

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*



**Нечаев Артем Тимурович**

**Исследование нестационарных течений, возникающих при  
проникании через свободную границу тонких свободных или  
затопленных струй жидкости**

Специальность 1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор

Карликов Владимир Павлович

доктор физико-математических наук, доцент

Толоконников Сергей Львович

Москва – 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Введение</b>  | <b>4</b>  |
| <b>Глава 1. Проникание свободных вертикальных струй через<br/>поверхность жидкости в относительно узких каналах</b>                | <b>21</b> |
| 1.1. Проникание вертикальных плоских струй . . . . .   | 21        |
| 1.2. Проникание вертикальных осесимметричных струй . . . . .   | 29        |
| 1.3. Особенности проникания плоских и осесимметричных струй<br>в каналах разной протяженности . . . . .                            | 31        |
| 1.4. Проникание двух вертикальных свободных струй . . . . .  | 38        |
| <b>Глава 2. Фонтанирование вертикальных осесимметричных<br/>затопленных струй в относительно узких каналах</b>                     | <b>45</b> |
| 2.1. Экспериментальное исследование фонтанирования осесим-<br>метричных затопленных струй в относительно узких каналах             | 45        |
| 2.2. Описание математической модели . . . . .  | 51        |
| 2.3. Верификация численной модели . . . . .  | 55        |
| 2.4. Численное моделирование затопленных осесимметричных<br>струй . . . . .  | 61        |
| 2.5. Численное моделирование затопленных струй прямоуголь-<br>ного сечения . . . . .   | 64        |
| 2.6. Численное и экспериментальное исследование взаимодей-<br>ствия пары затопленных плоских струй . . . . .                       | 70        |
| <b>Глава 3. Проникание наклонных свободных и затопленных<br/>струй через поверхность жидкости в относительно узких<br/>каналах</b> | <b>79</b> |
| 3.1. Проникание клиновидной струи через свободную поверхность  | 79        |
| 3.2. Проникание пристеночной наклонной затопленной струи . .   | 86        |

|   |            |
|---|------------|
| 3.3. Эжектирование жидкости из сосуда плоской пристенной струей . . . . . | 92         |
| <b>Заключение</b>   | <b>98</b>  |
| <b>Литература</b>   | <b>100</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы исследования.**

Проблема взаимодействия свободных или затопленных жидких струй со свободной поверхностью покоящейся жидкости представляет научный и практический интерес. Такие явления имеют место в природе, а также во многих технических устройствах и технологических процессах.

При проникании свободной струи жидкости через свободную границу в области контакта наблюдаются захват и увлечение воздуха под свободную поверхность, что приводит к образованию подводной двухфазной области.

Явление уноса воздуха падающими струями может обладать рядом полезных свойств. Например для достижения лучшего растворения газа в сочетании с хорошим перемешиванием в газо-жидкостных контакторах [49, 66, 78, 93, 94, 148], аэрация проникающими струями обеспечивает очень простой и эффективный способ поглощения газа жидкостью в устройствах с реагирующими средами. Во многих биологических процессах для достижения необходимой степени аэрации помимо аэрозольных или эрлифтных ферментеров применяются струйные аэраторы. При очистке сточных вод аэрация с помощью проникающих струй является более выгодной по сравнению с эрлифтными ферментерами, поскольку загрязненная вода обладает высокой вязкостью из-за присутствия тяжелого осадка из органических веществ. Из-за простоты конструкции и относительно меньших эксплуатационных затрат струйные аэраторы применяются во многих процессах химической ферментации и флотации [152, 182, 185]. В естественном процессе самоочищения рек, ручьев, водопадов и водосливов очень важную роль играют струи, которые захватывают воздух и обеспечивают хороший контакт и рассеивание пузырьков воздуха в водоеме [68, 143]. В океане прибрежные волны при опрокидывании разрушаются и также могут внедрять большое количество пузырьков воздуха [70, 75, 104]. Тем не менее, эффект воздухововлечения



может иметь и негативные последствия. Например, в процессе литья металлов попадание воздушной фракции в расплав крайне нежелательно. Сброс воды с плотин может привести к вымыванию грунта, что может стать причиной ее разрушения [89, 149]. Свободные струи могут возникать в различных ситуациях, связанных с анализом безопасности ядерного реактора [52, 68, 118, 151]. Одним из примеров является аварийное охлаждение активной зоны реактора. В некоторых сценариях аварий с потерей теплоносителя холодная вода подается в виде струи и попадает на поверхность горячей воды.

Актуальность выполненных в настоящей работе исследований взаимодействия плоских, круглых и клиновидных свободных струй со свободной поверхностью также обусловлена многообразием возможных приложений. Обнаруженные впервые нестационарные автоколебательные режимы течений со значительным перемещением затопленных участков струй и двухфазных областей течения от места проникания струи, а также интенсивным волнообразованием на свободной поверхности могут быть полезны для повышения эффективности работы струйных аэраторов и смесителей.

Процесс взаимодействия с жидкостью проникающих затопленных струй вызывает интерес в связи с тем, что такие течения наблюдаются в природе, а также имеют практические приложения в гидродинамике и геофизике. Подобные течения формируются при всплывании струй сбросовых вод в океане, при истечении струй из разломов земной коры на дне океана, при проникании родниковых вод из плоских трещин в дне озер и пр.

При фонтанировании струй в определенных условиях могут возникать нестационарные автоколебательные режимы течения. Одним из примеров таких режимов фонтанирования затопленных струй служат течения однородной тяжелой жидкости в относительно узком канале, создаваемые плоской вертикальной струей, проникающей в слой жидко-

сти конечной толщины, ограниченный с одной стороны горизонтальным дном, а с другой - свободной поверхностью [9–13]. Эксперименты показали, что в широком диапазоне определяющих параметров задачи течение не является стационарным и симметричным, возникают регулярные автоколебательные перемещения жидкости над каналом с существенным изменением формы свободной поверхности.

В настоящей работе выполнено детальное исследование аналогичных режимов фонтанирования, существенно дополняющее полученные ранее результаты для одиночной плоской струи. Изучены особенности фонтанирования осесимметричных струй в относительно узких каналах, проникание через свободную поверхность двух затопленных параллельных плоских струй, взаимодействие со свободной границей наклонной плоской струи, вытекающей из примыкающего к вертикальной стенке плоского канала. Исследование указанных течений ранее не проводилось и является актуальным. Обнаруженная возможность существования автоколебательных режимов для различных способов подачи струй жидкости может представлять интерес для расширения области практического применения изучаемого эффекта.

### **Степень разработанности темы исследования.**

#### **Свободные струи**

Вопросы, связанные с прониканием через свободную поверхность жидкости свободной струей, давно привлекают внимание специалистов. Весьма общие обзоры по жидкоструйным системам, включающие их описание, классификацию и применение на практике содержатся в работах Бина [54, 55], Кигера (2012) [114], Мивы (2018) [141]. В работе Эгерса приведен обширный обзор по динамике свободной струи, ее неустойчивости, разрушения и распада на капли [90].

Исследования многих авторов показали, что унос газа падающими струями жидкости представляют собой очень сложный процесс, в значительной степени зависящий от скорости струи в момент удара о сво-

бодную поверхность. Кроме того, интенсивность захвата газа струей зависит от физических свойств жидкости, в основном вязкости и поверхностного натяжения [127], конструкции струйного сопла, например, отношения длины к диаметру сопла [55, 67, 101, 146, 176], угла наклона струи [48], длины свободного участка струи и степени ее турбулентности [55, 79, 124, 125, 146]. Оказалось, что наблюдения разных исследователей не всегда согласуются друг с другом из-за чувствительности рассматриваемого явления к условиям проведения эксперимента, а также точности измерительной техники.

В исследованиях Каммингса и Шансона [81] установлено, что захват воздуха проникающей струей жидкости происходит когда ее скорость в момент удара о свободную поверхность превышает некоторую величину, являющуюся функцией других определяющих параметров. Робертсон [157], Мишель [139], Кусабираки [123] и Огуз [144] изучали формирование воздушной каверны, образующейся в окрестности проникающей струи. Было установлено, что ее устойчивость в значительной степени зависит от давления окружающей среды. МакКио и Эрвайн [138] и Давуст [83] классифицировали механизмы захвата воздуха проникающими струями. Ван де Санде оценил влияние турбулентного и ламинарного порганичных слоев в струе [174] и получил соотношения для нахождения глубины ее проникания [175]. Эль-Хаммуни [91] нашел критические значения для числа Рейнольдса и Вебера струи жидкости, при которых начинается процесс увлечения воздуха. В экспериментах Шансон и соавт. [72, 74] обнаружили, что при малых скоростях струи происходит внедрение единичных пузырьков воздуха, но при постепенном увеличении скорости по всему периметру струи образуется воздушная полость, и большая часть воздуха захватывается за счет удлинения, растяжения и разрушения этой воздушной полости. Шансон и соавт. [75] провели эксперименты по изучению внедрения и рассеивания пузырьков при проникании струй пресной и морской воды. Было отмечено, что мак-

симальная глубина погружения пузырьков, внедрённых в жидкость при проникании струи, не может быть строго определена, поскольку нижняя граница облака пузырьков непрерывно колеблется, но можно дать оценку с помощью осреднения ее по времени. Некоторые авторы изучили и измерили максимальную глубину проникания пузырьков, определив ее через расстояние от свободной поверхности до точки, в которую воздух прибывает с нулевой вертикальной компонентой скорости [76, 138, 168]. Для определения глубины проникания были предложены также эмпирические и полуэмпирические соотношения [92, 138, 143, 147].

В технике широко распространены газо-жидкостные контакторы, использующиеся для растворения и перемешивания различных газообразных реагентов с жидкостью. Основная часть работ по исследованию функционирования таких устройств посвящена прониканию струи, проходящей через слой газа, которая одновременно выполняет функцию инжекции и перемешивания газа. Тојо рассмотрел два типа смесителя и показал, что эффективность устройства с внедрением свободной струи оказалась выше, чем при подаче затопленной струи со дна резервуара [170]. Изучалось растворение углекислого газа в воде [60, 166]. Крамерс исследовал характеристики эжектора - устройства для газонасыщения струи воздухом [77]. Идэ предложил новый тип контактора с применением струи, содержащей небольшие растворенные пузырьки воздуха [106]. Статья [98] посвящена изучению работы трехфазного контактора.

Результаты серии исследований с наклонной плоской струей, ограниченной с одной стороны вертикальной стенкой, приведены в [53, 64, 69, 80]. С помощью скоростной камеры изучался механизм внедрения воздуха, разрушения и слияние пузырьков. Показано влияние пузырьков воздуха на образование макроскопических турбулентных структур [162]. Wang установил, что скорость струи, её длина, начальное возмущение и газонасыщение оказывают значительное влияние на объем внедренного воздуха и динамику течения двухфазной области [177].

Поскольку наклонные сопла создают более длинные струи, на поверхности которых образуется больше возмущений, чем на вертикальных, они внедряют больше окружающего воздуха [171]. Этот факт приводит к выводу, что использование наклонных струй более предпочтительней в процессах аэрации. В промышленных процессах очистки сточных вод с помощью аэрации использовалась наклонная струя [58, 147]. Sene обнаружил, что в случае наклонных проникающих струй большая часть захваченного воздуха внедряется из слоя пены, возникающего на свободной поверхности приемного резервуара [165].

Механизмы захвата воздуха наклонными круглыми проникающими струями жидкости изучались Koga [115], Detsch & Sharma [88], Kusabiraki [124]). Было исследовано поведение пузырьков, внедряемых проникающей струей. Проведено измерение поля скорости в области двухфазного течения жидкости, размер пузырьков, определены размеры воздушной оболочки вокруг наклонных струй в зависимости от скорости струи. Другая группа исследователей изучала гидродинамические характеристики струи, диффузию пузырьков, глубину их проникания (Ohkawa et al., [147], Yamagiwa [184]; Kumagai & Endoh [119], Kumagai [122], Bagatur [51]).

Для изучения процесса проникания струй использовались различные измерительные методики. С помощью фазового доплеровского анемометра оценивались локальные характеристики течения: размер пузырьков, их скорость, турбулентные характеристики струи [59, 107]. Акустический метод применялся для идентификации начала внедрения воздуха струей, измерения среднего размера пузырьков и их распределения [63, 73]. В большинстве работ использовалась высокоскоростная фото- и видео-техника, позволяющая детально изучить образования каверны в момент удара струи, дальнейшее проникание струи, процесс захвата воздуха и движение отдельных пузырьков [53, 155, 158, 167, 188]. В [159] для оценки доли воздушных пустот использовался погружной зонд, измеря-

ющий электропроводность среды. В работе [117] с помощью нейронных сетей была построена численная модель, позволяющая определить глубину проникания струи.

В настоящее время широкое распространение получили многоструйные аэраторы. За счет большего количества сопел эффективность таких устройств увеличивается. В работах [140,173] исследовано влияние количества сопел и их расположения на коэффициент массообмена жидкости с двухфазной средой, глубину проникания струй, размеры двухфазной области. Guyot [99] в своей работе использовал подвижное сопло, которое перемещалось параллельно свободной поверхности, при этом глубина проникания свободной струи оказалась на 30% выше, чем для струи, подаваемой из неподвижного сопла. Десвал оценил эффективность конического [86] и кольцевидного [87] аэратора. В.П. Карликовым и С.Л. Толконниковым были выполнены экспериментальные исследования проникания через поверхность воды, находящейся в сосудах прямоугольной формы различного размера, свободных турбулентных водяных струй, вытекающих из конического щелевого сопла с вертикальной осью [15,17]. В широком диапазоне изменения определяющих параметров обнаружено существование устойчивых регулярных поперечных автоколебаний границ куполообразных струй. Найдены зависимости периода автоколебаний от числа Фруда для различных высот размещения сопла над свободной поверхностью, толщины струи и угла конусности. Отмечено, что обнаруженные эффекты могут быть использованы для повышения эффективности работы струйных аэраторов.

В одной из глав книги Majumder [135] обсуждаются перспективы развития в области проникания свободных струй: изучение механизма внедрения газа для более тяжелых сред, влияние на проникание поверхностно-активных веществ, использование неньютоновских жидкостей, применение численного моделирования для изучения движения мелких пузырьков.

Значительное количество работ посвящено численному моделированию процесса проникания свободной струи через свободную поверхность. Многие авторы для верификации численных моделей проводили собственные эксперименты. Использовались разные подходы для моделирования подобных процессов: метод объема жидкости (VoF) [49, 85, 129], метод Эйлера [61, 111, 161], метод конечных элементов [96], метод сглаженных частиц (SPH) [84, 151]. Был смоделирован процесс образования воздушной каверны в момент удара струи и дальнейшая эволюция вплоть до ее разрушения для вертикальной [62] и наклонной струи [65]. Численно была найдена глубина проникания струи, объем внедренного газа, поле скорости в двухфазной области, размер пузырьков их траектории и время их жизни [49, 61, 153, 154]. С использованием LES модели турбулентности удалось обнаружить неустойчивость поверхности свободного участка струи и вычислить с хорошей точностью объемный расход воздуха увлекаемого струей [113]. Санджай провел прямое численное моделирование (DNS) проникания вертикальной струи, изучалась траектория индивидуальных пузырьков для понимания кинематики всего пузырькового облака [160]. Ма и соавт. разработали подсеточную модель [130] и апробировали ее, моделируя процесс внедрения воздуха при обрушении волны [131]. Другие исследователи создали гибридные модели, позволяющие воспроизводить как образование каверны, так непрерывный процесс внедрения воздуха [163, 186]. Тем не менее авторы отмечают, что такой подход позволяет лишь качественно уловить характерные особенности течения, а для количественного совпадения требуется калибровка численной модели.

Процесс проникания струй с последующим образованием двухфазных течений является весьма сложным для численного моделирования [112]. Изучение турбулентности в двухфазных пузырьковых течениях является одной из областей, где в настоящее время интенсивно проводятся экспериментальные, численные и теоретические работы. Большое значе-

ние при численном моделировании имеет правильное описание замыкающих соотношений для силы сопротивления, подъемной и межфазных сил. Наиболее важной в отношении CFD является область удара струи со свободной поверхностью. Здесь происходит сложное взаимодействие между поверхностными волнами и турбулентностью, которое приводит к увлечению воздуха. Эти явления происходят на очень малых масштабах. До настоящего времени невозможно разрешить все масштабы в единой численной модели из-за ограниченных вычислительных ресурсов. Поэтому во всех работах все процессы над свободной поверхностью и в окрестности удара не учитываются, а основное внимание уделяется развитию течения под свободной поверхностью.

### **Затопленные струи**

Исследование поведения фонтана, образующегося при вертикальной подаче соляного раствора в массу пресной воды через цилиндрическое сопло, было выполнено Тернером [172]. Его работа положила начало дальнейшему изучению фонтанирования затопленных струй с отрицательной плавучестью. В 2015 году Хантом был сделан обширный обзор по теоретическим, экспериментальным и численным исследованиям в данной области [105]. Опытным путем было показано, что поведение фонтана определяется двумя параметрами, а именно: удельным импульсом струи и силами плавучести. Основной целью многих исследователей являлось нахождение максимальной и конечной высоты фонтана. В то время как для максимальной высоты подъема жидкости используется относительно простое теоретическое предположение [110, 142], то для конечной высоты возникают сложности, связанные с необходимостью учета турбулентного взаимодействия между восходящим течением в ядре струи и нисходящим в кольцевой области, окружающей центральную часть струи [136]. Тем не менее, в 2000 г. для осесимметричных фонтанов Блумфилдом была построена теоретическая модель, учитывающая все эти факторы [57]. В зависимости от числа Фруда для струи фонтаны



классифицируются на 'слабые', когда преобладают силы плавучести и 'вынужденные', когда преобладают инерционные силы. Согласно некоторым исследованиям, критическое число Фруда, при котором происходит смена режимов, определить достаточно трудно [150, 187]. Помимо нахождения двух характерных высот интерес для исследователей представлял сам процесс образования фонтана с момента подачи струи до его стабилизации. Его эволюция была экспериментально изучена в работах [56, 128], а в дальнейших исследованиях обнаружилось, что верхушка фонтана может быть неустойчива и совершать вертикальные перемещения [169, 179], частота которых зависит от числа Ричардсона [95].

Стационарные задачи о фонтанировании тяжелой однородной жидкости из-под свободной поверхности рассматривались во многих теоретических работах в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Ю.И. Петуховым [44] получено приближенное решение методом узких полос задачи о плоском фонтане, образующемся при истечении затопленной струи из вертикальной щели конечной ширины, расположенной на горизонтальном дне. Л.Г. Гузевским [5] решена аналогичная задача, но при замене щели расположенным на дне точечным источником. В [5] получено решение задачи в точной постановке, приведены примеры численных расчетов. Для случая, когда источник расположен на некотором расстоянии от дна, задача решена Мекиасом и Ванден-Броеком [133, 134]. В работах [133, 134] исследованы и безволновые режимы течения с плавным понижением свободной поверхности при удалении от критической точки, и течения с образованием нелинейных волн на свободной поверхности. В работе [7] В.П. Житниковым и Н.М. Шерыхалиной выполнены численные расчеты задачи об источнике, расположенном над горизонтальным дном, исследованы предельные режимы течений. Решение задачи о фонтане, образованном расположенным над горизонтальным дном точечным источником, а также результаты численных расчетов и сравнение с результатами других авторов приведено в монографии Д.В. Ма-

клакова [40]. Во всех указанных выше работах течения являлись стационарными и обладали симметрией относительно вертикальной плоскости, проходящей через точечный источник, либо совпадающей с плоскостью симметрии подающего жидкость канала.

Эксперименты, проведенные В.П. Карликовым [8], показали, что в широком диапазоне значений определяющих параметров процесс фонтанирования носит четко выраженный автоколебательный характер, т.е. течение существенно нестационарно и не является симметричным.

В работах В.П. Карликова и О.В. Трушиной [9–11] содержатся результаты экспериментальных исследований автоколебательных режимов фонтанирования в установках с водосливным стоком. В этих работах описан механизм возникновения автоколебаний, установлен ряд существенных физических особенностей исследованных течений, построены экспериментальные и приближенные теоретические зависимости безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда при различных значениях относительного начального затопления струи.

В работе [13] было показано, что по виду зависимости периода автоколебаний от расхода струи при разных относительных затоплениях автоколебательные режимы могут быть разделены на три характерные группы. Найден безразмерный параметр, позволяющий указать границы бифуркационной смены режимов фонтанирования для каждой из этих групп.

Исследование процесса фонтанирования вертикальных затопленных струй в установках с придонным стоком жидкости проведено в [14]. Обнаружено, что зависимости периода колебаний от числа Фруда существенно отличаются от найденных ранее в случае фонтанирования с водосливным способом слива жидкости из установки. Установлено, что в определенных диапазонах значений определяющих параметров значения периода автоколебаний фонтана оказываются близкими к периодам собственных колебаний стоячих волн в установке.

В [12] показана принципиальная возможность использования результатов изучения автоколебательных режимов фонтанирования жидкости из плоских вертикальных затопленных каналов для создания нового способа бесконтактного определения расхода текущей в трубопроводах жидкости.

Экспериментальные исследования плоского затопленного фонтана были выполнены Мауреллом [132]. В работе [132] также обнаружены нестационарные автоколебательные режимы поведения фонтана.

Большое количество работ посвящено численному моделированию процесса фонтанирования жидкости в однородных и стратифицированных средах. Лином и Армфилдом численно исследованы ламинарные осесимметричные фонтаны с учетом тепловых эффектов, были найдены профиль скорости и температуры на оси симметрии струи [178]. Уильямсон и соавт. провели прямое численное моделирование (DNS) фонтанов для малых и умеренных чисел Фруда [180]. Они пришли к выводу, что на высоту подъема фонтана значительное влияние оказывает профиль скорости источника. Численное моделирование автоколебаний плоских фонтанов для случая отсутствия начального затопления было выполнено А.А. Осипцовым [43]. Работа [164] содержит результаты численного исследования фонтанирования вертикальной плоской струи, проникающей в жидкость, имеющую меньшую плотность. О.А. Дружинин и Ю.И. Троицкая [6] численно исследовали динамику фонтана, образующегося при проникании турбулентной вертикальной струи через пикноклин в стратифицированной среде. Было обнаружено, что при превышении некоторого числа Фруда течение теряет устойчивость и фонтан совершает автоколебания, сопровождающиеся генерацией внутренних волн в пикноклине.

**Цели и задачи работы.** Основными целями и задачами диссертации являются:

- Экспериментальное исследование автоколебательных режимов прони-

кания одиночных вертикальных плоских и осесимметричных свободных струй через свободную поверхность жидкости в относительно узких каналах.

- Экспериментальное изучение взаимодействия пары вертикальных свободных плоских струй при их проникании через свободную поверхность, а также совокупности двух струй, вытекающих из клиновидного сопла.
- Экспериментальное и численное исследование процесса фонтанирования в относительно узких каналах вертикальных затопленных струй, подаваемых из насадков круглого сечения.
- Численное моделирование фонтанирования затопленной вертикальной струи, вытекающей из насадка прямоугольного сечения в неограниченный объем жидкости.
- Изучение физических особенностей и проведение классификации режимов фонтанирования пары затопленных вертикальных плоских струй.
- Изучение особенностей течений, возникающих при проникании через свободную границу наклонных затопленных струй жидкости, и возможности использования эжектирующей способности таких струй для опорожнения сосудов.

**Научная новизна** состоит в следующем:

- Впервые обнаружены и изучены автоколебательные режимы взаимодействия свободных вертикальных и наклонных струй с поверхностью жидкости в узких каналах.
- Впервые изучен процесс фонтанирования в узком канале вертикальной струи, вытекающей из насадка круглого сечения.
- Впервые изучены и классифицированы режимы фонтанирования пары параллельных плоских вертикальных затопленных струй жидкости.
- Впервые проведено исследование процесса взаимодействия со свободной поверхностью неограниченного объема жидкости проникающей вертикальной струи первоначально прямоугольного сечения. Определены диапазоны значений определяющих параметров, при которых возника-

ют регулярные автоколебательные режимы фонтанирования.

- Предложен новый способ удаления жидкости из резервуаров, основанный на эжектирующей способности затопленных струй.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость результатов проведенных экспериментальных и численных исследований обусловлена обнаружением новых гидродинамических эффектов и изучением основных свойств возникающих течений.

Полученные результаты могут иметь практическое применение. Так, например, обнаруженные существенно нестационарные режимы течений, возникающих при проникании через свободную поверхность свободных струй жидкости, могут быть использованы для повышения эффективности работы струйных аэраторов, смесителей и пр.

**Методы исследования.** В диссертационной работе используются экспериментальные и численные методы исследования.

Экспериментальные исследования проводились в НИИ Механики МГУ на специально подготовленных стендах. Использовалась видео и фотосъемка исследуемых процессов. Численные расчеты проводились с использованием вычислительного комплекса STAR-CCM+. Обработка результатов экспериментов осуществлялась с помощью методов анализа размерностей.

**Положения, выносимые на защиту.**

- Плоские и осесимметричные свободные струи, проникая через поверхность жидкости, находящейся в относительно узких каналах, внедряют пузырьки воздуха и образуют течения, характерной особенностью которых является наличие регулярных автоколебательных режимов перемещения затопленных участков струй и двухфазных областей течения.
- При фонтанировании вертикальных затопленных струй, вытекающих из насадков круглого сечения, для широкого диапазона значений определяющих параметров имеют место регулярные автоколебательные режимы перемещения возвышения свободной поверхности. Зависимости пе-

риода автоколебаний от скорости струи качественно отличаются от зависимостей, полученных для плоских струй.

- При проникании через свободную поверхность жидкости, находящейся в относительно узких каналах, пары свободных или затопленных струй жидкости, возникают автоколебательные режимы, существенно отличающиеся от случая одиночной струи.

**Достоверность полученных результатов** в разделах, посвященных экспериментальному изучению течений, определяется многократным проведением опытов и хорошей повторяемостью результатов. Адекватность численной модели проверялась сравнением результатов расчета с экспериментальными данными. Проводился дополнительный анализ чувствительности расчета к изменению основных параметров численной модели.

**Апробация работы.** Полученные в диссертации результаты содержатся в научно-квалификационной работе на тему: "Исследование нестационарных течений, возникающих при проникании через свободную границу тонких свободных или затопленных турбулентных струй жидкости которая была успешно защищена автором при окончании аспирантуры механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в 2018 г. Основные положения и результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Семинар по механике сплошных сред под руководством акад. А.Г. Куликовского, проф. В.П. Карликова, член-корр. РАН О.Э. Мельника, проф. А.Н. Осипцова (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2021).
- Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященная памяти академика Леонида Ивановича Седова в связи со столетием со дня его рождения. (Москва, МИАН, 2017)
- Конференции "Ломоносовские чтения МГУ" (Москва, 2016-2022).
- XII Международная летняя научная школа-конференция «Гидродина-

мика больших скоростей и кораблестроение», посвященная 155-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова, Чебоксары, 24-29 июня, 2018.

- 20-я Международная конференция молодых специалистов по ядерным энергетическим установкам, Подольск, ОКБ «ГИДРОПРЕСС», 11-12 апреля, 2018.

- 10-я Международная научно-техническая конференция «Обеспечение безопасности АЭС с ВВЭР», Подольск, ОКБ «ГИДРОПРЕСС», 16-19 мая, 2017.

### **Публикация статей.**

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих рецензируемых научных журналах, индексируемых системами Web of Science, Scopus:

1. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* Об автоколебательных режимах проникания вертикальных свободных турбулентных струй через поверхность жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2017. – № 6. – С. 24–30 [18].

2. *Карликов В. П., Нечаев А. Т., Толоконников С. Л.* Об автоколебательных режимах проникания свободных или затопленных струй через поверхность жидкости // Водные ресурсы. – 2019. – Т. 46. – № 2. – С. 142–148 [20].

3. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О фонтанировании вертикальных затопленных осесимметричных струй в относительно узких каналах // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2019. – № 3. – С. 54–58 [22].

4. *Нечаев А. Т.* Об эжектировании жидкости из сосуда плоской пристенной струей // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2019. – № 2. – С. 67–69 [41].

5. *Карликов В. П., Нечаев А. Т., Толоконников С. Л.* Об особенностях проникания вертикальных свободных турбулентных струй через поверхность жидкости в узких каналах разной протяженности // Вестник Мос-

ковского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2020. – № 4. – С. 61–65 [24].

### **Личный вклад.**

Разделы главы 1 и 2 написаны на основе совместных работ с Карликовым В.П. и Толоконниковым С.Л. Автор принимал участие в создании экспериментальных стендов, проведении экспериментов, обработке и анализе результатов, а также выполнил численные расчеты. Глава 3 содержит результаты, полученные лично автором. Вклад автора в работах [18–24, 26–36] составляет 1/3, в работах [41, 42] – 1.

### **Структура и объем диссертационной работы.**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. В главе 1 изложены результаты экспериментальных исследований проникания свободных плоских и осесимметричных турбулентных струй через свободную поверхность жидкости. Глава 2 содержит результаты экспериментального и численного исследования проникания затопленных осесимметричных струй через свободную поверхность жидкости в относительно узких каналах, проникание затопленных струй прямоугольного сечения в неограниченном пространстве и взаимодействия двух плоских затопленных фонтанов. Глава 3 посвящена экспериментальному изучению проникания через поверхность жидкости свободной клиновидной струи, взаимодействия затопленной пристеночной струи, вытекающей из наклонной щели и численному исследованию эжектирующей способности плоской пристенной струи.

**Благодарность.** Автор глубоко признателен своим научным руководителям за идеи и помощь в подготовке диссертации, а также всему коллективу кафедры гидромеханики за ценные советы и всестороннее обучение.



## ГЛАВА 1

### ПРОНИКАНИЕ СВОБОДНЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТРУЙ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ В ОТНОСИТЕЛЬНО УЗКИХ КАНАЛАХ\*

Настоящая глава содержит результаты экспериментального изучения процесса проникания вертикальных плоских и круглых свободных турбулентных струй через поверхность жидкости, находящейся в относительно узких каналах [18–21, 27, 28]. Установлено существование диапазонов значений толщин струй, их скоростей и длин свободных участков, в которых наблюдаются регулярные автоколебательные режимы перемещения затопленных участков струй и двухфазных областей течения. Обсуждаются механизм возникновения таких режимов и особенности наблюдаемых течений. Найдены зависимости периодов автоколебаний от основных определяющих параметров задачи.

#### 1.1. Проникание вертикальных плоских струй

Эксперименты проводились на установке, схематично изображенной на рис. 1.1. Она представляла собой закрепленные на горизонтальном основании две вертикальные параллельные пластины из оргстекла размером  $1 \times 55 \times 102$  см с расстоянием между ними  $h = 1$  см. С левой и правой сторон в установке размещались водосливные стойки высотой  $l$ , через которые перетекала вода, поступающая в установку. В верхней центральной части установки в зазор между стенками устанавливались детали с набором вертикальных плоских щелей толщиной  $\delta$ , либо вертикальных цилиндрических каналов с диаметрами  $d$ , через которые в установку поступали плоские или круглые струи воды. Изменением высоты водо-

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования:[18–21, 24, 25, 29–31, 35–37]

сливов  $l$  регулировалась глубина жидкости, находящейся в установке, и тем самым длина свободных участков струи  $H$ .

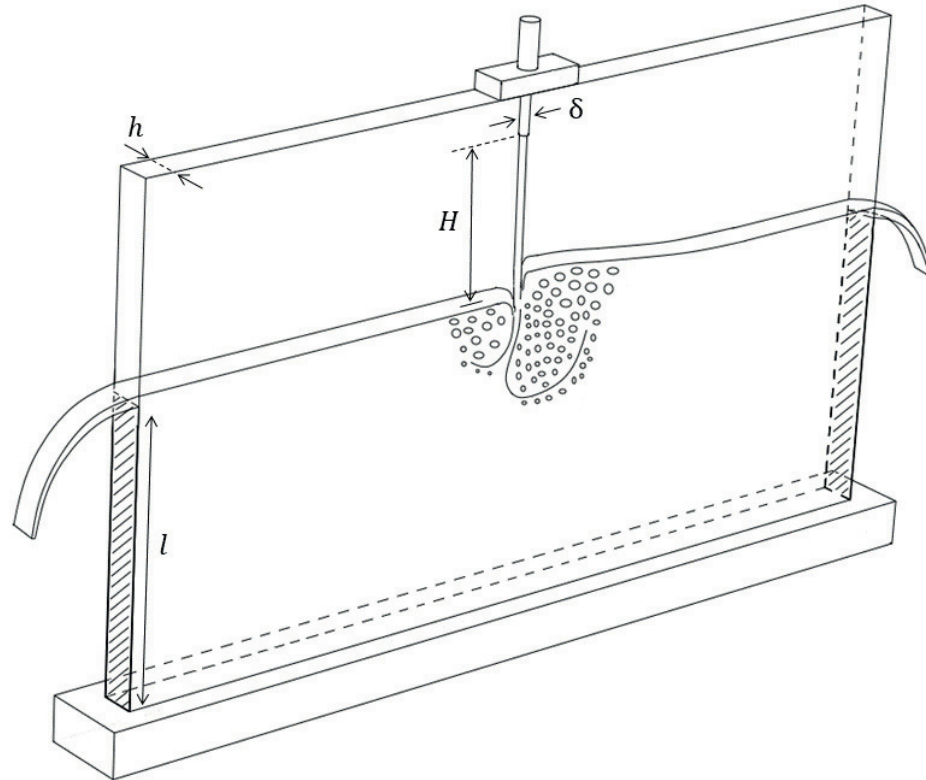


Рис. 1.1. Схема установки.

Конструктивные особенности и размеры установки естественно ограничивали диапазоны изменения значений определяющих параметров при проведении экспериментов, таких, например, как скорость струй, их толщина, расстояние от сопла до свободной поверхности.

Велась видео- и фотосъемка картин течения в окрестности подводного и надводного участков струй. Расход жидкости в струях измерялся стандартным расходомером и контролировался весовым методом. Период колебаний находился делением промежутка времени наблюдения 20 колебаний на их число.

**Физические особенности течений. Механизм возникновения автоколебаний.**

Проникающие через свободную поверхность свободные струи увлекают окружающий их воздух и внедряют его в жидкость. Значительная

часть воздуха, как показывают опыты, захватывается в области начального контакта струи с жидкостью. Пузыри воздуха по мере всплытия увеличивают свой объем.

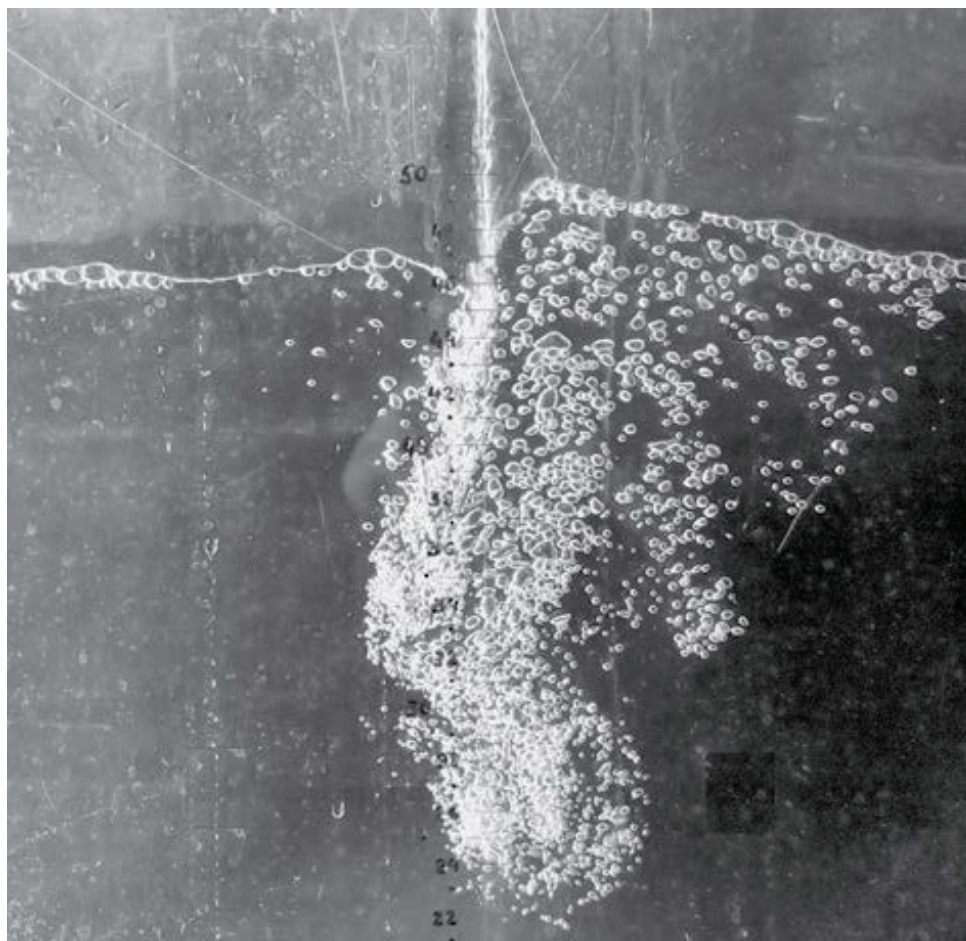


Рис. 1.2. Фотоснимок течения при проникании плоской струи с  $\delta = 0.2$  см при  $H = 15$  см и  $V = 5.2$  м/с.

