ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации
Резниченко Евгения Александровича
"Группы с топологией и однородные пространства",
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.3 – геометрия и топология

В диссертации Е.А. Резниченко главным образом рассмариваются пространства с операцией Мальцева (мальцевские пространства) , в частности, группы.

Операция Мальцева на множестве X – это отображение $F : X^3 \to X$ для которого выполнено тождество: $F(x, y, y) = F(y, y, x) = x$. На группе есть естественная операция Мальцева: $F(x, y, z) = xy^{-1}z$.

На одном множестве могут быть определены различные структуры, например, алгебраические и топологические. Возможны различные способы согласования таких структур. Наиболее исследуемый – это когда алгебраические операции непрерывны относительно топологической структуры. Исследование топологических групп (групп с непрерывными операциями умножения и взятия обратного элемента) – наиболее важное направление в топологической алгебре.

Отметим, что на группе $(G, *)$ с топологией могут выполняться следующие согласованности:

(1) операция $*$ является раздельно непрерывной;

(2) операция $*$ является совместно непрерывной;

(3) операция взятия обратного элемента является непрерывной.

Группы с топологией при условии (1) называются полутопологическими, при условии (2) – паратопологическим и при условии (1) и (3) – квазитопологическим.

В 1936 году Д. Монтгомери доказал, что полная метризуемая сепарабельная полутопологическая группа является топологической группой. Р. Эллис доказал (в 1957), что локально компактная полутопологическая группа является топологической группой.

В диссертации исследуются вопросы непрерывности алгебраических структур с топологией. К таким структурам относятся полутопологические и паратопологические группы, пространства с операцией Мальцева, универсальные алгебры, однородные пространства и их ретракты. Разрабатывается новый метод продолжения и факторизации отображений. Отдельно представлен спектр топологических игр типа Банаха-Мазура.

Диссертация состоит из введения и пяти глав.

Во *введении* приводится достаточно полный исторический обзор результатов по теме исследования диссертации, а также обзор смежных направлений исследований. Приводится краткий обзор полученных результатов исследований диссертации.

В *первой главе* приводятся основные обозначения, используемая терминология, необходимые определения, базовые свойства и утверждения, которые далее используются в диссертации.

Вторая глава полностью посвящена вопросу исследования раздельно непрерывных отображений, их фактаризаций и продолжений на стоун-чеховские расширения пространств. В этой главе можно отметить теорему 2.7 в которой получено условие продолжения раздельно непрерывной функции на произведении *двух* пространств.

Теорема 2.7. Пусть X и Y есть псевдокомпактные пространства, $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ раздельно непрерывная функция,

$\varphi : X \to C_p(Y)$, $\varphi(x)(y) = \Phi(x, y)$.

Следующие условия эквивалентны:

(1) существует плотное типа G_δ подмножество $D \subset Y = \overline{D}$ так что Φ непрерывна в каждой точке $(x, y) \in X \times D$;

(2) функция Φ квазинепрерывна;

(3) Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$;

(4) $\varphi(X)$ имеет компактное замыкание в $C_p(Y)$;

(5) $\varphi(X)$ компактно.

Затем этот результат используется для исследования раздельно непрерывных функций на произведении *конечного числа* сомножителей (Теорема 2.15).

Теорема 2.15. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ псевдокомпактные пространства $\Phi : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) функция Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\prod_{i=1}^{n} \beta X_i$;

(2) функция Φ $2 - \beta$-продолжаемая;

(3) функция Φ 2-квазинепрерывная.

Отображение $f : X^n \to X$ называется *операцией.* Множество X с набором операций $f_1, \ldots, f_m$ называется *универсальной алгеброй* $\mathbf{X} = (X, f_1, \ldots, f_m)$.

Применяя теорему о факторизации раздельно непрерывных функций (Теорема 2.35) получена теорема о вложении универсальной компактной алгебры в произведение универсальных метризуемых алгебр с раздельно непрерывными операциями (Теорема 2.39).

В *третей главе* изучаются классы пространств со свойством Бэра, которые уникально определяются через новое понятие – *полуокресность дигонали* и с помощью топологических игр. Эти игры являются модификацией классической игры Банаха-Мазура, и позволяют определять новые подклассы бэровских пространств: Γ_*^*-бэровскис. Эти классы достаточно разнообразны и полсзны для групп так как в этих классах выполняется непрерывность основных групповых операций: совместная непрерывность операции или непрерывность взятия обратного. Что исследуется в следующей главе.

