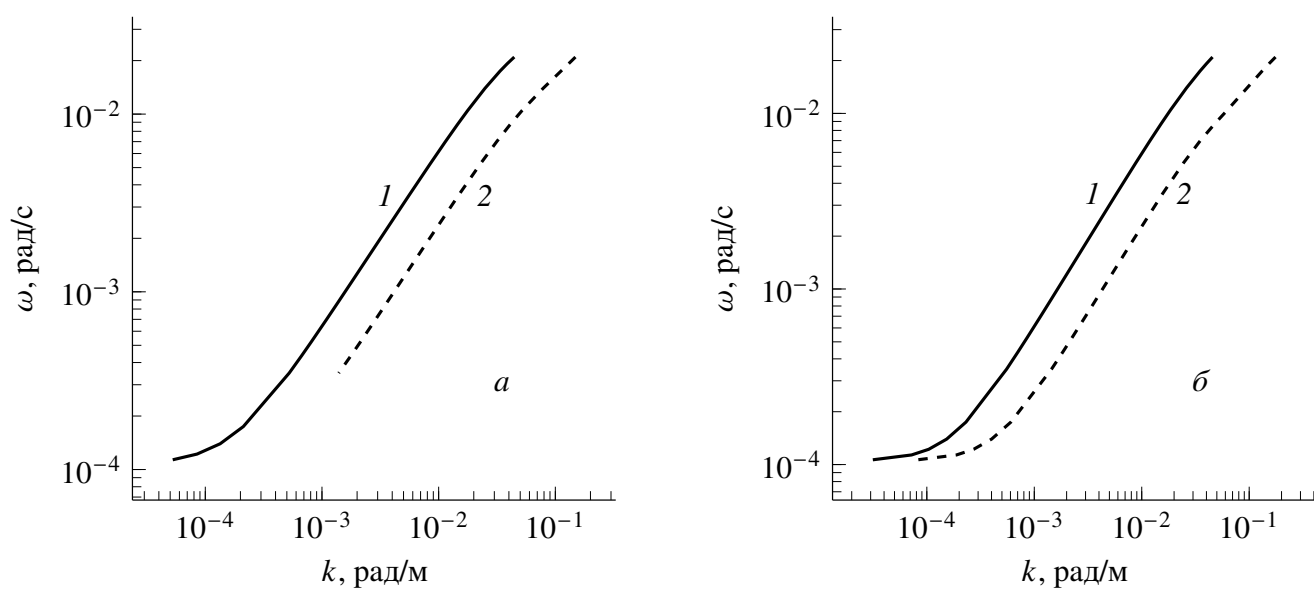


Рис. 4.4 Дисперсионные кривые первой (1) и второй (2) мод: при наличии течения — а; без течения — б

#### 4.4 Результаты численного моделирования для глубоководной части)

В глубоководной области северо-западной части Черного моря над континентальным склоном расположена струя Основного черноморского течения (ОЧТ). Профили собственной функции второй моды 15-минутных внутренних волн и частоты Брента—Вяйсяля показаны на рис. 4.5, *а*, *б*. Вертикальные профили двух компонент скорости течения показаны на рис. 4.2, *а*. При этом использовались данные зондирования профилографа *LADCP* (*Lowered Acoustic Doppler Current Profiler*) [59]. Дисперсионные кривые первых двух мод изображены на рис. 4.6, *а*. На рис. 4.6, *б* показаны дисперсионные кривые без течения. Сравнение с рис. 4.6, *а* показывает, что под воздействием течения дисперсионные кривые при больших волновых числах начинают загибаться (аналогичный эффект отмечался в [60]). При отрицательных волновых числах этот эффект не наблюдается, но происходит обрезание дисперсионных кривых в низкочастотной области (рис. 4.7), что снова обусловлено влиянием критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной. Дисперсионные кривые первых двух мод при отрицательных  $k$  представлены как функции модуля  $|k|$  на рис. 4.7.

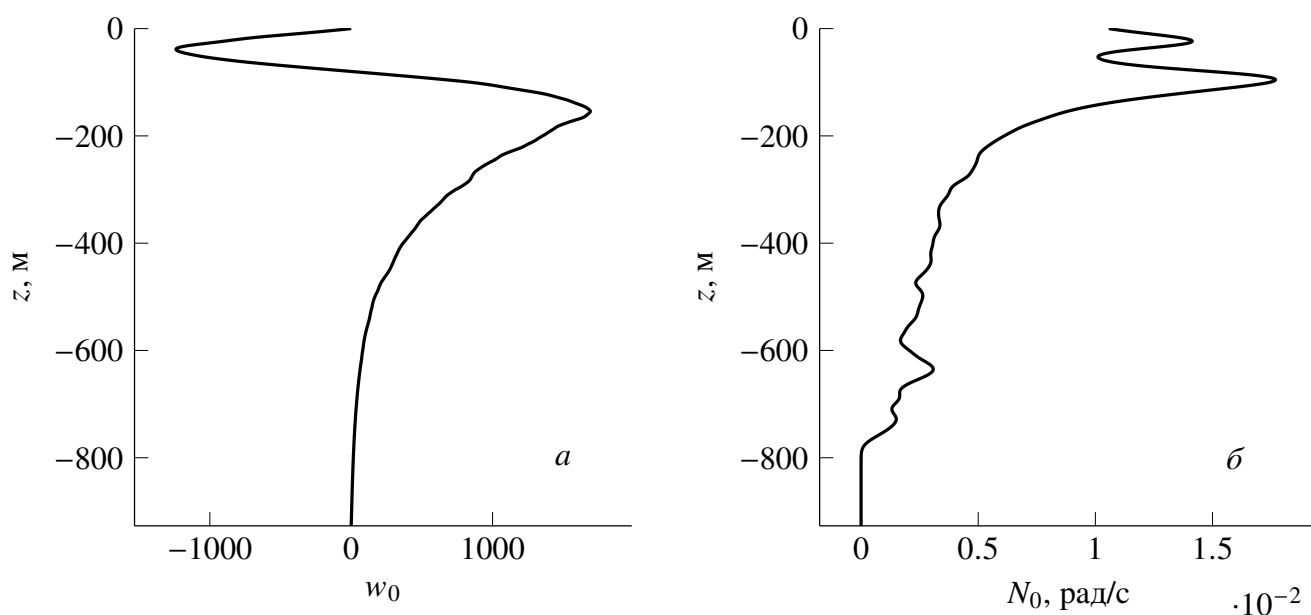


Рис. 4.5 Вертикальные профили в глубоководной части моря: Собственной функции 15-минутных внутренних волн второй моды — *а*; частоты Брента—Вяйсяля — *б*

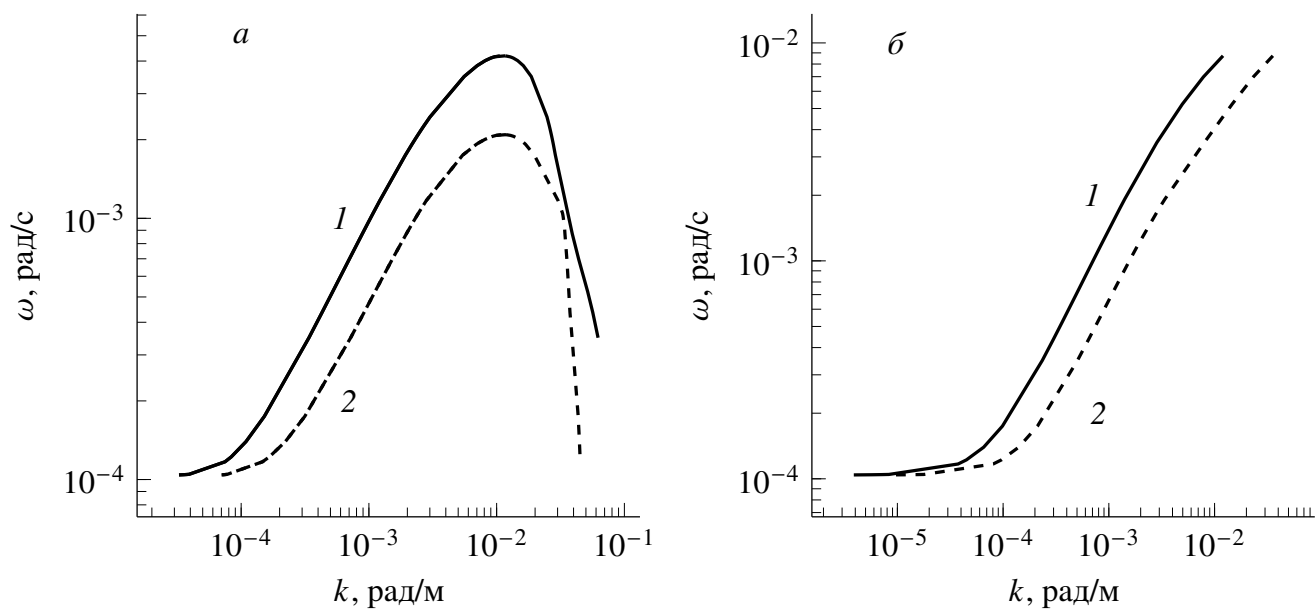


Рис. 4.6 Дисперсионные кривые первой (1) и второй (2) мод в глубоководной части моря: при наличии течения (а) и без течения — (б)