Наиболее характерной особенностью течений, возникающих в жидкости, находящейся в узких каналах, является автоколебательный характер поведения затопленного участка струи. В основе возникновения такого режима лежит появление в какой-то момент времени случайного отличия в суммарных объемах пузырей, внедренных в жидкость по обеим сторонам затопленного участка струи, что приводит к разным уровням свободной поверхности и, следовательно, разным значениям разности гидростатической составляющей давления в жидкости, отклоняющей затопленный участок струи (рис. 1.2). При значительных скоростях



струи, когда разница уровней свободной поверхности достаточно велика, становится хорошо заметным отклонение также и лишь частично затопленного участка свободной струи (рис. 1.2), что еще более увеличивает амплитуду автоколебаний и способствует устойчивости такого режима.

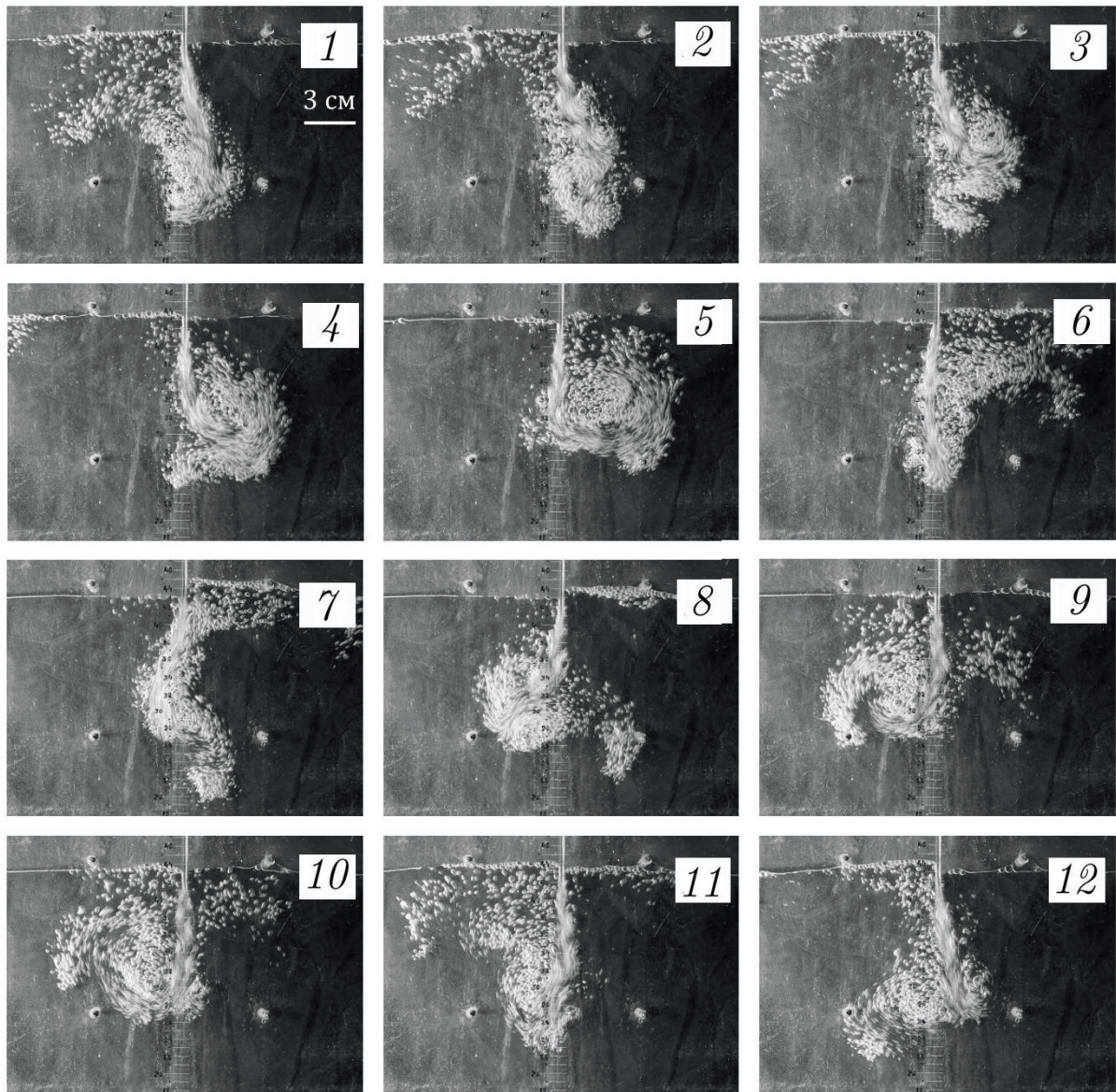


Рис. 1.3. Последовательность картин течения (1 – 12) за один период автоколебаний для плоской струи с  $\delta = 0.2$  см при  $l = 18$  см и  $V = 3.9$  м/с.

При автоколебательном режиме поведения затопленного участка струи наблюдаются весьма сложные режимы течения двухфазной среды. Представление о них дает показанная на рис. 1.3 последовательность кадров скоростной фотосъемки, полученная для струи с  $\delta = 0.2$  см при

$H = 18$  см и скорости  $V = 3.9$  м/с, на протяжении одного периода колебаний.

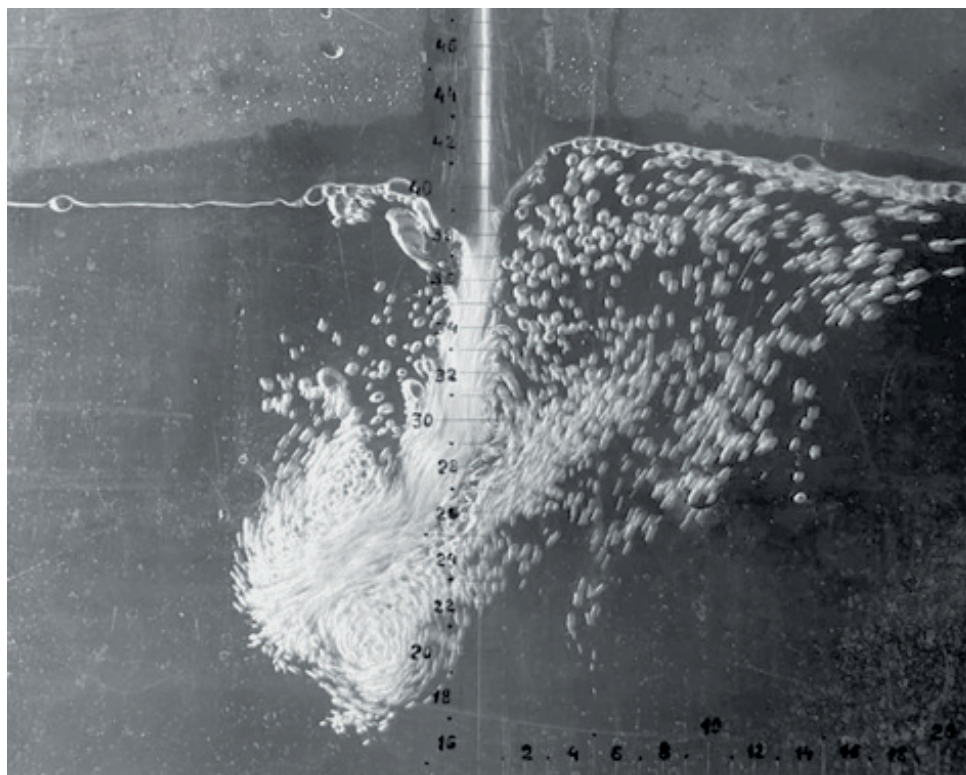


Рис. 1.4. Фотоснимок течения при проникании плоской струи с  $\delta = 0.2$  см при  $H = 22.5$  см и  $V = 6.8$  м/с.

При больших скоростях струи возрастает глубина проникания пузырей в жидкость, увеличивается амплитуда поперечного перемещения двухфазных областей, наблюдаются режимы с разветвлением затопленного участка газовой смеси (рис. 1.4).

Обращает на себя внимание факт рассогласования периодических процессов повышения уровней жидкости в окрестности струи и накопления объема пузырей с каждой из ее сторон. Как видно из рис. 1.4, моментам максимального уровня жидкости с одной из сторон соответствует минимальное число пузырей с этой стороны струи. Периоды этих двух процессов одинаковы.

Описываемый процесс возникновения автоколебательного режима представляет новый пример парадокса симметрии по терминологии Биркгофа, когда симметричная задача не обязательно имеет устойчивые сим-

метричные решения. Аналогичный этому парадокс был обнаружен [9] и исследован ранее в случае плоских затопленных фонтанов, когда через свободную поверхность жидкости проникают вертикальные затопленные струи, вызывающие генерацию в автоколебательном режиме поверхностных волн [11, 13, 14].

### **Экспериментальные зависимости.**

Создаваемые в описанной установке плоские струи, в отличие от осесимметричных, являются лишь относительно свободными из-за частичного контакта их на краях со стенками установки. Взаимодействие со стенками установки приводит к торможению струй в торцевых участках и к растеканию их по смачиваемым стенкам, т.е. вблизи стенок имеет место некоторое изменение формы сечения струи.

Проведенный анализ этих эффектов для струй разной толщины, неучет сжимаемости воздуха, оценка и апробация разных способов минимизации влияния этих факторов при проведении опытов заставили существенно ограничить число определяющих параметров задачи и диапазоны их значений. Принималось, что период автоколебаний

$$\tau = f(\delta, V, g, H, h, \nu),$$

где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

Исследование проводилось в следующих приведенных ниже диапазонах значений начальных толщин струй  $\delta$ , расстояний от сопла до свободной поверхности  $H$  и скоростей струй  $V$ : для  $\delta = 0.2$  см –  $6 \leq H \leq 15$  см,  $2 \leq V \leq 7.5$  м/с; для  $\delta = 0.3$  см –  $12 \leq H \leq 18$  см,  $2 \leq V \leq 8$  м/с; для  $\delta = 0.4$  см –  $12.5 \leq H \leq 18$  см,  $2 \leq V \leq 7$  м/с; для  $\delta = 0.5$  см –  $H = 15$  см,  $2 \leq V \leq 6.2$  м/с; для  $\delta = 0.6$  см –  $H = 15$  см,  $1.2 \leq V \leq 5.1$  м/с; для  $\delta = 0.7$  см –  $H = 15$  см,  $1.7 \leq V \leq 4.2$  м/с.

Из П-теоремы следует, что

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{h}{g}}} = \varphi \left( Fr, \frac{\delta}{h}, \frac{H}{h}, \frac{\nu}{g^{1/2}h^{3/2}} \right)$$

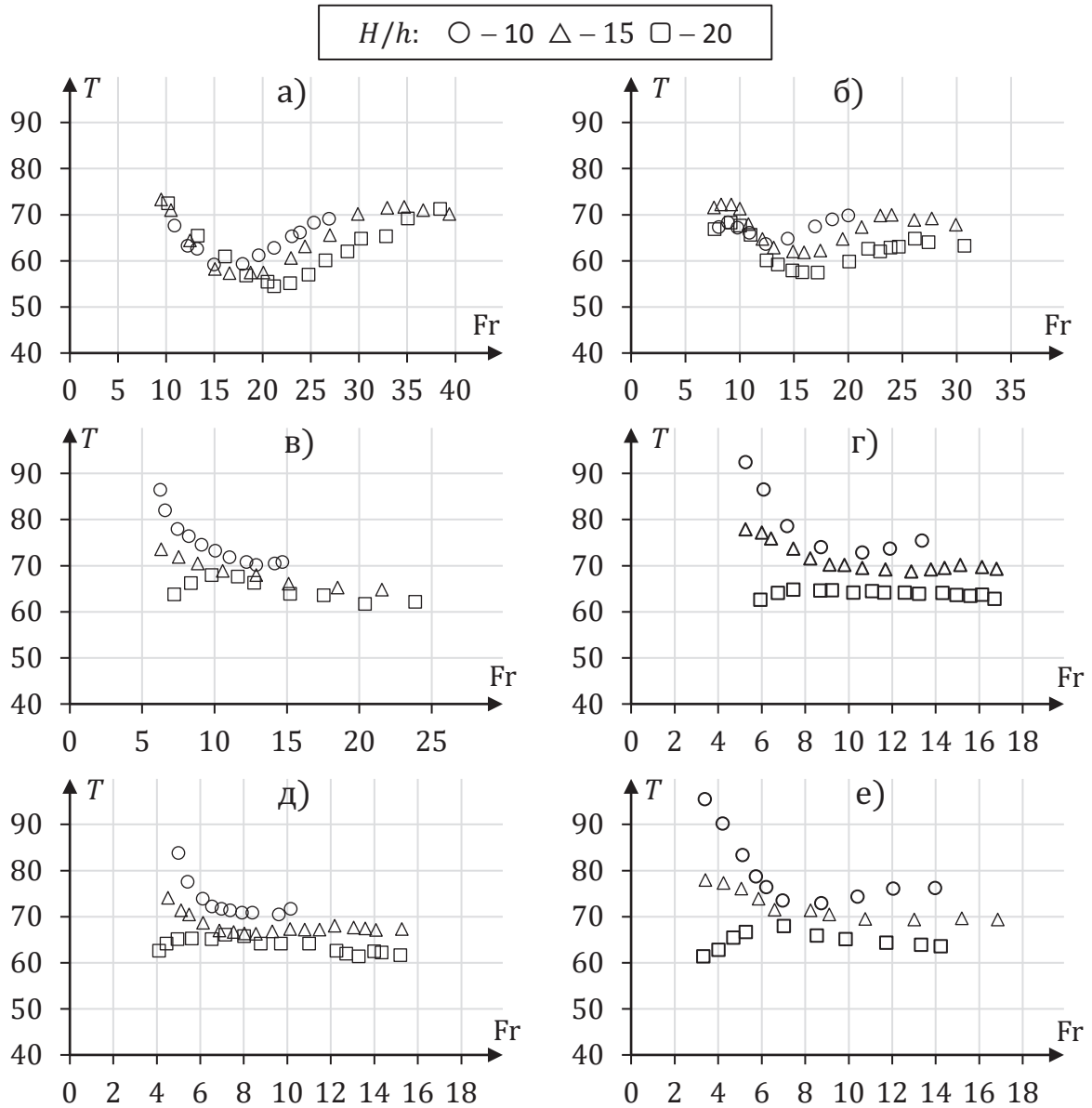


Рис. 1.5. Зависимости безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда для плоских струй при значениях параметров:  $\delta/h = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  и  $0.7$  (рис. а–е соответственно).

где  $Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$  - число Фруда.

Значения безразмерного периода автоколебаний, полученные в экспериментах при фиксированном значении последнего аргумента в этой формуле, приведены на рис. 1.5.

Для струй с  $\delta/h = 0.2$  и  $0.3$  с ростом числа  $Fr$  характерно плавное убывание безразмерного периода до значения  $T \approx 60$ , а затем плавное возрастание до определенного значения, начиная с которого период

практически не меняется и является близким к 65, что соответствует размерным значениям частоты автоколебаний  $\approx 0.5$  Гц. Для струй с  $\delta/h = 0.4 - 0.7$  вид зависимостей качественно меняется и существенно зависит от параметра  $H/h$ . Для  $H/h = 10$  период с ростом скорости струи достаточно быстро убывает, затем начинает плавно возрастать. В случае  $H/h = 15$  наблюдается плавное убывание периода до того же самого значения  $T = 65$ , что и для струй с  $\delta/h = 0.2$  и  $0.3$ . Для случая же  $H/h = 20$  период плавно возрастает и с некоторого значения числа Фруда практически не меняется и оказывается близким к  $T \approx 65$ .

Такое поведение зависимостей  $T = T(Fr)$  может быть связано с изменением структуры свободной струи в процессе ее движения. При движении ее вдоль боковых стенок имеет место растекание струи по стенкам из-за смачиваемости, вследствие силы тяжести толщина струи в точке внедрения становится меньше, чем на выходе из сопла. Также свой вклад вносит неустойчивость поверхности свободной струи. Всё это приводит к неизбежной деформации структуры струи в точке ее проникания под свободную поверхность, а это, в свою очередь, является определяющим фактором, влияющим на процесс захвата пузырьков свободной струей. Чем меньше параметр  $H$ , тем меньше возмущение струи в точке проникания ее под свободную поверхность, вследствие этого, струя внедряет небольшое количество относительно крупных пузырей. Их небольшое количество вызывает малый подъём уровня жидкости, тем самым время перемещения затопленной части струи возрастает, это поведение характерно для всех струй с различными толщинами  $\delta$  при расстоянии  $H = 10$  см. Для струй с  $\delta/h = 0.4 - 0.7$  с увеличением  $H$  период при начальных  $Fr$  становится меньше из-за утоньшения струи в месте внедрения, соответственно уменьшается глубина проникания и амплитуда колебаний затопленной части струи.



## 1.2. Проникание вертикальных осесимметричных струй

Опыты проводились на описанной выше установке с круглыми струями с относительными диаметрами  $d/h = 0.3, 0.5$  и  $0.7$ , для значений относительных длин свободных участков струй  $H/h = 10, 15, 20$ , при числах Фруда  $Fr = V/\sqrt{gh}$ , менявшихся от 5 до 40.

На рис. 1.6 показан фотоснимок одного из течений, характерных для проникания круглых струй ( $d/h = 0.5, H/h = 15, V = 3.2$  м/с).

Самой существенной особенностью, отличающей наблюдаемые картины течения от случая плоских струй, является интенсивное обтекание свободного и затопленного участков круглой струи потоком жидкости со стороны с более высоким уровнем свободной поверхности [30, 31].

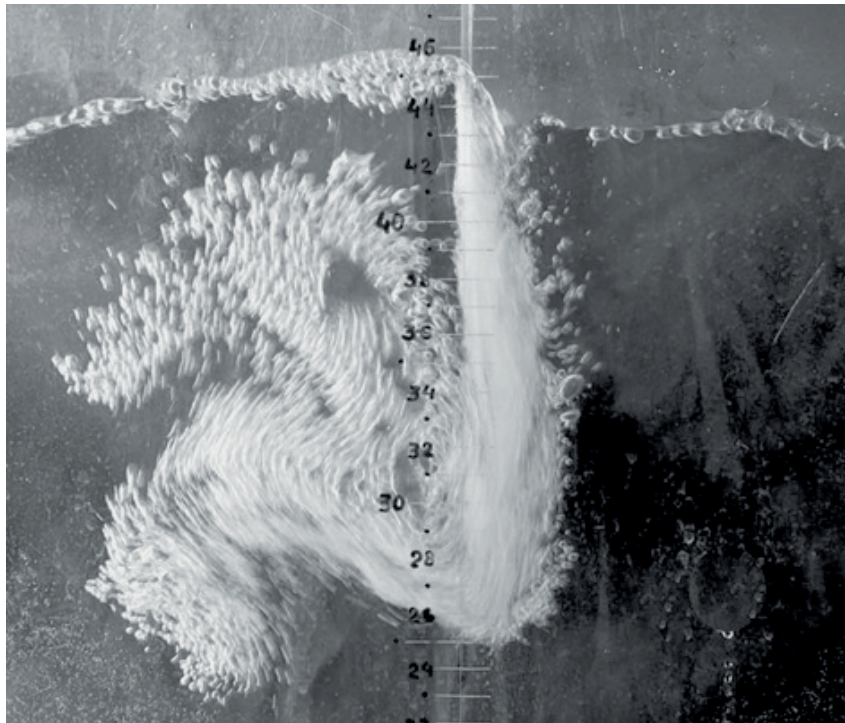


Рис. 1.6. Фотоснимок течения при проникании осесимметричной струи с  $d = 0.5$  см при  $H = 15$  см и  $V = 3.2$  м/с.

Опыты обнаружили качественное отличие в исследованных диапазонах значений определяющих параметров вида зависимостей безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда для плоских и осесимметричных струй: если для плоских струй в широком диапазоне значений

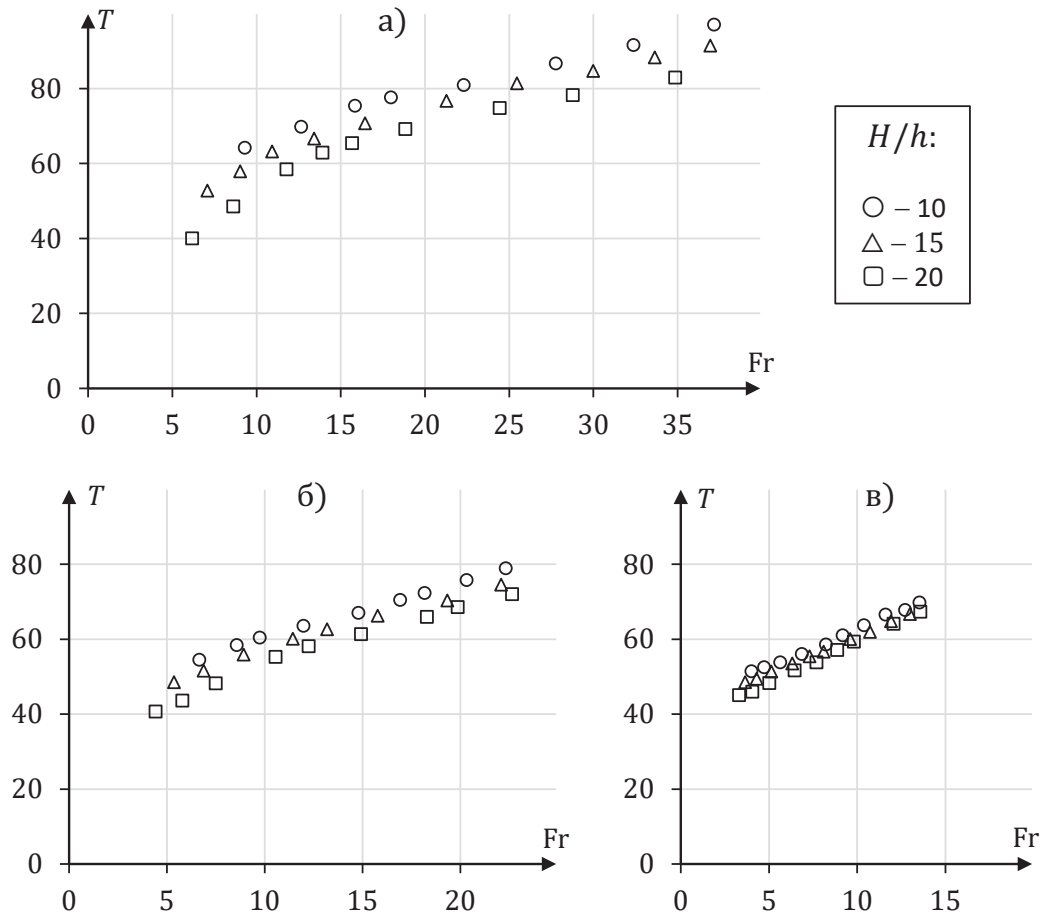


Рис. 1.7. Зависимости безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда для круглых струй разного относительного диаметра  $d/h = 0.3, 0.5, 0.7$  (а-в).

определяющих параметров имеет место с ростом скорости уменьшение периода автоколебаний до определенной величины, то в случае круглых струй, наоборот, наблюдается постоянный рост периода, т.е. уменьшение частоты автоколебаний (рис. 1.7). Этот эффект может быть связан с указанным выше отличием течений в окрестности струи. Если плоские струи занимают все пространство между стенками, то круглые - лишь какую-то ее часть. В связи с этим, для плоских струй перепад давлений действует на большую поверхность, чем у круглых, и отклоняет затопленную часть существенно быстрее. Этим и объясняется качественное различие зависимостей периода автоколебаний для плоских и круглых струй с ростом числа Фруда.

### 1.3. Особенности проникания плоских и осесимметричных струй в каналах разной протяженности

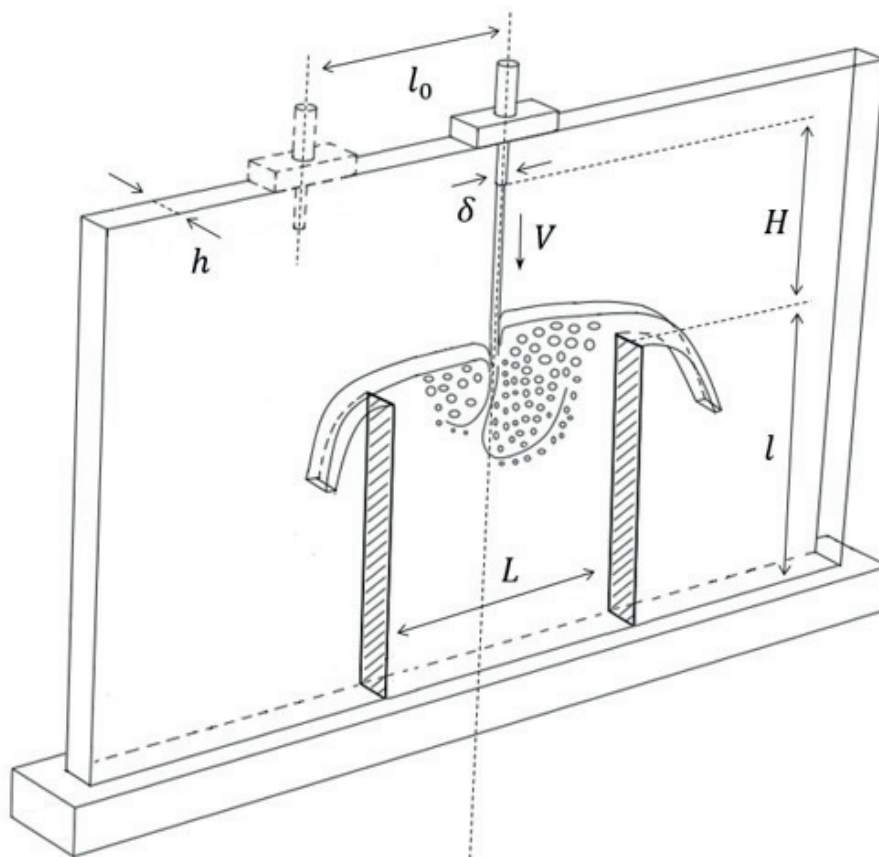


Рис. 1.8. Схема установки.

В настоящем разделе представлены результаты экспериментальных исследований процесса проникания плоских и круглых вертикальных струй в установках различной протяженности [24, 36]. Опыты проводились на описанной выше установке, между боковыми стенками которой устанавливались водосливы на расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 1.8). Кроме того, насадки могли располагаться на разичном удалении  $l_0$  от центра установки (рис. 1.8).

Одна из существенных особенностей процесса проникания струй в жидкость была выявлена при нахождении вида зависимостей периода автоколебаний от числа Фруда при разных значениях  $l_0/h$ .

Опыты, проведенные на установке с  $L/h = 102$  и различными значениями  $l_0/h$ , показали, что существует достаточно широкий диапазон

значений числа Фруда  $6 \leq Fr \leq 26$ , в котором значение периода автоколебаний при разных положениях насадка (разных  $l_0$ ) остается практически одинаковым для каждого фиксированного значения числа  $Fr$ .

На рис. 1.9 представлены зависимости  $T = T(Fr)$  для плоских струй с  $\delta/h = 0.3$ ,  $H/h = 10$  при трех различных значениях  $l_0/h = 0, 15, 30$ . Эти зависимости оказываются близкими, заметное отличие наблюдается только при  $Fr \approx 30$  и максимальном удалении  $l_0/h = 30$  сопла от плоскости симметрии установки. В этом случае увеличение периода  $T$  может быть объяснено тем, что сопло расположено достаточно близко к водосливу и при высокой скорости струи происходит взаимодействие затопленной ее части со стенкой водослива. При этом образуется интенсивное циркуляционное течение, влияющее на поведение затопленного участка струи.

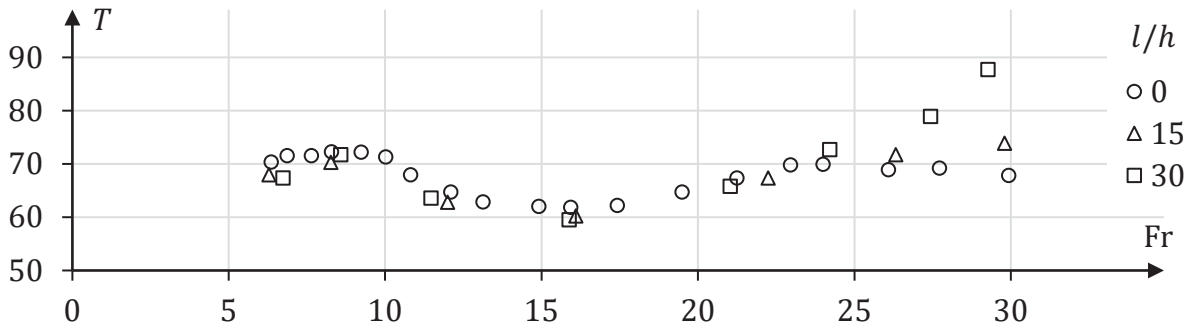


Рис. 1.9. Зависимости периода автоколебаний плоской струи при  $\delta/h = 0.3$  и  $H/h = 10$  для разных расположений сопла  $l/h$ .

Таким образом, можно сделать важный вывод о высокой степени локализации изучаемого эффекта возникновения автоколебаний. Аналогичные опыты с другими значениями  $H/h$  подтверждают слабое влияние параметра  $l_0/h$  и для плоских, и для круглых струй.

Еще одна интересная особенность изучаемых течений была выявлена при испытаниях в относительно коротких каналах с  $L/h \leq 50$ , при расположении насадка в плоскости симметрии установки ( $l_0 = 0$ ). Было обнаружено, что с ростом числа Фруда начиная с некоторых его значений происходит заметный рост периода автоколебаний как для плоских,

так и для круглых струй.

На рис. 1.10 приведены зависимости  $T = T(Fr)$  для плоских струй в канале с  $L/h = 20$ . Полученные зависимости качественно отличаются от описанного выше случая относительно длинного канала — для  $L/h = 102$  с ростом  $Fr$  период  $T$  оказывался близким к некоторому постоянному значению.

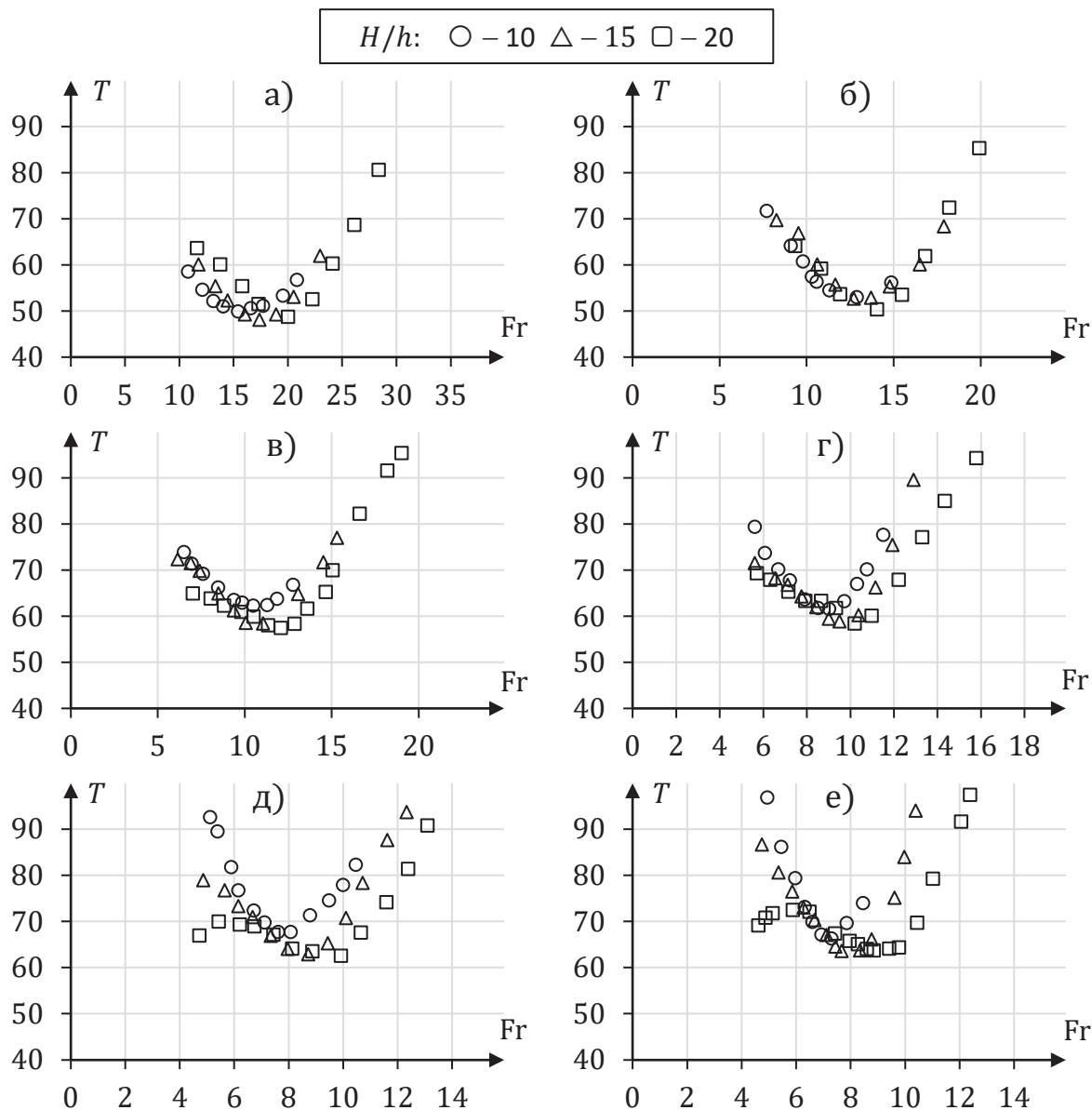


Рис. 1.10. Зависимости безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда для плоских струй в канале с  $L/h = 20$ : а) - е)  $\delta/h = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  и  $0.7$ .

Существенный рост периода колебаний с увеличением числа Фруда вызвано периодическим формированием областей с интенсивным вра-

щением жидкости вблизи стенок водосливов после ударов о них и расщеплением затопленного участка струи. Низкое давление внутри таких циркуляционных зон снижет поперечный перепад давления, который отклоняет затопленный участок струи в противоположную сторону, что и увеличивает период автоколебаний  $T$ .



Рис. 1.11. Режим с циркуляционной зоной.  $Fr = 16, L/h = 40, \delta/h = 0.5$

На рис. 1.11 показан фрагмент такого течения при проникании в короткий канал ( $L/h = 40$ ) плоской струи с  $\delta/h = 0.5$  при  $H/h = 15$  и  $Fr = 16$ , зафиксированный вскоре после удара затопленного участка о стенку водослива и начала формирования циркуляционной зоны. С дальнейшим ростом скорости такая динамика течения приводит сначала к периодическому прилипанию струи к стенкам, а затем к нерегулярным автоколебаниям. При некотором значении скорости струя достигает дна

и после ряда ее случайных колебаний они полностью прекращаются.

По-видимому, описываемый эффект мог бы наблюдаться в каналах любой протяженности, если бы при больших скоростях струи из-за наличия в установке достаточной глубины жидкости не возникал удар затопленной струи о дно установки, как это происходило в случае  $L/h = 102$ . Не исключено, что всегда с увеличением скорости струи период регулярных автоколебаний плоских струй в таких каналах при соответствующих длинах свободного участка струй сначала убывает, а затем снова возрастает.

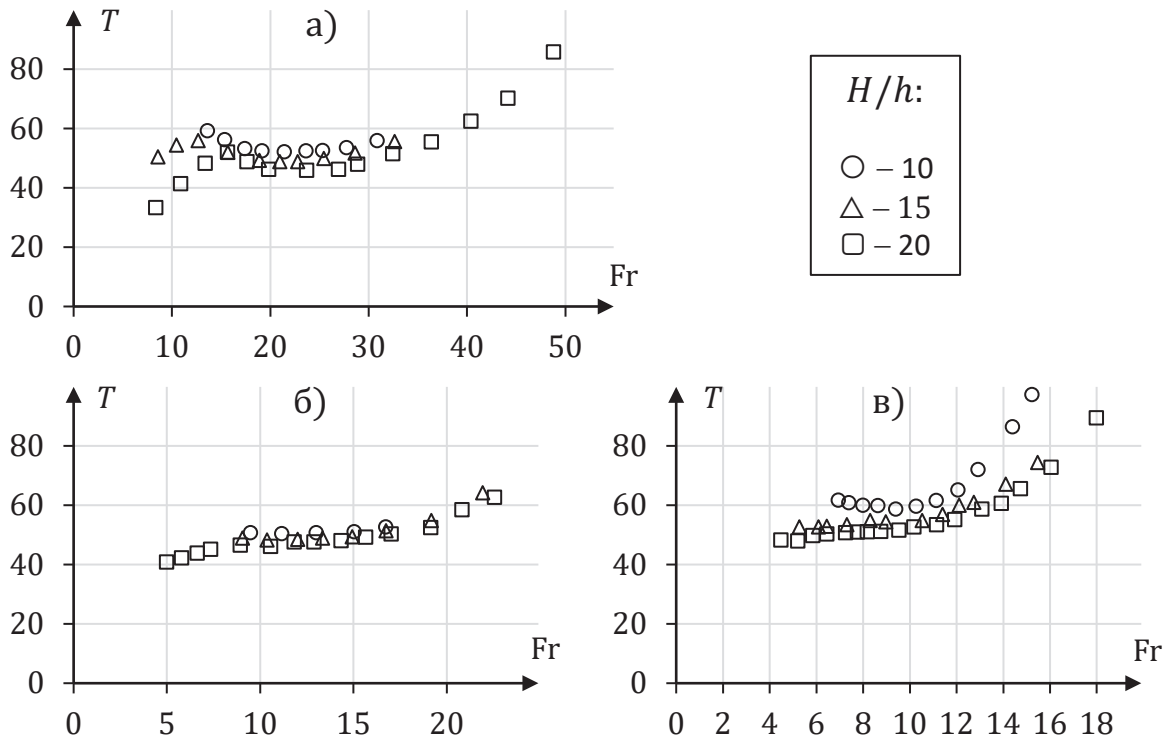


Рис. 1.12. Зависимости безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда для круглых струй в канале с  $L/h = 20$ : а) - в) -  $d/h = 0.3, 0.5$  и  $0.7$ .

