

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ



На правах рукописи

Захаров Роман Викторович

**Управление свойствами и корреляциями фотонов
неклассического сжатого света**

Специальность 1.3.6. Оптика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Тихонова Ольга Владимировна

Москва — 2024

Оглавление

Стр.

Введение	6
Глава 1. Обзор литературы	18
1.1 Генерация неклассических состояний света в нелинейных кристаллах	18
1.1.1 Спонтанное параметрическое рассеяние	18
1.1.2 Яркий сжатый вакуум	19
1.1.3 Генерация и детектирование ТГц излучения в сильно невыврожденном режиме параметрического рассеяния	21
1.2 Квантовое описание взаимодействия света с нелинейным кристаллом	22
1.2.1 Гамильтониан взаимодействия и двухфотонная амплитуда	22
1.2.2 Бифотоны	23
1.2.3 Подход мод Шмидта	23
1.2.4 Эволюция операторов рождения и уничтожения фотонов в модах Шмидта	26
1.2.5 Вычисление экспериментально измеримых величин	26
1.3 Сжатие и перепутанность	28
1.3.1 Корреляции фотонов и перепутанность	28
1.3.2 Одномодовое сжатие	28
1.3.3 Двухмодовое квадратурное сжатие	30
1.3.4 Многомодовое сжатие и перепутанность	32
1.4 Усиление сигнала без лишнего шума	32
1.5 Взаимодействие квантового света с кубитами	34
1.5.1 Управление сверхпроводящими кубитами	34
1.5.2 Квантовое описание взаимодействия кубита с полем	35
1.5.3 Подход к расчету спектров излучения	36
Глава 2. Управление свойствами неклассических оптических состояний, генерируемых в процессе параметрического рассеяния	37
2.1 Управление пространственными свойствами квантового света в нелинейном интерферометре	37

2.1.1	Свойства двухфотонной амплитуды и пространственных мод в дальней зоне	37
2.1.2	Управление числом радиальных и азимутальных мод	40
2.1.3	Корреляции фотонов при низком и высоком параметрическом усилении	43
2.1.4	Выводы	45
2.2	Пространственные корреляции фотонов в ближней зоне	46
2.2.1	Двухфотонная амплитуда в ближней зоне	46
2.2.2	Вид мод Шмидта и азимутальных каналов	48
2.2.3	Пространственные корреляции фотонов в ближней зоне	50
2.2.4	Селекция мод с определенным орбитальным угловым моментом	52
2.2.5	Выводы	55

Глава 3. Особенности генерации неклассических состояний света в сильно невырожденном режиме

	параметрического рассеяния	57
3.1	Генерация состояний в одном кристалле	57
3.1.1	Пространственные корреляции оптического и ТГц фотонов	58
3.1.2	Свойства оптической и терагерцовой моды Шмидта	60
3.1.3	Выводы	64
3.2	Генерация состояний в нелинейном интерферометре	64
3.2.1	Управление модовым составом	65
3.2.2	Частотно-угловой спектр	68
3.2.3	Измерение показателя преломления в среде в ТГц диапазоне	70
3.2.4	Выводы	70
3.3	Управление пространственными свойствами генерируемого ТГц излучения с помощью подсветки	71
3.3.1	Теоретическое описание системы при наличии подсветки	71
3.3.2	Проблема сужения пространственного спектра ТГц излучения	73
3.3.3	Выводы	77
3.4	Процессы генерации света на суммарной и разностной частоте	78

	Стр.
3.4.1	Корреляции фотонов при параметрическом рассеянии . . . 78
3.4.2	Генерация антистоксовой компоненты 78
3.4.3	Корреляции фотонов при генерации стоксовой и антистоксовой компоненты 80
Глава 4.	Свойства многомодового сжатого света 84
4.1	Генерация и последующее усиление сжатых состояний в системе из нелинейных кристаллов 84
4.1.1	Подсветка - подход Гейзенберга 84
4.1.2	Идея восстановления эффективных весов экспериментально измеримых характеристик 88
4.1.3	Многомодовое сжатие 91
4.1.4	Выводы 94
4.2	Бесшумное усиление сигнала 94
4.2.1	Усиление сигнала в многомодовой системе 95
4.2.2	Влияние двухфотонной амплитуды на фазовую чувствительность 97
4.2.3	Как получить лучшую фазо-чувствительность 100
4.2.4	Выводы 102
Глава 5.	Взаимодействие неклассических состояний света с кубитами 103
5.1	Особенности взаимодействия двухмодового поля с кубитом 103
5.1.1	Теоретический подход и постановка задачи 103
5.1.2	Аналитическое решение задачи эволюции оператора в вырожденном режиме 105
5.1.3	Свойства взаимодействия в вырожденном режиме 107
5.1.4	Выводы 109
5.2	Управление состоянием двухмодового поля с помощью кубита . . . 109
5.2.1	Особенности взаимодействия при разных параметрах 109
5.2.2	Передача состояния между модами с разной частотой . . . 112
5.2.3	Генерация новых состояний 116
5.2.4	Идея фазовых измерений 119
5.2.5	Выводы 121