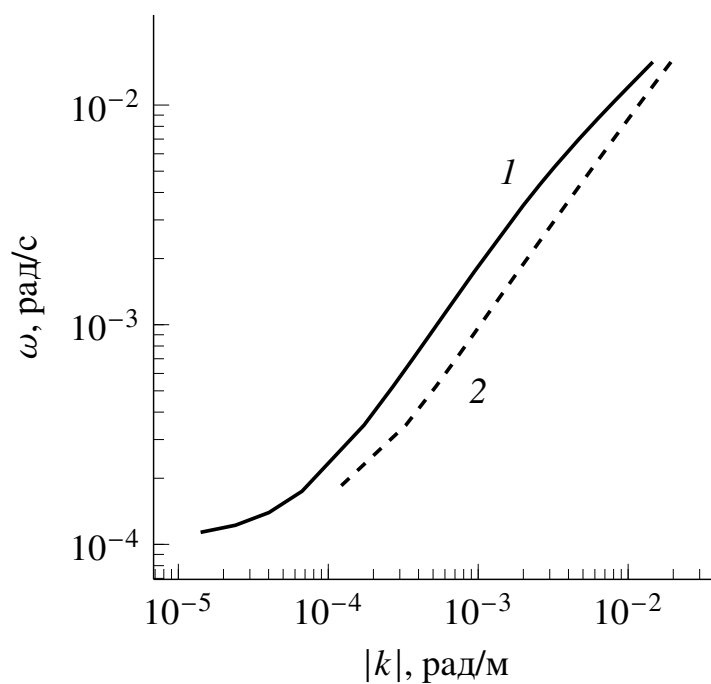


Рис. 4.7 Дисперсионные кривые первой (1) и второй (2) мод в глубоководной части моря при отрицательных волновых числах при наличии течения



Краевая задача по определению функции  $w_1$  (1.28), (1.29) решается численно по неявной схеме Адамса 3-го порядка точности, находится единственное решение, ортогональное  $w_0$  и декремент затухания волны  $\delta\omega = \text{Im}(\sigma_1)$ . Как показали расчеты, у второй моды 15-минутных внутренних волн декремент затухания равен  $\delta\omega = -1,65 \cdot 10^{-3}$  рад/с на большой глубине. Согласно расчёта на мелководье в главе 3, декремент затухания этих волн равен  $\delta\omega = -1,15 \cdot 10^{-5}$  рад/с. Из решения краевой задачи (4.3)–(4.5) методом возмущений, получена зависимость мнимой части частоты волны (декремент затухания) от положительных волновых чисел для первых двух мод, представлена на рис. 4.8. Аналогичная зависимость для отрицательных волновых чисел представлена на рис. 4.9.

Вертикальные волновые потоки массы  $\overline{\rho w}$  (4.7), нормированные на квадрат амплитуды волны, сравниваются на мелководье и на большой глубине для первой моды 15-минутных внутренних волн на рис. 4.10, а, для второй моды — на рис. 4.10, б. Для первой моды волновые потоки сравнимы по величине и максимумы потоков достигаются в пикноклинах. У второй моды доминирует поток для большой глубины (штриховая кривая, рис. 4.10, б).

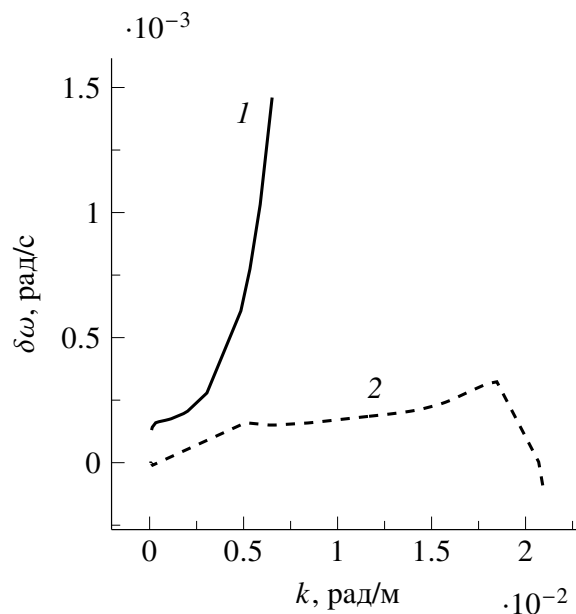


Рис. 4.8 Зависимость мнимой части частоты волны от волнового числа для первой (1) и второй (2) мод

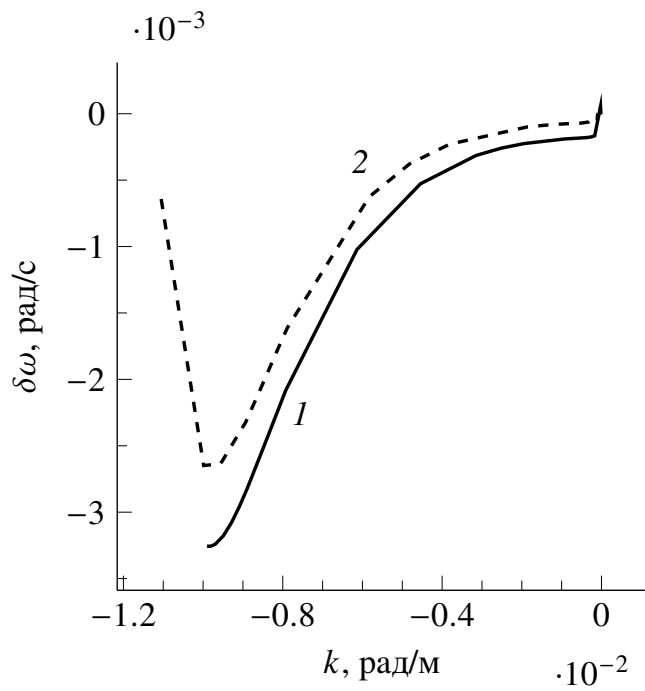


Рис. 4.9 Зависимость мнимой части частоты волны от отрицательных волновых чисел для первой (1) и второй (2) мод