Для круглых струй в относительно коротких каналах можно наблюдать ту же тенденцию к резкому возрастанию периода с увеличением скорости струи. На рисунке 1.12 показаны зависимости  $T = T(Fr)$ , полученные для круглых струй в опытах с  $L/h = 20$  и различными  $d/h$ . Следует отметить, что указанный рост периода менее выражен по сравнению со случаем плоских струй.

Для оценки влияния параметра  $L/h$  были также выполнена серия опытов с круглыми струями при фиксированных  $d/h = 0.5$ ,  $H/h = 20$  и различных  $L/h = 5, 10, 15, 20, 30, 50$ .

Оказалось, что в канале с  $L/h = 5$  автоколебания не существуют ни при каком  $Fr$ . Область получается настолько малой, что струя сразу "прилипает" к стенке водослива. При  $L/h = 10$  автоколебания существуют, но только для узкого диапазона чисел Фруда  $4 < Fr < 11$ . При дальнейшем увеличении параметра  $L/h$ , диапазон чисел Фруда расширяется, а при конечных числах  $Fr$  наблюдается характерный резкий рост периода. В итоге, начиная с  $L/h = 50$  размеры канала для всего диапазона чисел Фруда не сказываются на виде зависимости, качественно и количественно повторяя те, что были получены в большом канале с  $L/h = 102$  (рис. 1.13).

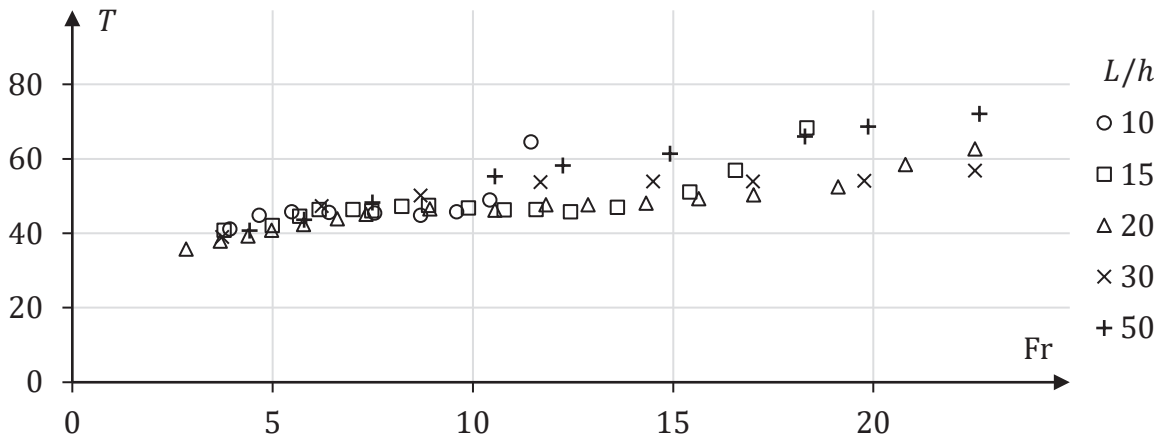


Рис. 1.13. Зависимости безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда для круглых струй с  $d/h = 0.5$ ,  $H/h = 20$  и разными размерами канала  $L/h$ .

Отметим, что в каналах с относительно малым продольным размером  $L/h$  прекращение колебаний (при достижении числом Фруда некоторого максимального значения) происходит по одной из причин, описанных ниже. В ряде случаев наблюдалась уже упоминавшаяся ранее ситуация, когда в области между струей и стенкой водослива образуется вихрь, прижимающий затопленную часть струи к стенке и препятствующий ее поперечному перемещению. Характерный вид такого течения показан на



фотоснимке рис. 1.14, *а*. Возможно также образование двух почти стационарных вихрей, один из которых расположен возле дна установки, а второй — у стенки водослива (рис. 1.14, *б*). Течения вида *а*, *б* возникали только при относительно небольших размерах канала  $L/h \leq 20$ . Зачастую прекращения автоколебаний сопровождалось формированием двух вихрей, расположенных по обеим сторонам затопленного участка струи. Вихри возникали при взаимодействии затопленной струи с дном установки (рис. 1.14, *в*).

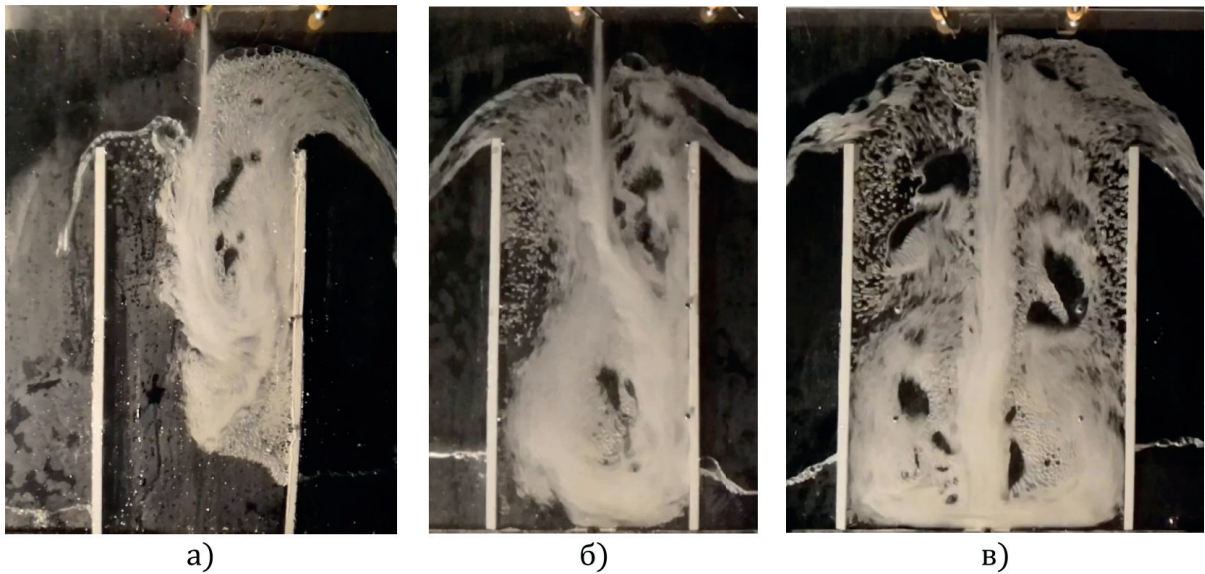


Рис. 1.14. Фотоснимки течения для  $d/h = 0.5$  и  $H/h = 15$ : а)  $L/h = 20$ ,  $Fr \approx 25$ , б)  $L/h = 20$ ,  $Fr \approx 30$ , в)  $L/h = 30$ ,  $Fr \approx 40$ .

#### 1.4. Проникание двух вертикальных свободных струй

Настоящий раздел посвящен изучению процесса взаимодействия пары вертикальных плоских свободных струй при их проникании через свободную поверхность жидкости в относительно узких каналах [35]. Экспериментальная установка схематично изображена рис. 1.15.

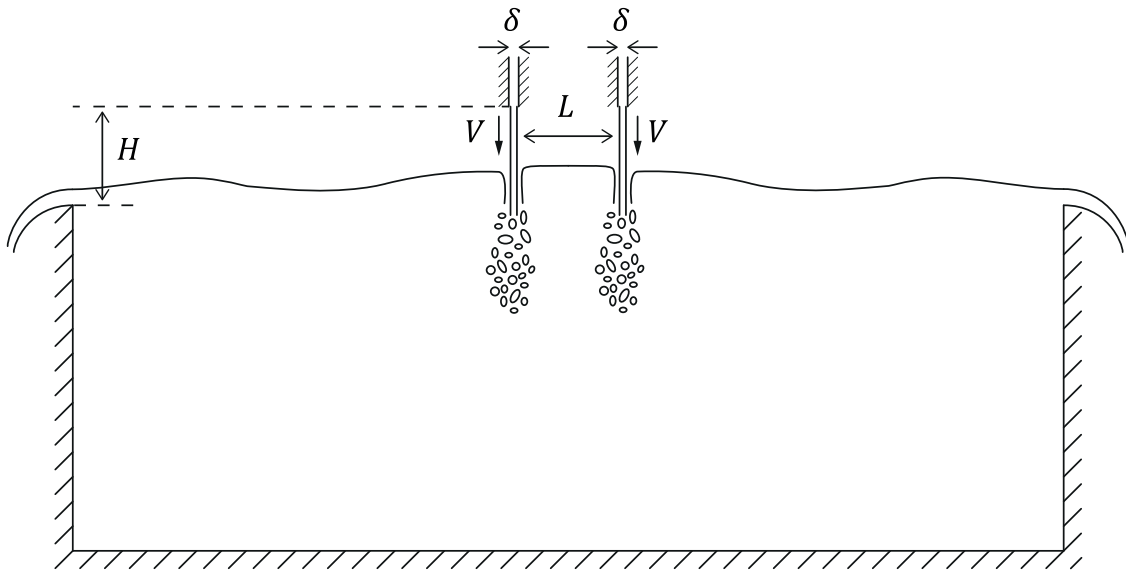


Рис. 1.15. Схема установки с системой двух вертикальных свободных струй.

В верхней части устанавливались два одинаковых сопла прямоугольного сечения с шириной  $\delta$ . Насадки располагались симметрично относительно центра установки, расстояние между ними равнялось  $L$ . Скорости  $V$  обеих струй были одинаковы. Расстояние от начального уровня жидкости в установке до выходного сечения каналов, подающих струи, было фиксировано и равнялось  $H = 10$  см. Для анализа результатов использовались безразмерные параметры  $l = L/h$  и число Фруда  $Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$ , где  $h$  – расстояние между боковыми стенками установки.

Опыты проводились для следующих диапазонов определяющих параметров:  $5 \leq Fr \leq 16$  и  $1 \leq l \leq 50$ . Данный выбор был обусловлен конечными размерами установки.

В экспериментах были обнаружены четыре качественно отличающихся

ся друг от друга режима течений, существующих для весьма широкого диапазона значений чисел Фруда. Далее приведем описание этих режимов и укажем диапазоны значений  $l$ , при которых они существуют, для случая  $Fr = 10$ .

Один из этих режимов (режим А) соответствует относительно близкому расположению струй  $0 < l < 10$ . В этом случае возникает объединение затопленных участков струй и автоколебания их как единого целого. На рис. 1.16 показаны фотоснимки течений, соответствующих режиму А, в разные моменты времени для  $l = 3$  и  $l = 8$ . В режиме А некоторое количество пузырей воздуха всплывает в межструйном пространстве, но большая часть уносится во внешнюю область, тем самым поддерживая автоколебательный процесс.

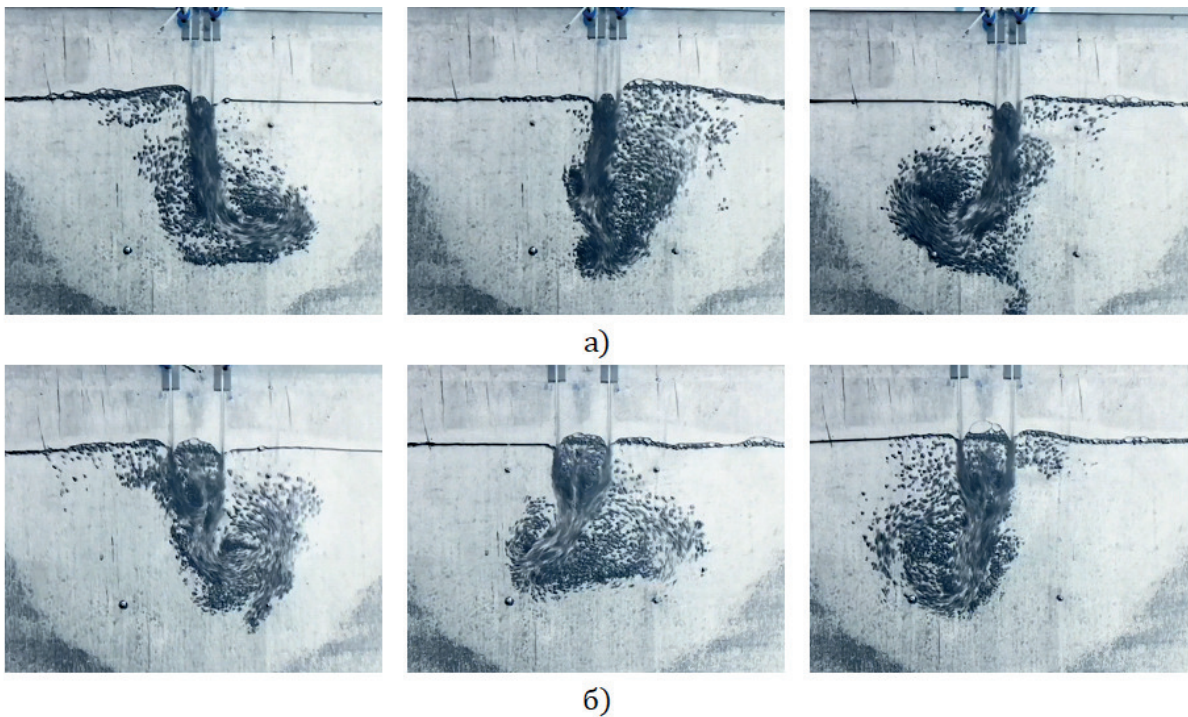


Рис. 1.16. Фотоснимки течения для а)  $l = 3$ ,  $Fr = 10$ , б)  $l = 7$ ,  $Fr = 10$ .

С дальнейшим увеличением расстояния между струями начиная с  $l \approx 10$  регулярные автоколебания прекращаются, наблюдается сложное хаотичное поведение подводных участков струй. Такой режим течений, названный режимом В, существует для диапазона значений  $10 < l < 18$ .

При  $18 < l < 25$  имеет место режим  $C$  с регулярными автоколебаниями, качественно отличающийся от описанного выше режима  $A$ . В этом режиме происходят согласованные колебания с взаимным соударением и отталкиванием затопленных участков струй (рис. 1.17).



Рис. 1.17. Фотоснимки течения для  $l = 20$ ,  $Fr = 10$ .

В режиме  $C$  в результате соударения газонасыщенных областей друг с другом в межструйном пространстве наблюдается существенный подъем уровня жидкости, вызванный всплытием суммарного объема пузырьков от обеих струй, что приводит к одновременному отклонению струй в противоположные стороны. Далее всплывающие уже с внешней стороны пузыри обеспечивают изменение уровня жидкости, способствующее смещению струй навстречу друг к другу. В дальнейшем процесс повторяется.

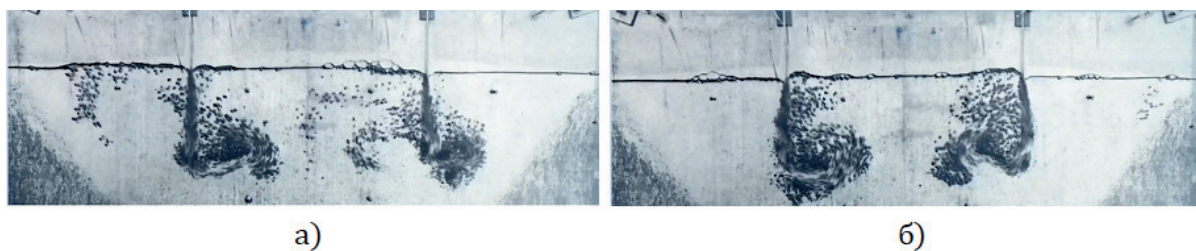


Рис. 1.18. Фотоснимки течения для  $l = 38$ ,  $Fr = 10$ .

При увеличении  $l$  начиная с некоторого его значения, которое зависит от числа Фруда, режим  $C$  перестает существовать и возникает режим  $D$ , в котором наблюдаются независимые автоколебания струй с одинаковыми значениями периода. Отсутствие влияния струй друг на друга



объясняется тем, что при значительном удалении струй друг от друга локальное повышение уровня жидкости от одной струи мало сказывается на повышении общего уровня в межструйном пространстве. На рис. 1.18 приведены фотоснимки течения в некоторый момент времени для случая  $l = 38$ .

При весьма малых числах Фруда, например,  $Fr = 5$ , наблюдаются только относящиеся к режиму *A* автоколебания, существующие при  $1 < l < 8$ . При большем расстоянии  $l$  каждая из струй захватывает недостаточное для возникновения режимов *C* и *D* количество воздуха, автоколебания не возникают.

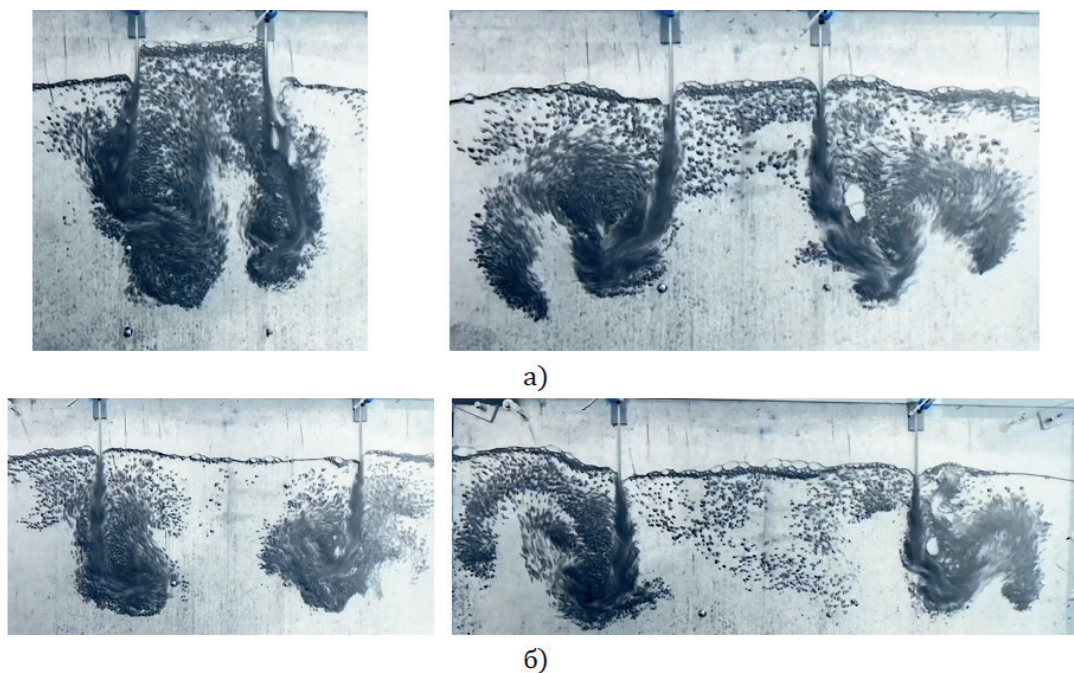


Рис. 1.19. Фотоснимки течения для а)  $l = 18$ ,  $Fr = 16$ , б)  $l = 50$ ,  $Fr = 16$ .

Для течений с максимальным из рассмотренных значений  $Fr = 16$  оказалось, что режим *D* не существует, и вплоть до  $l = 50$  имеет место режим взаимодействия *C* (рис. 1.19). При достаточно большом значении скорости струи эжектируют значительное количество воздушных пузырей, и при их всплытии в межструйном пространстве происходит существенный подъем уровня жидкости, что приводит к согласованным колебаниям.

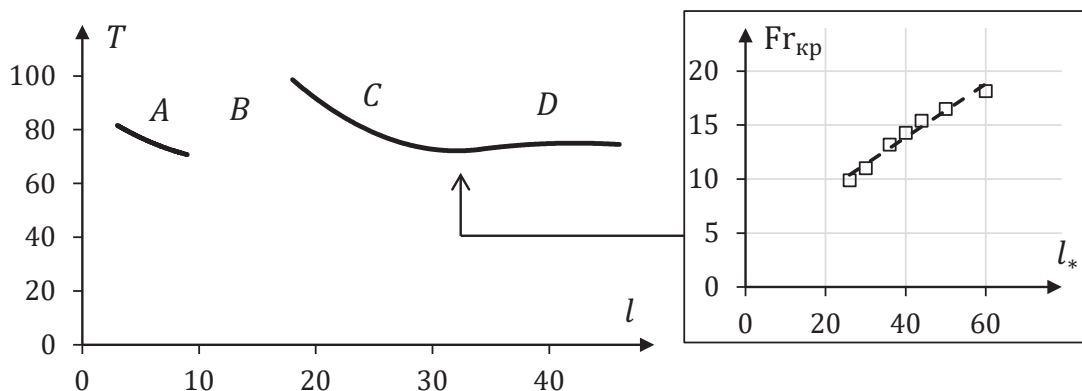


Рис. 1.20 Общий вид зависимостей  $T(l)$ .

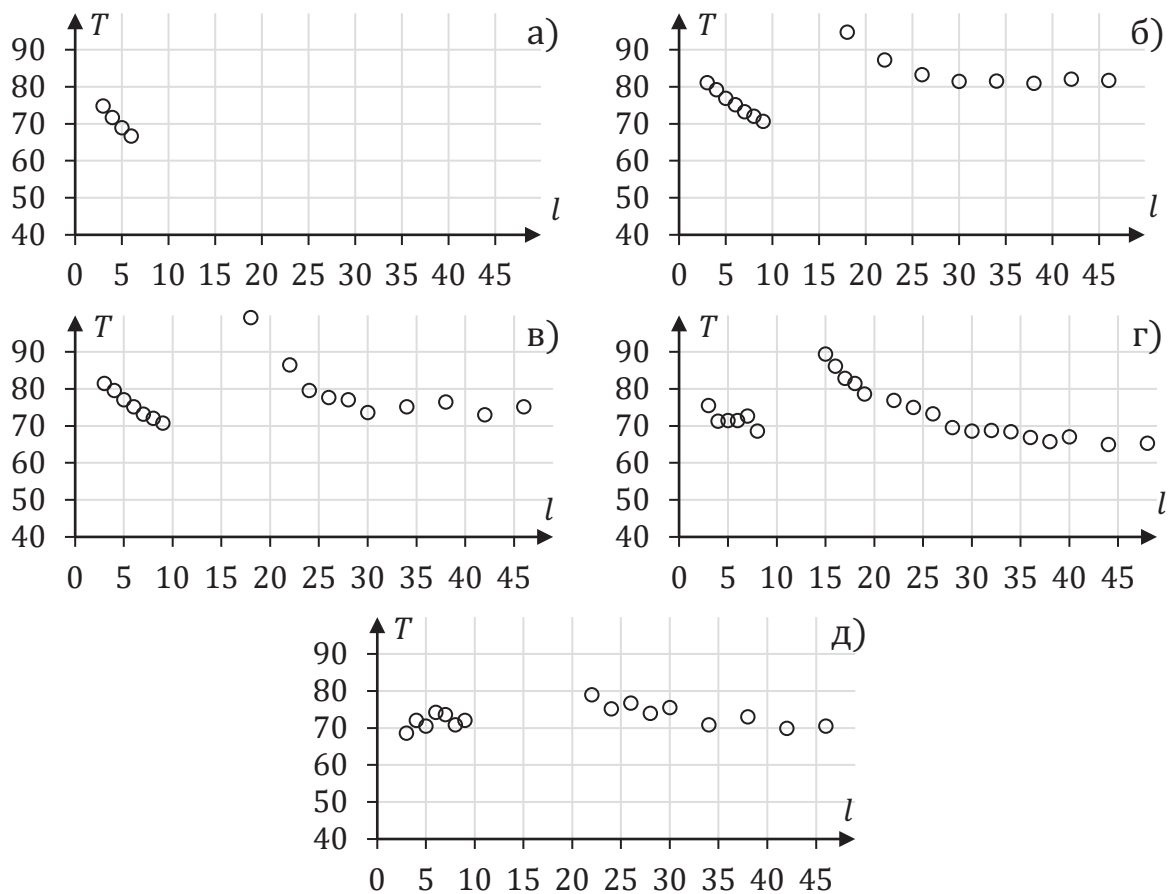


Рис. 1.21. Зависимости  $T(l)$  для разных чисел  $Fr$ : а) - д) –  $Fr = 5, 8, 10, 12$  и  $16$ .

Для большей части рассмотренного диапазона изменения числа Фруда зависимости безразмерного периода  $T = V/\sqrt{gh}$  от параметра  $l$  (при фиксированном значении числа Фруда) качественно имеют вид, показанный на рис. 1.20. На каждом из участков  $A$  и  $C$  происходит плавное убывание периода колебаний с ростом  $l$ . Установлено, что смена режи-

мов  $C$  и  $D$  не сопровождается резким изменением значения периода. Значение  $l = l_*$ , определяющее границу режимов  $C$  и  $D$ , растет с увеличением числа Фруда. Оказалось, что эта зависимость близка к линейной (рис. 1.20).

Экспериментальные зависимости  $T(l)$  при фиксированных  $Fr = 5, 8, 10, 12, 16$  приведены на рис. 1.21. Отметим далее некоторые особенности этих зависимостей, связанные с изменением числа Фруда.

Как видно из графиков на рис. 1.21, в диапазонах значений  $l$ , соответствующих режиму взаимодействия  $A$ , поведение зависимостей может качественно отличаться для разных  $Fr$ . Если для  $Fr \leq 10$  имеет место монотонное убывание периода  $T$ , то для  $Fr = 12$  он практически не меняется, а для  $Fr = 16$  наблюдается слабое возрастание.

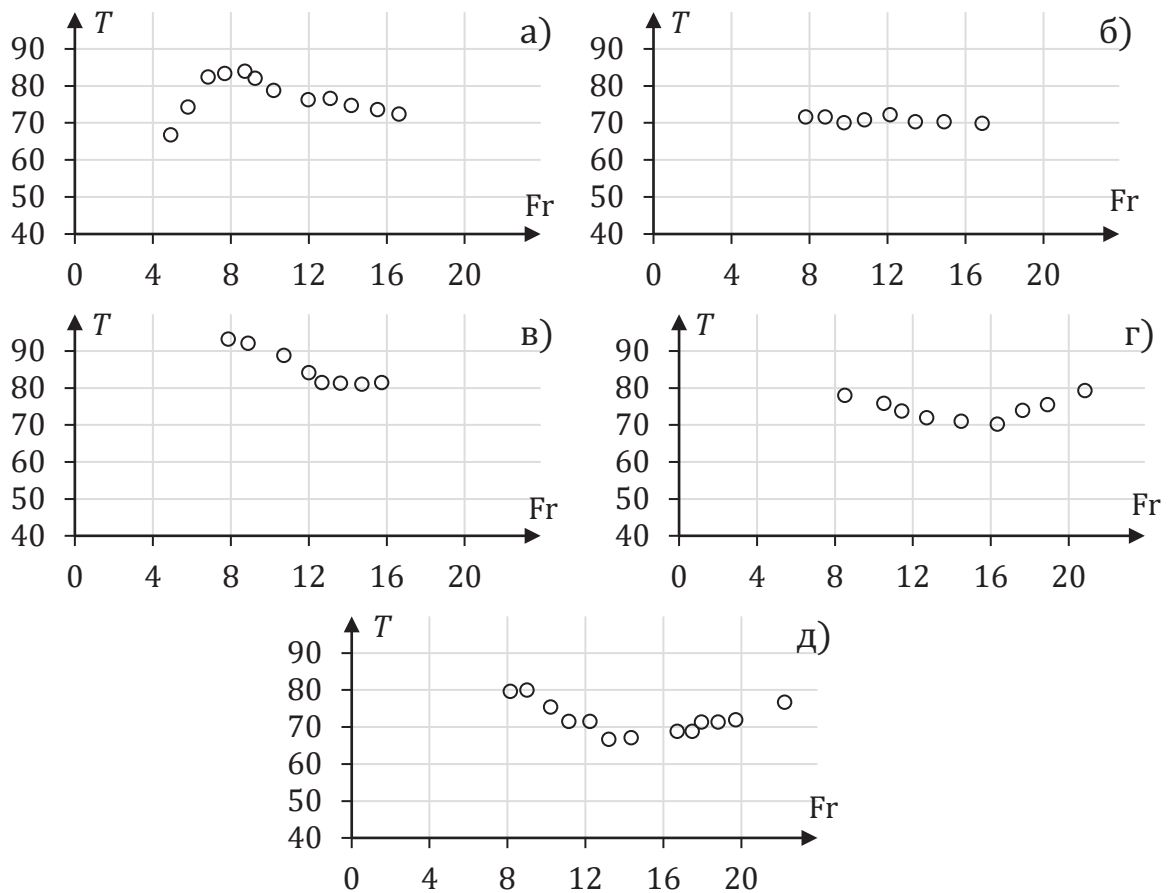


Рис. 1.22. Зависимости  $T(Fr)$  для разных значений параметра  $l$ : а) - д) –  $l = 3, 8, 18, 30$  и  $40$ .

Интервал значений  $l$ , соответствующий течениям вида  $B$ , несколько отличается для различных  $Fr$ . Этот интервал имеет примерно одинаковую длину для всех  $Fr \geq 8$ , за исключением значения  $Fr = 16$ , при котором происходит его расширение.

Участки зависимостей, относящиеся к режиму взаимодействия типа  $C$ , всегда представляют собой плавно убывающие кривые с выходом  $T$  на некоторое постоянное значение, индивидуальное для каждого фиксированного  $Fr$ .

На рис. 1.22 показаны зависимости  $T(Fr)$  для нескольких фиксированных  $l$ . При  $l = 3$ , т.е. в случае достаточно малого удаления струй друг от друга, с ростом  $Fr$  сначала наблюдается возрастание периода  $T$ , а потом выход на постоянное значение. Такое же поведение имели зависимости, полученные ранее для одинарной струи. Для  $l = 8$  с ростом  $Fr$  период остается практически неизменным, а для остальных случаев  $l = 18, 30, 40$  период сначала незначительно убывал, затем так же плавно возрастал.



## ГЛАВА 2

### ПРОНИКАНИЕ ЗАТОПЛЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТРУЙ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ\*

В настоящей главе представлены результаты экспериментального и численного исследования проникания через свободную поверхность вертикальных затопленных струй жидкости. Изучен процесс фонтанирования из-под свободной поверхности затопленных струй с круговым начальным сечением в относительно узких каналах. Исследовано взаимодействие пары плоских вертикальных затопленных струй, проникающих через свободную поверхность жидкости в относительно узких каналах. Проведено численное моделирование процесса фонтанирования затопленных струй, подаваемых из сопла прямоугольной формы в неограниченном объеме жидкости, т.е. в случае отсутствия боковых стенок, ограничивающих возможность перемещения жидкости в поперечном направлении.

#### **2.1. Экспериментальное исследование фонтанирования осесимметричных затопленных струй в относительно узких каналах**

Ранее в работах В.П. Карликова, С.Л. Толоконникова и О.В. Трушиной [8–11, 13] был исследован новый класс течений однородной тяжелой жидкости, возникающих при проникании плоской вертикальной струи в слой жидкости, ограниченный с одной стороны горизонтальным дном, а с другой — свободной поверхностью. Эксперименты [8] проводились на установке, состоящей из двух параллельных прозрачных стенок с рассто-

---

\* При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [22, 23, 27–29, 32–34, 39]

янием между ними  $h$ , установленных на плоском основании длиной  $L$ , в центральной части которого размещался вертикальный канал прямоугольного поперечного сечения, через который осуществлялась подача воды. Начальный уровень жидкости в установке поддерживался расположенными на краях основания водосливами высотой  $H$ .

В экспериментах [8] было обнаружено, что в широких диапазонах значений определяющих параметров такие течения не являются стационарными и симметричными, возникают регулярные автоколебательные режимы поперечного перемещения жидкости над каналом. В работах [8–11, 13] описан механизм возникновения автоколебаний, проведена классификация и указаны границы существования всех возможных автоколебательных режимов фонтанирования, построены экспериментальные, численные и приближенные теоретические зависимости безразмерного периода автоколебаний от основных определяющих параметров.

В настоящем разделе содержатся результаты экспериментального и численного исследования процесса фонтанирования осесимметричных струй из-под свободной поверхности тяжелой жидкости. Использовалась экспериментальная установка, аналогичная описанной выше. В отличие от плоского случая, в центральной ее части располагались насадки круглого сечения с диаметром  $d$ , с помощью которых создавались вертикальные струи. Здесь и в дальнейшем струи называются осесимметричными, но следует отметить, что таковыми они являются лишь в окрестности выхода из сопла, а в дальнейшем осевая симметрия течения теряется.

Длина основания установки  $L = 102$  см, расстояние между боковыми стенками  $h = 1$  см. Эксперименты проводились с насадками, имеющими диаметр  $d = 0.1, 0.3$  и  $0.5$  см. Высота водосливов менялась в диапазоне  $1 \leq H \leq 15$  см, а начальная скорость  $v_0$  истечения струй в диапазоне  $0 < v_0 \leq 10000$  см/с.

Эксперименты показали, что, как и в случае плоских струй, в весьма широком диапазоне изменения определяющих параметров режимы

фонтанирования носят выраженный автоколебательный характер.

Будем считать, что период установившихся автоколебаний  $\tau$  зависит от следующих определяющих параметров:

$$\tau = f(v_0, d, H, h, L, g, \rho, \mu),$$

где  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho$  — плотность жидкости.

С использованием П-теоремы эту зависимость можно представить в виде:

$$T = \tau \sqrt{\frac{g}{H}} = \varphi \left( \frac{v_0}{\sqrt{gH}}, \frac{d}{h}, \frac{H}{h}, \frac{L}{h}, \frac{\mu}{\rho \sqrt{gh^3}} \right).$$

Переменными аргументами здесь являются число Фруда  $Fr = v_0/\sqrt{gH}$ , относительный начальный диаметр струи  $d/h$  и ее относительное начальное затопление  $p = H/h$ . Остальные два безразмерных параметра в опытах не менялись.

Опишем далее результаты экспериментов для насадка с  $d = 0.1$  см в диапазоне скоростей  $0 < v_0 \leq 10000$  см/с.

В диапазоне  $1 \leq p \leq 2.5$  для небольших значений  $v_0$  течения являются стационарными или квазистационарными. По обеим сторонам затопленного участка струи возникают симметричные циркуляционные зоны с различным направлением вращения. Над выходным сечением насадка образуется возвышение свободной поверхности, которое с ростом скорости струи увеличивается в размерах. На границах этого возвышения в местах сопряжения с соседними участками свободной поверхности возникают угловые точки. Дальнейший рост скорости приводит к резкой перестройке течения и переходу к нерегулярным автоколебательным режимам фонтанирования. Очевидно, что так же как и для плоского случая возникновение и существование автоколебаний связано появлением в окрестности затопленного участка струи периодически меняющихся направление на противоположное поперечных перепадов давления.

При  $p = 3$  с ростом скорости сначала возникают аналогичные описанным стационарные и квазистационарные режимы течений, затем начинаются автоколебания, регулярность которых лишь временами нарушается за счет многократного кратковременного прорыва высокоскоростной струи через узкий слой жидкости в окрестности насадка. Эти автоколебательные режимы, называемые в дальнейшем квазирегулярными, продолжают существовать до определенного значения скорости струи, а затем исчезают. Существование такого типа автоколебательных режимов проникания затопленных струй через свободную поверхность жидкости обнаружено впервые. При  $p = 4$  динамика развития течения аналогична случаю  $p = 3$ , но возникающие квазирегулярные колебания существуют до больших скоростей струи.

В диапазоне  $5 \leq p \leq 15$  после возникновения описанных выше стационарных и квазистационарных режимов течения начиная с некоторой скорости возникают уже регулярные поперечные автоколебания, которые существуют вплоть до допускаемых установкой значений высоты фонтана. В этом диапазоне значений  $p$  квазирегулярные режимы автоколебаний уже не наблюдались.

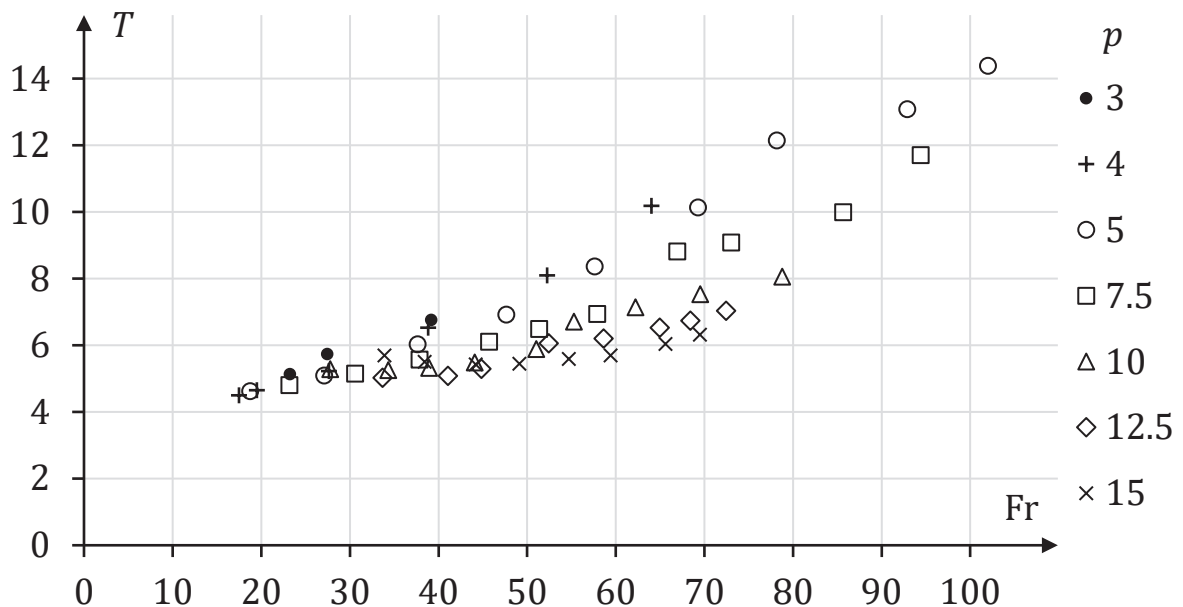


Рис. 2.1. Экспериментальные зависимости  $T = T(Fr)$  для  $d/h = 0.1$  при  $3 \leq p \leq 15$

Полученные в случае  $d = 0.1$  см для регулярных автоколебаний зависимости  $T = T(Fr)$  показаны на рис. 2.1.