В *четвертой главе* исследуется вопрос непрерывности операции Мальчева и усиление непрерывности в полутопологических или паратопологических группах до совмесной непрерывности. Представлено три метода:

(1) продолжений операпий с X на βX;

(2) выделение подклассов бэровских пространств с помощью полуокрестности диагонали;

(3) определение свойства типа компактности квадрата группы.

В рамках первого подхода доказана Теорема 4.1.

Теорема 4.1. Пусть G есть псевдокомпактная группа с топологией, X - пространство, $\alpha : G \times X \to X$ есть раздельно непрерывное транзитивное действие G на X, $gx = \alpha(g,x)$ для $g \in G$ и $x \in X$. Следующие условия эквивалентны:

(1) действие α непрерывно;

(2) действие α квазинепрерывно;

(3) действие α продолжается до раздельно непрерывного отображения $\hat{\alpha} : \beta G \times \beta X \to \beta X$;

(4) действие α продолжается до непрерывного отображения $\hat{\alpha} : \beta G \times \beta X \to \beta X$.

С помощью второго подхода доказана следующая теорема.

Теорема 4.13. Пусть G есть правотопологическая группа. Если для G выполняется одно из условий, перечисленных ниже, то G топологическая группа.

(1) G является Δ-бэровским пространством, $\Lambda_f(G) \cap \Lambda_f(G)^{-1}$ плотно в G и умножение $(g,h) \mapsto gh$ слабо непрерывно в единице группы.

(2) G является Δ_h-бэровским пространством, $\Lambda_f(G) \cap \Lambda_f(G)^{-1}$ плотно в G и взятие обратного элемента $g \mapsto g^{-1}$ слабо непрерывно в единице группы.

(3) G является Δ_s-бэровским пространством, $\Lambda_f(G) \cap \Lambda_f(G)^{-1}$ плотно в G.

Третий метод и факт, что если G T_1 паратопологическая группа, то G является непрерывным гомоморным образом некоторой топологической группы, которая замкнуто вкладывается в G^2, позволило доказать следующие две теоремы.

Теорема 4.16. Пусть G есть T_1 паратопологическая группа. Если G^2 счетно компактно, то G топологическая группа.

Теорема 4.17. Пусть G есть T_2 бэровская паратопологическая группа. Если G^2 линделефово, то G топологическая группа.

В *пятой главе* исследуются топологические свойства групп, ретрактов групп, мальцевские пространства, однородные пространства. Основная решаемая задача: выяснить какие пространства могут быть представлены как сомножители в однородных произведениях, как ретракты однородных пространств или групп. Основными результатами в этой главе являются теорема 5.8, следствия 5.9 и 5.10, и теорема 5.54.

В последнем разделе 5.4, используя теоремы о ретрактах топологических групп, строятся примеры:

(1) линделефовой топологической группы с числом Суслина 2^ω;

(2) сепарабельной не $\mathbb{R}$-факторизуемой топологической группы.

Публикации основных результатов диссертации Е.А. Резниченко представлены в 16 работах, из которых 16 опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3 – геометрия и топология.

Выводы

Диссертация Е.А. Резниченко посвящена актуальным проблемам топологической алгебры. В диссертации получены важные результаты, относящиеся к теории мальцевских пространств (в частности, к теории групп), к теории расширений, к теории бэровских пространств и теории топологических игр. Основные утверждения диссертации четко сформулированы и доказаны. Новизна полученных результатов проявляется как в подходах к исследуемым проблемам, так и в содержании доказанных теорем. В диссертации используются как традиционные методы общей топологии, топологической алгебры, C_p-теории, функционального анализа и теории топологических игр, так и разработанные Е.А. Резниченко новые методы продолжения и фактаризации раздельно непрерывных отображений и использования полуокрестностей диагонали.

Работа обладает внутренним единством и завершенностью.

Диссертация аккуратно оформлена. Имеются мелкие стилистические погрешности и небольшое число опечаток (которые никак не влияют на общее впечатление от работы).

Результаты диссертации опубликованы в полном объеме в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Автореферат диссертации полностью отражает её содержание.

Считаю, что совокупность результатов диссертации Е.А. Резниченко *"Группы с топологией и однородные пространства"* можно квалифицировать как оригинальную научную работу, результаты которой представляют новое крупное достижение в развитии теории топологической алгебры.

Считаю, что диссертация Е.А. Резниченко удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 – геометрия и топология. Считаю, что Резниченко Евгений Александрович заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

30.12.2023

Заведующий сектором топологии Института
математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского,
доктор физ.-мат. наук А.В. Осипов

Подпись А.В. Осипова заверяю
Ученый секретарь ИММ УрО РАН им. Н.Н. Красовского,
кандидат физ.-мат. наук О.Н. Ульянов