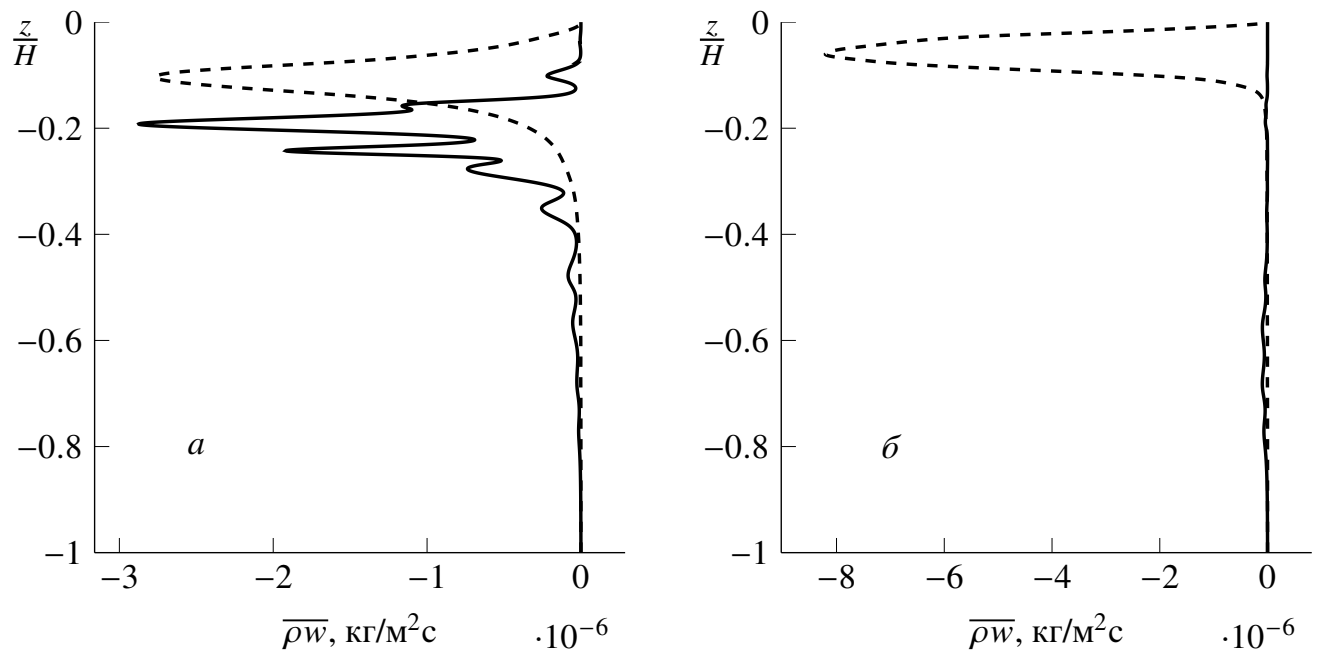


Рис. 4.10 Вертикальные волновые потоки массы  $\overline{\rho w}$  на мелководье (сплошная) и для большой глубины (штриховая) для первой моды — *a*, второй моды — *б*

Суммарные вертикальные волновые потоки для полей  $\rho$ ,  $T$ ,  $S$  складываются за счет потоков, обусловленных нелинейным вкладом решения исходной задачи для внутренних волн (4.7)–(4.9) и вклада за счет ненулевой вертикальной

составляющей скорости стокова дрейфа. Слагаемые за счет наличия стокова дрейфа будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\rho s} &= \rho_0(z)w_s, \\ \mathcal{J}_{qs} &= T_0(z)w_s, \\ \mathcal{J}_{ss} &= S_0(z)w_s.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Соответствующие турбулентные потоки определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{\rho'w'} &= -M_z \frac{d\rho_0}{dz}, \\ \overline{T'w'} &= -M_z \frac{dT_0}{dz}, \\ \overline{S'w'} &= -M_z \frac{dS_0}{dz},\end{aligned}\tag{4.16}$$

где  $M_z$  — коэффициент вертикальной турбулентной диффузии оценивается по эмпирической формуле  $M_z = \frac{\nu}{(1 + \alpha \text{ Ri})} + k_b$  (подробнее в разделе 3.3).

Сравнение суммарных, нормированных на квадрат амплитуды волны, потоков массы  $\mathcal{J}_\rho$  для первых двух мод с соответствующим турбулентным потоком  $\overline{\rho'w'}$  показано на рис. 4.11. Аналогичные сравнения для суммарных волновых потоков тепла  $\mathcal{J}_q$  и соли  $\mathcal{J}_s$  демонстрируются на рис. 4.12, *a* и рис. 4.12, *б* соответственно.

Вторая мода доминирует в верхнем 100-метровом слое, глубже преобладает волновой поток первой моды (рис. 4.11, 4.12). Волновые потоки превышают по абсолютной величине турбулентный поток при максимальной амплитуде волны 0,5 м.

Сравнение суммарных потоков всех трех величин полей плотности, тепла и соли приведен на рис. 4.13 (шкала вертикальной оси нормирована на максимальную глубину). Как видно из графика, во всех трех случаях потоки для глубоководной области значительно превосходят потоки для шельфовой зоны (области малых глубин), либо сравнимы друг с другом, вне приповерхностного слоя.

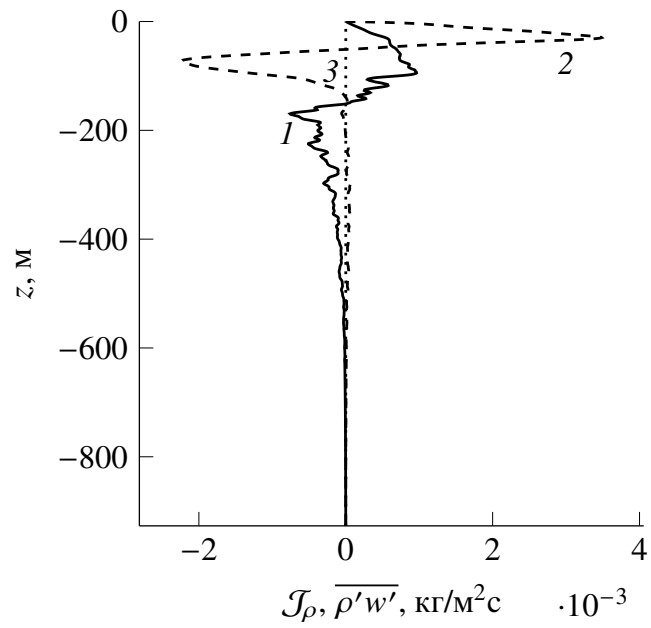


Рис. 4.11 Сравнение суммарных волновых и турбулентных (3) потоков массы для первой (1) и второй (2) мод

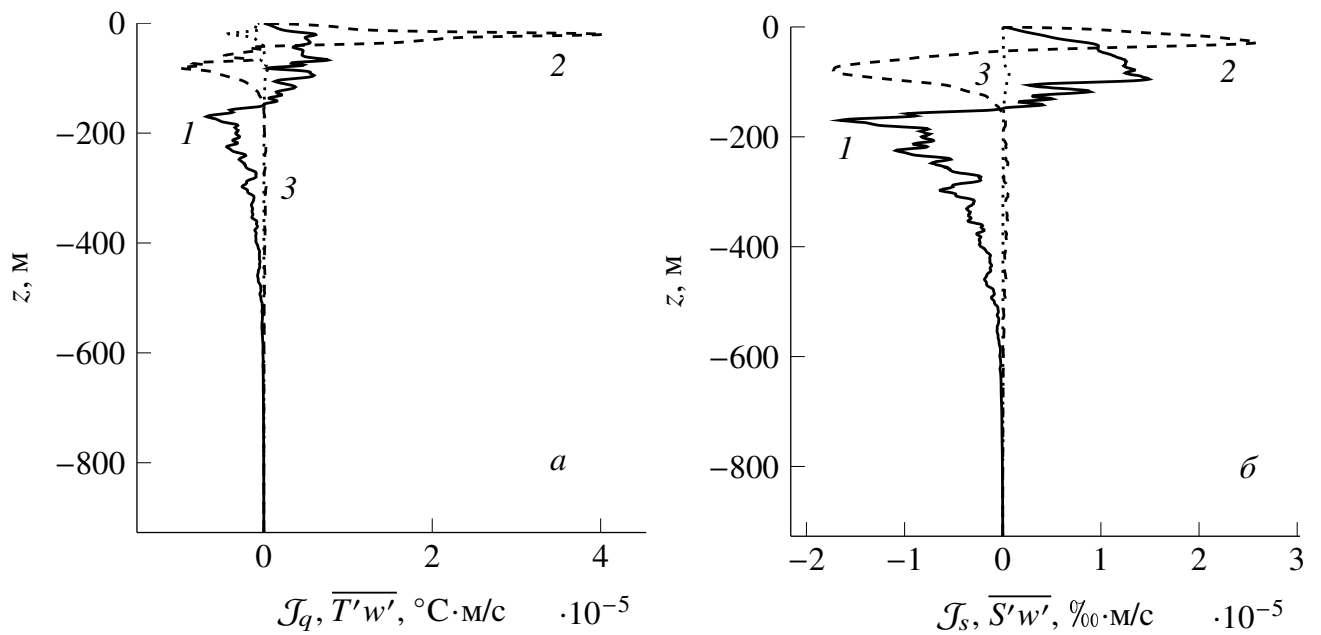


Рис. 4.12 Сравнение суммарных волновых и турбулентных (3) потоков тепла — а и соли — б для первой (1) и второй (2) мод