В этих экспериментах для всех указанных выше значений диаметров струй  $d$  и высот водосливов  $H$  наблюдается следующая динамика развития картин течения с ростом скорости струи  $v_0$ . Найденные зависимости для всех рассмотренных значений  $p < 15$  являются монотонно возрастающими, и только при  $p = 15$  в начальном диапазоне чисел Фруда наблюдалось слабое убывание  $T$ . С ростом значения  $p$  при фиксированном  $d/h$  кривые становятся более пологими, при  $p = 15$  период  $T$  практически не меняется с увеличением  $Fr$ .

Аналогичные зависимости для  $d = 0.3$  мм и  $d = 0.5$  мм приведены на рис. 2.2 и 2.3.

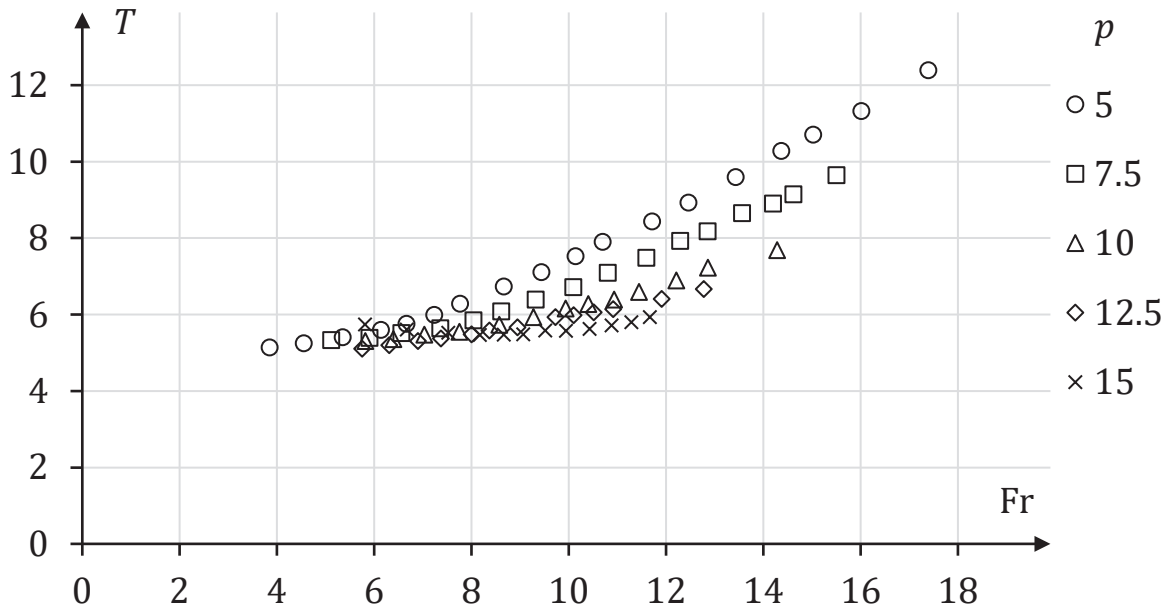


Рис. 2.2. Экспериментальные зависимости  $T = T(Fr)$  для  $d/h = 0.3$  при  $5 \leq p \leq 15$

Экспериментальные кривые на этих рисунках являются непрерывными, а в случае  $d = 0.1$  см наблюдаемый на всех кривых рис. 2.1 при  $p \geq 5$  скачкообразный рост периода в некоторой точке связан с качественной перестройкой течения, поскольку при некотором значении скорости происходит прорыв струи через свободную поверхность и начинаются автоколебания со свободной струей.

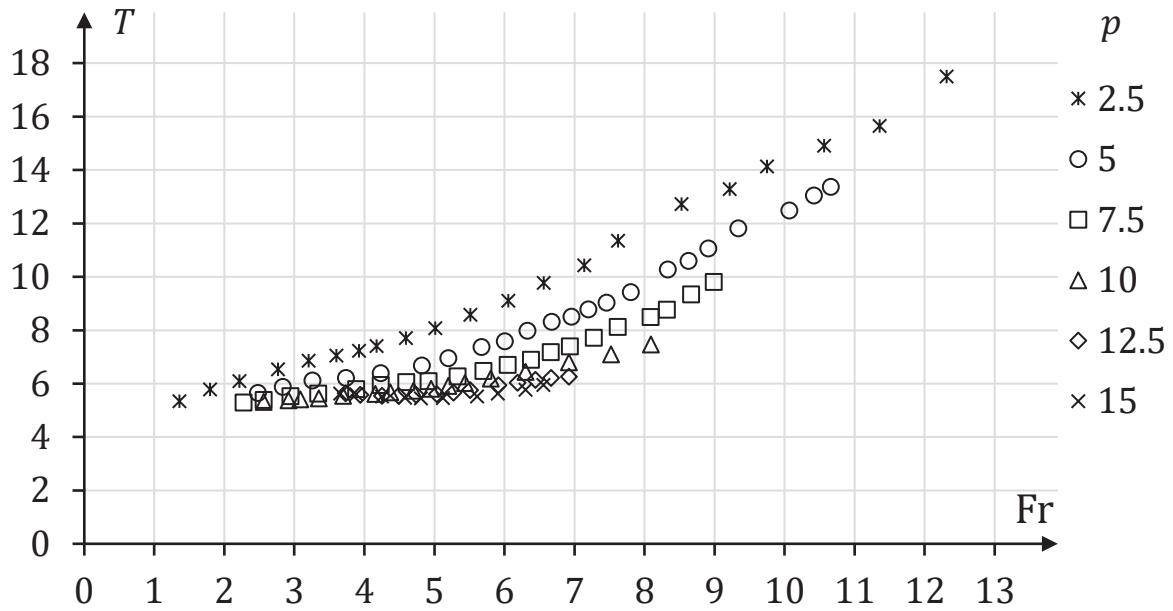


Рис. 2.3. Экспериментальные зависимости  $T = T(Fr)$  для  $d/h = 0.5$  при  $2.5 \leq p \leq 15$

Следует заметить, что для плоских струй зависимости безразмерного периода от числа Фруда были существенно иными [13]. Эти зависимости не являлись монотонными и непрерывными, имели две или три точки разрыва, соответствовавшие бифуркационной смене режимов фонтанирования.

Опыты показали также, что на процесс автоколебаний осесимметричных струй более существенное влияние, чем в плоском случае, оказывает волнообразование в экспериментальной установке. Для плоских струй в значительных диапазонах изменения определяющих параметров автоколебания фонтана приводили к образованию бегущих поверхностных волн небольшой амплитуды, которые двигались в направлении водосливов и, практически не взаимодействуя с ними, удалялись за пределы установки. При автоколебаниях осесимметричных струй максимальный подъем свободной поверхности является существенно более высоким, что приводит к сильному волнообразованию во всем объеме жидкости в сосуде. Наблюдения за свободной поверхностью для случая максимального относительного затопления  $p = 15$  показали, что форма свободной границы оказывается близкой к форме стоячей волны. Значения периода колеба-

ний фонтана при этом достаточно близки к периоду соответствующей стоячей волны, вычисляемому по линейной теории.

Кроме экспериментального изучения процесса фонтанирования круглых струй в относительно узких каналы была сделана серия численных расчетов с использованием пакета программ STAR-CCM+. Описание численного метода и результаты расчетов содержатся в следующих разделах.

## 2.2. Описание математической модели

Программный комплекс STAR-CCM+, используемый для численного решения задач гидродинамики, основан на методе конечных объемов и представляет собой единую систему, включающую алгоритмы построения геометрии расчетной области, ее дискретизации, решения систем линейных алгебраических уравнений, а также методы анализа и обработки результатов моделирования. Математическая модель, заложенная в пакет программ STAR-CCM+, состоит из следующей системы дифференциальных уравнений, описывающей нестационарное турбулентное движение вязкой жидкости:

— уравнение движения:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i - \tau_{ij}) = - \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

— уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0$$

— уравнение состояния:

$$\rho = const$$

где:

$x_i$  – оси декартовой системы координат ( $i = 1, 2, 3$ );

$u_i$  – проекция вектора скорости  $\bar{u}$  на ось  $x_i$ ;

$p$  – статическое давление;

$t$  – время;

$\rho$  – плотность;

$\tau_{ij}$  – тензор напряжений.

В уравнении движения для ньютоновской жидкости компоненты тензора напряжений  $\tau_{ij}$  имеют вид:

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u^n}{\partial x_n} \delta_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j},$$

где:

$\mu$  – динамическая вязкость;

$S_{ij}$  – тензор скоростей деформации:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

а  $\delta_{ij}$  – оператор Кронекера.

Турбулентные напряжения  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$ , обусловленные наличием пульсационных составляющих вектора скорости  $u'_i, u'_j$ , определяются по следующим зависимостям (гипотеза Буссинеска):

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}(\mu_t \frac{\partial u^n}{\partial x_n} + \rho k) \delta_{ij},$$

где  $k$  – кинетическая энергия турбулентности, а  $\mu_t$  – коэффициент турбулентной (вихревой) вязкости.

Для замыкания системы уравнений используется стандартная  $k - \varepsilon$  модель турбулентности, которая состоит из уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности  $k$ :

$$k = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2},$$

и уравнения для скорости ее диссипации  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}.$$



Коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_t$  задается соотношением:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

где  $C_\mu$  – эмпирический коэффициент.

Система уравнений переноса для  $k$  и  $\varepsilon$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \varepsilon,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} G_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}.$$

В данной системе уравнений  $G_k = \mu_t S^2$  – член, отвечающий за генерацию турбулентной кинетической энергии, образованную от средних градиентов скорости, где  $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$  – инвариант тензора скоростей деформаций. Остальные эмпирические константы для широкого диапазона турбулентных течений имеют следующие значения:  $C_\mu = 0.09$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.22$ ,  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ .

Для моделирования пограничного слоя используется стандартная пристеночная функция для течений с высокими числами Рейнольдса:

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & , y^+ \leq y_m^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & , y^+ \geq y_m^+ \end{cases},$$

где:

$$u^+ = u/u_\tau,$$

$u$  – касательная компонента скорости,

$$u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2},$$

$\tau_w$  – касательное напряжение на стенке,

$$y^+ = \rho u_\tau y / \mu \approx \rho C_\mu^{1/4} k^{1/2} y / \mu,$$

$E$  – эмпирический коэффициент,

$\kappa$  – постоянная Кармана,

а  $y_m^+$  удовлетворяет уравнению:

$$y_m^+ - \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_m^+) = 0.$$

Для гидродинамически гладких стенок  $E = 9.0$ ,  $\kappa = 0.419$ .

Многофазная среда моделируется с помощью метода объема жидкости (VOF) [102]. Распределение компонентов многофазной среды в расчетной области определяется объемной долей каждой составляющей следующим образом:

$$\alpha_c = \frac{V_c}{V},$$

где  $V_c$  – доля конечного объема (расчетной ячейки), занятая  $c$ -й фазой,  $V$  – объем расчетной ячейки. В дополнение к уравнению сохранения массы для смеси жидкостей необходимо решить  $N_c - 1$  уравнений переноса для объемных долей компонент многофазной среды, где  $N_c$  – общее количество компонент среды. Эти уравнения получаются из условия сохранения массы для смеси. В результате уравнение переноса для  $\alpha_c$  записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \alpha_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_c u_i) = \frac{\dot{m}_c}{\rho_c} - \left( \frac{\alpha_c}{\rho_c} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \alpha_c u_i \frac{\partial \rho_c}{\partial x_i} \right),$$

где:

$\dot{m}_c$  – массовый расход компоненты  $c$ ,

$\alpha_c$  – объемная доля компоненты  $c$ ,

$\rho_c$  – плотность компоненты  $c$ ,

$u_i$  –  $i$ -я компонента вектора скорости  $\bar{u}$ .

Предполагается, что все компоненты многофазной среды имеют одинаковую скорость и давление в одном и том же конечном объеме. При этом должно выполняться условие:

$$\sum_{c=1}^{N_c} \alpha_c = 1.$$

Физические свойства смеси жидкостей изменяются в зависимости от объемной доли каждой компоненты:

$$\rho = \sum_{c=1}^{N_c} \alpha_c \rho_c, \quad \mu = \sum_{c=1}^{N_c} \alpha_c \mu_c.$$

Все уравнения переноса для смеси жидкостей имеют ту же самую форму, что и для однокомпонентной сплошной среды и имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\dot{m}_c}{\rho_c} - \sum_{c=1}^{N_c} \left( \frac{\alpha_c}{\rho_c} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\alpha_c}{\rho_c} u_i \frac{\partial \rho_c}{\partial x_i} \right)$$

Остальные аспекты численного моделирования, такие как построение дискретного аналога системы дифференциальных уравнений, разностные схемы по пространству и времени, методы разбиения расчетной области на конечные объемы, итерационные алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений и др. приведены в методологии к программному комплексу [190].

### 2.3. Верификация численной модели

Цель данного исследования — изучение возможности использования пакета программ STAR-CCM+ для моделирования класса задач с наличием автоколебательных режимов фонтанирования затопленных струй жидкости. В качестве целевого параметра будет выступать период автоколебаний фонтана. По итогам сравнения результатов моделирования с экспериментом будет сделан вывод о точности и границах применимости используемой численной модели.

Для верификации была проведена серия опытов с истечением плоской затопленной струи. Экспериментальная установка состояла из двух параллельных прозрачных пластин, расстояние между которыми равнялось 1 см, дна и боковых водосливов различной высоты  $H$ , обеспечивающих начальное затопление. На дне установки по центру располагались сопла прямоугольного сечения с шириной, равной расстоянию между боковыми стенками, и толщинами  $\delta = 2, 3, 4$  мм.

В качестве базы верификации были выбраны  $\delta = 3$  мм,  $H = 5$  см и три режима истечения жидкости: со слабым возмущением свободной поверхности,  $V = 0.62$  м/с (рис. 2.4, *a*); с опрокидыванием гребня фон-

тана,  $V = 1.36$  м/с (рис. 2.4,б); и с прорывом струи через свободную поверхность,  $V = 3$  м/с (рис. 2.4,в).

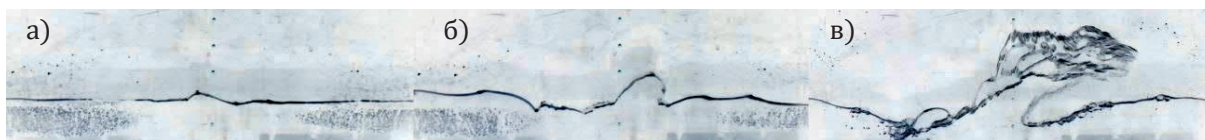


Рис. 2.4. Фотоснимки исследуемых режимов фонтанирования

Размеры расчетной области совпадали с размерами экспериментальной установки (рис. 2.5). Начальное поле скорости и давления полагалось нулевым, а распределение объемной доли воды и воздуха задавалось в соответствии с начальным уровнем жидкости в установке. В качестве граничных условий на границе  $\Gamma_1$  задавалось условие постоянства модуля скорости, направленной по нормали к границе  $\Gamma_1$ . Величина скорости принималась равной среднерасходному значению скорости струи в эксперименте. На границе  $\Gamma_2$  задавалось условие прилипания, а на  $\Gamma_3$  – условие постоянства давления  $p = 0$ .

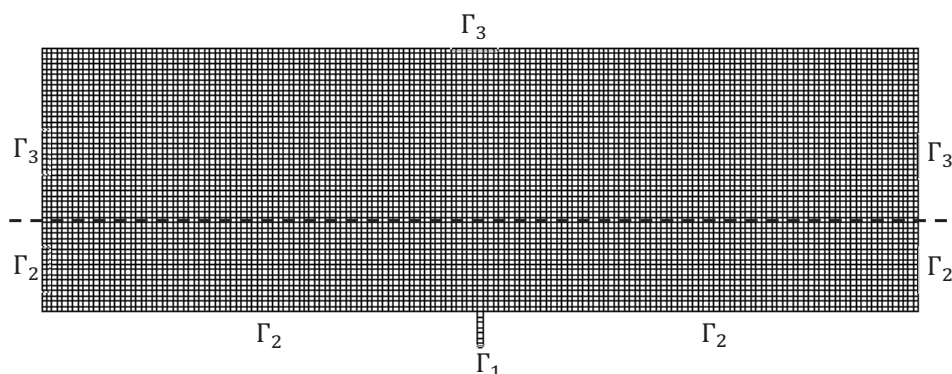


Рис. 2.5. Базовая расчётная область модели

### Исследование сеточной сходимости

Сеточная модель состояла из ортогональных четырехгранных ячеек одинакового размера (рис. 2.5). Задача решалась в плоской постановке, то есть использовался один слой ячеек по ширине установки с граничным

условием симметрии по бокам. Исследование сеточной сходимости проводилось на ряде последовательно измельченных сеток с базовым размером ячейки:  $\Delta x = 3, 1.5, 1, 0.75$  мм. При этом соблюдалось условие, чтобы максимальное число Куранта в расчетной области не превышало 1:  $Co = \frac{v\Delta x}{\Delta t} = 1$ . Остальные параметры численной модели также не менялись. Экспериментальные и расчетные значения периода приведены в Таблицах 1-3.

Таб. 1. Зависимость периода автоколебаний от размерности сетки при  $V = 0.62$  м/с.

|            | Эксперимент | Расчет   |            |            |            |
|------------|-------------|----------|------------|------------|------------|
| $\Delta x$ |             | $\delta$ | $\delta/2$ | $\delta/3$ | $\delta/4$ |
| $T$ (с)    | 0.44        | —        | 0.46       | 0.45       | 0.44       |

Таб. 2. Зависимость периода автоколебаний от размерности сетки при  $V = 1.36$  м/с.

|            | Эксперимент | Расчет   |            |            |            |
|------------|-------------|----------|------------|------------|------------|
| $\Delta x$ |             | $\delta$ | $\delta/2$ | $\delta/3$ | $\delta/4$ |
| $T$ (с)    | 0.44        | 0.48     | 0.45       | 0.45       | 0.45       |

Таб. 3. Зависимость периода автоколебаний от размерности сетки при  $V = 3$  м/с.

|            | Эксперимент | Расчет   |            |            |            |
|------------|-------------|----------|------------|------------|------------|
| $\Delta x$ |             | $\delta$ | $\delta/2$ | $\delta/3$ | $\delta/4$ |
| $T$ (с)    | 0.62        | 0.58     | 0.61       | 0.66       | 0.74       |

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы. Для режима с малой скоростью струи и небольшим возвышением гребня фонтана решение численный расчет оказался чувствительным к размерности сетки. Если при базовом размере ячейки колебания фонтана отсутствовали, то при дальнейшем измельчении ячеек значение периода монотонно

стремилось к экспериментальному значению. Для режима с опрокидыванием гребня оказалось, что, начиная с  $\Delta x = \delta/2$ , дальнейшее измельчение сетки не оказывало влияния на результат и отклонение периода  $T$  от экспериментального значения составляло 2%. Для режима с прорывом струи установлено, что измельчение ячеек приводило к образованию существенной численной диффузии VOF модели, потере устойчивости решения. Тем не менее при  $\Delta x = \delta/3$  отличие найденного численно значения периода от полученного в экспериментах не превышало 5%. На основании этих данных можно сделать заключение, что  $\Delta x = \delta/3 = 1$  мм является самым оптимальным размером ячейки для исследуемой задачи.

### Исследование влияния шага по времени

На основании предыдущего исследования была выбрана сетка с шагом  $\Delta x = \delta/3$  и проведены расчеты при разных значениях шага по времени, который выбирался автоматически, согласно следующим значениям числа Куранта:  $Co = 1, 2, 4, 8, 16$ .

Таб. 4. Зависимость периода автоколебаний от шага по времени при  $V = 0.62$  м/с.

|         | Эксперимент | Расчет |      |   |   |    |
|---------|-------------|--------|------|---|---|----|
| $Co$    |             | 1      | 2    | 4 | 8 | 16 |
| $T$ (с) | 0.44        | 0.45   | 0.45 | — | — | —  |

Таб. 5. Зависимость периода автоколебаний от шага по времени при  $V = 1.36$  м/с.

|         | Эксперимент | Расчет |      |      |      |     |
|---------|-------------|--------|------|------|------|-----|
| $Co$    |             | 1      | 2    | 4    | 8    | 16  |
| $T$ (с) | 0.44        | 0.45   | 0.45 | 0.44 | 0.44 | 0.5 |

Исходя из полученных данных, приведенных в таблицах 4-6, можно сделать вывод, что выполнение условия  $Co \leq 2$  обеспечивает приемлемую точность расчета автоколебательных режимов фонтанирования без прорыва струи.

Таб. 6. Зависимость периода автоколебаний от шага по времени при  $V = 3$  м/с.

|         | Эксперимент | Расчет |      |   |   |    |
|---------|-------------|--------|------|---|---|----|
| $C_0$   |             | 1      | 2    | 4 | 8 | 16 |
| $T$ (с) | 0.62        | 0.66   | 0.76 | — | — | —  |

### Оценка влияния других параметров расчета

Был проведен дополнительный анализ чувствительности к следующим второстепенным параметрам. Сходимость решения задачи оценивалась по порядку невязок при итерационном решении систем линейных уравнений, как выяснилось, увеличение количества итераций, заданных по умолчанию равным 5, не повлияло на значение целевого параметра  $T$ . На скорость сходимости и устойчивость решения оказывали влияние коэффициенты релаксации, оптимальное значение было выбрано равным 0.9. Оценивалось также влияние размеров установки, проводились расчеты при разном удалении водосливов от насадка, подающего струю воды. Как выяснилось, это не оказывает никакого влияния на процесс автоколебаний фонтана, что указывает на локализованность этого эффекта. Для оценки влияния пространственных эффектов был сделан расчет трехмерной модели с 10 ячейками по ширине установки. Оказалось, что пространственными эффектами можно пренебречь. При аппроксимации конвективных членов в уравнениях переноса была выбрана схема второго порядка, а для дискретизации по времени — схема первого порядка точности. Были проведены расчеты для других моделей турбулентности: стандартной  $k - w$  и модели напряжений Рейнольдса (RST), результаты оказались идентичными.

Для большей достоверности были смоделированы также режимы течения с другими начальными затоплениями  $H$ , толщинами струй  $\delta$  и их скоростями  $V$ . В таблице 7 приведено сравнение периода автоколебаний, полученных численно и экспериментально для различных наборов этих параметров.

При малых затоплениях было обнаружено, что для варианта В-1 раз-

Таб. 7. Зависимость периода автоколебаний для различных конфигураций.

| №   | $\delta$ , мм | $H$ , см | $V$ , м/с | $T_{\text{эксп}}$ , с | $T_{\text{числ}}$ , с | Погрешность, % |
|-----|---------------|----------|-----------|-----------------------|-----------------------|----------------|
| В-1 | 2             | 1        | 0.34      | 0.229                 | 0.228                 | 0.44           |
| В-2 | 2             | 10       | 2.12      | 0.6                   | 0.6                   | 0              |
| В-3 | 3             | 15       | 3.19      | 0.73                  | 0.71                  | 3              |
| В-4 | 4             | 1        | 0.46      | 0.265                 | 0.251                 | 5.28           |
| В-5 | 4             | 10       | 2.27      | 0.59                  | 0.58                  | 1.7            |

решения сетки с  $\Delta x = 1$  мм недостаточно для появления автоколебаний, течение получается стационарным и симметричным. Данный факт был учтен в дальнейших расчетах. Формы свободных поверхностей, полученных численно и экспериментально, качественно повторяли друг друга. По итогам этого исследования можно сделать вывод, что в выбранном диапазоне определяющих параметров численная модель воспроизводит нестационарные течения такого класса с точностью в пределах 5 %.



## 2.4. Численное моделирование затопленных осесимметричных струй

В настоящем разделе представлены результаты численных исследований режимов фонтанирования осесимметричных струй в относительно узком канале.

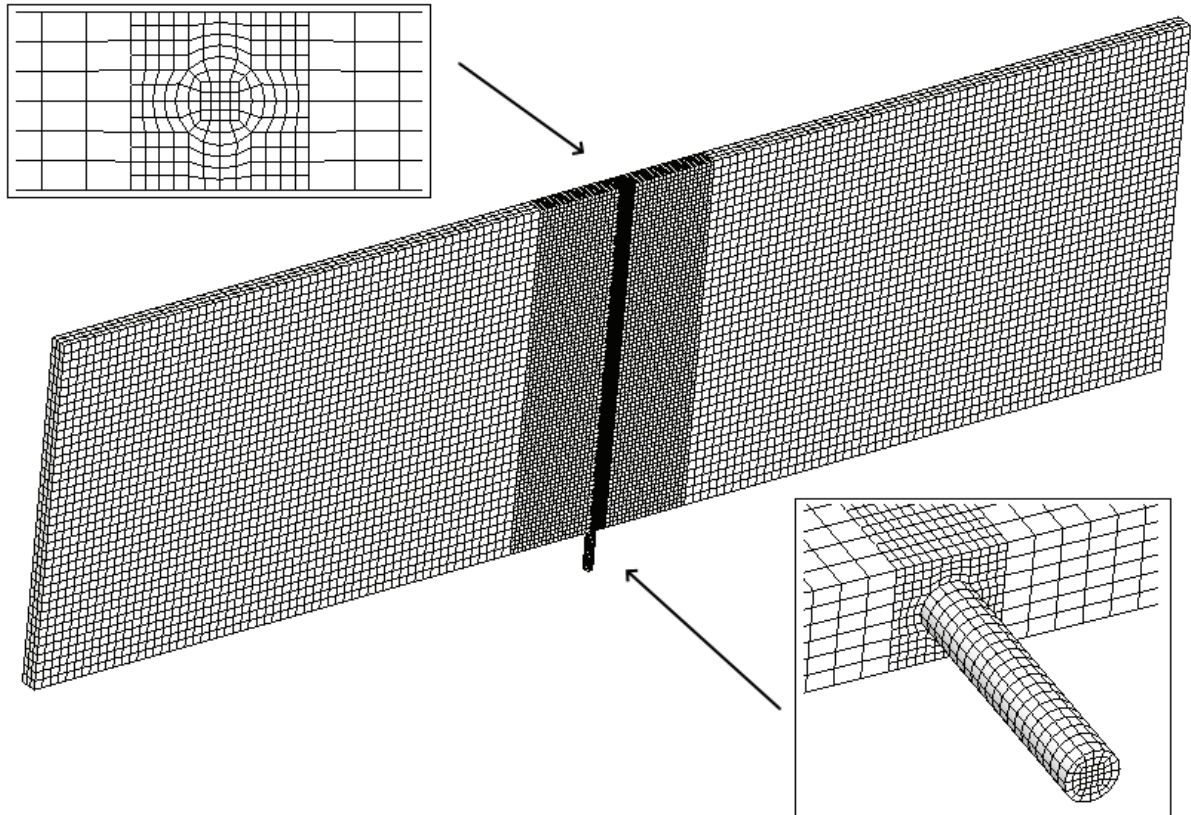


Рис. 2.6. Общий вид сеточной модели и ее фрагменты в окрестности выхода струи воды из насадка.

Размеры расчетной области повторяли размеры экспериментальной установки. Диаметр подающего воду канала был равен 0.5 см, а отношение его длины к диаметру равнялось 10, так, что на выходе из него гарантированно получался развитый турбулентный профиль скорости. Сеточная модель была структурированного типа и состояла из примерно 550 тыс. гексаэдрических ячеек. В окрестности струи размер ячейки был порядка 1 мм, а в остальной области равнялся 2.5 – 5 мм (рис. 2.6).

Граничные условия для данной расчетной области задавались следующим образом (рис. 2.7): на поверхности Г-1 задавалось условие посто-

янности модуля скорости, на поверхности  $\Gamma_2$ , включающей дно установки, водосливы и боковые стенки задавалось условие твердой стенки, на которой скорость жидкости равнялась нулю. На поверхности  $\Gamma_3$  задавалось условие постоянства давления со стороны воздуха, а  $\Gamma_4$  изображает начальное положение межфазной границы. Остальные параметры численной модели задавались на основании проведенной верификации в параграфе 2.3.

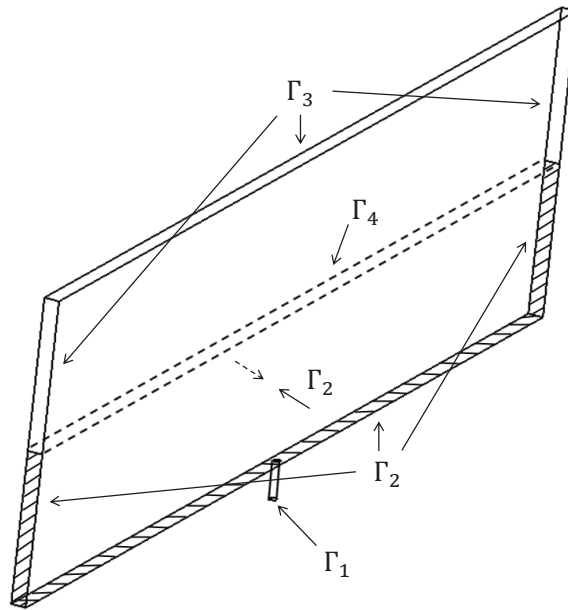


Рис. 2.7. Начальные и граничные условия.

С учетом области применимости VOF модели, численные расчеты проводились только для режимов с отсутствием или частичным прорывом струй через свободную поверхность.

На рис. 2.8 показано сравнение экспериментальных и численных зависимостей для безразмерного периода автоколебаний при  $d/h = 0.5$  и  $p = 2.5$  (а),  $p = 15$  (б), свидетельствующее о приемлемой точности использованного метода. Отличие значений периода, полученных численно и в эксперименте, в среднем не превосходит 5%.

Проведено также сравнение найденной расчетом эволюции формы свободной границы жидкости с наблюдаемой в экспериментах. Нельзя

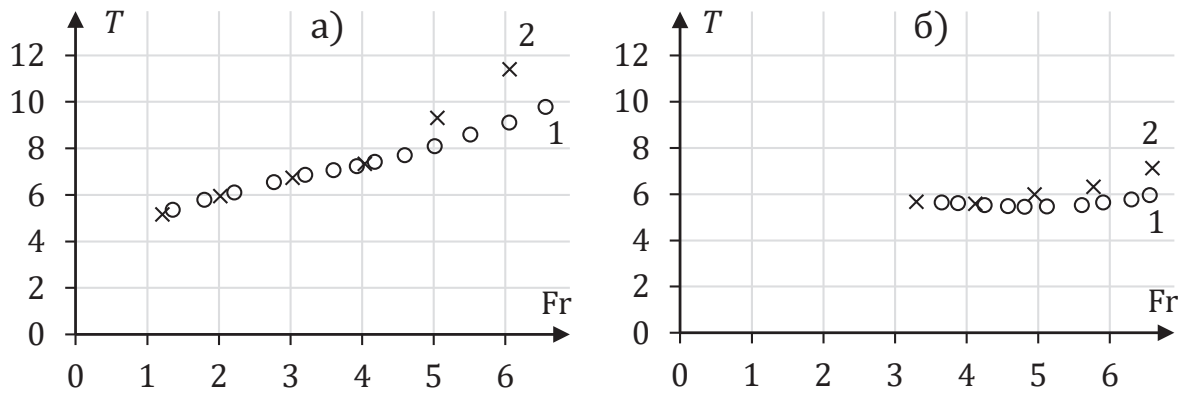


Рис. 2.8. Экспериментальные (1) и расчетные (2) зависимости  $T(Fr)$  для  $d = 5$  мм и а)  $H = 2.5$  см, б)  $H = 15$  см.

говорить о полной идентичности полученных картин течений в каждый момент времени, но имеет место хорошее качественное совпадение.

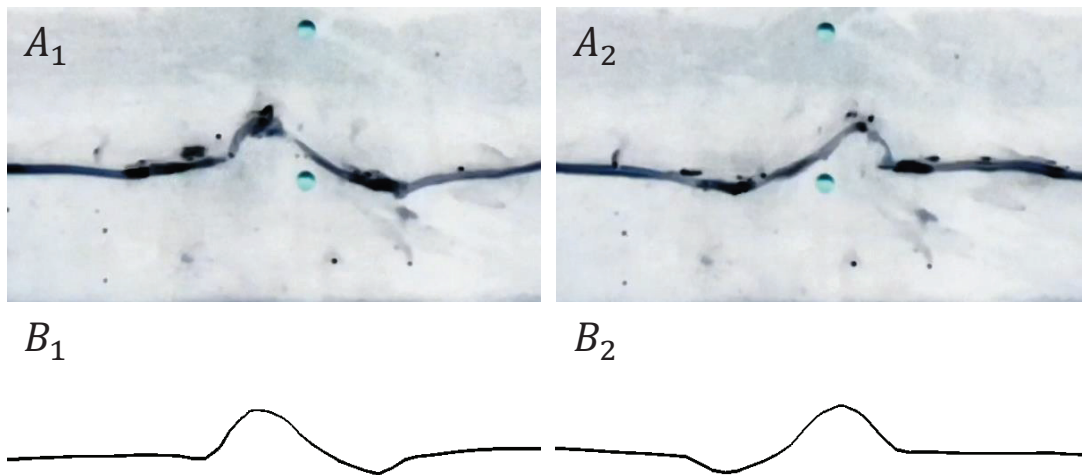


Рис. 2.9. Экспериментальные ( $A_1, A_2$ ) и расчетные ( $B_1, B_2$ ) формы свободной поверхности для  $d = 0.5$  см,  $H = 2.5$  см,  $V = 61$  см/с.

На рис. 2.9-2.11 для некоторых наборов значений определяющих параметров показаны формы расчетных и экспериментальных картин течения. Эти кадры сделаны для моментов времени, соответствующих крайним положениям возвышения свободной поверхности, т.е. через промежуток времени, равный половине периода автоколебаний.

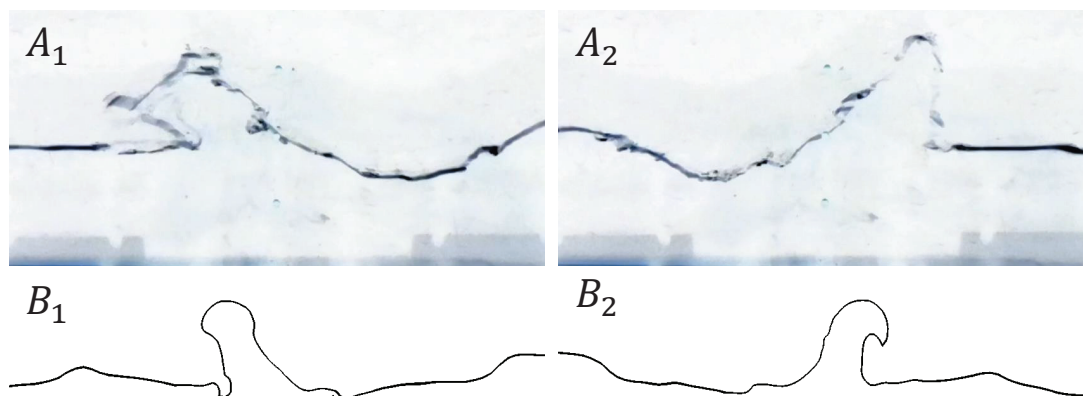


Рис. 2.10. Экспериментальные ( $A_1, A_2$ ) и расчетные ( $B_1, B_2$ ) формы свободной поверхности для  $d = 0.5$  см,  $H = 5$  см,  $V = 212$  см/с.

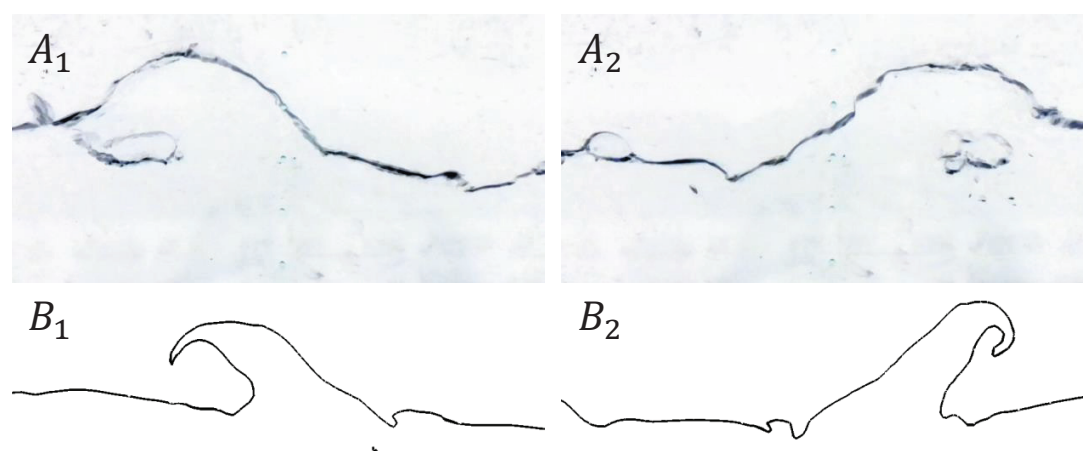


Рис. 2.11. Экспериментальные ( $A_1, A_2$ ) и расчетные ( $B_1, B_2$ ) формы свободной поверхности для  $d = 0.5$  см,  $H = 10$  см,  $V = 343$  см/с.