	Стр.
5.3 Спектр излучения в резонансном режиме	122
5.3.1 Спектр в полуклассическом приближении при взаимодействии с двумя полями	122
5.3.2 Сравнение со случаем взаимодействия с классическим полем	125
5.3.3 Выводы	127
Заключение	128

Введение

Актуальность темы. Одной из важных областей квантовой оптики является исследование и использование неклассических состояний света. Развитие экспериментальных методов позволяет генерировать различные неклассические состояния и управлять их свойствами. Сжатые состояния света представляют особый интерес, так как с одной стороны проявляют существенно неклассические свойства, с другой стороны могут иметь большое среднее число фотонов, фактически, представляя собой макроскопический квантовый объект. Генерация таких состояний возможна в процессах параметрического рассеяния или четырехволнового смешения, и в случае ярких состояний только недавно реализована экспериментально.

Важным свойством сжатых состояний является уменьшенная дисперсия вдоль одной из квадратур, что позволяет использовать их для проведения квантовых измерений. Также генерируемые фотоны в сигнальном и холостом каналах обладают высокой степенью перепутанности, что делает их применимыми для таких приложений как квантовая телепортация, хранение и передача квантовой информации [1–8], квантовая метрология [9] и оптомеханика [10]. Важным преимуществом сжатых состояний является их многомодовая структура, что открывает новые возможности для кодирования квантовой информации. Во многих случаях для практического использования важно уметь управлять модовым составом и перепутанностью генерируемого сжатого света.

Теоретически процесс параметрического рассеяния полностью изучен при малом параметрическом усилении, когда хорошо применима теория возмущения и фактически происходит генерация бифотонов [11]. Однако для многих практических приложений интересны именно яркие состояния сжатого света.

Для изучения свойств и многофотонных корреляций яркого сжатого вакуума можно использовать подходы, основанные на введении новых пространственных и частотных мод и операторов рождения и уничтожения фотонов в соответствующих модах [12–14]. В работах [15; 16] на основе введенных мод Шмидта был произведен анализ пространственных корреляций фотонов, генерируемых в параметрическом рассеянии.

В работе [17] был развит теоретический подход, основанный на разложении двухфотонной амплитуды по модам Шмидта, который позволяет

аналитически описывать пространственные свойства сжатого вакуума. Было показано, что при нахождении модового состава, все остальные характеристики нелинейного света могут быть получены аналитически. Для системы из одного кристалла моды Шмидта являются известными модами Лаггера-Гаусса [18].

Для практических приложений важно управлять свойствами генерируемого излучения, выделять моды с определенными пространственными или частотными свойствами. В работах [17; 19; 20], была рассмотрена генерация в 1 моде, а также были исследованы режимы выделения одной узкой частотной или пространственной моды. Исследований управления свойствами и корреляциями фотонов в многомодовом режим генерации ранее не проводилось.

Одним из интересных режимов является сильно невырожденный режим генерации в котором частоты сигнального и холостого фотонных пучков отличаются на несколько порядков, например один пучок находится в оптическом диапазоне, а другой - в терагерцовом [21–23]. Хотя сейчас множество применений основываются на классических свойствах терагерцового излучения [24; 25], генерация неклассического ТГц излучения открывает новые возможности [26–28]. Хотя имеются теоретические и экспериментальные работы по исследованию сильно невырожденного параметрического рассеяния [29–32], однако свойства терагерцового неклассического света и корреляции фотонов в нем еще очень мало изучены.

Важной задачей современной физики является разработка алгоритмов по работе с квантовой информацией и развитие квантово-информационных технологий [33–35]. В квантовых вычислительных системах работа с информацией обычно основана на использовании либо атомных/твердотельных, либо фотонных полевых кубитов. Каждый подход имеет определенные преимущества и недостатки. Наиболее перспективным представляется гибридный подход, когда хранение и обработка реализуется на легко управляемых атомных или твердотельных кубитах, а передача осуществляется с помощью микроволновых электромагнитных полей. Для реализации такого подхода необходим детальный анализ взаимодействия неклассических полей с кубитом. Экспериментально реализовать подход можно на основе различных технологических платформ, например на сверхпроводящих искусственных атомах, взаимодействующих друг с другом через высококачественные резонаторы [36–48].

Еще одним важным свойством генерируемых неклассических электромагнитных полей является наличие у них ненулевого орбитального момента.

Воздействие таких полей на атомы и молекулы еще мало изучено. Однако наличие углового момента у поля существенным образом влияет на известные процессы в поле, а возможность передачи этого момента атомам или электронам среды приводит к появлению новых свойств таких возбужденных сред, что может быть актуальным для большого числа практических приложений.

В последние годы также достигнут существенный прогресс в создании источников и детекторов неклассических состояний микроволнового излучения и обсуждаются идеи создания квантового радара [49–51] и квантового интернета [52–56], где информация между квантовыми вычислительными системами передается посредством квантовых полей.