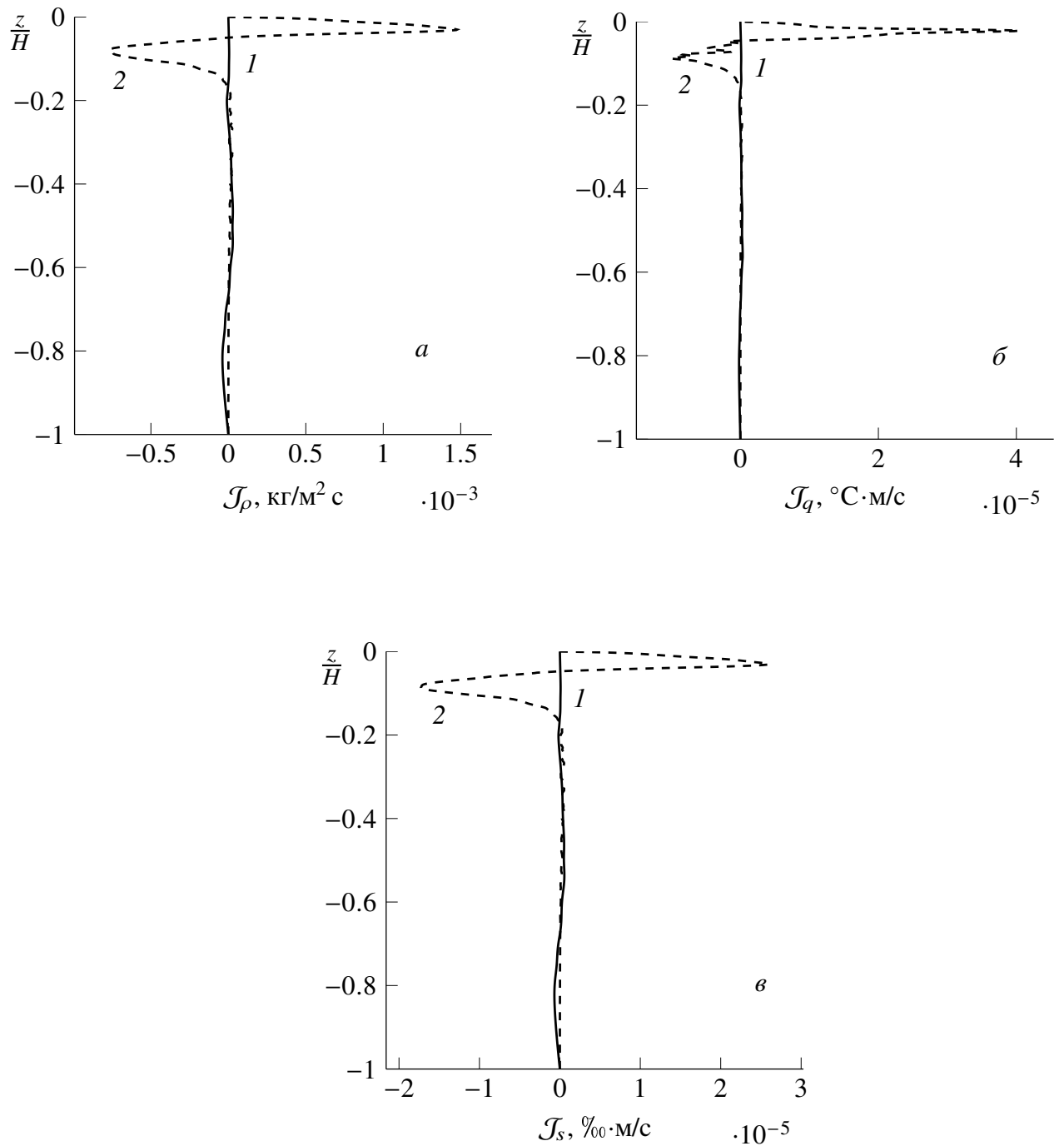


Рис. 4.13 Сравнение суммарных волновых потоков массы — *a*, тепла — *б* и соли — *в* на мелководье (1) и в глубоководной части моря (2) для второй моды

Вертикальный профиль плотности в глубоководной части моря показан на рис. 4.14, *a*. В определение неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к средней плотности  $\overline{\Delta\rho}$  (4.14) входит величина  $|A|^2$ , которая в точности равна  $|A_1|^2$  в начальный момент времени. Неосциллирующая поправка к средней плотности (4.14), нормированная на квадрат амплитуды волны, показана на

рис. 4.14, б и представляет собой тонкую вертикальную структуру, генерируемую волной, которая имеет необратимый характер, причем инверсий в поле средней плотности она не вносит.

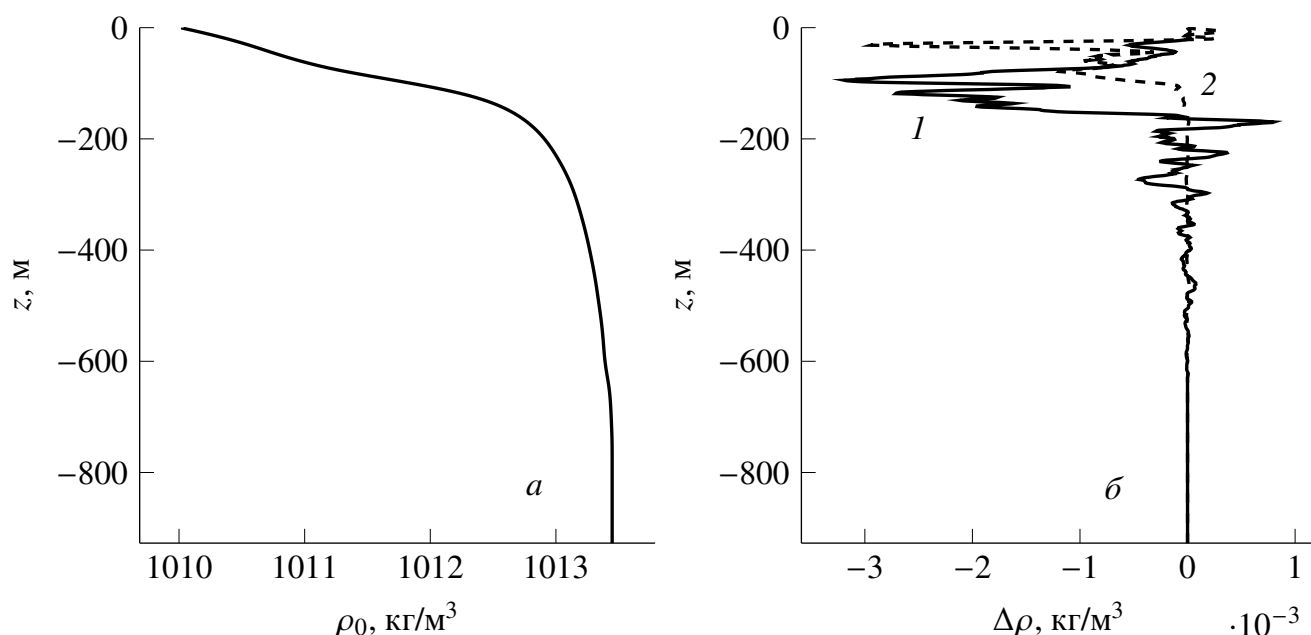


Рис. 4.14 Вертикальные профили средней плотности — *a* и неосциллирующей на масштабе волны поправки к плотности — *б* для первой (1) и второй (2) мод

Сравнение нормированных на квадрат амплитуды волны неосциллирующих поправок к плотности  $\overline{\Delta\rho}$  на мелководье и при большой глубине для 15-минутных внутренних волн делается на рис. 4.14, *a* — для первой моды и на рис. 4.14, *б* — для второй. На мелководье величина  $\overline{\Delta\rho}$  больше.

Вертикальный профили средней температуры и солености показан на рис. 4.14, *a*, *б*. Неосциллирующие на временном масштабе волны поправки к средней температуре и солености для первых двух мод показаны на рис. 4.14 и представляют собой тонкую вертикальную структуру, генерируемую волной, которая имеет необратимый характер. Профили вертикальной тонкой структуры полей температуры и солености по данным эксперимента представлены на рис. 4.17. В целом, наблюдается согласие по масштабам генерируемой вертикальной тонкой структуры. Расчеты делались для 15-минутных внутренних волн. Если учесть весь спектральный континуум внутренних волн, то

интенсивность генерации вертикальной тонкой структуры будет гораздо выше.