## 2.5. Численное моделирование затопленных струй прямоугольного сечения

В предыдущих разделах приведены результаты экспериментальных и численных исследований проникания свободных или затопленных струй через свободную поверхность жидкости в относительно узких каналах. Боковые стенки установки находились на относительно малом расстоянии  $h = 1$  см друг от друга, что практически исключало возможность перемещения жидкости и вовлеченного под свободную поверхность воздуха в поперечном направлении. Представляло интерес выяснить, воз-

можно ли возникновение автоколебательных режимов в случае фонтанировании затопленной вертикальной струи в неограниченном объеме жидкости, при отсутствии боковых ограничивающих стенок [32].

Выходное сечение вертикального канала (рис. 2.12), затопленного на глубину  $H$  относительно уровня свободной поверхности первоначально покоящейся жидкости, представляет собой прямоугольник со сторонами  $h$  и  $\delta$ .

Численное моделирование проводилось с использованием пакета программ STAR-CCM+ для следующих значений определяющих параметров:  $\delta = 1, 2, 3, 5$  мм,  $h = 2$  см,  $H = 1, 2, 3, 4, 5$  см,  $0.25 \leq V \leq 7$  м/с, где  $V$  — среднерасходная скорость жидкости в канале.

Следует отметить, что существенным отличием от изученных ранее течений является не только отсутствие боковых стенок, но и отсутствие дна вблизи выходного сечения канала (при изучении фонтанирования вертикальных затопленных струй в относительно узких каналах подача воды производилась через щель или круглое отверстие в дне установки).

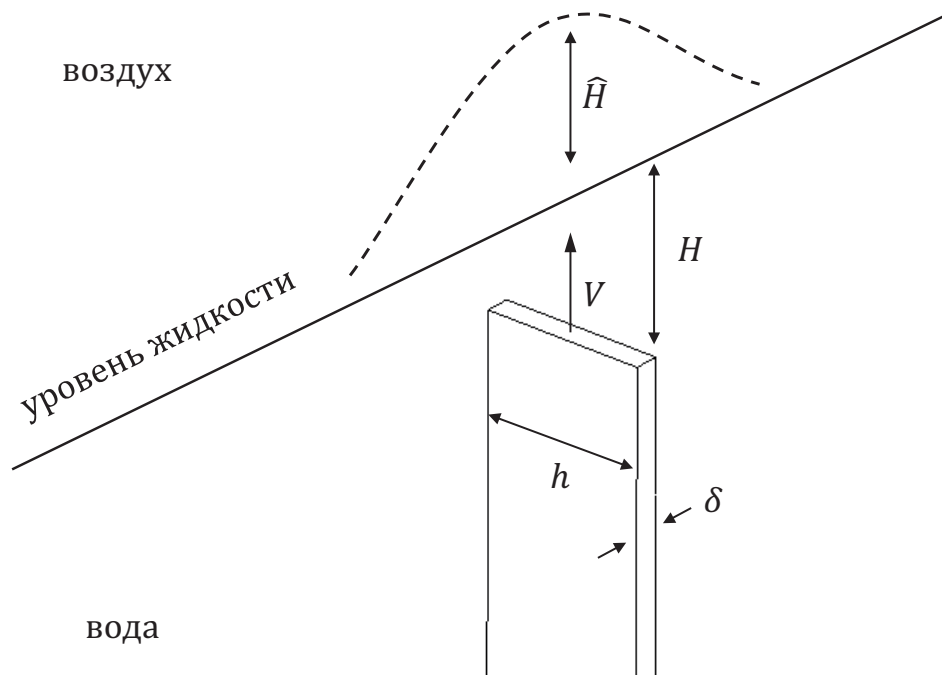


Рис. 2.12. Схема задачи.

Расчетная область показана на рис. 2.13. Она соответствовала резервуару с размерами  $0.5 \times 0.5 \times 0.5$  м. В центре выбранной области помещался канал прямоугольного сечения так, чтобы выходное сечение канала было заглублено на заданную величину  $H$  под начальный уровень воды, заполняющий резервуар.

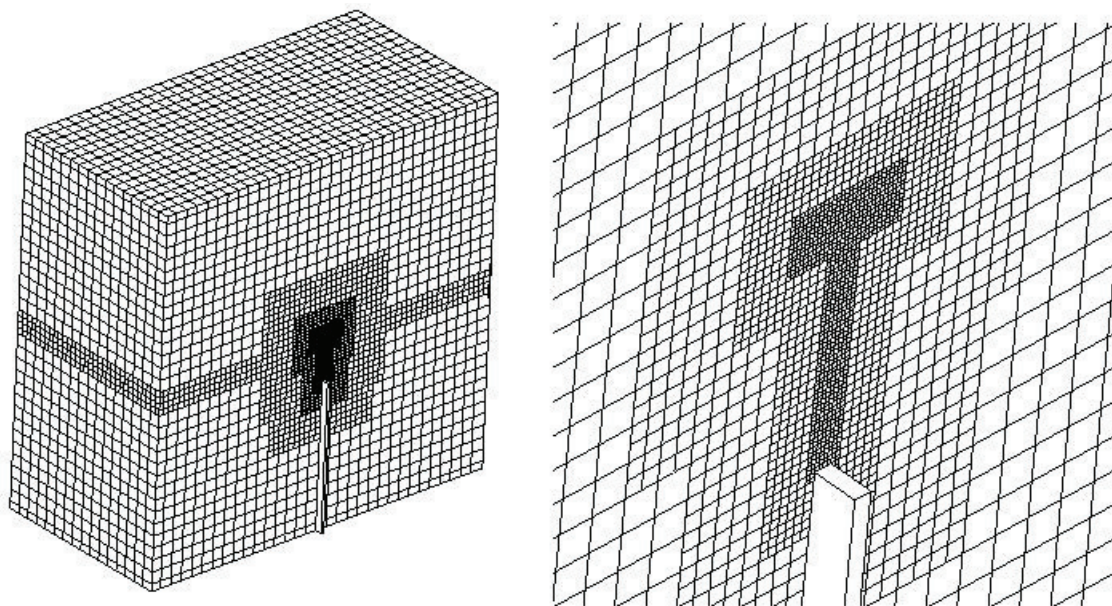


Рис. 2.13. Сеточная модель.

Использовались следующие граничные условия. На торцевой поверхности канала задавался вектор скорости, направленный по нормали к выходному сечению канала. На стенках канала, а также стенках, ограничивающих резервуар, скорость жидкости была равна нулю. На другой части границы расчетной области принималось условие постоянства давления. В качестве начальных условий задавалось распределение объемной доли жидкости и нулевые значения давления и скорости.

Сеточная модель состояла из 500 тыс. ячеек. В области, примыкающей к выходному сечению канала, выбирался размер ячейки порядка 1 мм, а по мере удаления от струи размер ячеек равномерно возрастал до значения 16 мм.

Расчеты показали, что при относительно малых скоростях или достаточно большом начальном заглублении  $H$  имеет место квазистационар-



ный режим течения с практически не меняющейся формой свободной поверхности. При этом с увеличением  $H$  фонтан приобретает форму, близкую к осесимметричной (рис. 2.14).

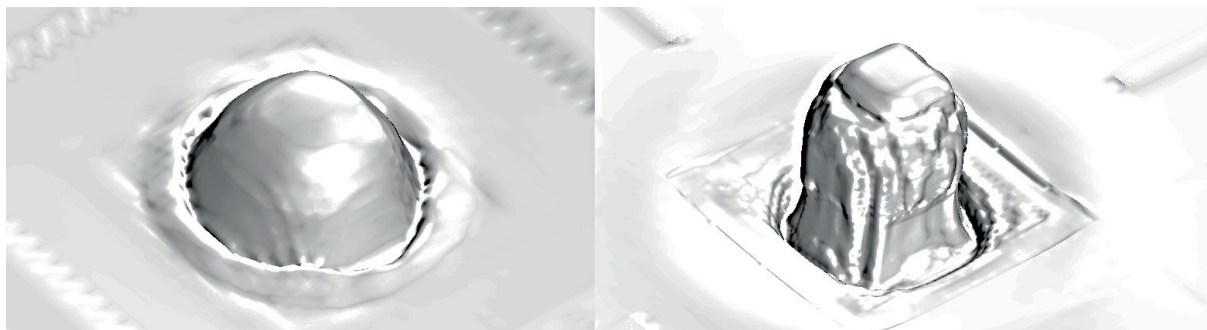


Рис. 2.14. Найденная расчетом форма свободной поверхности для  $L = 2$  см,  $H = 5$  см при  $V = 1$  м/с. (слева) и  $V = 3$  м/с (справа).

С помощью расчетов удалось определить диапазоны изменения определяющих параметров, при которых наблюдались четко выраженные автоколебательные режимы поведения возвышения свободной поверхности, с периодическим отклонением фонтана в одну или другую сторону. Для выбранных значений  $h$  и  $\delta$  регулярные колебания фонтана наблюдались только в диапазоне  $1 \leq H \leq 3$  см.

На рис. 2.15 показаны найденные расчетом формы свободной поверхности в моменты времени, соответствующие крайним положениям фонтана в процессе автоколебаний.



Рис. 2.15. Крайние положения колеблющегося фонтана для случая  $L = 5$  см,  $H = 2$  см и  $V = 1$  м/с.

Такого вида автоколебательные режимы возникают с ростом скорости после потери устойчивости стационарного течения, и существуют до

некоторого значения скорости, при котором происходит прорыв струи через свободную поверхность. Как было указано ранее, расчет течений с возникновением свободной струи используемым численным методом затруднителен, и поэтому указанные режимы не исследовались. Следует ожидать, что для определенных наборов значений параметров существуют регулярные автоколебательные режимы и при наличии свободной струи, как это имело место, например, в [8–11, 13].

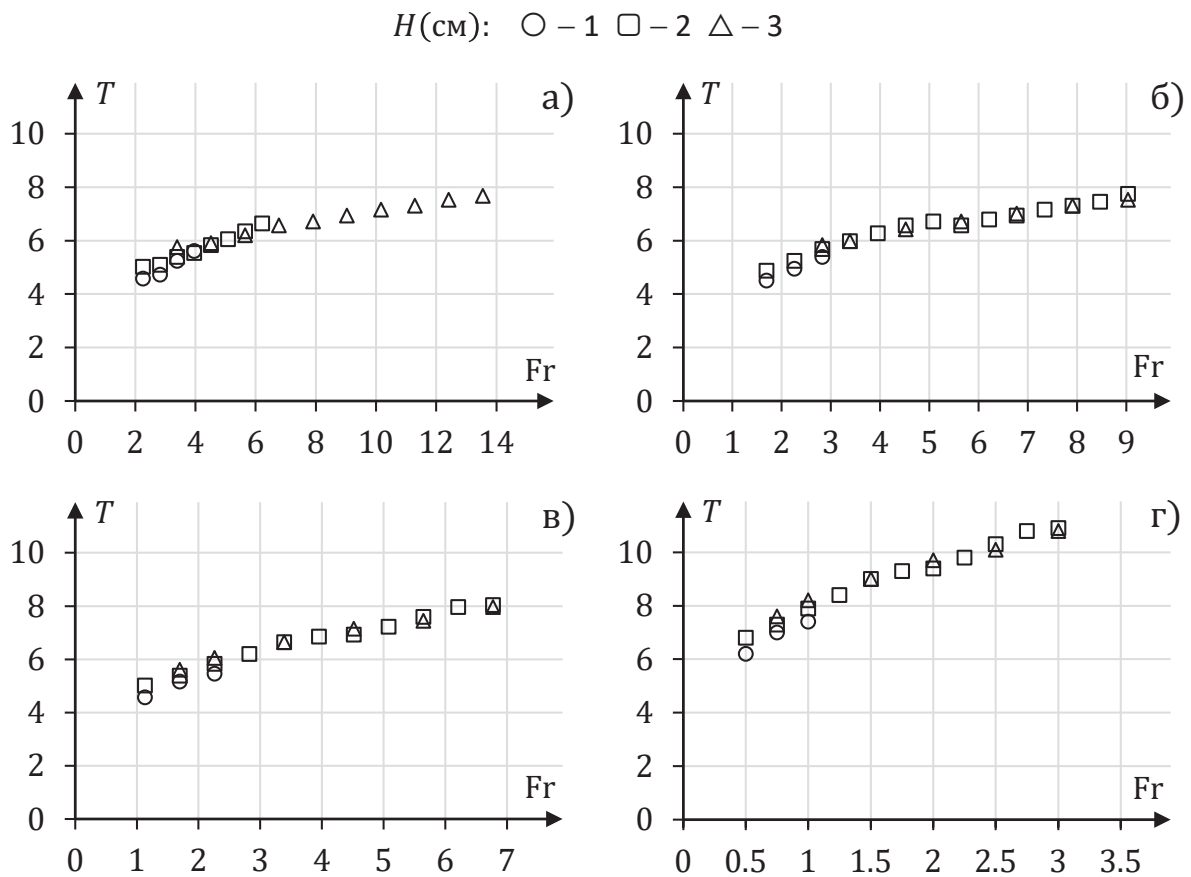


Рис. 2.16. Зависимости  $T(Fr)$  для случая  $h = 2$  см при  $\delta = 1, 2, 3, 5$  мм (а–г соответственно).

По результатам расчетов измерялся период автоколебаний  $\tau$ , а также высота подъема фонтана  $\hat{H}$ . На рис. 2.16 приведены найденные для автоколебательных режимов зависимости безразмерного периода  $T = \tau \sqrt{g/h}$  от числа Фруда  $Fr = V/\sqrt{gh}$  при  $h = 2$  см и для нескольких значений  $H$  и  $\delta$ . На каждой из приведенных кривых крайние правые точки соответ-



ствуют максимальному значению скорости, при превышении которого происходит прорыв свободной поверхности и возникает режим течения со свободной струей.

Найденные зависимости  $T(\text{Fr})$  являются монотонно возрастающими и непрерывными, т.е. качественно отличаются от случая фонтанирования плоских вертикальных струй в относительно узких каналах [8–11, 13].

Обращает на себя внимание практическая независимость  $T$  от начального затопления  $1 \leq H \leq 3$  см для всех рассмотренных случаев  $\delta = 1, 2, 3, 5$  мм.

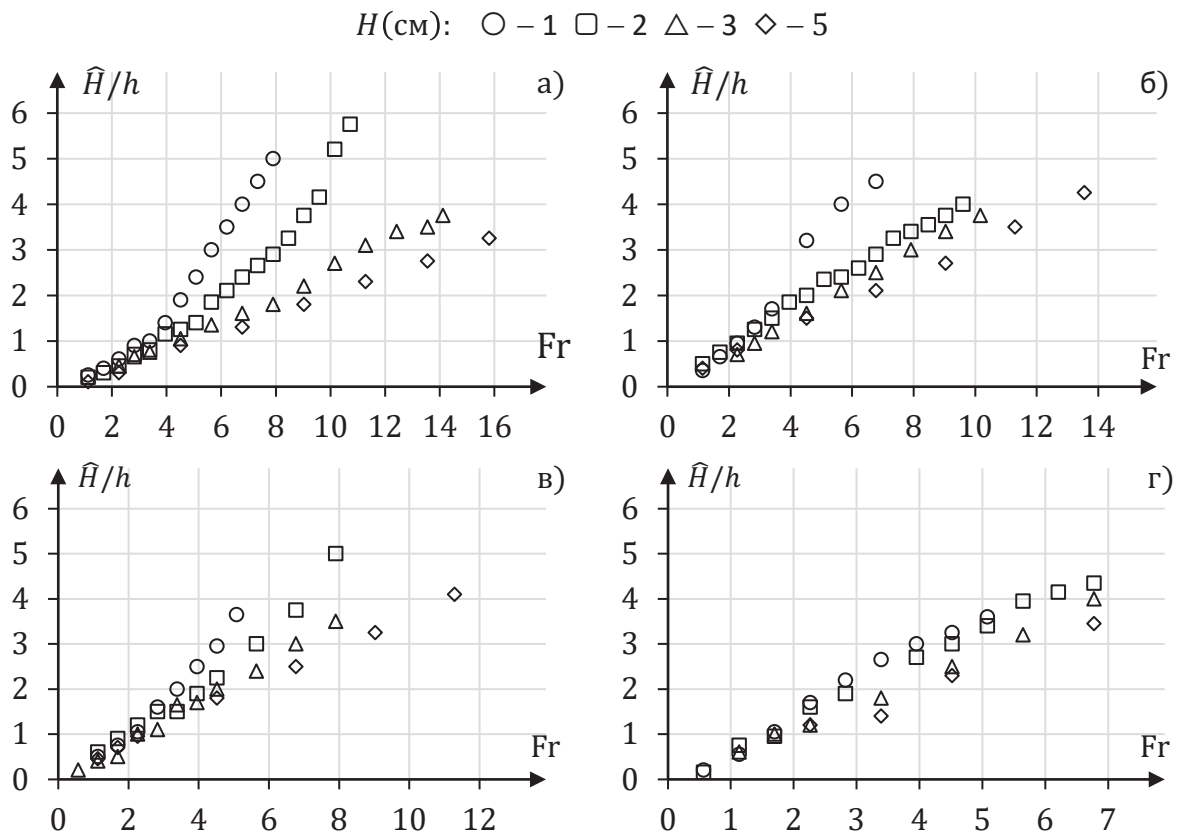


Рис. 2.17. Зависимости высоты подъема фонтана для  $h = 2$  см, различных  $H = 1, 2, 3, 5$  см и  $\delta = 1, 2, 3, 5$  мм.

На рис. 2.17 показаны зависимости относительной высоты подъема фонтана  $\hat{H}/h$  от числа Фруда для случая  $h = 2$  см и различных значений  $\delta$  и  $H$ . Для нестационарных режимов течения величина  $\hat{H}$  определялась как максимальный уровень подъема свободной поверхности в процессе

автоколебаний. Как и следовало ожидать, при фиксированных  $\delta$  и  $H$  с ростом скорости величина  $\hat{H}/h$  монотонно возрастает.

В заключение отметим, что в некоторых автоколебательных режимах, сопровождающихся значительной высотой подъема фонтана, его обрушение приводило к достаточно сильному волнообразованию в резервуаре. Для оценки возможного влияния размеров расчетной области были выполнены расчеты для резервуара большего размера. Найденные значения периода оказались практически совпадающими с полученными ранее.

## 2.6. Численное и экспериментальное исследование взаимодействия пары затопленных плоских струй

В настоящем разделе представлены результаты численного и экспериментального изучения взаимодействия пары затопленных плоских струй жидкости, проникающих через свободную поверхность [34].

В численных расчетах исследовалось плоскопараллельное течение, схема которого показана на рис. 2.18. Щелевые насадки, подающие плоские струи, шириной  $\delta$  размещались на различных расстояниях  $L$  друг от друга. Скорости  $V$  струй были одинаковы. Начальный уровень жидкости поддерживался расположенными по краям расчетной области твердыми стенками высотой  $H$ .

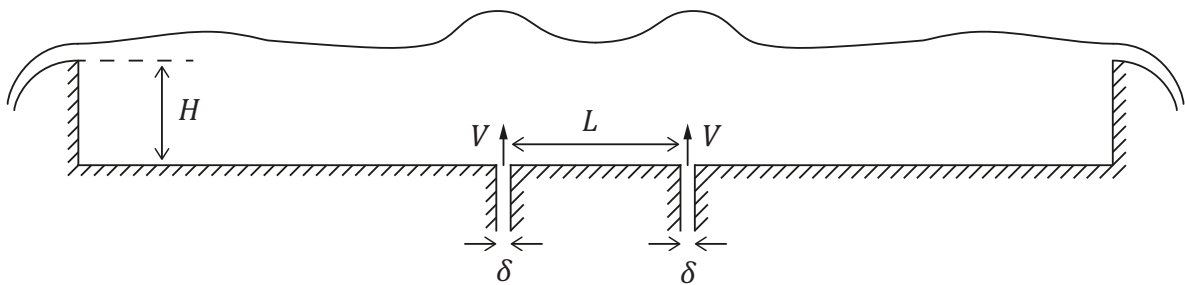


Рис. 2.18. Схема течения.

В работах [13, 14, 43], посвященных исследованию аналогичной задачи с одиночной струей, было установлено, что результаты расчетов плоской задачи имеют хорошее соответствие с результатами экспериментов, проведенных в относительно узких каналах. Сравнение численных и экспериментальных данных подтверждает это и для рассмотренной в настоящем разделе задачи.

Параметры численной модели задавались на основании проведенных ранее расчетов для одиночной струи и верификации путем сравнения с данными эксперимента. Размер расчетной сетки измельчался в окрестности выходных сечений насадков, а также в области взаимодействия струй, и был равен 1 мм. В остальной части размер ячеек увеличивался до 4 мм. Пример сеточной модели показан на рис. 2.19. Количество

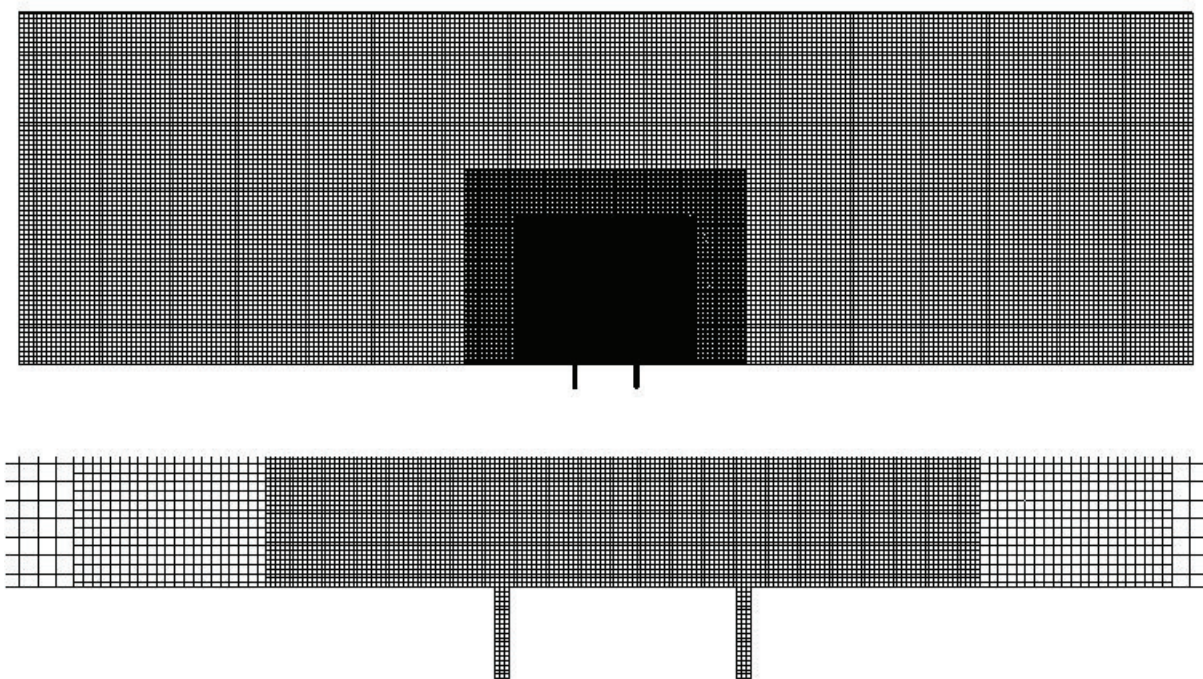


Рис. 2.19. Общий вид сеточной модели установки (сверху) и ее фрагмент в окрестности подачи струй жидкости (снизу).

ячеек для всех рассмотренных случаев составляло порядка 50 тысяч. Расчетное время задавалось равным 60 с, что оказалось достаточным для установления того или иного режима течения. Начальные и граничные условия ставились так же как при моделировании одиночной струи.

После завершения расчетов течения были проанализированы с помощью встроенных программных средств визуализации.

Ширина струй была фиксирована и равнялась  $\delta = 0.3$  см, а глубина начального затопления  $H = 7.5$  см. Расчеты проводились для диапазона  $0.5 \leq V \leq 3$  м/с. Для таких значений скорости не происходил прорыв струй через свободную поверхность. Режимы с образованием свободных струй не изучались. Расстояние между подающими струи соплами менялось в диапазоне  $1 \leq L \leq 50$  см.

С целью верификации результатов расчета была проведена серия опытов. Экспериментальная установка состояла из прозрачных боковых стенок  $80 \times 15$  см, удаленных друг от друга на расстояние 1 см. В нижней ее части располагались два насадка прямоугольного сечения. Расстояние между насадками регулировалось с использованием вставок различной длины. На рисунке 2-20 показана фотография экспериментального стен-

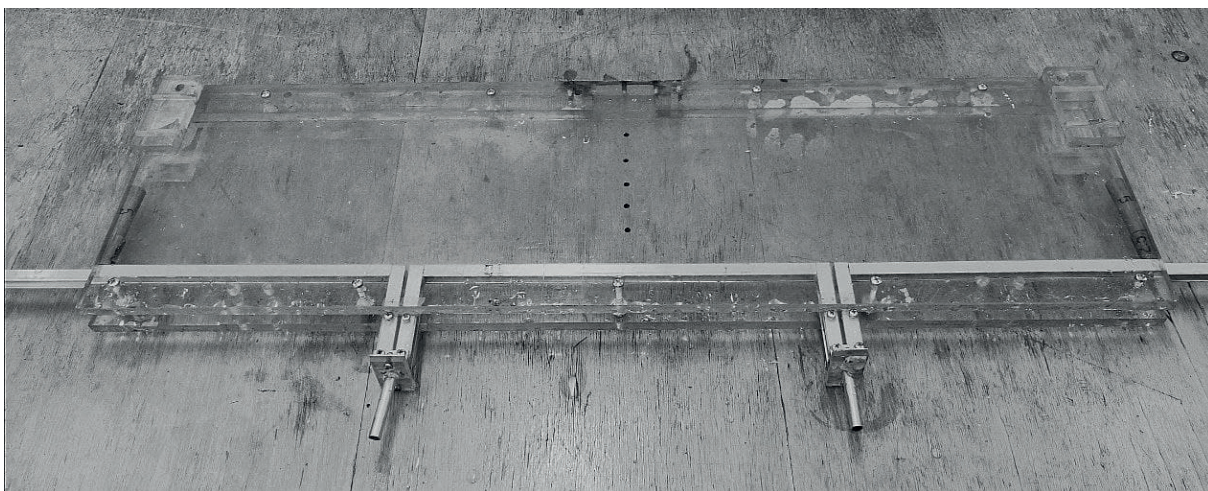


Рис. 2-20. Экспериментальная установка.

да для случая, когда сопла располагались на расстоянии  $L = 30$  см. Ширина подаваемых струй и высота водосливов имели те же значения, что и в численной модели — 0.3 см и 7.5 см соответственно. Расход жидкости в каждой струе контролировался с помощью весового метода и поддерживался постоянным.

Расчеты показали, что в определенных диапазонах значений опре-

деляющих параметров имеют место регулярные автоколебательные режимы фонтанирования струй. Возможные виды течений для указанных режимов схематично изображены на рис. 2.21.

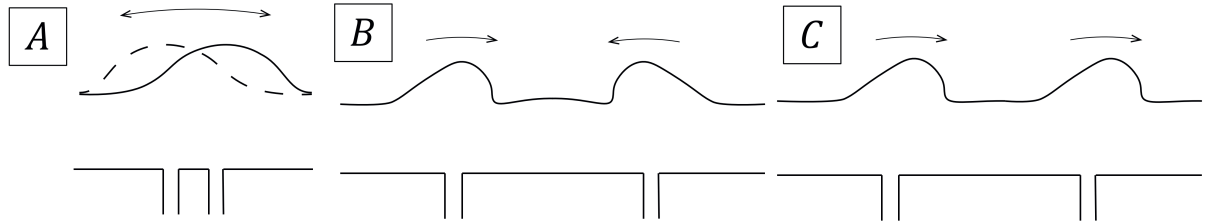


Рис. 2.21. Схематичное представление режимов взаимодействия струй с регулярными автоколебаниями.

Случай А характерен для относительно небольших расстояний  $L \leq 2$  см, при которых во всём исследуемом диапазоне скоростей  $V$  наблюдается режим с образованием одиночного возвышения свободной поверхности, совершающего регулярные поперечные перемещения. Для режима

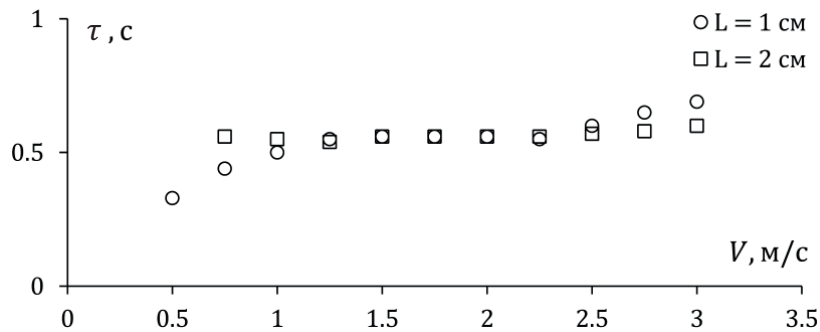


Рис. 2.22. Зависимости периода автоколебаний от скорости струй в режиме А.

А зависимость периода колебаний  $\tau$  от скорости струй  $V$  показана на рис. 2.22. Оказалось, что в случае  $L = 2$  см период автоколебаний практически не меняется и примерно равен  $\tau = 0.52$  с, а для  $L = 1$  см с увеличением скорости наблюдается его возрастание. В значительной части рассмотренного диапазона скоростей зависимости  $\tau(V)$  для  $L = 1$  см и  $L = 2$  см практически совпадают.

На рис. 2.23 показаны экспериментальные и расчетные картины течения для значений  $L = 2$  см и  $V = 2$  м/с (режим А), в различные моменты

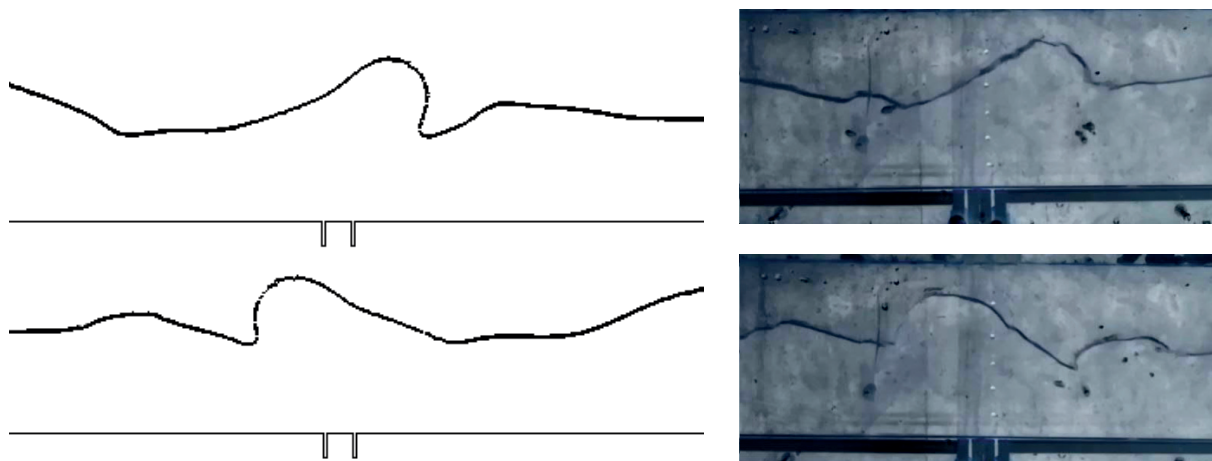


Рис. 2.23. Расчетные (слева) и экспериментальные (справа) формы свободных поверхностей для  $L = 2$  см и  $V = 2$  м/с.

времени, отвечающие крайним положениям фонтана в процессе автоколебаний. Следует отметить хорошее соответствие экспериментальных и расчетных результатов, как по форме свободной границы течения, так и по значению периода колебаний. Для указанных значений  $L$  и  $V$  найденный расчетом период  $\tau = 0.52$  с, а в эксперименте получено значение  $\tau = 0.55$  с, т.е. отличие их значений не превосходит 6%.

Наблюдения за свободной поверхностью в экспериментах, а также найденной в расчетах, позволяет сделать вывод, что качественно картина течения мало отличается от случая одиночной струи. Были дополнительно сделаны отдельные численные расчеты для одиночной струи, ширина которой равнялась  $2\delta = 0.6$  см, для того же значения скорости  $V = 2$  м/с. Расчеты показали, что действительно получается весьма похожая качественно картина течения. При этом также мало отличается период автоколебаний, его значение оказалось равным 0.51 с.

Для режима  $B$  характерно образование двух фонтанов, совершающих согласованные автоколебания в противоположные стороны (рис. 2.21). Такого рода колебания появляются начиная с  $L = 7$  см и существуют в весьма узком диапазоне  $1.5 \leq V \leq 1.75$  м/с, который расширяется с увеличением расстояния между соплами. Например, при  $L = 10$  см этот режим существует в диапазоне  $1.5 \leq V \leq 2$  м/с, а для  $L = 15$  см при



$1.5 \leq V \leq 2.5$  м/с. Для относительно малых расстояний  $L$  автоколебания сопровождаются интенсивным соударением фонтанов с образованием брызговой струйки (рис. 2.24).

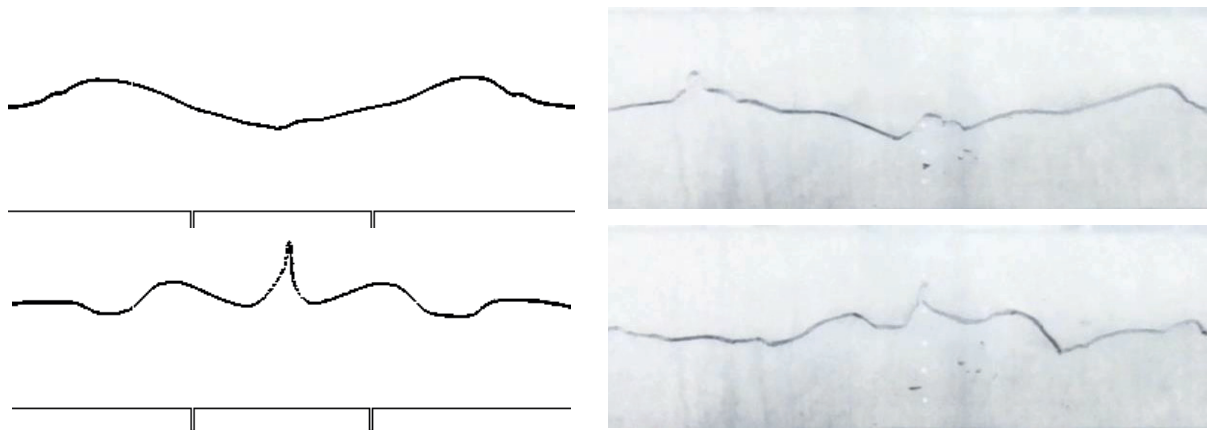


Рис. 2.24. Расчетные (слева) и экспериментальные (справа) формы свободных поверхностей для  $L = 15$  см и  $V = 1.75$  м/с.

Следует отметить, что аналогичные режимы согласованных автоколебаний имеют место также для достаточно больших расстояний между подающими каналами, например при  $L = 50$  см (рис. 2.25).

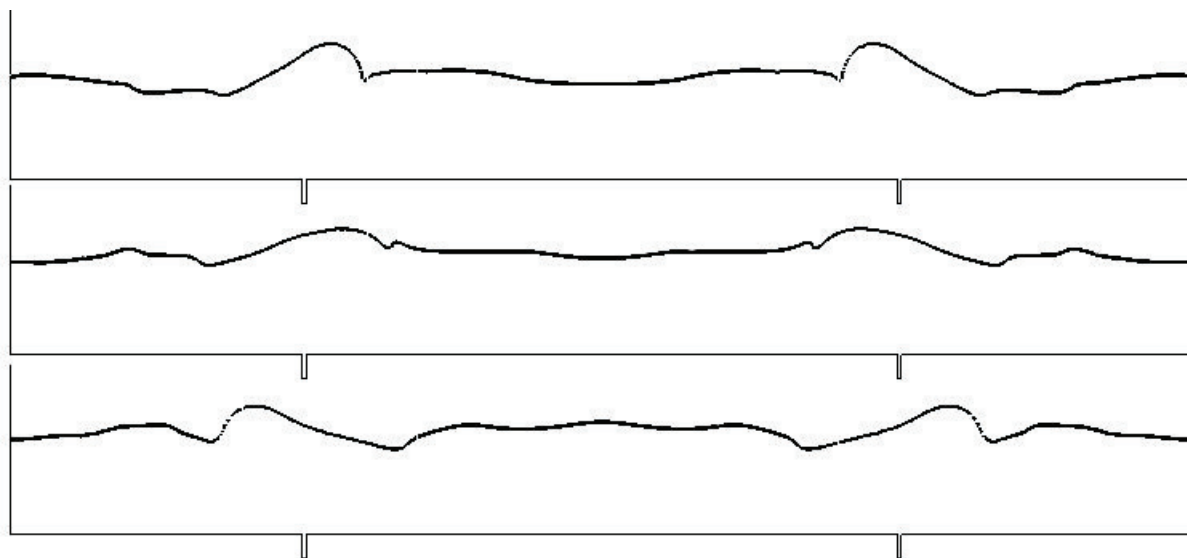


Рис. 2.26. Расчетные формы свободных поверхностей для  $L = 50$  см и  $V = 1.5$  м/с.