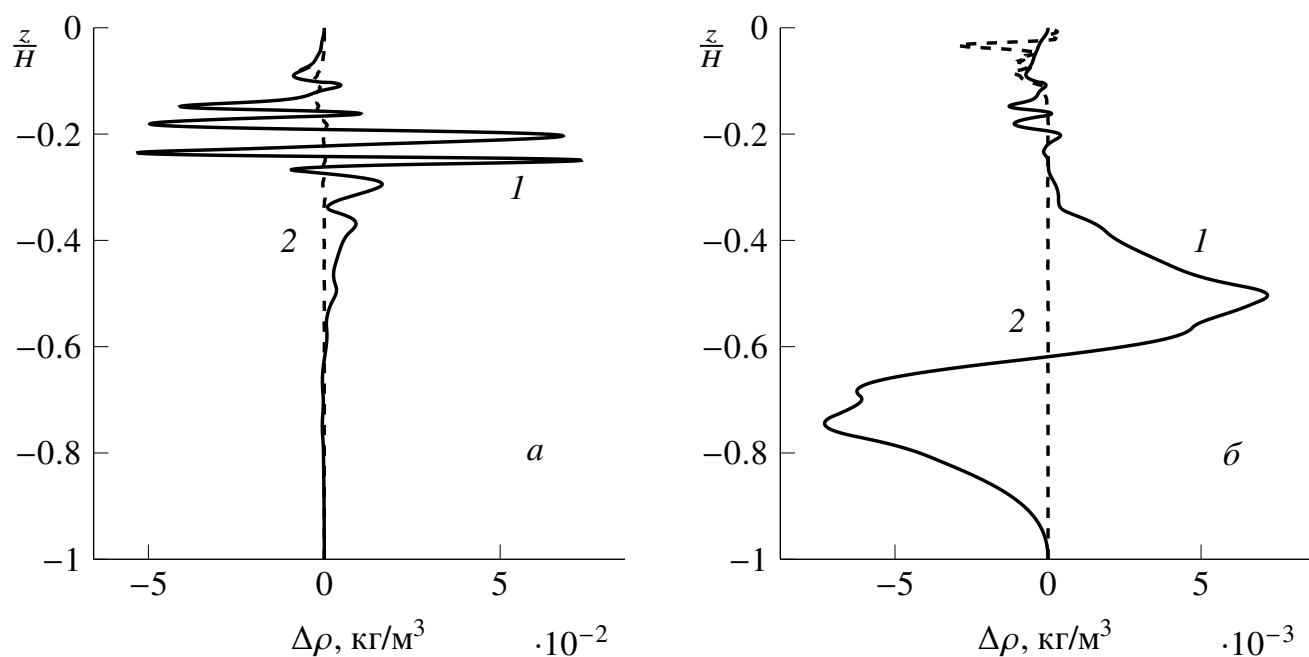


Рис. 4.15 Сравнение неосциллирующих поправок к плотности на мелководье (1) и для большой глубины (2) у первой моды — а и для второй моды — б

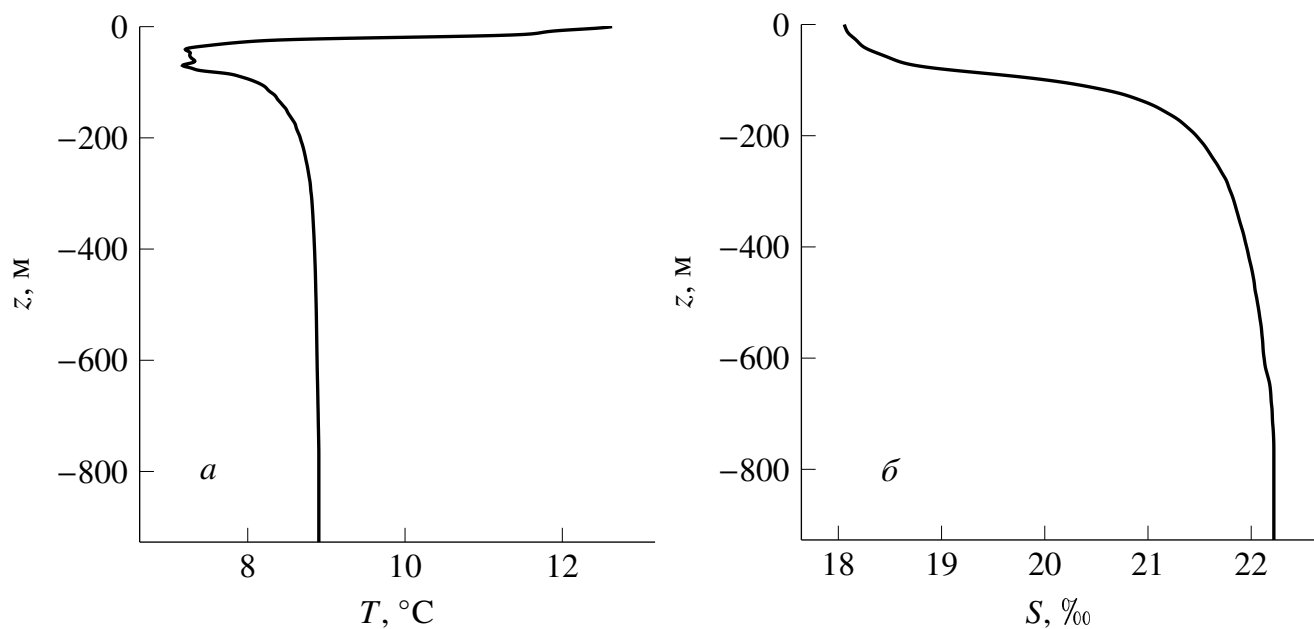


Рис. 4.16 Вертикальные профили средней температуры (а), солёности (б)

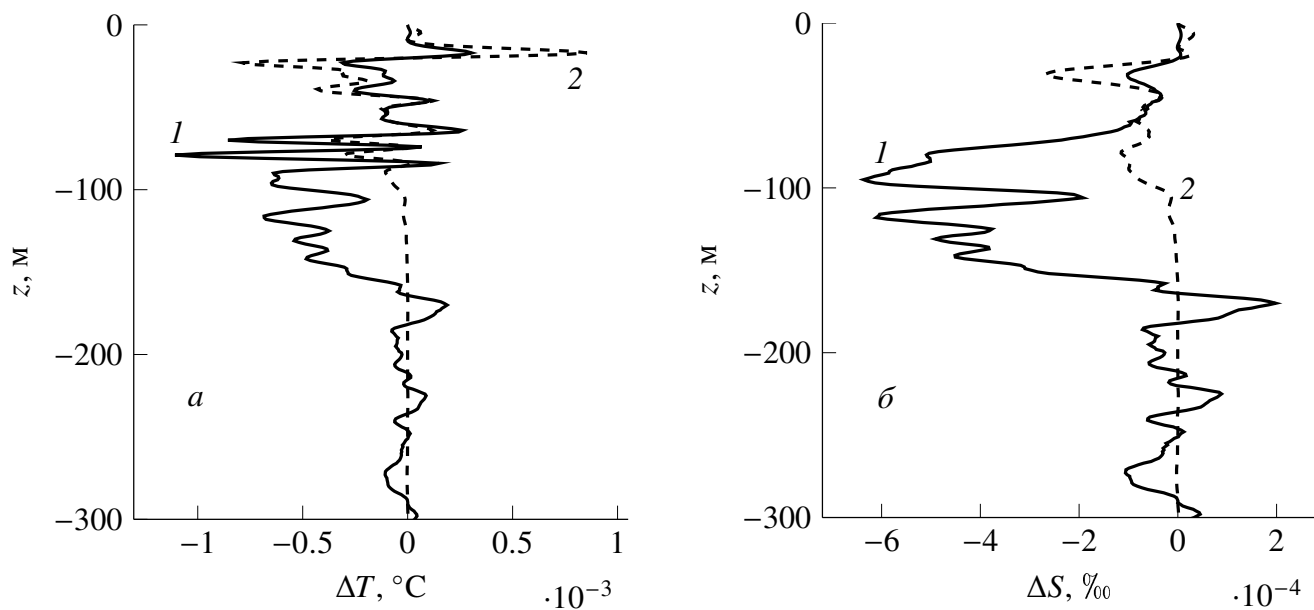


Рис. 4.17 Неосциллирующие на временном масштабе волны поправки к температуре (а) и солености (б) для первой (1) и второй (2) мод

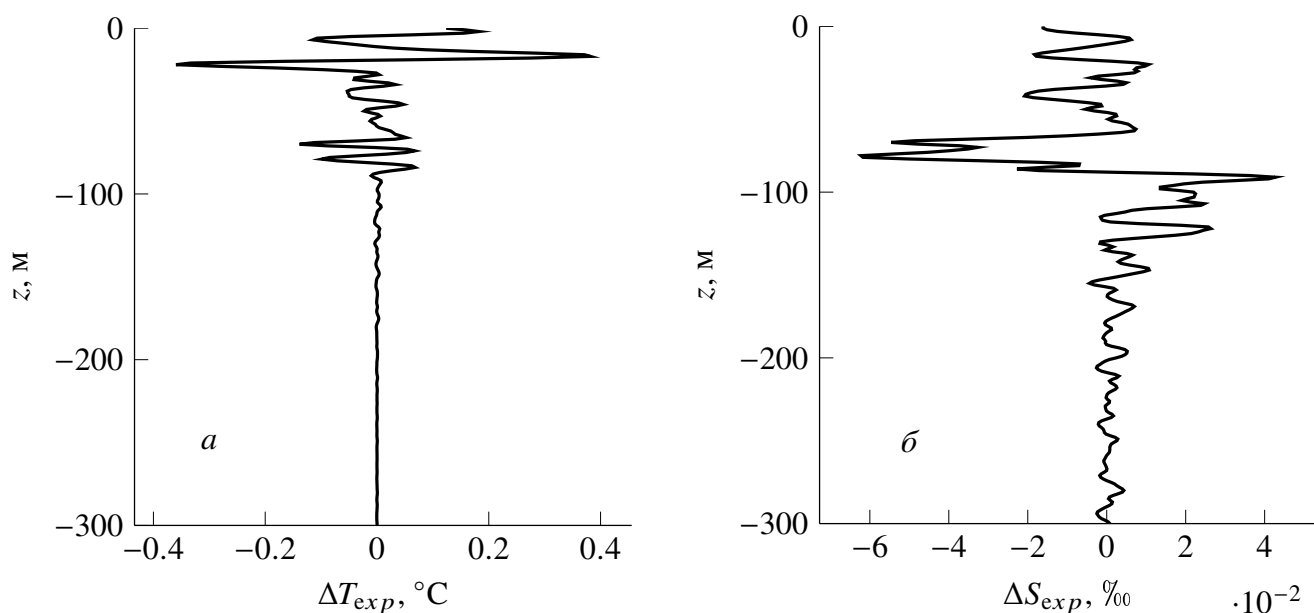


Рис. 4.18 Вертикальная тонкая структуры по данным эксперимента поля температуры — а, солености — б

Сравнение неосциллирующих поправок к температуре  $\overline{\Delta T}$  и солености  $\overline{\Delta S}$  на мелководье и при большой глубине (штриховые кривые) для 15-минутных внутренних волн второй моды фиксированной амплитуды делается на рис. 4.18. По оси ординат отложена безразмерная вертикальная координата. На мелководье неосциллирующие на временном масштабе волны поправки к



температуре и солености по абсолютной величине выше при той же максимальной амплитуде волны.

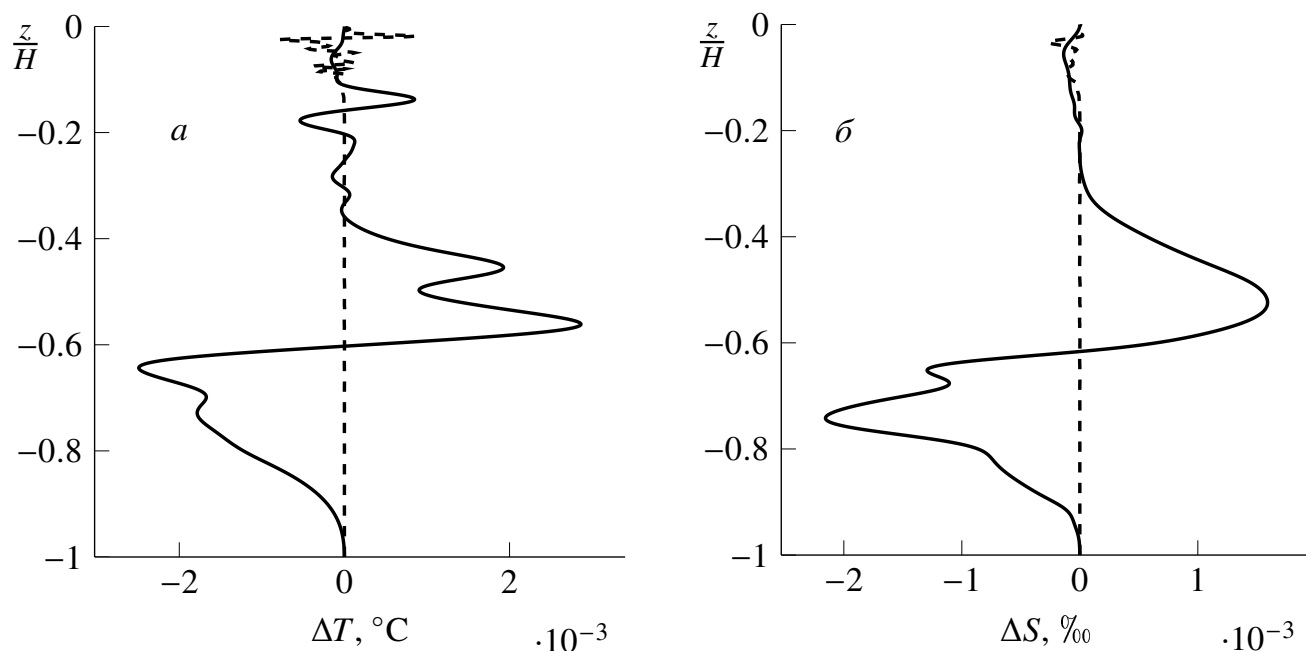


Рис. 4.19 Сравнение неосциллирующих на временном масштабе волны поправок к температуре — *a* и к солености — *б* на мелководье (1) и в глубоководной части моря (2)

Неосциллирующие поправки к частоте Брента—Вяйсяля  $\Delta N'_{th}$  нормированные на квадрат амплитуды волны, для 15-минутных внутренних волн показаны на рис. 4.20, *a* — первая мода, рис. 4.20, *б* — вторая мода. Сравнение с тонкой структурой частоты Брента—Вяйсяля по данным зондирования  $\Delta N_{exp}$  (рис. 4.20, *в*) показывает, что вклад внутренних волн проявляется в области пикноклина, т. е. в области резкого скачка плотности ниже перемешанного слоя, причем масштаб генерируемой волной необратимой тонкой структуры  $\sim 10\text{--}20$  м соответствует наблюдаемому.