В режиме  $C$  также наблюдается образование двух отдельных возвышений свободной поверхности, но здесь, в отличие от  $B$ , фонтаны совершают согласованные автоколебания в одну и ту же сторону (рис. 2.21).

Такой режим впервые появляется при  $L = 30$  см и существует в диапазоне скоростей  $1 \leq V \leq 2$  м/с. С дальнейшим ростом скорости регулярность автоколебаний нарушается по причине интенсивного волнообразования в межструйном пространстве. На рис. 2.26 приведено сравнение картин течения, найденных в расчете и эксперименте для данного режима фонтанирования. Период автоколебаний в опыте был равен  $T = 0.52$  с и в точности совпал с расчетным значением.

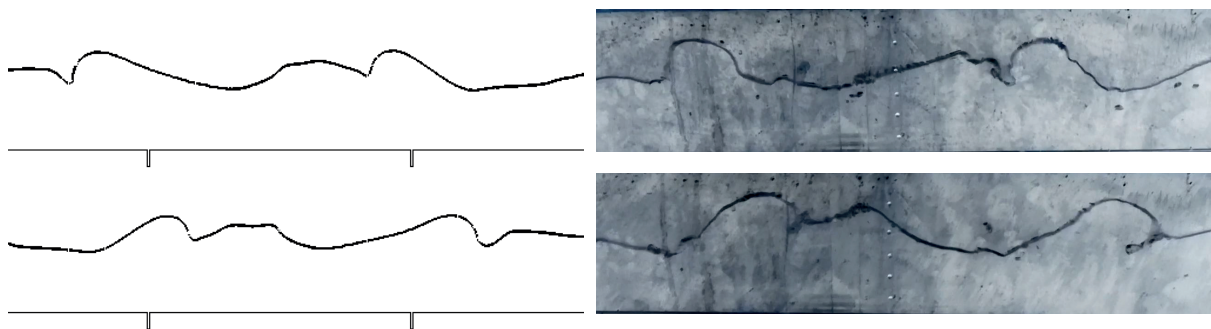


Рис. 2.26. Расчетные (слева) и экспериментальные (справа) формы свободных поверхностей для  $L = 30$  см и  $V = 1.5$  м/с.

Далее приведем описание некоторых других характерных видов течений, отличных от указанных выше регулярных автоколебаний.

При относительно малых значениях скорости  $0.5 \leq V \leq 1.25$  м/с имеют место режимы с образованием одного или двух стационарных или квазистационарных фонтанов, в зависимости от расстояния  $L$ . При этом течение обладает симметрией относительно плоскости, равноудаленной от насадков. Пример такого течения показан на рис. 2.27. В окрестности выхода струй над свободной поверхностью образуются две неподвижные возвышенности, которые с ростом скорости, начиная с некоторого его значения теряют свою устойчивость. Между струями и стенками водосливов формируется две стационарные зоны с циркуляционным течением.

Заслуживает быть отмеченным еще один нестационарный режим течения, обнаруженный в диапазоне  $3 \leq L \leq 7$  см. Начиная с некоторой скорости, индивидуальной для каждого расстояния  $L$ , в области между струями возникает интенсивный вихрь, который воздействует на затоп-



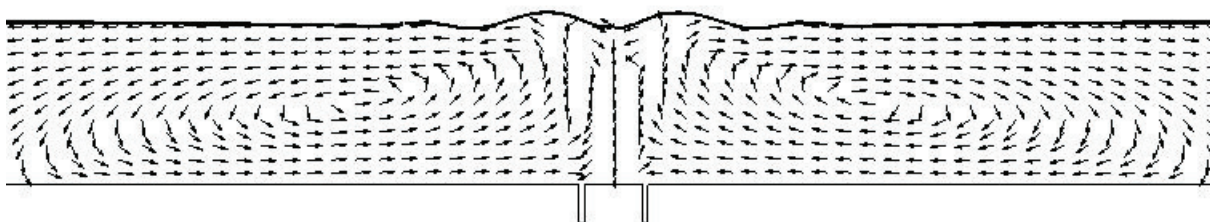


Рис. 2.27. Форма свободной поверхности и векторное поле течения для  $L = 3$  см и  $V = 0.75$  м/с.

ленные участки струй и существенно отклоняет их от первоначального вертикального направления (рис. 2.28, 2.29). Расчеты показывают, что в этом случае вблизи свободной поверхности скорость жидкости оказывается мала, свободная поверхность является практически невозмущенной, интенсивное движение жидкости происходит лишь в придонном слое.

Эксперименты, проведенные для диапазонов параметров  $L$  и  $V$ , в которых наблюдался описанный выше эффект, подтвердили результаты расчетов.

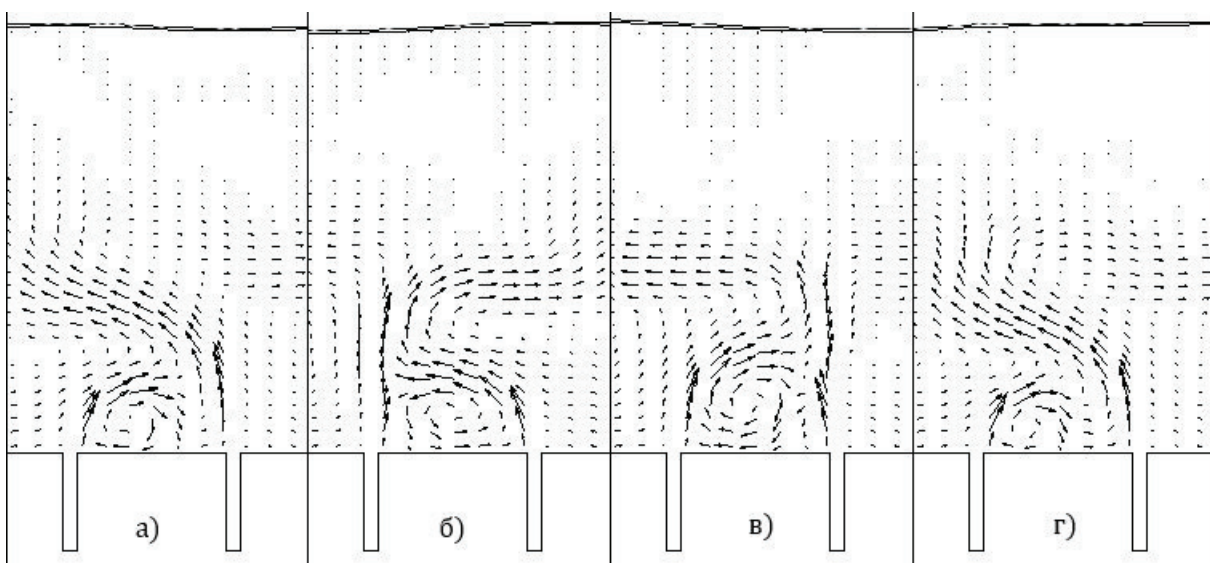


Рис. 2.28. Векторное поле течения с шагом  $\Delta t = 0.04$  с для  $L = 3$  см и  $V = 1$  м/с.

В заключение отметим, что в исследованном диапазоне расстояний существуют такие значения  $L$ , при которых регулярных автоколебаний не наблюдается ни при каком значении  $V$ . Так, например при  $L = 5$  см при относительно малых  $V$  имеют место стационарные течения, которые

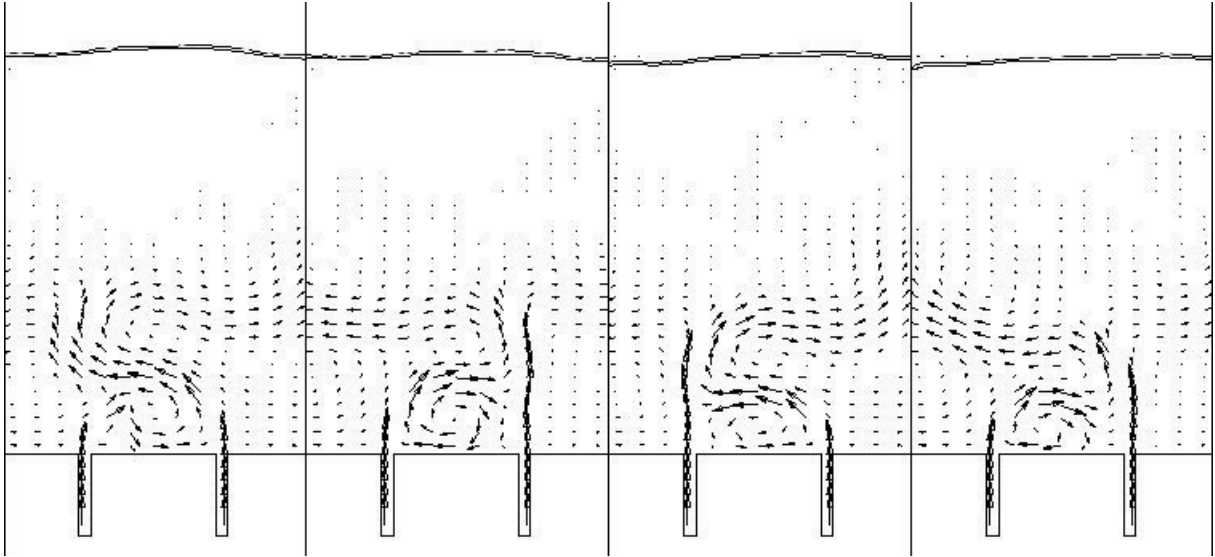


Рис. 2.29. Векторное поле течения с шагом  $\Delta t = 0.04$  с для  $L = 3$  см и  $V = 3$  м/с.

с ростом скорости струй перестраиваются в описанные выше нестационарные течения с практически не возмущенной свободной поверхностью. При  $L = 40$  см существуют либо стационарные течения, либо течения с нерегулярными колебаниями фонтанов. В последнем случае обрушение фонтанов приводит к хаотичному волнообразованию в области между ними, препятствующему появлению регулярных режимов вида  $B$  или  $C$ .

## ГЛАВА 3

### ПРОНИКАНИЕ НАКЛОННЫХ СВОБОДНЫХ И ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ В ОТНОСИТЕЛЬНО УЗКИХ КАНАЛАХ\*

Настоящая глава посвящена изучению проникания через поверхность жидкости, находящейся в относительно узких каналах, наклонных свободных и затопленных струй. Экспериментально исследован процесс проникания через свободную поверхность свободной клиновидной струи. Изучено взаимодействие со свободной поверхностью наклонной затопленной струи, вытекающей из щели в вертикальной стенке. Проведено численное моделирование процесса эжектирования жидкости из сосуда конечного размера с наклонной стенкой пристенной затопленной струей.

#### 3.1. Проникание клиновидной струи через свободную поверхность

В настоящем разделе приведены результаты изучения проникания через свободную поверхность жидкости свободной клиновидной струи. Схема эксперимента показана на рис. 3.1. Опыты проводились с той же установкой, которая использовалась для изучения проникания вертикальных свободных струй. Расстояние между боковыми стенками установки  $h = 1$  см. В ее верхней части размещался насадок с двумя каналами прямоугольного сечения с шириной  $\delta = 0.3$  см, расположенными под углом  $\alpha$  друг к другу. Расстояние между выходными сечениями подающих жидкость каналов равнялось 3 см. Расстояние  $H$  от выходного сечения каналов до поверхности жидкости в установке регулировалось

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [38, 41, 42]

с помощью изменения высоты водосливов (рис. 3.1). Скорости струй воды  $V$ , подаваемых из каналов, были одинаковыми и контролировались с помощью весового метода. Эксперименты выполнены при значениях  $0 < V \leq 8$  м/с,  $5 \leq H \leq 30$  см,  $\alpha = 30^\circ$  и  $45^\circ$ .

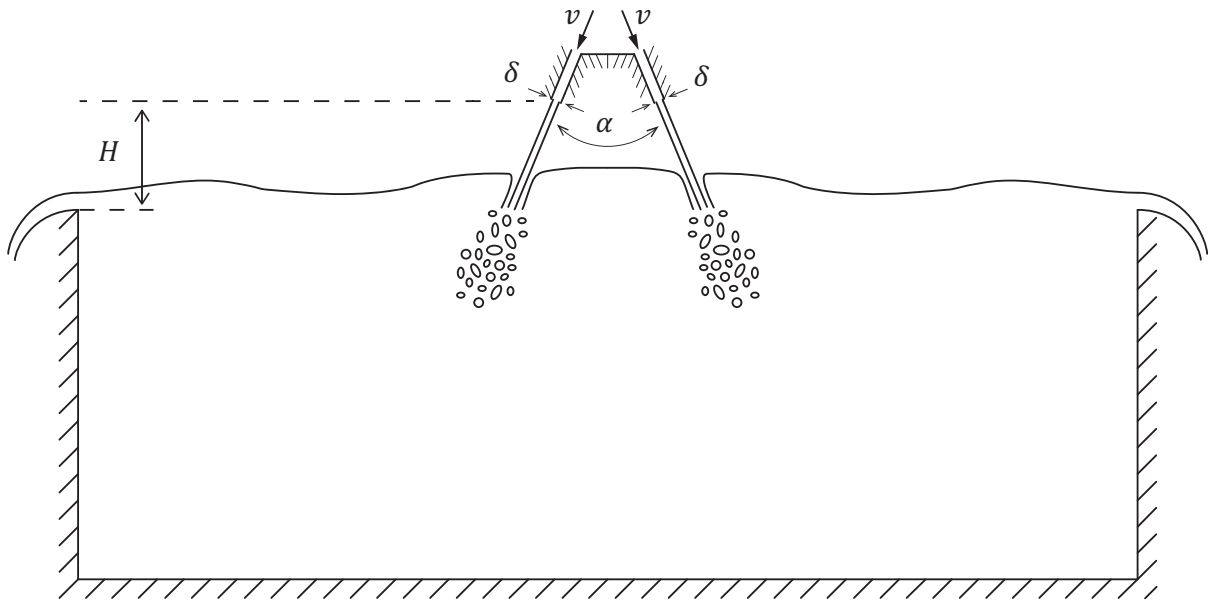


Рис. 3.1. Схема эксперимента.

Существенной особенностью, отличающей рассматриваемые течения от случая пары вертикальных струй (раздел 1.4), является наличие заполненной воздухом замкнутой области, ограниченной боковыми стенками установки, нижней частью насадка, свободной поверхностью жидкости в установке и вытекающими из насадка струями. Давление воздуха в этой области может меняться как вследствие эжекции воздуха проникающими струями, так и в связи с дальнейшим всплытием пузырьков воздуха в межструйном пространстве. Возникающий перепад давления воздействует на свободные участки струй, отклоняя их в поперечном направлении в ту или иную сторону, и для определенных диапазонов значений скорости струй и высоты расположения насадка приводит к возникновению регулярных автоколебательных режимов.

Приведем далее описание характерных режимов течений для случая  $H = 10$  см,  $\alpha = 30^\circ$  и различных числах Фруда  $Fr = V/\sqrt{gh}$ .



Рис. 3-2. Фотоснимок течения при  $H = 10$  см,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $Fr = 4$ .

При относительно малых значениях  $Fr$  течение является практически стационарным. На рис. 3.2 показан фотоснимок течения для  $Fr = 4$ . Как можно видеть, объем внедряемого воздуха достаточно мал, свободные участки струй практически не меняют своего положения. Всплывающие в межструйном пространстве пузыри компенсируют унос воздуха вследствие эжекции, при этом давление воздуха в этой области мало отличается от атмосферного.

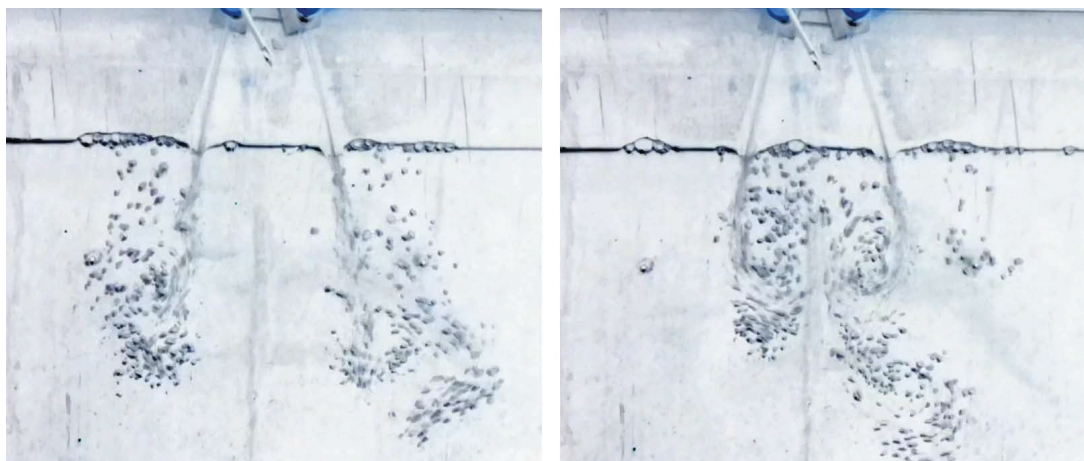


Рис. 3.3. Фотоснимки течения при  $H = 10$  см,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $Fr = 6$ .

Уже при  $Fr=6$  картина течения меняется (рис.3.3). Унос воздуха из межструйного пространства становится более интенсивным, давление воздуха в этой области падает, и перепад давления смещает свободные



участки струй навстречу друг другу.

В местах проникания через свободную поверхность струи становятся более вертикальными, и в некоторый момент затопленные участки струй сближаются. В дальнейшем определенная часть воздуха возвращается со всплывающими пузырями в межструйное пространство. Давление в нем повышается, и свободные участки струй вновь удаляются друг от друга. Далее процесс повторяется, но при  $Fr = 6$  такие колебания не являются регулярными.

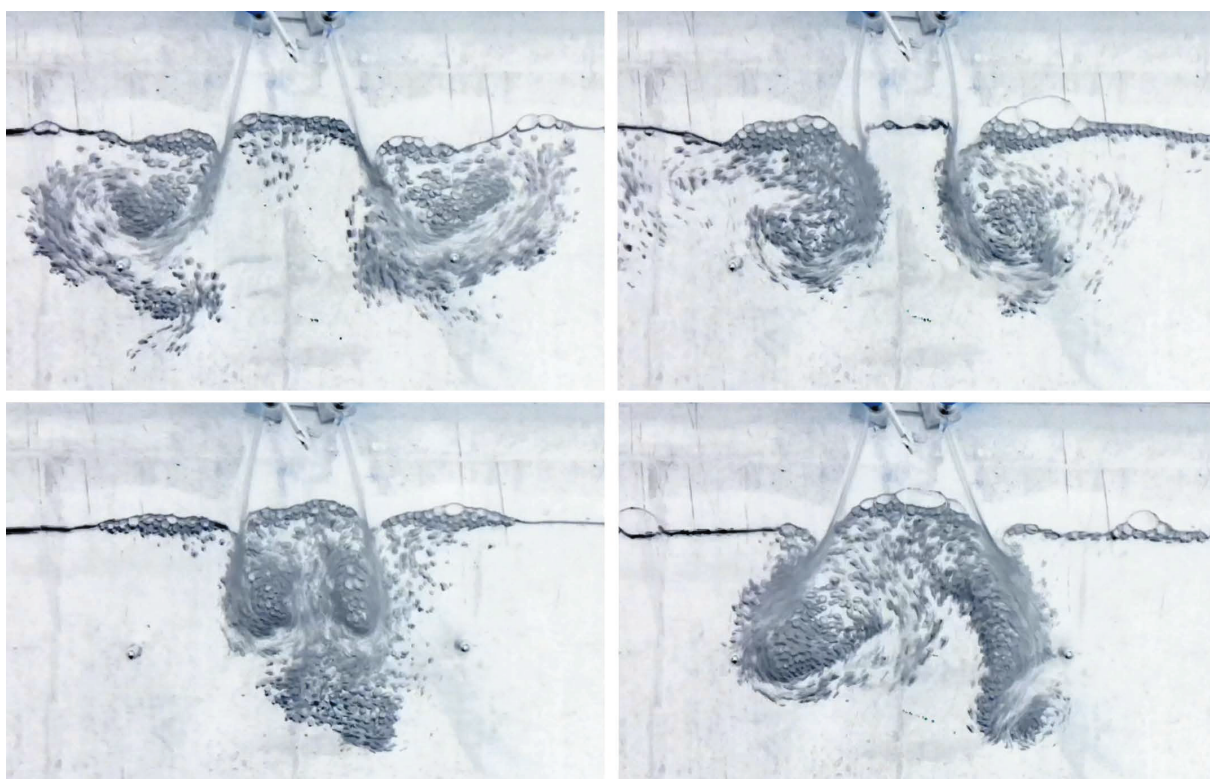


Рис. 3.4. Фотоснимки течения при  $H = 10$  см,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $Fr = 9$ .

С увеличением скорости струй интенсивность эжектирования возрастает, возникает режим течения с регулярными перемещениями свободных границ струй и их затопленных участков. На рис. 3.4 показана серия последовательных кадров в интервале одного периода регулярных автоколебаний, наблюдаемых при  $Fr = 9$ . Следует отметить, что повышение давления воздуха в межструйной области связано не только с возвращением его со всплывающими пузырями, но и с существенным повышением

уровня жидкости между струями из-за поперечных колебаний их затопленных участков.

С дальнейшим увеличением скорости струй картина течения качественно не меняется. Происходит все больший подъем жидкости в межструйной области. Как видно из рис. 3.5, в некоторые моменты времени межструйное пространство практически полностью оказывается заполненным восходящим потоком газожидкостной смеси.

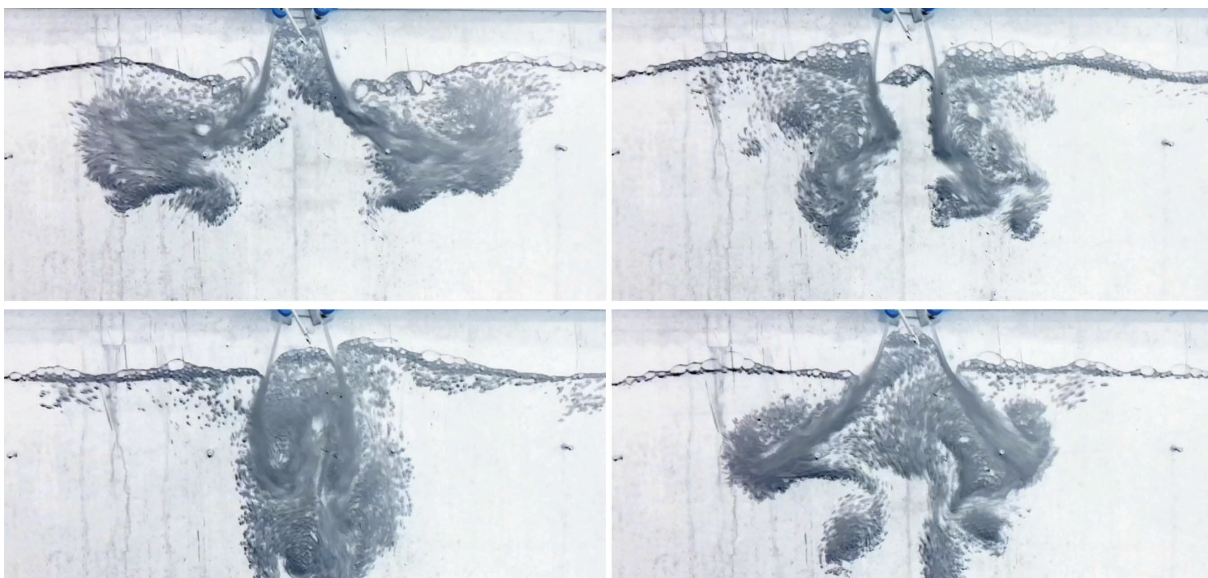


Рис. 3.5. Фотоснимки течения при  $H = 10$  см,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $Fr = 16$ .

При достижении скорости струй определенного значения ( $Fr \approx 25$ ) происходит нарушение регулярных автоколебаний. Такие режимы сопровождаются сильным волнообразованием в установке, а амплитуда перемещений пузырьковых масс оказывается сопоставима с размерами установки (рис. 3.6).

Указанный выше механизм возникновения автоколебательных режимов существенно отличается от случая вертикальных струй, описанного в главе 1. Специально выполненные эксперименты с одиночными струями, отклоненными на угол  $\alpha/2$  от вертикали (с теми же  $\alpha$ ), показали, что автоколебательные режимы при этом не существуют ни для каких значений скорости струи и высоты расположения выходного сечения канала над свободной поверхностью.

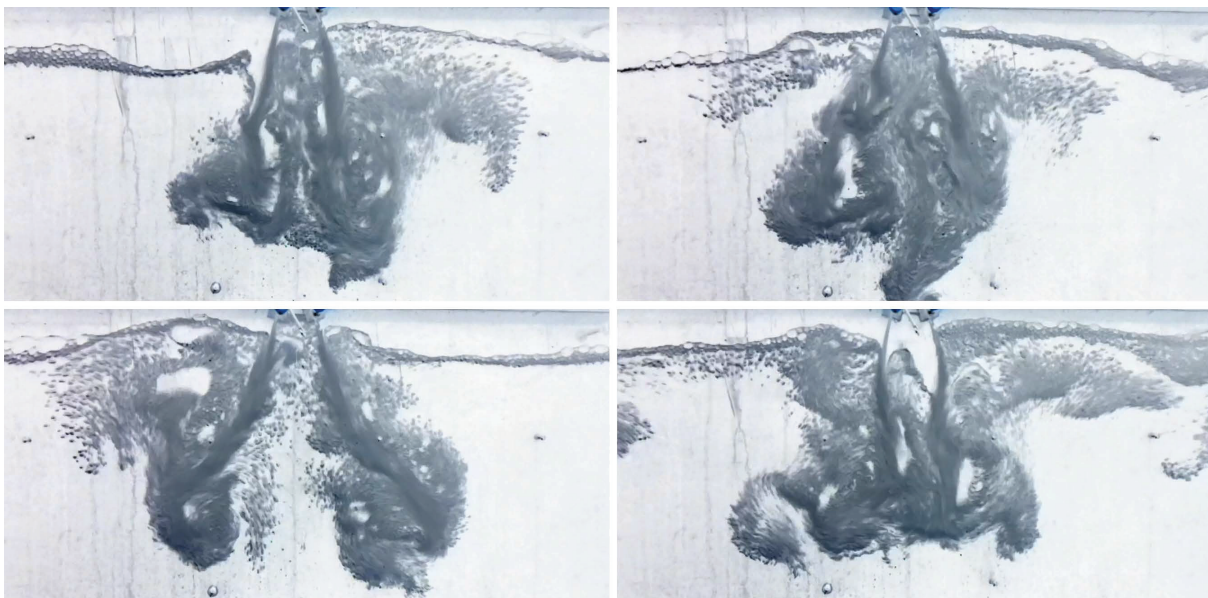


Рис. 3.6. Фотоснимки течения при  $H = 10$  см,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $Fr = 25$ .

В работах В.П. Карликова и С.Л. Толоконникова [15, 16], посвященных экспериментальному изучению проникания через поверхность жидкости свободных тонкостенных струй, вытекающих из конического щелевого сопла с вертикальной осью, было обнаружено наличие регулярных автоколебательных режимов поперечного перемещения границ струйного купола. Было установлено, что возникновение этих режимов также связано с периодическим изменением давления воздуха в подкупольном объеме.

Следует отметить, что для клиновидной струи регулярные автоколебания имеют место в гораздо более узком диапазоне значений определяющих параметров, чем в случае куполообразной струи. Это связано, во-первых, с тем, что толщина струи, вытекающей из конического щелевого сопла, при удалении от среза сопла убывает существенно быстрее, чем у клиновидной струи, и для поперечного перемещения границ тонкого струйного купола требуются меньшие перепады давления. Кроме того, как уже было отмечено в главе 1, вытекающие из каналов прямоугольного сечения струи являются лишь относительно свободными из-за частичного контакта их со стенками установки. Из-за взаимодей-



ствия со стенками происходит торможение струй в их торцевых участках и растекание по стенкам установки. Форма сечения струй меняется, и при некотором удалении от выходных сечений каналов может происходить нарушение их сплошности. Тогда давление воздуха в межструйном пространстве становится равным атмосферному, и автоколебания в этом случае существовать не могут.

Для некоторых из обнаруженных в опытах регулярных автоколебательных режимов течений построены зависимости безразмерного периода  $T = \tau \sqrt{g/h}$  от числа Фруда  $Fr = V/\sqrt{gh}$  (рис. 3.7).

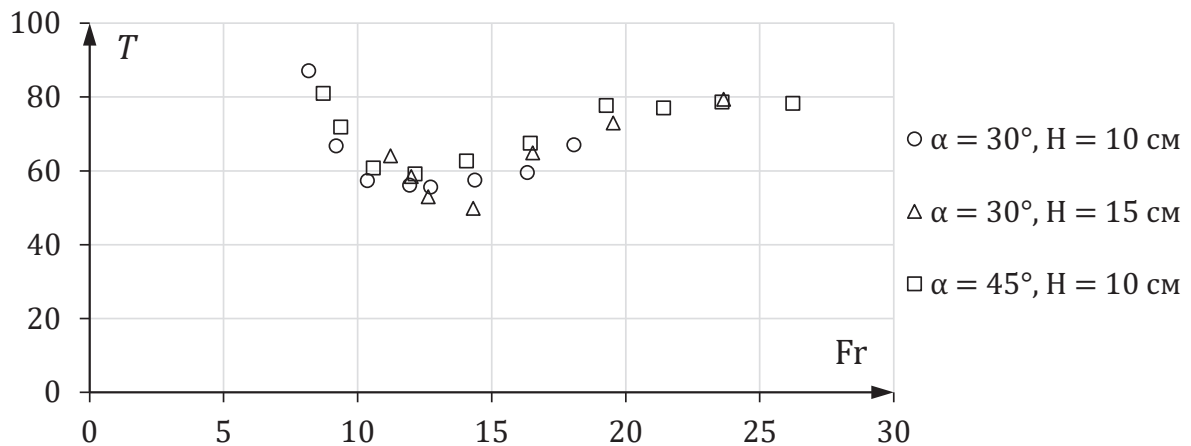


Рис. 3.7. Зависимости  $T = T(Fr)$  безразмерного периода от числа Фруда для различных  $H$  и  $\alpha$ .

С ростом  $Fr$  вначале наблюдается монотонное убывание периода автоколебаний до значения  $T \approx 50$  при  $Fr \approx 12$ , связанное с возрастанием интенсивности эжектирования воздуха из межструйного пространства. При  $Fr > 12$  затопленные участки струй начинают взаимодействовать друг с другом, что приводит к периодическому повышению уровня жидкости между струями и увеличению амплитуды перемещений их затопленных участков. В этом диапазоне чисел Фруда период автоколебаний монотонно возрастает до значения  $T \approx 80$ .

### 3.2. Проникание пристеночной наклонной затопленной струи.

Представлены результаты экспериментального изучения процесса взаимодействия со свободной поверхностью наклонной затопленной струи. Эксперименты проводились на установке, представляющей собой относительно узкий канал с расстоянием между боковыми стенками  $h = 1$  см. Схема эксперимента показана на рис. 3.8. В левой части установки размещался насадок с прямоугольным каналом шириной  $\delta = 0.2$  см, выходное сечение которого было расположено вблизи торцевой стенки. Водослив, установленный на противоположном торце установки, обеспечивал начальное затопление  $H$  выходного сечения канала под свободной поверхностью (рис. 3.8).

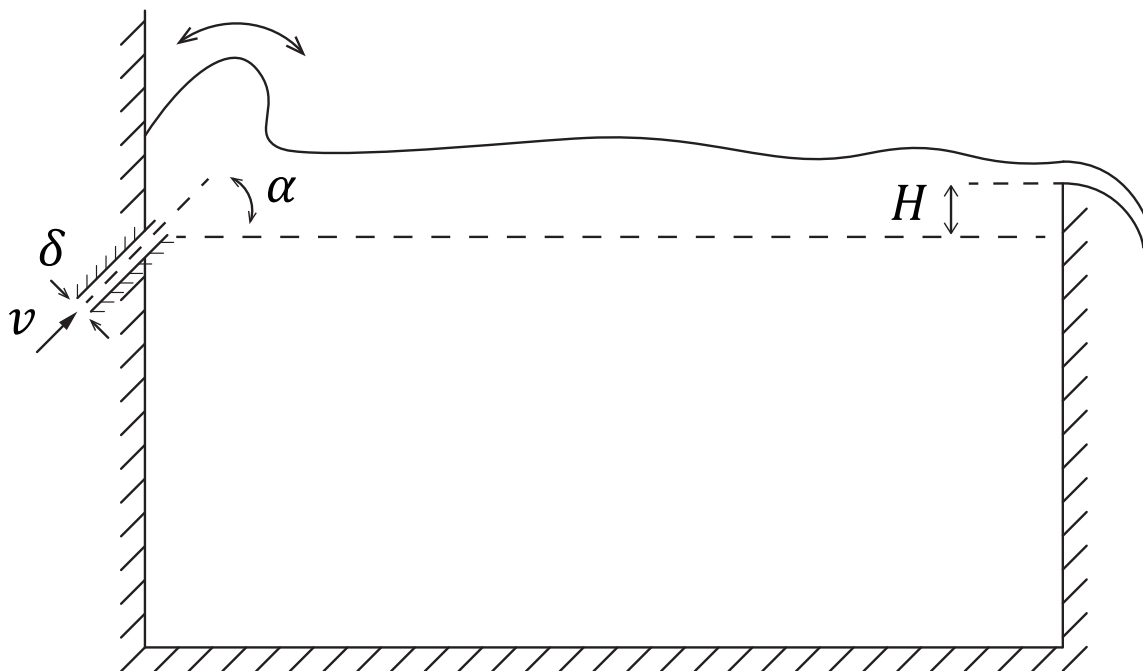


Рис. 3.8. Схема эксперимента.

Эксперименты выполнены для следующих диапазонов значений определяющих параметров:  $0 \leq H \leq 10$  см;  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$  и  $60^\circ$ ;  $0.5 \leq v \leq 5$  м/с. Здесь  $\alpha$  — угол наклона канала к горизонтали,  $v$  — скорость подаваемой из канала струи воды.

В экспериментах было обнаружено, что в широком диапазоне изменения параметров  $v$ ,  $H$  и  $\alpha$  наблюдаются четко выраженные автоколебательные режимы перемещения создаваемого затопленной струей возвышения свободной поверхности к торцевой стенке и в обратном направлении. Возникновение таких режимов, как и в случае фонтанирования вертикальных струй [9, 14, 22], связано с появлением в окрестности затопленного участка струи периодически меняющих направление на противоположное перепадов давления. Действительно, в некоторый момент времени наблюдается ситуация, когда в области между струей и стенкой уровень жидкости оказывается существенно ниже, чем справа от струи. В этом случае перепад давления отклоняет струю влево, и возвышение свободной поверхности движется к направлению к стенке. При взаимодействии фонтана со стенкой уже вблизи стенки возникает существенный подъем уровня жидкости, что приводит в последующем к отклонению струи в направлении от стенки. В дальнейшем процесс повторяется. Следует отметить, что между затопленной струей и боковой стенкой во многих случаях образуется циркуляционное течение с замкнутыми линиями тока, что дополнительно влияет на перепад давления по обеим сторонам струи. Были обнаружены и другие, отличные от автоколебательных, режимы течения.

Приведем далее описание эволюции течений с ростом скорости для случая  $\alpha = 45^\circ$  и нескольких  $H$ .

Для  $H = 0$ , т.е. для случая расположения выходного сечения канала на одной горизонтали с кромкой водослива, стационарные течения с незначительным возвышением свободной поверхности существуют только при малых скоростях струи, и уже при  $Fr = v/\sqrt{gh} = 2$  возникает описанный выше автоколебательный режим. Фотоснимки течения в некоторые последовательные моменты времени, соответствующие одному периоду колебаний, показаны на рис. 3.9, *a*. Автоколебания существуют в весьма узком диапазоне чисел Фруда. Начиная с  $Fr = 2.8$  они

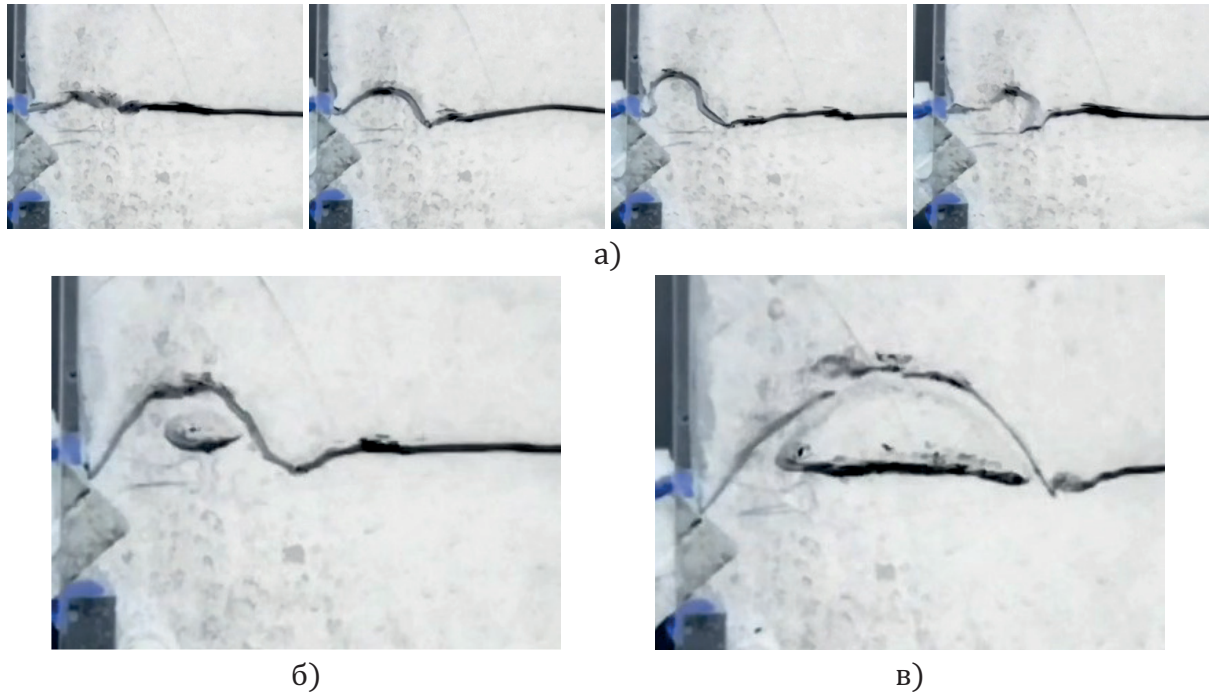


Рис. 3.9. Фотоснимки течения для  $\alpha = 45^\circ$ ,  $H = 0$ , а)  $Fr = 2$ , б)  $Fr = 2.8$ , в)  $Fr = 4.5$

прекращаются, течение становится квазистационарным (рис. 3.9,б). При этом пространство между струей и торцевой стенкой заполнено только воздухом. Струя препятствует перемещению возвышения свободной поверхности к стенке, т.е. играет здесь роль "струйной преграды". Дальнейший рост скорости приводит к прорыву струи через свободную поверхность и образованию течения со свободной струей. Фотоснимок такого течения для  $Fr = 4.5$  приведен на (рис. 3.9,в).

При  $H = 2.5$  см диапазон значений числа Фруда, в котором существуют регулярные автоколебания фонтана, расширяется. В области  $Fr < 4.2$  наблюдаются квазистационарные режимы течения с практически не меняющимся возвышением свободной поверхности, а при  $Fr = 4.2$  возникают регулярные автоколебания (рис. 3.10,а). Такой режим сохраняется вплоть до  $Fr = 8.5$  (рис. 3.10,б), а в дальнейшем регулярность колебаний нарушается, что связано с появлением частичного прорыва струи через свободную поверхность, например, для  $Fr = 12$  (рис. 3.11,а). Для  $Fr = 18$  (рис. 3.11,б) возникает описанный выше режим со "струйной преградой".

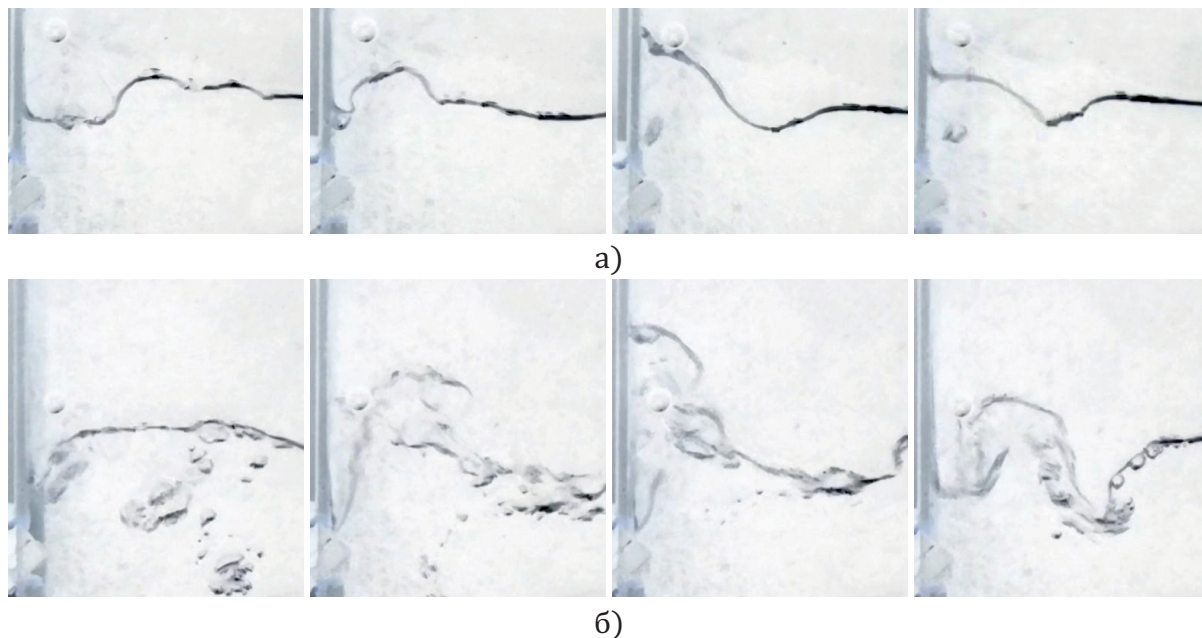


Рис. 3.10. Фотоснимки течения для  $\alpha = 45^\circ$ ,  $H = 2.5$ , а)  $Fr = 4.2$ , б)  $Fr = 8.5$ .

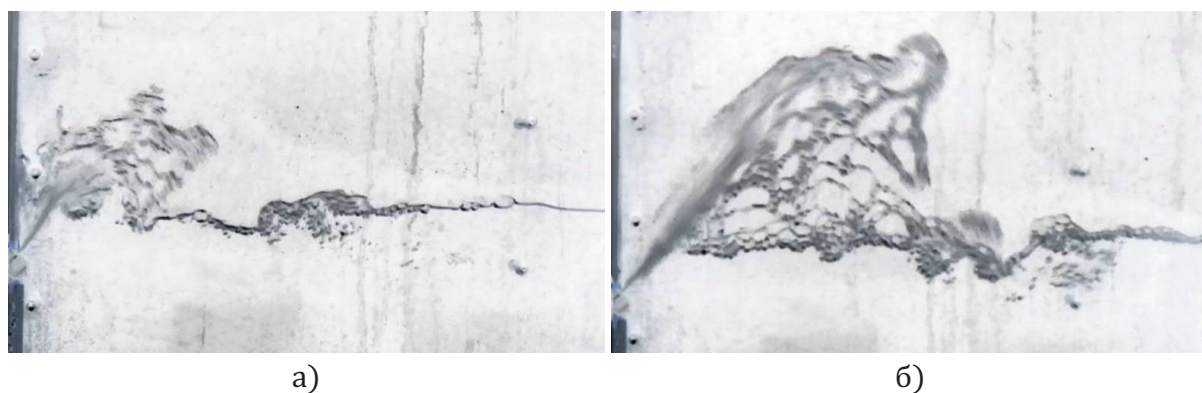


Рис. 3.11. Фотоснимки течения для  $\alpha = 45^\circ$ ,  $H = 2.5$ , а)  $Fr = 12$ , б)  $Fr = 18$ .

Для  $H > 2.5$  наблюдаемые автоколебательные режимы качественно не отличаются от описанных выше.

Отметим интересную особенность течений, имеющую место для  $H = 5$  см и относительно больших  $Fr$ . Например, при одном и том же значении  $Fr = 18$  могут существовать достаточно продолжительное время сменяющие друг друга режим с образованием свободной струи (рис. 3.12,а) и режим, в котором между струей и стенкой возникает интенсивный вихрь, способствующий "прилипанию" фонтана к боковой стенке (рис. 3.12,б).

Дальнейшее увеличение  $H$  приводит к сужению диапазона скоростей,

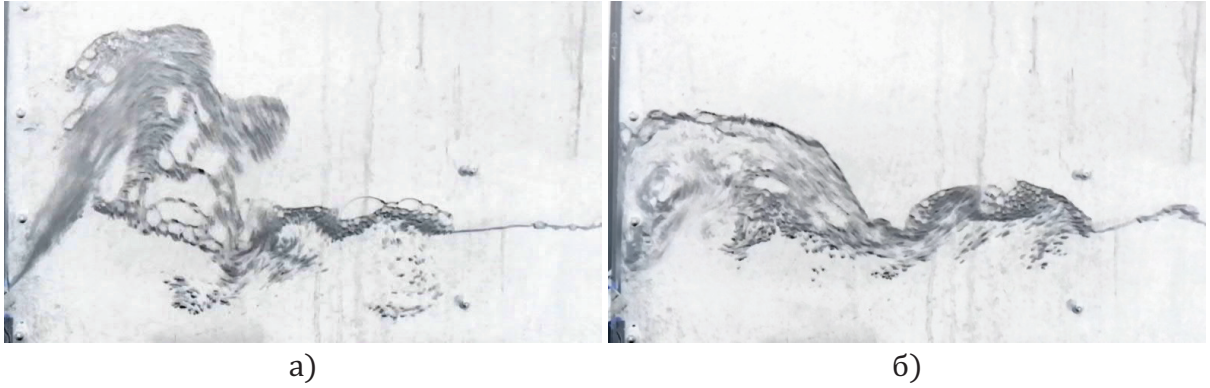


Рис. 3.12. Фотоснимки течения для  $\alpha = 45^\circ$ ,  $H = 5$ ,  $Fr = 18$ .

соответствующего регулярным автоколебательным режимам. Уже при  $H = 10$  см регулярные колебания не наблюдаются ни при каких значениях скорости струи. Для  $H = 10$  см при относительно малых скоростях струи типичны режимы течения с образованием хаотично колеблющейся верхушки фонтана (рис. 3.13,а), а при больших скоростях возникает циркуляционное течение вблизи стенки с образованием практически стационарного возвышения свободной поверхности у боковой стенки (рис. 3.13,б).

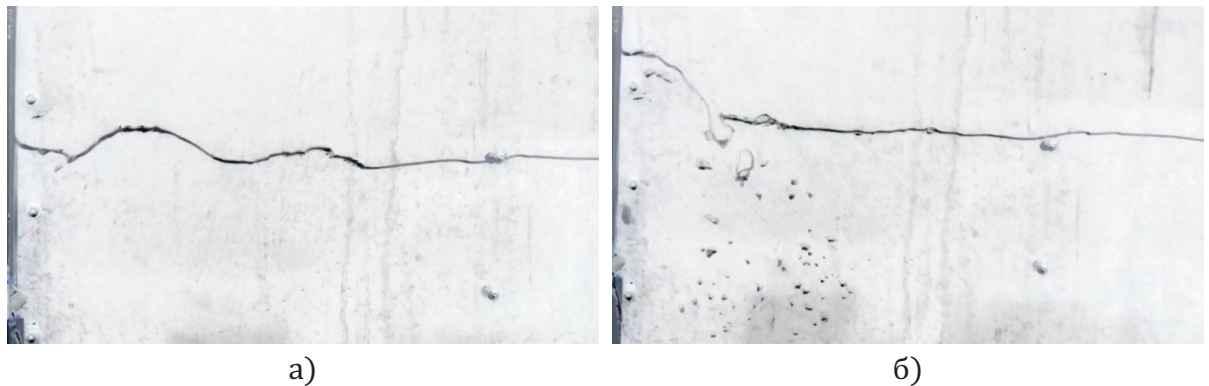


Рис. 3.13. Фотоснимки течения для  $\alpha = 45^\circ$ ,  $H = 10$ , а)  $Fr = 9$ , б)  $Fr = 16$ .

Зависимости безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда при  $\alpha = 45^\circ$  и нескольких  $H$  показаны на рис. 3.14. Эти зависимости являются монотонно возрастающими. Все экспериментальные точки могут быть с достаточной точностью аппроксимированы единой линейной зависимостью  $T = 2Fr + 7.5$ .

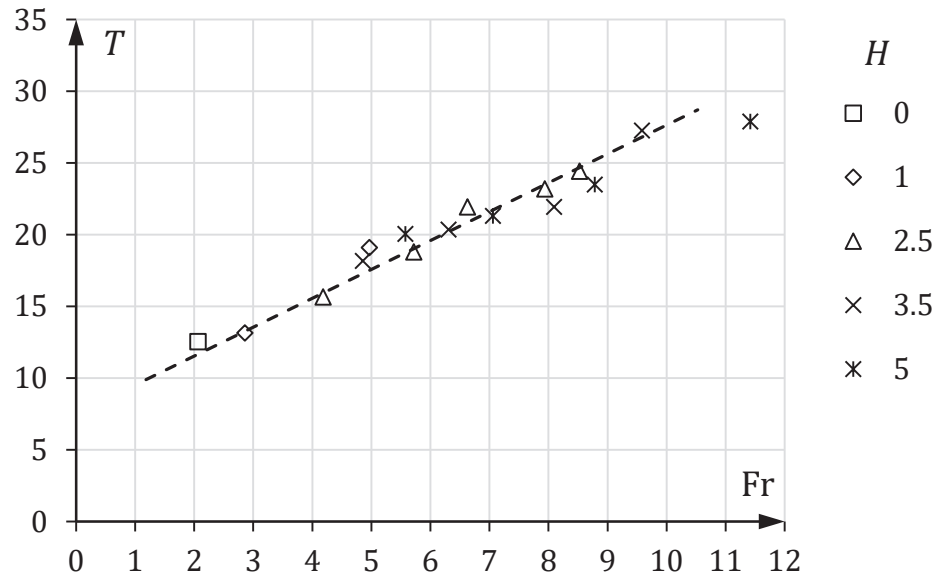


Рис. 3.14. Зависимости  $T = T(Fr)$  для  $\alpha = 45^\circ$  и различных  $H$ .

На рис. 3.15 приведены зависимости  $T(Fr)$  при фиксированном  $H = 2.5$  см и трех различных  $\alpha$ . Качественно эти зависимости соответствуют друг другу. При  $\alpha = 60^\circ$  наблюдается наиболее интенсивный рост периода с увеличением числа Фруда.

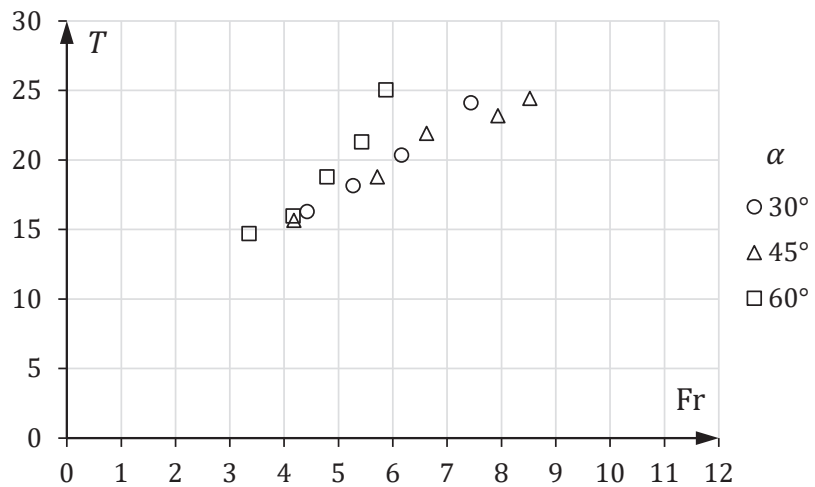


Рис. 3.15. Зависимости  $T = T(Fr)$  для  $H = 2.5$  и различных  $\alpha$ .

### 3.3. Эжектирование жидкости из сосуда плоской пристенной струей

Изучен процесс эжектирования жидкости из сосуда конечного размера с наклонной стенкой с помощью пристенной затопленной струи. Исследованы численно характер возникающих в сосуде течений и интенсивность удаления жидкости при разных значениях скорости струи и её толщины. Использован численный метод, для верификации которого была проведена серия экспериментальных исследований. Установлена возможность многократного формирования в жидкости вихревых областей в том числе с газовыми включениями в их центрах на последних стадиях эжектирования. Найдены зависимости времени полного опорожнения сосуда от скорости и толщины струй.

Существенной особенностью затопленных струй в вязкой жидкости является их способность интенсивно взаимодействовать с окружающей средой, увлекая ее за собой. Этот процесс эжектирования активно используется во многих технологических процессах (эжекторы, струйные насосы, смесители и т.п.) [45]. В некоторых работах эффективность эжектирования затопленными струями исследуется применительно к явлениям, наблюдаемым в природе [189].

Эжектирование с помощью плоских затопленных пристенных струй является одним из возможных способов удаления жидкости из сосуда. В настоящей работе рассматривается этот процесс применительно к сосуду конечного размера с наклонной стенкой [41, 42]. Изучены численно особенности возникающего в сосуде течения и интенсивность удаления жидкости при разных значениях определяющих параметров — начальной скорости струи  $V$  и ее толщины  $\delta$ .

На рис. 3.16 показана схематически емкость, из которой удалялась жидкость. Она представляла собой плоский сосуд с прямоугольной формой основания в плане с одной наклонной стенкой, вдоль которой перемещалась струя, вытекающая из канала прямоугольного сечения с



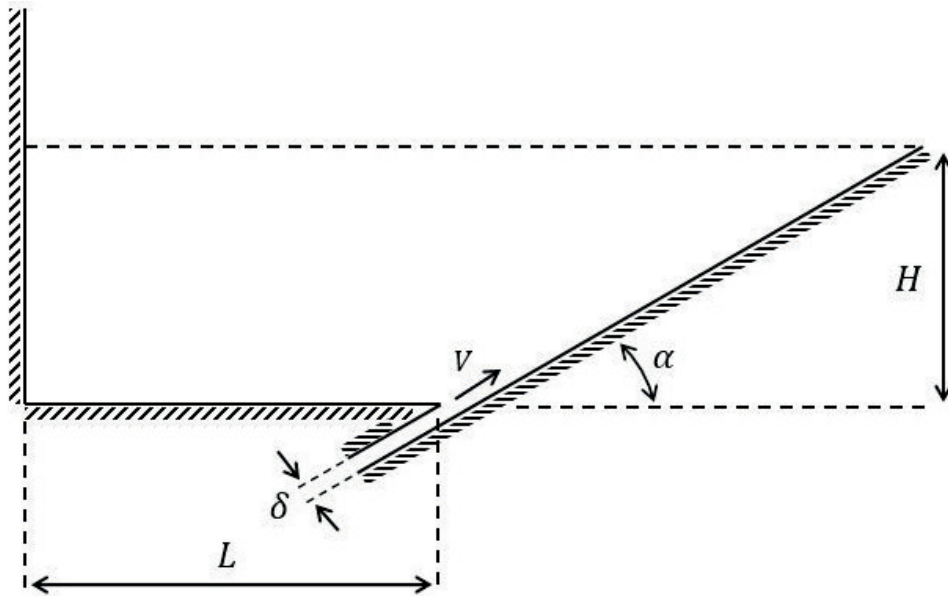


Рис. 3.16. Схема сосуда, из которого удалялась жидкость

толщиной  $\delta$ . Рассматривались два варианта сосудов с длиной основания  $L = 10$  см и  $L = 0$ . Угол наклона стенки, вдоль которой перемещалась струя, был равен  $30^\circ$ . Толщина струи  $\delta$  была равной 0.1; 0.2 и 0.4 см. Начальная глубина жидкости  $H = 7$  см. Расстояние между боковыми стенками экспериментальной установки 1 см.

Численный анализ течения выполнен с использованием пакета программ STAR CCM+ [190]. Расчет проводился на сетке, состоящей из прямоугольных ячеек, причем сеточные линии были сонаправлены с вектором скорости выходящей из канала струи. В пристенной области сетка была сгущена для более точного описания взаимодействия жидкости со стенкой (Рис. 3.17). При аппроксимации конвективных членов использовалась схема второго порядка точности, а для дискретизации по времени полностью неявная схема первого порядка точности. Для нахождения положения границы, разделяющей жидкость и воздух, использовался метод Volume of fluid [102]. На твердых поверхностях, ограничивающих объем жидкости, выполнялось условие прилипания. В выходном сечении канала задавался вектор скорости поступающей жидкости, одинаковый по модулю и перпендикулярный этому сечению. На остальной части гра-

ницы расчетной области задавалось условие постоянства давления.

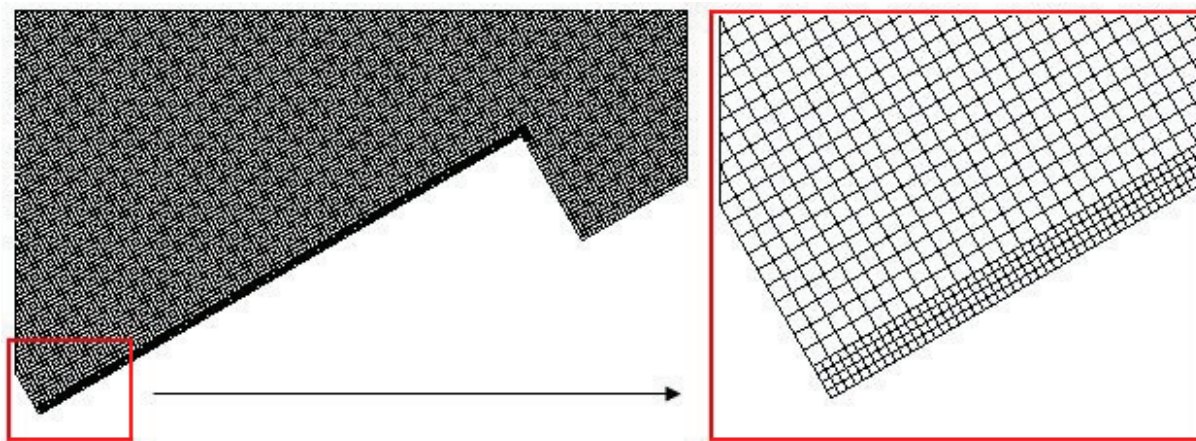


Рис. 3.17. Сеточная модель.

Для численных расчетов рассматривались несколько вариантов выбора наилучшего шага расчета по времени. Оптимальным оказалось значение числа Куранта  $Co = 5$ . С точки зрения ресурсоемкости и точности была использована модифицированная  $k - \varepsilon$  модель турбулентности.

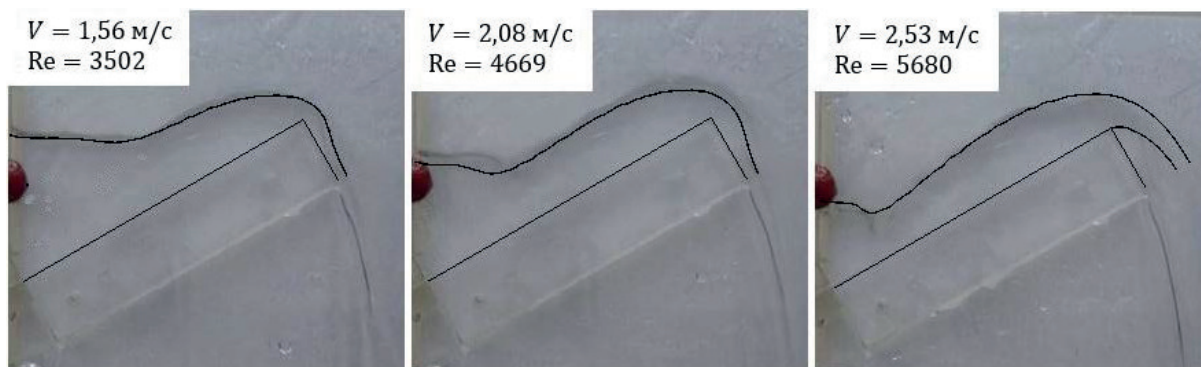


Рис. 3.18. Форма свободной поверхности в фиксированные моменты времени, найденные экспериментально (фотоснимки) и численным методом (сплошные линии)

С целью окончательной верификации численной модели для четырех показанных на рис. 3.18 режимов течений (с указанными значениями числа Рейнольдса  $Re = V\delta/\nu$ ,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости) была проведена серия экспериментов.

На рис. 3.18 показаны фотоснимки свободной границы в этих течениях в моменты времени, начиная с которых уровень жидкости в сосуде переставал меняться, т.е. процесс частичного опорожнения сосуда был

окончен. Черными линиями на снимках показана форма свободных поверхностей, найденных для этих моментов численным расчетом. Сравнение экспериментальных и численных результатов свидетельствует о приемлемой точности использованного метода расчета.

Последующие численные расчеты с использованием выбранной модели дают представление об особенностях течений, возникающих в жидкости.

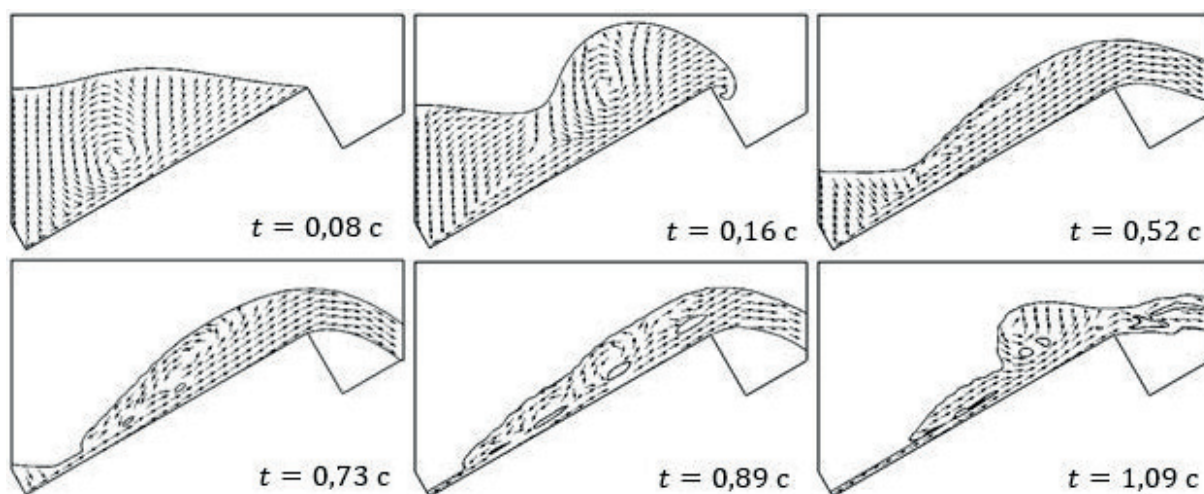


Рис. 3.19. Поля скоростей и форма свободной поверхности в разные моменты времени при  $V = 2.9 \text{ м/с}$ ,  $\delta = 0.2 \text{ см}$ ,  $L = 0$

На рис. 3.19 показано, например, как менялись поля скоростей со временем для случая, когда  $V = 2.9 \text{ м/с}$ ,  $\delta = 0.2 \text{ см}$ ,  $H = 7 \text{ см}$ . В моменты времени, предшествовавшие началу слива жидкости из емкости, хорошо заметно увеличение объема жидкости в сосуде по сравнению с исходным. Характерным является также многократное формирование вихревых областей в жидкости с газовыми включениями в их центрах, возникающих на последних стадиях истечения за счет эжектирования воздуха струей, проникающей в остающийся в сосуде над ней слой жидкости.

Основной целью исследования была сравнительная оценка эффективности использованного способа опорожнения сосудов при разных значениях скорости эжектирующей струи и ее толщины.

На рис. 3.20 показаны найденные для сосудов с  $L = 0$  и  $L = 10 \text{ см}$

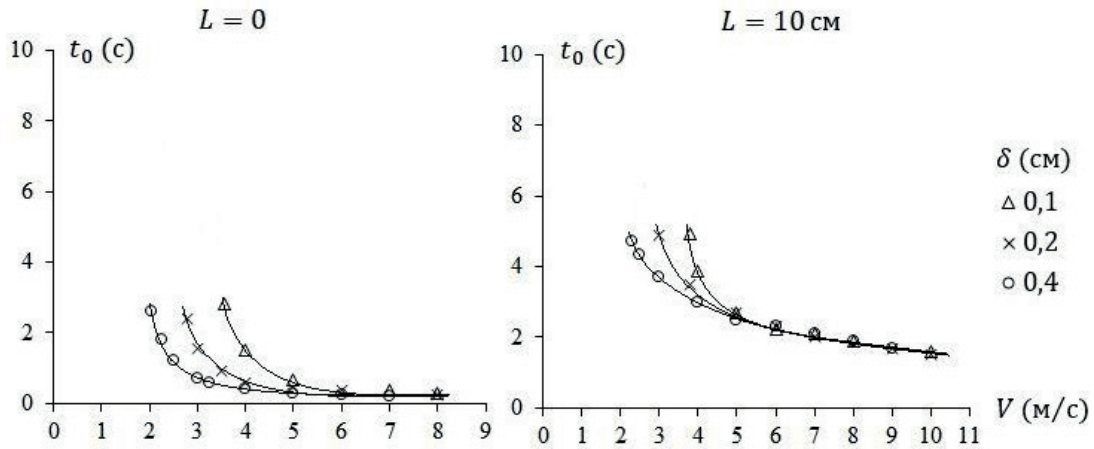


Рис. 3.20. Зависимость времени  $t_0$  полного опорожнения сосудов с  $L = 0$  и  $L = 10$  см при разных толщинах струй  $\delta$

зависимости времени  $t_0$  полного опорожнения сосуда от скорости струи  $V$  при разной толщине струй:  $\delta = 0,1; 0,2$  и  $0,4$  см. При одинаковых скоростях струи  $t_0$  имеет меньшее значение у более толстых струй, однако с увеличением скорости это отличие практически исчезает. Для каждой толщины струи существует диапазон скоростей струй, в котором невозможно полное опорожнение сосуда рассматриваемым способом за конечный промежуток времени. Аналогичные зависимости были получены и при других значениях  $L$  и угла наклона стенки  $\alpha$ .

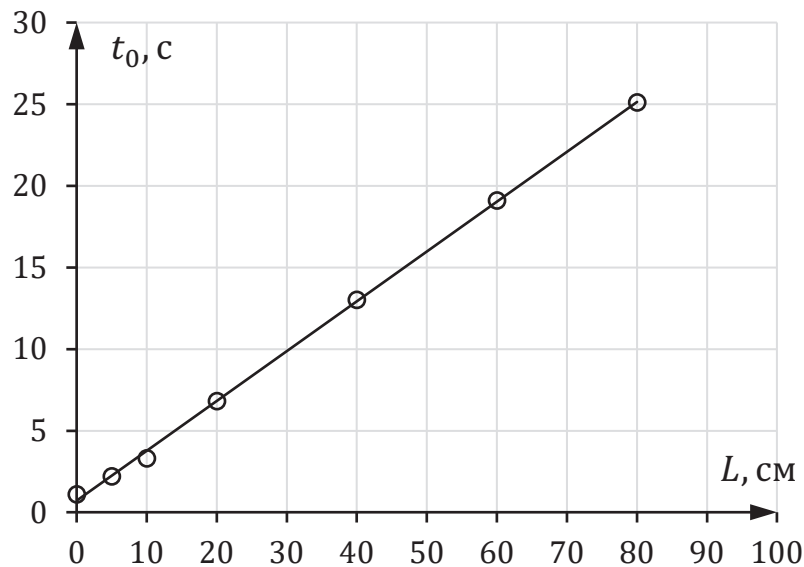


Рис. 3.21. Зависимость времени полного опорожнения сосуда от его размера.

Для исследования зависимости времени опорожнения сосуда от первоначального объема жидкости были проведены расчеты для  $H = 10$  см,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\delta = 0.2$  см,  $V = 4$  м/с и различными  $L = 0, 10, 20, 40, 80$  см. Зависимость  $t_0(L)$  оказалась близкой к линейной (рис. 3.21).

Для случая  $L = 5$  см,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\delta = 0.2$  см были выполнены расчеты минимального значения скорости  $V_0$ , при которой происходит полное опорожнение сосудов, при различных  $H = 5, 10, 20, 30, 40$  см. Значение  $V_0$  определялось в результате проведения серии расчетов с последовательным увеличением скорости струи  $V$ . Зависимость  $V_0(H)$  также оказалась линейной (рис. 3.22).

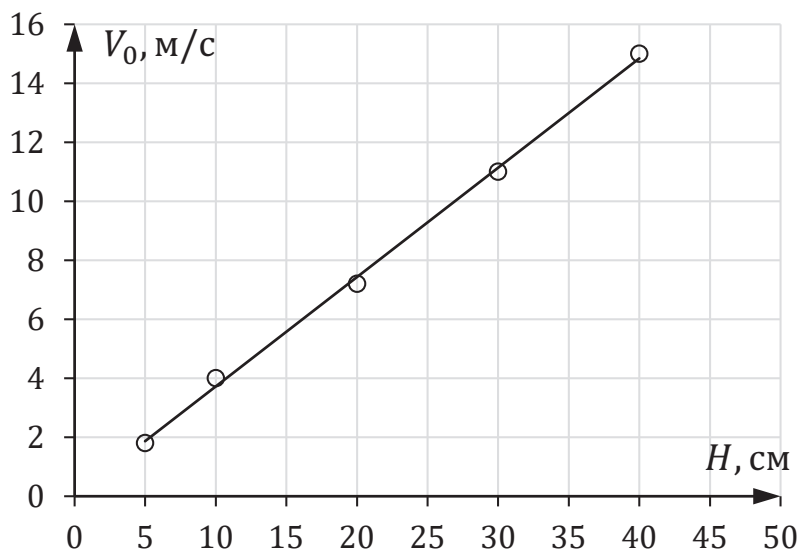


Рис. 3.22. Зависимость минимальной скорости от глубины сосуда, при которой возможно полное опорожнение сосуда.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Впервые обнаружен и исследован новый класс регулярных автоколебательных режимов течений, возникающих при проникании вертикальных плоских или круглых свободных струй через свободную поверхность жидкости, находящейся в относительно узких каналах. Возникновение таких режимов связано с внедрением в жидкость воздуха свободными струями. Найдены зависимости безразмерного периода автоколебаний от основных определяющих параметров. Установлено качественное отличие этих зависимостей для плоских и круглых струй. Учет изученных особенностей процесса эжектирования воздуха в жидкость свободными струями может быть полезным при проектировании ряда технических устройств (аэраторов, смесителей и др.).
2. Экспериментально и численно изучен процесс фонтанирования осесимметричных затопленных струй в узких каналах. Получены зависимости безразмерного периода автоколебаний от числа Фруда и относительного заглубления струи. Обнаружено существенное отличие этих зависимостей от случая плоских струй.
3. В численных расчетах обнаружены автоколебательные режимы фонтанирования затопленной струи, вытекающей из прямоугольного канала, для случая отсутствия стенок, органичивающих перемещение жидкости в поперечном направлении. Построены зависимости периода автоколебаний и высоты подъема фонтана от скорости струи.
4. Численно исследован процесс взаимодействия двух затопленных плоских струй в относительно узких каналах. Проведена классификация режимов взаимодействия. Установлены диапазоны изменения определяющих параметров, при которых возникают автоколебательные режимы фонтанирования. Для таких режимов построены зависимости периода автоколебаний системы фонтанов от числа Фруда.
5. Экспериментально обнаружено и изучено явление автоколебаний пристенного затопленного фонтана. Построены графики зависимостей пери-

ода колебаний от относительного заглубления щели, угла ее наклона и скорости затопленной струи.

6. Экспериментально исследованы режимы взаимодействия струй жидкости, вытекающих из клиновидного сопла, со свободной границей. Обнаружены регулярные автоколебательные режимы поперечного перемещения границ струи и их подводных участков. Установлено, что механизм автоколебаний оказывается отличным от случая одиночной струи. Построен график зависимости периода автоколебаний от скорости струи и расстояния от сопла до свободной поверхности жидкости.

7. Численно изучен процесс эжектирования жидкости из сосуда конечного размера с наклонной стенкой пристенной затопленной струей. Проведена сравнительная оценка эффективности использованного способа удаления жидкости из сосудов при разных значениях скорости эжектирующей струи и ее толщины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бондур В.Г., Журбас В.М., Гребенюк Ю.В.* Математическое моделирование турбулентных струй глубинных стоков в прибрежные акватории // *Океанология*. – 2006. – Т. 46. – № 6. – С. 805–820.
2. *Бондур В.Г., Гребенюк Ю.В., Ежова Е.В., Казаков В.И., Сергеев Д.А., Соустова И.А., Троицкая Ю.И.* Поверхностные проявления внутренних волн, излучаемых заглубленной плавучей струей. Часть 1. Механизм генерации внутренних волн // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. – 2009. – Т. 45. – № 6. – С. 833–845.
3. *Бондур В.Г., Гребенюк Ю.В., Ежова Е.В., Казаков В.И., Сергеев Д.А., Соустова И.А., Троицкая Ю.И.* Поверхностные проявления внутренних волн, излучаемых заглубленной плавучей струей. Часть 2. Поле внутренних волн // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. – 2010. – Т. 46. – № 3. – С. 376–389.
4. *Бондур В.Г., Гребенюк Ю.В., Ежова Е.В., Казаков В.И., Сергеев Д.А., Соустова И.А., Троицкая Ю.И.* Поверхностные проявления внутренних волн, излучаемых заглубленной плавучей струей. Часть 3. Поверхностные проявления внутренних волн // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. – 2010. – Т. 46. – № 4. – С. 519–529.
5. *Гузевский Л.Г.* Задача о плоском фонтане тяжелой жидкости // *Известия СО АН СССР. Серия технических наук*. – 1976. – Вып. 1. – № 3. – С. 85–93.
6. *Дружинин О.А., Троицкая Ю.И.* Излучение внутренних волн турбулентным фонтаном в стратифицированной жидкости // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2013. – № 6. – С. 135–146.
7. *Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Ураков А.Р.* Применение метода выделения особенностей для решения задач гидродинамики ве-



- сомой жидкости и электрохимического формообразования // Динамика сплошных сред со свободными границами. – Чебоксары: Издательство ЧГУ. – 1996. – С. 97–106.
8. *Карликов В.П.* Об истечении плоских струй несомой жидкости из-под свободной поверхности // Аннотации доклада 7-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Москва, 1991. – М.: Издательство МГУ. – 1991. – С. 184.
  9. *Карликов В.П., Трушина О.В.* Об автоколебаниях плоских затопленных фонтанов // Доклады Российской академии наук. – 1998. – Т. 361. – № 3. – С. 340–344.
  10. *Карликов В.П., Трушина О.В.* Об автоколебательных режимах истечения плоских струй жидкости из-под свободной поверхности // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. – 1998. – Т. 223. – С. 52–62.
  11. *Карликов В.П., Трушина О.В.* Об одном парадоксе симметрии в гидродинамике струйных течений // Труды семинара «Время, хаос и математические проблемы» под руководством академика В.А. Садовниченко. Институт математических исследований сложных систем. Москва, 1999. – М.: Издательство МГУ. – Вып. 1. 1999. – С. 149–163.
  12. *Карликов В.П., Трушина О.В., Шоломович Г.И.* Об использовании автоколебательных режимов фонтанирования жидкости для бесконтактного измерения ее расхода в трубопроводах // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. – 1999. – № 6. – С. 63–66.
  13. *Карликов В.П., Толоконников С.Л., Трушина О.В.* О возможной классификации автоколебательных режимов фонтанирования плоских вертикальных затопленных струй тяжелой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2009. – № 3. – С. 23–35.
  14. *Карликов В.П., Толоконников С.Л., Трушина О.В.* Об автоколебательных режимах фонтанирования плоских вертикальных затопленных струй тяжелой жидкости в установках с придонным стоком //

Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 3. – С. 89–96.