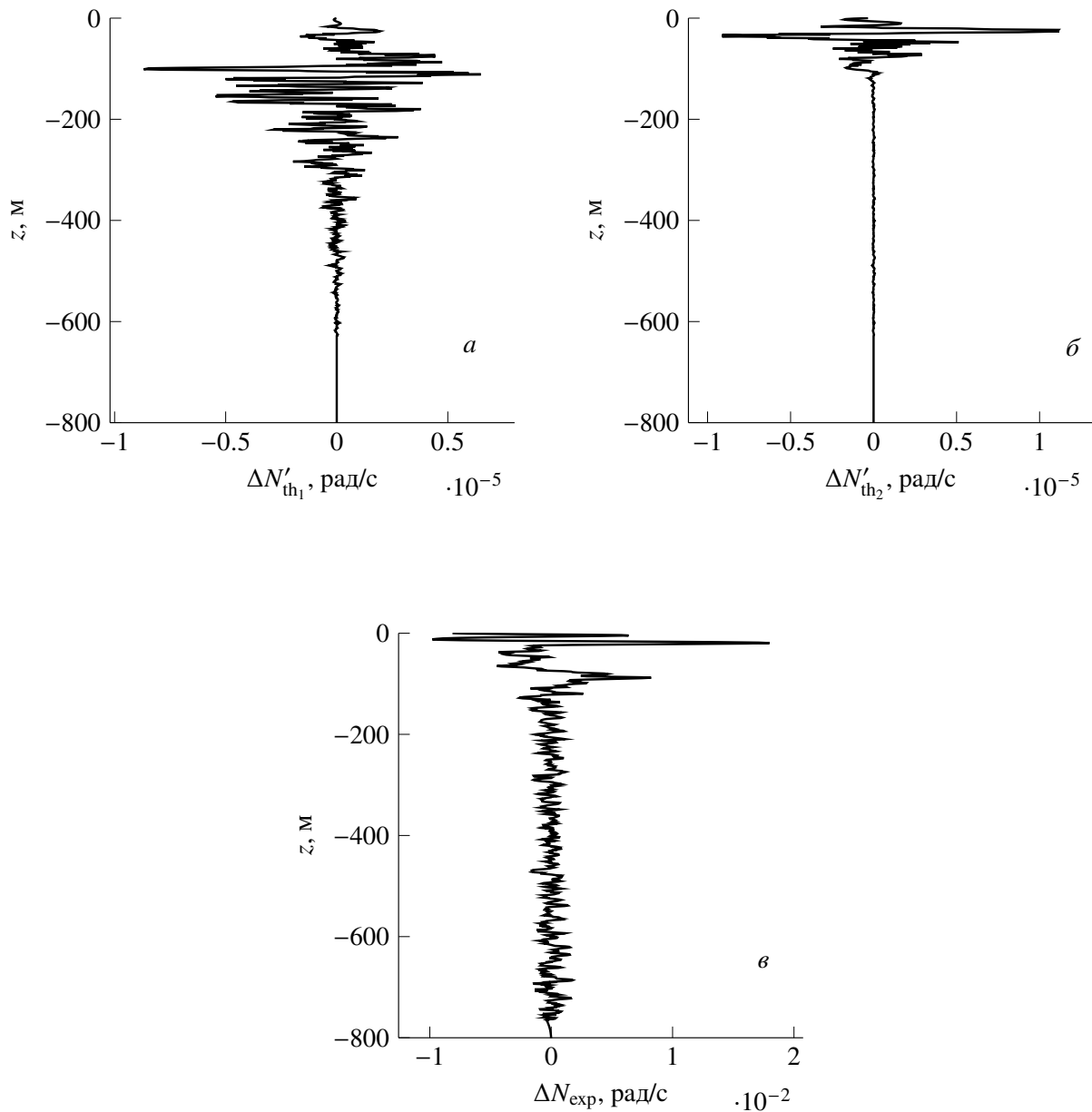


Рис. 4.20 Неосциллирующая на временном масштабе волны поправка к частоте Брента—Вайсяля для первой моды — *a*, для второй моды — *б*; тонкая структура частоты Брента—Вайсяля — *в*

#### 4.5 Выводы к четвертой главе

1. Вертикальные волновые потоки массы, тепла и соли отличны от нуля у инерционно-гравитационных внутренних волн в двумерном вертикально-неоднородном потоке, когда компонента скорости течения, поперечная к направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты. Сравнение полных волновых потоков показывает, что в

приповерхностном слое потоки в глубоководной области превосходят по абсолютной величине потоки шельфовой зоны.

2. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа при этом также отлична от нуля и вносит определяющий вклад в волновой перенос. Волновые потоки массы, тепла и соли приводят к неосциллирующим на временном масштабе волны поправкам к средним полям соответствующих гидродинамических величин, которые имеют необратимый характер, т. е. к тонкой структуре, генерируемой волной. На мелководье данные поправки больше, чем в глубоководной части моря при той же амплитуде волны.
3. Вертикальный масштаб тонкой структуры гидродинамических полей (массы, тепла и соли) и частоты Брента—Вяйсяля, генерируемый волной, соответствует реально наблюдаемому.

## Заключение

Процессы переноса, обусловленные внутренними волнами, как было показано в настоящей работе, присутствуют и без учета турбулентной вязкости и диффузии. Краевая задача для собственной функции внутренних волн при учете вращения Земли и двумерного бароклинного течения с вертикальным сдвигом скорости имеет комплексные коэффициенты (при этом существенно, чтобы компонента скорости течения, поперечная к направлению распространения волны зависела от вертикальной координаты). Решение краевой задачи — собственная функция внутренних волн — комплексная функция, собственная частота также комплексная величина, а это значит, что имеет место слабое затухание волны. При этом стоит отметить, что могут наблюдаться небольшие участки, где мнимая часть частоты волны, суть декремент затухания, является положительным (оставаясь очень малым по модулю) и, по этой причине, возможно локальное усиление внутренних инерционно-гравитационных волн.

Дисперсионные кривые, как на мелководье (шельфовой зоне), так и в глубоководном случае испытывают обрезание в области критических слоев, где значение частоты с учетом доплеровского сдвига  $\Omega$  приближается к величине инерционной частоты  $f$ , что соответствует наличию сингулярностей в исходном уравнении краевой задачи для волновых возмущений исследуемых геофизических и термогидродинамических полей в линейном приближении. При этом, обрезание дисперсионной кривой второй моды происходит на более высокой частоте, чем у первой.

За счет того, что инерционно-гравитационные внутренние волны взаимодействуют с течением, появляется фазовый сдвиг между колебаниями термогидродинамических полей (плотности, температуры, солености) и вертикальной волновой скорости, отличный от  $\pi/2$ . Вертикальные волновые потоки тепла, соли и массы отличны от нуля. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа также отлична от нуля и вносит свой вклад в волновой

перенос. Вертикальный волновой поток импульса также отличен от нуля.

За счет указанных вертикальных волновых потоков генерируется тонкая структура полей плотности, температуры и солёности, которая имеет необратимый характер, т.е. после прохождения волнового пакета остаётся остаточная деформация. Нередко определяющий вклад в вертикальный волновой перенос вносит вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа.

В заключение хочется добавить, что в перспективе представляется интересным вычисление пространственно-угловой картины дисперсионных кривых, построение изолиний для фиксированных частот внутренних волн в угловом диапазоне 0–360 градусов. Причем расчет предполагается делать прямым численным методом, без использования теории возмущений, потому как уже нащупаны границы ее применимости. Работа в этом направлении уже ведется и находится на стадии завершения, написан программный код для ускорения и автоматизации всех расчетов, связанных с данной задачей.

## Список литературы

1. Garrett C., Munk W. Space-time scales of internal waves // *Geophys. Fluid. Dyn.* — 1972. — V. 2, № 3. — P. 225–264.
2. Бунимович Л. А., Шпира В. И. О связи пространственной перемежаемости поля океанических внутренних волн и его времени релаксации // *ДАН СССР.* — 1984. — Т. 276, № 6. — С. 146.
3. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л.: Гидрометеиздат, 1981.
4. Stokes C. G. On the theory of oscillatory waves // *Trans. Camb. Phil. Soc.* — 1847 — V. 8. — P. 441–455.
5. Озмидов Р. В. О турбулентном обмене в устойчиво стратифицированном море // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* — 1965. — Т. 1, № 8. — С. 853–860.
6. Bell I. H. Internal wave-turbulence interpretation of ocean fine structure // *Geophys. Res. Lett.* — 1974. — V/1, № 6. — P. 253–255.
7. Дворянинов Г. С. Эффекты волн в пограничных слоях атмосферы и океана. — Киев: Наукова Думка, 1982—176 с.
8. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. — М.: Мир, 1969. — 267 с.
9. Сперанский Н. С., Каракулаков М. И., Кирлис В. И., Стоянов Л. Д. Устойчивость эйлеровой переносной скорости в волновом потоке // *Взаимодействие атмосферы, гидросферы и литосферы в прибрежной зоне моря. Результаты международного эксперимента «Камчия 77».* — София, 1980. — С. 218–223.

10. Collins J. I. Inception of turbulence at the bed under periodic gravity waves // *J. Geophys. Res.* — 1963. — V. 68, № 21. — P. 6007–6014.
11. Доценко С. Ф., Шелковников Н. К. Лабораторное моделирование распространения периодических внутренних волн над донными откосами // *Морской гидрофизический журнал.* — 2009. — № 5. — С. 37–46.
12. Езерский А. Б., Островский Л. А., Степанянц Ю. А. Индуцированные течения и их вклад в энергию волновых движений жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* — 1982. — Т. 17, № 11. — С. 1201–1208.
13. Madsen O. S. Mass transport in deep-water waves // *J. Phys. Oceanogr.* — 1978 — V. 8, № 6. — P. 1009–1015.
14. Дворянинов Г. С., Прусов А. В. Перенос масс в турбулентном пограничном слое у дна, обусловленный волнами // *Океанология.* — 1976. — Т. 16, вып. 5. — С. 760 – 767.
15. Дворянинов Г. С., Прусов А. В. Теоретическая модель переноса масс гравитационными и приливными волнами // *Океанология.* — 1978. — Т. 18. — С. 978–980.
16. Езерский А. Б., Папко В. В. Лабораторное исследование крупномасштабных потенциальных течений, индуцируемых пакетом поверхностных волн // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* — 1986. — Т. 22, № 9 — С. 979 — 986.
17. Longuet—Higgins M. S. On the transport of mass by time varying current // *Deep Sea Res.* — 1969. — V. 16, № 5. — P. 431–447.
18. Белобров А. А., Пантелеев Н. А., Слепышев А. А. Нелинейные эффекты при распространении пакетов внутренних волн в океане // *Морской гидрофизический журнал.* — 1992. — № 6. — С. 3–21.

19. Слепышев А. А., Шамов В. С. Средние течения, индуцированные низкочастотными внутренними волнами // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. — 1989. — Т. 25, № 10. — С. 1082–1088.
20. Osborn T. R. Vertical profiling of velocity microstructure // J. Phys. Oceanogr. — 1974. — 4, № 1. — P. 109–115.
21. Nasmyth P. W. Turbulence and microstructure in the upper ocean // Mem. Soc. Roy. Sci. Liege. — 6 ser. — 1973. — V. 4. — P. 47–56.
22. Дыкман В. З. Технические средства для исследования структуры и динамики водных масс. Морской гидрофизический журнал. 2016. № 6. С. 49–62.
23. Сабинин К. Д., Серебряный А. Н. Применение акустических доплеровских профилометров течений для изучения пространственной структуры морской среды. Акустический журнал. 2012. Т. 58, № 5. С. 59–72.
24. Пантелеев Н. А., Охотников И. Н., Слепышев А. А. Мелкомасштабная структура и динамика океана. — Киев: Наукова Думка. — 1993. — 193 с.
25. Gregg M. C., Briscoe M. G. Internal waves, fine structure, microstructure and mixing in the ocean // Rev. Geophys. Space Phys., 1979, V. 17, № 7, P. 1524–1548.
26. Keller K. H., Van Atta C. W. An experimental investigation of the vertical temperature structure of homogeneous stratified shear turbulence // J. Fluid Mech. — 2000. — Vol. 425.— P. 1–29.
27. Wunsch C., Ferrari R. Vertical mixing, energy, and the general circulation of the ocean // Ann. Rev. Fluid Mech. — 2004. — Vol. 36. P. 281–314.
28. Журбас В. М., Озмидов Р. В. О внутреннем строении тонкой ступенчатой структуры термоклина океана // Океанология. — 1983. — Т. 23, вып. 6. — С. 938–946.



29. Molcard R., Williams A. J. Deep stepped structure in the Tyrrhenian sea. Mem. Soc. Roy. Sci. Liege. — 1975. — V. VII, ser. 6. — P. 191–210.
30. Williams A. J. Salt fingers in the Mediaterranean outflow. — Science. — 1974. — V. 185, № 4155. — P. 941–943.
31. Журбас В. М., Липс У. К. О выделении основных типов тонкой термохалинной структуры океана // Океанология. — 1987. — Вып. 4. — С. 562–567.
32. Борисенко Ю. Д., Воронович А. Г., Леонов А. И., Миропольский Ю. З. К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. — 1976. — Т. 12, № 3. — С. 293–301.
33. Воронович А. Г., Леонов А. К., Миропольский Ю. З. К теории образования тонкой структуры гидрофизических полей в океане / // Океанология. — 1976. — Т. 11, вып. 5. — С. 490–497.
34. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. — М.: Мир, 1981. — Ч. 2. — 289 с.
35. LeBlond P. H. On damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean // J. Fluid Mech. — 1966. — V. 25, pt. 1. — P. 121–142.
36. Слепышев А. А. Вертикальные потоки, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами в бароклинном течении // Морской гидрофизический журнал. — 2015. — № 1. — С. 64–78.
37. Воротников Д. И., Слепышев А. А. Вертикальные потоки импульса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // Изв. РАН Механика жидкости и газа. — 2018. — № 1. — С. 23–35.
38. Пантелеев Н. А. Отчет о работах в 44-м рейсе (3-й этап) НИС «Михаил Ломоносов» 7 августа — 15 сентября 1985 г. Севастополь: МГИ АН УССР,

1985. — Т. 1. — 135 с.

39. Каменкович В. М. Основы динамики океана. — Ленинград: Гидрометеоиздат, 1973. — 128 с.
40. Banks W. H., Drazin P. G., Zatureka M. B. On the normal modes of parallel flow of inviscid stratified fluid // *J. Fluid Mech.* — 1976. — V. 75, pt. 1. — P. 149–171.
41. Booker J. B., Bretherton F. P. The critical layer for internal gravity waves in a shear flow // *J. Fluid Mech.* — 1967. — V. 27, pt. 4. — P. 513–539.
42. Jones W. L. Propagation of internal waves in fluids with shear flow and rotation // *Ibid.* — 1967. — V. 30, pt. 3. — P. 439–448.
43. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Москва: Наука, 1976. — С. 188.
44. Фабрикант А. Л. Импульс волнового пакета в среде и индуцированные средние течения. Препринт № 183 ИПФ АН СССР. Горький, 1988. 20 с.
45. Степанянц Ю. А., Фабрикант А. Л. Распространение волн в сдвиговых потоках. — М.: Наука. Физматлит, 1996. — 240 с.
46. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. — М.: Физмат-лит, 2003. — С. 92.
47. Мак-Интайр М. Миф о «волновом импульсе» // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. — М.: Мир, 1984. — С. 466.
48. Иванов В. А., Самодуров А. С., Чухарев А. М., Носова А. В. Интенсификация вертикального турбулентного обмена в районах сопряжения шельфа и континентального склона в Черном море // *Доп. НАН України.* — 2008. — № 6. — С. 108–112.

49. Островский Л. А., Соустова И. А. Верхний перемешанный слой как сток энергии внутренних волн // *Океанология*. — 1979. — Т. 19, вып. 6. — С. 973–981.
50. Слепышев А. А. Процессы переноса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами при наличии турбулентности // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. — 1997. — Т. 33. — № 4. — С. 536–548.
51. Носова А. В., Слепышев А. А. Вертикальные потоки, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. — 2015. — № 1. — С. 15–25.
52. Демышев С. Г., Евстигнеева Н. А. Численный эксперимент по моделированию климатических полей на северо-западном шельфе Черного моря в зимний и летний сезоны // *Морской гидрофизический журнал*. — 2012. — № 2. — С. 18–36.
53. Калашников П. А. Первичная обработка гидрологической информации. — Ленинград: Гидрометеиздат. — 1985. — 152 с.
54. Pacanowski R. C., Philander S. G. H. Parameterization of Vertical Mixing in Numerical Models of Tropical Oceans // *J. Phys. Oceanogr.* — 1981. — V. 11, № 11. — P. 1443–1451.
55. Подымов О. И., Зацепин А. Г., Островский А. Г. Вертикальный турбулентный обмен в черноморском пикноклине и его связь с динамикой вод // *Океанология*. — 2017. — Т. 57, № 4. — С. 546–559.
56. Боровиков В. А., Булатов В. В., Владимиров Ю. В. [и др.] Обработка и анализ измерений внутренних волн в районе шельфа западной Сахары // *Океанология*. — 1993. — Т. 33, № 4. — С. 532–535.

57. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. — М.: Наука, 2010. — 470 с.
58. Grimshaw R. The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion // Stud. In Appl. Math. — 1977. — V. 56. — P. 241–266.
59. Лемешко Е. М., Морозов А. Н., Станичный С. В. Вертикальная структура поля скорости течений в северо-западной части Черного моря по данным LADCP в мае 2004 года // Морской гидрофизический журнал. — 2008. — № 6. — С. 25–37.
60. Сабинин К. Д., Успенская Т. М. К влиянию сдвиговых течений на кинематические характеристики внутренних волн // Океанология. — 1990. — № 6. — С. 932–935.
61. Слепышев А. А., Лактионова Н. В. Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. — 2019. — Т. 55. — № 6. — С. 194–200.
62. Слепышев А. А., Лактионова Н. В. Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке при учете турбулентной вязкости и диффузии // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. — 2022. — Т. 58. — № 5. — С. 504–511.