15. *Карликов В.П., Толоконников С.Л.* Об автоколебательных режимах проникания свободных конических тонкостенных турбулентных струй через поверхность жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2014. – № 3. – С. 65–73.
16. *Карликов В.П., Толоконников С.Л.* О зависимости периода автоколебаний купола конического струйного аэратора от ширины струи в выходном сечении кольцевого сопла // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2014. – №3. – С. 65–68.
17. *Карликов В.П., Толоконников С.Л.* О периоде автоколебаний куполов конических струйных аэраторов с разными углами конусности. Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2015. – № 5. – С. 60–64.
18. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* Об автоколебательных режимах проникания вертикальных свободных турбулентных струй через поверхность жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2017. – № 6. – С. 24–30.
19. *Karlikov V.P, Nechaev A. T., Tolokonnikov S.L.* Self-Oscillatory Regimes of the Penetration of Vertical Free Turbulent Jets through a Liquid Surface // Fluid Dynamics. – 2017. – V. 52. – № 6. – P. 733–739.
20. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* Об автоколебательных режимах проникания свободных или затопленных струй через поверхность жидкости // Водные ресурсы. – М.: Издательство Наука, 2019. – Т. 46. – № 2. – С. 142–148.
21. *Karlikov V.P, Nechaev A. T., Tolokonnikov S.L.* Self-Oscillation Regimes of Penetration of Free or Plunging Jets through Liquid Surface // Water Resources. Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). – 2019. – V. 46. – № 2. – С. 182–187.

22. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О фонтанировании вертикальных затопленных осесимметричных струй в относительно узких каналах // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2019. – Т. 74. – № 3. – С. 54–58.
23. *Karlikov V.P, Nechaev A.T., Tolokonnikov S.L.* Spouting of Vertical Submerged Axisymmetric Jets in Relatively Narrow Channels // Moscow University Mechanics Bulletin, Allerton Press Inc. (United States), 2019. – V. 74. – № 3. – P. 65–68.
24. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* Об особенностях проникания вертикальных свободных турбулентных струй через поверхность жидкости в узких каналах разной протяженности // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2020. – № 4. – С. 61–65.
25. *Karlikov V.P, Nechaev A.T., Tolokonnikov S.L.* On Features of Penetration of Vertical Free Turbulent Jets into Surface of Liquid in Narrow Channels of Different Lengths // Moscow University Mechanics Bulletin, Allerton Press Inc. (United States), 2020. – V. 75. – № 4. – P. 110–114.
26. *Карликов В.П., Толоконников С.Л.* Об автоколебаниях куполов конических струйных аэраторов с разными углами конусности // «Ломоносовские чтения-2014». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2014. – С. 81.
27. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О возможных автоколебательных режимах течений, возникающих при пересечении поверхности жидкости свободными или затопленными струями // «Ломоносовские чтения-2016». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2016. – С. 95.
28. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* Об автоколебательных режимах проникания свободных или затопленных струй через

поверхность жидкости // Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды». Тезисы докладов. – М.: Издательство МИАН, 2017. – С. 126.

29. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* Об автоколебаниях затопленных вертикальных осесимметричных струй в узких плоских каналах // «Ломоносовские чтения-2017». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2017. – С. 106.
30. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О проникании свободных вертикальных осесимметричных турбулентных струй через поверхность жидкости в узких плоских каналах // «Ломоносовские чтения-2017». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2017. – С. 105.
31. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О парадоксе симметрии в задаче о проникании через поверхность жидкости плоских свободных вертикальных турбулентных струй // «Ломоносовские чтения-2017». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2017. – С. 105.
32. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О фонтанировании вертикальных струй жидкости, вытекающих из затопленных насадков прямоугольной формы // «Ломоносовские чтения-2018». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2018. – С. 100.
33. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О фонтанировании вертикальных осесимметричных затопленных струй в узких каналах // «Ломоносовские чтения-2018». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2018. – С. 99.
34. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О проникании через свободную поверхность жидкости двух затопленных вертикальных струй // «Ломоносовские чтения-2018». Секция механики. Тезисы

- докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2018. – С. 99.
35. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О взаимодействии с покоящейся жидкостью двух свободных плоских струй // «Ломоносовские чтения-2018». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2018. – С. 99.
36. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* Особенности проникания свободных турбулентных струй через свободную поверхность жидкости в относительно узких плоских каналах разной протяженности с водосливным режимом стока // «Ломоносовские чтения-2019». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2019. – С. 115.
37. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О периодических колебаниях при проникании пары параллельных свободных струй через свободную поверхность жидкости // «Ломоносовские чтения-2020». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2020. – С. 107.
38. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* О проникании через свободную поверхность жидкости свободной клиновидной струи // «Ломоносовские чтения-2021». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2021. – С. 109.
39. *Карликов В.П., Нечаев А.Т., Толоконников С.Л.* Об автоколебательных режимах взаимодействия двух затопленных струй жидкости // «Ломоносовские чтения-2022». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2022. – С. 87.
40. *Маклаков Д.В.* Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами – М.: Янус-К, 1997. – 280 с.
41. *Нечаев А.Т.* Об эжектировании жидкости из сосуда плоской пристенной струей // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2019. – № 2. – С. 67–69.

42. *Nechaev A.T.* Ejection of a Liquid from a Vessel by a Plane Wall Jet // Moscow University Mechanics Bulletin, Allerton Press Inc. (United States), 2019. – V. 74. – № 2. – P. 51–53.
43. *Осипцов А.А.* Автоколебания плоского фонтана при отсутствии начального затопления // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2005. – № 2. – С. 59–62.
44. *Петухов Ю.И.* О некоторых плоских течениях тяжелой жидкости // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. – 1966. – № 5. – С. 135–139.
45. *Соколов Е.Я., Зингер Н.М.* Струйные аппараты. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 352 с.
46. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. – М.: Мир, 1977. – 431 с.
47. *Троицкая Ю.И., Сергеев Д.А., Ежова Е.В., Соустова И.А., Казаков В.И.* Автогенерация внутренних волн всплывающими струями в стратифицированном бассейне. Доклады Российской академии наук. – 2008. – Т. 419. – № 5. – С. 691–695.
48. *Baawain M.S., Gamal El-Din M., Smith D.W.* Characterizing two inclined circular water jets plunging into an aeration tank // International Journal of Multiphase Flow. – 2012. – V. 40. – P. 158–165.
49. *Bai H., Stephenson A., Jimenez J., Jewell D., Gillis P.* Modeling flow and residence time distribution in an industrial-scale reactor with a plunging jet inlet and optional agitation // Chemical Engineering Research and Design. – 2008. – V. 86. – № 12. – P. 1462–1476.
50. *Baines W.D., Turner J.S., Campbell I.H.* Turbulent fountains in an open chamber // Journal of Fluid Mechanics. – 1990. – V. 212. – P. 557–592.
51. *Bagatur T., Baylar A., Sekerdag N.* The Effect of Nozzle Type on Air Entrainment by Plunging Water Jets // Water Quality Research Journal. – 2002. – V. 37. – № 3. – P. 599–612.

52. *Bang K.-H., Kim H.-T., Tan V.D.* Experiment and modeling of jet breakup in fuel-coolant interactions // *Annals of Nuclear Energy*. – 2018. – V. 118. – P. 336–344.
53. *Bertola N., Wang H., Chanson H.* Air Bubble Entrainment, Breakup, and Interplay in Vertical Plunging Jets // *Journal of Fluids Engineering*. – 2018. – V. 140. – № 9: 091301. – 13 pp.
54. *Bin A.K., Smith J.M.* Mass transfer in a plunging liquid jet absorber // *Chemical Engineering Communications*. – 1982. – V. 15. – № 5–6. – P. 367–383.
55. *Bin A.K.* Gas entrainment by plunging liquid jets // *Chemical Engineering Science*. – 1993. – V. 48. – № 21. – P. 3585–3630.
56. *Bloomfield L.J., Kerr R.C.* Turbulent fountains in a stratified fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1998. – V. 358. – P. 335–356.
57. *Bloomfield L.J., Kerr R.C.* A theoretical model of a turbulent fountain // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2000. – V. 424. – P. 197–216.
58. *Bohnke B.* “Package treatment plant for expanding communities” in *Advances in Water Pollution Research, Proceedings of the 5th International Conference, San Francisco*. – Oxford: Pergamon Press, 1970. – Paper II-9/2-9/7.
59. *Bonetto F., Lahey R.T.* An experimental study on air carryunder due to a plunging liquid jet // *International Journal of Multiphase Flow*. – 1993. – V. 19. – № 2. – P. 281–294.
60. *Bonsignore D., Volpicelli G., Campanile A., Santoro L., Valentino R.* Mass transfer in plunging jet absorbers // *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*. – 1985. – V. 19. – № 2. – P. 85–94.
61. *Boualouache A., Kendil F.Z., Mataoui A.* Numerical assessment of two phase flow modeling using plunging jet configurations // *Chemical Engineering Research and Design*. – 2017. – V. 128. – P. 248–256.

62. *Boualouache A., Zidouni F., Mataoui A.* Numerical Visualization of Plunging Water Jet using Volume of Fluid Model // Journal of Applied Fluid Mechanics. – 2018. – V. 11. – № 1. – P. 95–105.
63. *Boyd J.W.R., Varley J.* Acoustic emission measurement of low velocity plunging jets to monitor bubble size // Chemical Engineering Journal. – 2004. – V. 97. – № 1. – P. 11–25.
64. *Brattberg T., Chanson H.* Air entrapment and air bubble dispersion at two-dimensional plunging water jets // Chemical Engineering Science. – 1998. – V. 53. – № 24. – P. 4113–4127.
65. *Brouilliot D., Lubin P.* Numerical simulations of air entrainment in a plunging jet of liquid // Journal of Fluids and Structures. – 2013. – V. 43. – P. 428–440.
66. *Burgess J.M., Molloy N.A., McCarthy M.J.* A note of the plunging liquid jet reactor // Chemical Engineering Science. – 1972. – V. 27. – № 2. – P. 442–445.
67. *Burgess, J.M., Molloy N.A.* Gas absorption in the plunging liquid jet reactor // Chemical Engineering Science. – 1973. – V. 28. – №1. – P. 183–190.
68. *Chanson H.* Discussion: Reduction of cavitation on spillways by induced air entrainment // Canadian Journal of Civil Engineering. – 1992. – V. 19. – № 5. – P. 926–928.
69. *Chanson H., Cummings P.D.* An experimental study on air carryunder due to a plunging liquid jet // International Journal of Multiphase Flow. – 1994. – V. 20. – № 3. – P. 667–670.
70. *Chanson H., Jaw-Fang L.* Plunging jet characteristics of plunging breakers // Coastal Engineering. – 1997. – V. 31. – № 1–4. – P. 125–141.
71. *Chanson H., Brattberg T.* Air entrainment by two-dimensional plunging jets: the impingement region and the very-near flow field // ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, 1998, Washington, DC. – 8 pp.



72. *Chanson H., Aoki S.-I., Hoque A.* Similitude of Air Entrainment at Vertical Circular Plunging Jets // ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting Montreal, 2002, Quebec, Canada. – 6 pp.
73. *Chanson H., Manasseh R.* Air entrainment processes in a circular plunging jet: void-fraction and acoustic measurements // Journal of Fluids Engineering. – 2003. – V. 125. – № 5. – P. 910–921.
74. *Chanson H., Aoki S., Hoque A.* Physical modelling and similitude of air bubble entrainment at vertical circular plunging jets // Chemical Engineering Science. – 2004. – V. 59. – № 4. – P. 747–758.
75. *Chanson H., Aoki S., Hoque A.* Bubble Entrainment and Dispersion in Plunging Jet Flows: Freshwaters vs Seawater // Journal of Coastal Research. – 2006. – V. 223. – P. 664–677.
76. *Ciborowski J., Bin A.* Investigation of the aeration effect of plunging liquid jets // Inzynieria Chemiczna. – 1972. – V. 2. – P. 557–577.
77. *Cramers P.H.M.R., Smit L., Leuteritz G.M., van Dierendonck L.L., Beenackers A.A.C.M.* Hydrodynamics and local mass transfer characteristics of gas-liquid ejectors // The Chemical Engineering Journal and the Biochemical Engineering Journal. – 1993. – V. 53. – № 1. – P. 67–73.
78. *Cumming I.W., Rielly C.D., Mason A.J.* Hydraulic Performance of an Annular Plunging Jet Reactor // Chemical Engineering Research and Design. – 2002. – V. 80. – № 5. – P. 543–549.
79. *Cummings P.D., Chanson H.* Air Entrainment in the Developing Flow Region of Plunging Jets—Part 1: Theoretical Development // Journal of Fluids Engineering. – 1997. – V. 119. – № 3. – P. 597–602.
80. *Cummings P.D., Chanson H.* Air Entrainment in the Developing Flow Region of Plunging Jets—Part 2: Experimental // Journal of Fluids Engineering. – 1997. – V. 119. – № 3. – P. 603–608.

81. *Cummings P.D., Chanson H.* An Experimental Study of Individual Air Bubble Entrainment at a Planar Plunging Jet // Chemical Engineering Research and Design. – 1999. – V. 77. – № 2. – P. 159–164.
82. *Davidson M.R., Lawson N.J.* Numerical prediction of submerged oscillating jet flow // Second International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries, 1999, CSIRO, Melbourne, Australia. – P. 6–8.
83. *Davoust L., Achard J.L., El Hammoumi M.* Air entrainment by a plunging jet: the dynamical roughness concept and its estimation by a light absorption technique // International Journal of Multiphase Flow. – 2002. – V. 28. – № 9. – P. 1541–1564.
84. *Deshpande S.S., Trujillo M.F., Wu X., Chahine G.* Computational and experimental characterization of a liquid jet plunging into a quiescent pool at shallow inclination  
International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2012. – V. 34. – P. 1–14.
85. *Deshpande S.S., Trujillo M.F.* Distinguishing features of shallow angle plunging jets // Physics of Fluids. – 2013. – V. 25. – № 8: 082103. – 17 pp.
86. *Deswal S., Verma D.V.S.* Performance Evaluation and Modeling of a Conical Plunging Jet Aerator // International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering Sciences. – 2007. – V. 1. – № 11. – P. 335–339.
87. *Deswal S.* Oxygenation by Hollow Plunging Water Jet // Journal of the Institute of Engineering. – 2009. – V. 7. – № 1. – P. 40–47.
88. *Detsch R.M., Sharma R.N.* The critical angle for gas bubble entrainment by plunging liquid jets // The Chemical Engineering Journal. – 1990. – V. 44. – № 3. – P. 157–166.
89. *Duarte R., Pinheiro A., Schleiss A.J.* An Enhanced Physically Based Scour Model for Considering Jet Air Entrainment // Engineering. – 2016. – V. 2. – № 3. – P. 294–301.

90. *Eggers J., Villermaux E.* Physics of liquid jets // Reports on Progress in Physics. – 2008. – V. 71. – № 3: 036601. – 79 pp.
91. *El Himmoumi M., Achard J.L., Davoust L.* Measurements of air entrainment by vertical plunging liquid jets // Experiments in Fluids. – 2002. – V. 32. – № 6. – P. 624–638.
92. *Ervine D., Falvey H.* Behaviour of Turbulent Water Jets in the Atmosphere and in Plunge Pools // Proceedings of the Institution of Civil Engineers. – 1987. – V. 83. – № 1. – P. 295–314.
93. *Evans G.M., Machniewski P.M.* Mass transfer in a confined plunging liquid jet bubble column // Chemical Engineering Science. – 1999. – V. 54. – № 21. – P. 4981–4990.
94. *Evans G.M., Bin A.K., Machniewski P.M.* Performance of confined plunging liquid jet bubble column as a gas–liquid reactor // Chemical Engineering Science. – 2001. – V. 56. – № 3. – P. 1151–1157.
95. *Friedman P.D.* Oscillation in Height of a Negatively Buoyant Jet // Journal of Fluids Engineering. – 2006. – V. 128. – № 4. – P. 880–882.
96. *Galimov A.Y., Sahni O., Lahey R.T., Shephard M.S., Drew D.A., Jansen K.E.* Parallel adaptive simulation of a plunging liquid jet // Acta Mathematica Scientia. – 2010. – V. 30. – № 2. – P. 522–538.
97. *Gebert B.M., Davidson M.R., Rudman M.J.* Computed oscillations of a confined submerged liquid jet // Applied Mathematical Modelling. – 1988. – V. 22. – № 11. – P. 843–850.
98. *Goshika B.K., Majumder S.K.* Entrainment and holdup of gas-liquid-liquid dispersion in a downflow gas-liquid-liquid contactor // Chemical Engineering and Processing – Process Intensification. – 2018. – V. 125. – P. 112–123.
99. *Guyot G., Cartellier A., Matas J.-P.* Depth of penetration of bubbles entrained by an oscillated plunging water jet // Chemical Engineering Science: X. – 2019. – V. 2: 100017. – 10 pp.

100. *El Hammoumi M., Achard J.L., Davoust L.* Measurements of air entrainment by vertical plunging liquid jets // *Experiments in Fluids*. – 2002. – V. 32. – № 6. – P. 624–638.
101. *Harby K., Chiva S., Munoz-Cobo J.L.* An experimental study on bubble entrainment and flow characteristics of vertical plunging water jets // *Experimental Thermal and Fluid Science*. – 2014. – V. 57. – P. 207–220.
102. *Hirt C.W., Nichols B.D.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *Journal of Computational Physics*. – 1981. – V. 39. – № 1. – P. 201–225.
103. *Honeyands T.A., Molloy N.A.* Oscillations of submerged jets confined in a narrow deep rectangular cavity // *Twelfth Australasian Fluid Mechanics Conference, 1995, The University of Sydney, Australia*.
104. *Hoque A., Aoki S.* Air entrainment and associated energy dissipation in steady and unsteady plunging jets at free surface // *Applied Ocean Research*. – 2008. – V. 30. – № 1. – P. 37–45.
105. *Hunt G.R., Burridge H.C.* Fountains in Industry and Nature // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 2015. – V. 47. – № 1. – P. 195–220.
106. *Ide M., Uchiyama H., Ishikura T.* Mass transfer characteristics in gas bubble dispersed phase generated by plunging jet containing small solute bubbles // *Chemical Engineering Science*. – 2001. – V. 56. – № 21–22. – P. 6225–6231.
107. *Iguchi M., Okita K., Yamamoto F.* Mean velocity and turbulence characteristics of water flow in the bubble dispersion region induced by plunging water jet // *International Journal of Multiphase Flow*. – 1998. – V. 24. – № 4. – P. 523–537.
108. *Ito A., Yamagiwa K., Tajima K., Yoshida M., Ohkawa A.* Maximum penetration depth of air bubbles entrained by vertical liquid jet // *Journal of Chemical Engineering of Japan*. – 2000. – V. 33. – № 6. – P. 898–900.

109. *Kaminski E., Tait S., Carazzo G.* Turbulent entrainment in jets with arbitrary buoyancy // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2005. – V. 526. – P. 361–376.
110. *Kaye N.B., Hunt G.R.* Weak fountains // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2006. – V. 558. – P. 319–328.
111. *Kendil F.Z., Krepper E., Bousbia Salah A., Lucas D., Mataoui A.* Numerical study of a bubble plume generated by bubble entrainment from an impinging jet // *Nuclear Engineering and Design.* – 2011. – V. 241. – № 10. – P. 4111–4121.
112. *Kendil F.Z., Danciu D.V., Schmidtke M., Bousbia Salah A., Lucas D., Krepper E., Mataoui A.* Flow field assessment under a plunging liquid jet // *Progress in Nuclear Energy.* – 2012. – V. 56. – P. 100–110.
113. *Khezzar L., Kharoua N., Kiger K.T.* Large eddy simulation of rough and smooth liquid plunging jet processes // *Progress in Nuclear Energy.* – 2015. – V. 85. – P. 140–155.
114. *Kiger K.T., Duncan J.H.* Air-Entrainment Mechanisms in Plunging Jets and Breaking Waves // *Annual Review of Fluid Mechanics.* – 2012. – V. 44. – № 1. – P. 563–596.
115. *Koga M.* Bubble entrainment in breaking wind waves // *Tellus.* – 1982. – V. 34. – № 5. – P. 481–489.
116. *Koh R.C.Y., Brooks N.H.* Fluid Mechanics of Waste-Water Disposal in the Ocean // *Annual Review of Fluid Mechanics.* – 1975. – V. 7. – № 1. – P. 187–211.
117. *Kramer M., Wieprecht S., Terheiden K.* Penetration depth of plunging liquid jets – A data driven modelling approach // *Experimental Thermal and Fluid Science.* – 2016. – V. 76. – P. 109–117.
118. *Krepper E., Weiss F.-P., Alt S., Kratzsch A., Renger S., Kastner W.* Influence of air entrainment on the liquid flow field caused by a plunging jet and consequences for fibre deposition // *Nuclear Engineering and Design.* – 2011. – V. 241. – № 4. – P. 1047–1054.

119. *Kumagai M., Endoh K.* Effects of kinematic viscosity and surface tension on gas entrainment rate of an impinging liquid jet // Journal of Chemical Engineering of Japan. – 1982. – V. 15. – № 6. – P. 427–433.
120. *Kumagai M., Endoh K.* A note on the relationship between gas entrainment curve and its starting velocity // Journal of Chemical Engineering of Japan. – 1983. – V. 16. – № 1. – P. 74–75.
121. *Kumagai M., Endoh K.* Mean residence time and gas holdup of entrained gas by an impinging water jet // Journal of Chemical Engineering of Japan. – 1983. – V. 16. – № 5. – P. 357–363.
122. *Kumagai M., Ishizaki H., Endoh K.* Penetration depth of bubble swarm entrained by a plunging water jet // Journal of Chemical Engineering of Japan. – 1993. – V. 26. – № 2. – P. 217–219.
123. *Kusabiraki D., Niki H., Yamagiwa K., Ohkawa A.* Gas entrainment rate and flow pattern of vertical plunging liquid jets // The Canadian Journal of Chemical Engineering. – 1990. – V. 68. – № 6. – P. 893–903.
124. *Kusabiraki D., Murota M., Ohno S., Yamagiwa K., Yasuda M., Ohkawa A.* Gas entrainment rate and flow pattern in a plunging liquid jet aeration system using inclined nozzles // Journal of Chemical Engineering of Japan. – 1990. – V. 23. – № 6. – P. 704–710.
125. *Kusabiraki D., Yamagiwa K., Yasuda M., Ohkawa A.* Gas entrainment behavior of vertical plunging liquid jets in terms of changes in jet surface length // The Canadian Journal of Chemical Engineering. – 1992. – V. 70. – № 1. – P. 181–184.
126. *Lawson N.J., Davidson M.R.* Self-Sustained Oscillation of a Submerged Jet in a Thin Rectangular Cavity // Journal of Fluids and Structures. – 2001. – V. 15. – № 1. – P. 59–81.
127. *Lin T.J., Donnelly H.G.* Gas bubble entrainment by plunging laminar liquid jets // AIChE Journal. – 1966. – V. 12. – № 3. – P. 563–571.
128. *Lindberg W.R.* Experiments on Negatively Buoyant Jets with and Without Cross-Flow // Recent Research Advances in the Fluid

- Mechanics of Turbulent Jets and Plumes. – 1994. – V. 255. – P. 131–145.
129. *Lopes P., Tabor G., Carvalho R.F., Leandro J.* Explicit calculation of natural aeration using a Volume-of-Fluid model // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – V. 40. – № 17–18. – P. 7504–7515.
130. *Ma J., Oberai A.A., Drew D.A., Lahey R.T., Moraga F.J.* A quantitative sub-grid air entrainment model for bubbly flows – plunging jets. Computers & Fluids. – 2010. – V. 39. – № 1. – P. 77–86.
131. *Ma J., Oberai A.A., Drew D.A., Lahey R.T., Hyman M.C.* A Comprehensive Sub-Grid Air Entrainment Model for RaNS Modeling of Free-Surface Bubbly Flows // The Journal of Computational Multiphase Flows. – 2011. – V. 3. – № 1. – P. 41–56.
132. *Maurel A., Cremer S., Jenffer P.* Experimental study of a submerged fountain // Europhysics Letters. – V. 39. – № 5. – P. 503–508.
133. *Mekias H., Vanden-Broeck J.-M.* Supercritical free-surface flow with a stagnation point due to a submerged source // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. – 1989. – V. 1. – № 11. – P. 1694–1697.
134. *Mekias H., Vanden-Broeck J. -M.* Subcritical flow with a stagnation point due to a source beneath a free-surface // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. - 1991. – V. 3. – № 11. – P. 2652–2663.
135. *Majumder S.K.* Entrainment of Gas Bubbles. Hydrodynamics and Transport Processes of Inverse Bubbly Flow. – Elsevier, 2016. – 448 pp.
136. *Mcdougall T.J.* Negatively buoyant vertical jets // Tellus. – 1981. – V. 33. – № 3. – P. 313–320.
137. *McKeogh E.J., Elsayy E.M.* Air retained in pool by plunging water jet // Journal of the Hydraulics Division. – 1980. – V. 106. – № 10. – P. 1577–1593.
138. *McKeogh E.J., Ervine D.A.* Air entrainment rate and diffusion pattern of plunging liquid jets // Chemical Engineering Science. – 1981. – V. 36. – № 7. – P. 1161–1172.

139. *Michel J.M.* Some Features of Water Flows With Ventilated Cavities // Journal of Fluids Engineering. – 1984. – V. 106. – № 3. – P. 319–326.
140. *Mishra R.K., Deswal S.* Flow characteristics of multiple plunging jets towards treatment of water and wastewater // Journal of Water Process Engineering. – 2018. – V. 22. – P. 147–154.
141. *Miwa S., Moribe T., Tsutstumi K., Hibiki T.* Experimental investigation of air entrainment by vertical plunging liquid jet // Chemical Engineering Science. – 2018. – V. 181. – P. 251–263.
142. *Morton B.R., Taylor G., Turner J.S.* Turbulent Gravitational Convection from Maintained and Instantaneous Sources // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1956. – V. 234. – № 1196. – 23 pp.
143. *Nakasone H.* Study of Aeration at Weirs and Cascades // Journal of Environmental Engineering. – 1987. – V. 113. – № 1. – P. 64–81.
144. *Oguz H.N., Prosperetti A., Kolaini A.R.* Air entrapment by a falling water mass // Journal of Fluid Mechanics. – 1995. – V. 294. – P. 181–207.
145. *Oguz H.N.* The role of surface disturbances in the entrainment of bubbles by a liquid jet // Journal of Fluid Mechanics. – 1998. – V. 372. – P. 189–212.
146. *Ohkawa A., Kusabiraki D., Kawai Y., Sakai N., Endoh K.* Some flow characteristics of a vertical liquid jet system having downcomers // Chemical Engineering Science. – 1986. – V. 41. – № 9. – P. 2347–2361.
147. *Ohkawa A., Kusabiraki D., Shiokawa Y., Sakai N., Fujii M.* Flow and oxygen transfer in a plunging water jet system using inclined short nozzles and performance characteristics of its system in aerobic treatment of wastewater // Biotechnology and Bioengineering. – 1986. – V. 28. – № 12. – P. 1845–1856.



148. *Ohkawa A., Kusabiraki D., Sakai N.* Effect of nozzle length on gas entrainment characteristics of vertical liquid jet // *Journal of Chemical Engineering of Japan.* – 1987. – V. 20. – № 3. – P. 295–300.
149. *Pagliara S., Palermo M.* Scour process caused by multiple subvertical non-crossing jets // *Water Science and Engineering.* – 2017. – V. 10. – №. 1. – P. 17–24.
150. *Pantzlaff L., Lueptow R.M.* Transient positively and negatively buoyant turbulent round jets // *Experiments in Fluids.* – 1999. – V. 27. – № 2. – P. 117–125.
151. *Park S., Park H.S., Jang B.I., Kim H.J.* 3-D simulation of plunging jet penetration into a denser liquid pool by the RD-MPS method // *Nuclear Engineering and Design.* – 2016. – V. 299. – P. 154–162.
152. *Prakash R., Majumder S.K., Singh A.* Flotation technique: Its mechanisms and design parameters // *Chemical Engineering and Processing – Process Intensification.* – 2018. – V. 127. – P. 249–270.
153. *Qu X.L., Khezzar L., Danciu D., Labois M., Lakehal D.* Characterization of plunging liquid jets: A combined experimental and numerical investigation // *International Journal of Multiphase Flow.* – 2011. – V. 37. – № 7. – P. 722–731.
154. *Qu X., Khezzar L., Li Z.* The impact and air entrainment process of liquid plunging jets // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering.* – 2011. – V. 226. – № 3. – P. 238–249.
155. *Qu X., Goharzadeh A., Khezzar L., Molki A.* Experimental characterization of air-entrainment in a plunging jet // *Experimental Thermal and Fluid Science.* – 2013. – V. 44. – P. 51–61.
156. *Righolt B.W., Kenjeres S., Kalter R., Tummers M.J., Kleijn C.R.* Dynamics of an oscillating turbulent jet in a confined cavity // *Physics of Fluids.* – 2015. – V. 27. – № 9: 095107. – 17 pp.

157. *Robertson D.G.C., O'shaughnessy D.P., Molloy N.A.* The mechanism of sheat formation by plunging jets // *Chemical Engineering Science*. – 1973. – V. 28. – № 8. – P. 1635–1636.
158. *Roy A.K., Maiti B., Das P.K.* Visualisation of Air Entrainment by a Plunging Jet // *Procedia Engineering*. – 2013. – V. 56. – P. 468–473.
159. *Roy A.K., Kumar K.* Experimental studies on hydrodynamic characteristics using an oblique plunging liquid jet // *Physics of Fluids*. – 2018. – V. 30. – № 12: 122107. – 11 pp.
160. *Sanjay V., Das A.K.* On air entrainment in a water pool by impingement of a jet // *AIChE Journal*. – 2017. – V. 63. – № 11. – P. 5169–5181.
161. *Schmidtke M., Lucas D.* CFD Approaches for Modelling Bubble Entrainment by an Impinging Jet // *Science and Technology of Nuclear Installations*. – 2009. – 12 pp.
162. *Shi R., Wang H., Chanson H.* Bubble convection and bubbly flow turbulent time and length scales in two-dimensional plunging jets // *Experimental Thermal and Fluid Science*. – 2018. – V. 98. – P. 278–289.
163. *Shonibare O.Y., Wardle K.E.* Numerical Investigation of Vertical Plunging Jet Using a Hybrid Multifluid–VOF Multiphase CFD Solver // *International Journal of Chemical Engineering*. – 2015. – 14 pp.
164. *Srinarayana N., McBain G.D., Armfield S.W., Lin W.X.* Height and stability of laminar plane fountains in a homogeneous fluid // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2008. – V. 51. № 19–20. – P. 4717–4727.
165. *Sene K.J.* Air entrainment by plunging jets // *Chemical Engineering Science*. – 1988. – V. 43. – № 10. – P. 2615–2623.
166. *Smigelschi O., Suciú G.D.* Carbon dioxide absorption by turbulent plunging jets of water // *Chemical Engineering Science*. – 1977. – V. 32. – № 8. – P. 889–897.

167. *Soh W.K., Khoo B.C., Yuen W.Y.D.* The entrainment of air by water jet impinging on a free surface // *Experiments in Fluids*. – 2005. – V. 39. – № 3. – P. 498–506.
168. *Suciu G.D., Smigelschi O.* Size of the submerged biphasic region in plunging jet systems // *Chemical Engineering Science*. – 1976. – V. 31. – № 12. – P. 1217–1220.
169. *Thanos J.K., Panos N.P.* Vertical Turbulent Fountains in a Uniform Calm Ambient // *Proceedings of the 2006 IASME/WSEAS International Conference on Water Resources, Hydraulics & Hydrology*. – 2006. – P. 98–105.
170. *Tojo K., Miyanami K.* Oxygen transfer in jet mixers // *The Chemical Engineering Journal*. – 1982. – V. 24. – № 1. – P. 89–97.
171. *Tojo K., Naruko N., Miyanami K.* Oxygen transfer and liquid mixing characteristics of plunging jet reactors // *The Chemical Engineering Journal*. – 1982. – V. 25. – № 1. – P. 107–109.
172. *Turner J.S.* Jets and plumes with negative or reversing buoyancy // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1966. – V. 26. – № 4. – P. 779–192.
173. *Uchiyama H., Ishikura T., Ide M.* Characteristics of gas–liquid dispersion and mass transfer in a multi-plunging jet absorber using gas–liquid two-phase jets // *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*. – 2012. – V. 60. – P. 34–41.
174. *Van de Sande E., Smith J.M.* Surface entrainment of air by high velocity water jets // *Chemical Engineering Science*. – 1973. – V. 28. – № 5. – P. 1161–1168.
175. *Van de Sande E., Smith J.M.* Mass transfer from plunging water jets // *The Chemical Engineering Journal*. – 1975. – V. 10. – № 2. – P. 225–233.
176. *Van de Sande E., Smith J.M.* Jet break-up and air entrainment by low velocity turbulent water jets // *Chemical Engineering Science*. – 1976. – V. 31. – № 3. – P. 219–224.

177. *Wang H., Slamet N.S., Zhang G., Chanson H.* Intrusive measurements of air-water flow properties in highly turbulent supported plunging jets and effects of inflow jet conditions // *Chemical Engineering Science*. – 2008. – V. 177. – P. 245–260.
178. *Lin W., Armfield S.W.* Direct simulation of weak laminar plane fountains in a homogeneous fluid // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2000. – V. 43. – № 17. – P. 3013–3026.
179. *Lin W., Armfield S.W.* Direct simulation of fountains with intermediate Froude and Reynolds number // *ANZIAM Journal*. – 2004. – V. 45. – № E. – P. 66–77.
180. *Williamson N., Armfield S.W., Lin W.* Transition behaviour of weak turbulent fountains // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2010. – V. 655. – P. 306–326.
181. *Williamson N., Armfield S.W., Lin W.* Forced turbulent fountain flow behaviour // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2011. – V. 671. – P. 535–558.
182. *Wills B.A., Finch. J.A.* Chapter 12: Froth Flotation // *Wills' Mineral Processing Technology*. – 2016. – P. 265–380.
183. *Woods A.W., Caulfield C.-C.P.* A laboratory study of explosive volcanic eruptions // *Journal of Geophysical Research*. – 1992. – V. 97. – № B5. – P. 6699–6712.
184. *Yamagiwa K., Mashima T., Kadota S., Ohkawa A.* Effect of liquid property on gas entrainment behavior in a plunging liquid jet aeration system using inclined nozzles // *Journal of Chemical Engineering of Japan*. – 1993. – V. 26. – № 3. – P. 333–336.
185. *Yamagiwa K., Oohira Y., Ohkawa A.* Performance evaluation of a plunging liquid jet bioreactor with crossflow filtration for small-scale treatment of domestic wastewater // *Bioresource Technology*. – 1994. – V. 50. – № 2. – P. 131–138.

186. *Yin Z., Jia Q., Li Y., Wang Y., Yang D.* Computational Study of a Vertical Plunging Jet into Still Water // *Water*. – V. 10. – № 8: 989. – 20 pp.
187. *Zhang H., Baddour R.E.* Maximum Penetration of Vertical Round Dense Jets at Small and Large Froude Numbers // *Journal of Hydraulic Engineering*. – 1998. – V. 124. – № 5. – P. 550–553.
188. *Zhu Y., Oguz H.N., Prosperetti A.* On the mechanism of air entrainment by liquid jets at a free surface // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2000. – V. 404. – P. 151–177.
189. *Zou J., Lin F., Ji C., Pan M.* Liquid jet leaping from a free surface // *Physics of Fluids*. – 2017. – V. 29. – № 7: 071702. – 5 pp.
190. Siemens Digital Industries Software. Simcenter STAR-CCM+ User Guide, version 2021.1, Siemens 2021. URL: <https://www.plm.automation.siemens.com/global/en/products/simcenter/STAR-CCM.html>.