Особенностью системы из квантового поля и кубита является ее чувствительность к внешним электромагнитным полям. Данная особенность может быть позитивно использована для квантовых контроллеров в распределенных сетях [57–61], и в физических системах, где необходимо кодировать квантовую информацию в более высоких размерностях [62–71].

Таким образом, исследование свойств неклассических сжатых состояний света, а также разработка методов управления корреляциями фотонов в таких состояниях вызывает большой фундаментальный и практический интерес.

Целью данной работы является теоретическое описание неклассических ярких сжатых состояний света, включая многомодовые, разработка методов управления пространственными и частотными свойствами таких состояний и корреляциями фотонов в них, а также усиление генерируемого света без добавления лишнего шума и разработка схем по реализации контролируемой связи между модами через взаимодействие с твердотельным кубитом. Данные исследования открывают новые возможности для измерений на основе сжатых состояний, анализа свойств объектов в терагерцовом диапазоне и широкополосного усиления квантовых изображений. Получаемые результаты также могут использоваться для передачи информации в квантовых вычислительных системах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать методы управления модовым составом, а также корреляциями фотонов сжатого света, генерируемого в вырожденном режиме параметрического рассеяния, в интерферометре из двух нелинейных кристаллов.

2. Исследовать особенности неклассических состояний, генерируемых в сильно невырожденном по частоте режиме параметрического рассеяния, когда один канал соответствует терагерцовому диапазону, а другой – оптическому, а также разработать методы высокоточных квантовых измерений на основе корреляций оптических и терагерцовых фотонов
3. Разработать методы реконструкции профилей и весов мод Шмидта из экспериментально измеримых величин для света, генерируемого в процессе параметрического рассеяния.
4. Исследовать свойства многомодового сжатия.
5. Разработать схемы фазово-чувствительного усиления сигнала в нелинейных кристаллах.
6. Проанализировать возможности передачи состояния между модами квантового поля при их взаимодействии с кубитом.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются неклассические состояния света, генерируемые в процессе параметрического рассеяния, а также кубиты, с которыми квантовые состояния взаимодействуют. Предметом исследования являются пространственные свойства, модовый состав, степень сжатия и корреляции фотонов генерируемых неклассических состояний, а также возможность управления этими состояниями и их взаимодействием с кубитами.

Методология исследования. Основные результаты, представленные в данной работе, получены с помощью аналитического или численного решения уравнения Шредингера, как в рамках уравнений для амплитуд вероятности, так и в представлении Гейзенберга и расчетом эволюции операторов. Используется метод мод Шмидта, представляющий модернизированное сингулярное разложение в случае функции от двумерных переменных с наличием определенной симметрии. Для расчета спектров излучения использован полуклассический подход, основанный на вычислении дипольного момента, в том числе в формализме матрицы плотности. Необходимые численные расчеты, такие как конкретный вид мод, суммирование сигналов, взятие интегралов, численное решение систем дифференциальных уравнений, а также визуализации строились посредством пакета программ Wolfram Mathematica и скриптов на языке программирования Python.

Научная новизна:

1. Впервые объяснена зависимость числа мод Шмидта для неклассического сжатого света, генерируемого в процессе параметрического рассеяния в нелинейном интерферометре от параметров системы, таких как расстояние между кристаллами, фаза интерферометра и параметрическое усиление.
2. Разработаны методы управления пространственными свойствами и корреляциями фотонов в ярком сжатом вакууме.
3. Предложены методы и рассчитана эффективность выделения с помощью диафрагмы и маски отдельных азимутальных каналов сжатого света, получаемого в процессе параметрического рассеяния.
4. Разработан новый теоретический подход к описанию генерации света в процессе параметрического рассеяния в сильно невырожденном режиме за рамками теории возмущений на основе формализма мод Шмидта.
5. Рассчитано пространственное распределение многомодового сжатия, получаемого при усилении света, сгенерированного в процессе параметрического рассеяния.
6. В подходе мод Шмидта исследована фазовая чувствительность усиления сигналов в нелинейных кристаллах.
7. Разработан метод передачи фотонной статистики между модами квантового поля при их взаимодействии с кубитом. Показано преимущество использования двухмодового квантового поля, взаимодействующего с кубитом, для фазовых измерений по сравнению со случаем одной моды поля.

Теоретическая и практическая значимость состоит в разработанных подходах к управлению пространственными свойствами, корреляциями фотонов, модовым составом и сжатием неклассических состояний света, получаемого в процессе параметрического рассеяния, как в вырожденном, так и в сильно невырожденном режиме, а также выявленных возможностях передачи фотонной статистики между модами поля в процессе их взаимодействия со сверхпроводящим кубитом. Управление числом мод является важным для приложений квантовой визуализации, в работе показано, как настраивая макроскопические параметры системы можно увеличить в разы эффективное число мод. Практически значимыми являются предложенные способы подавления нулевого азимутального канала, так как сигнальный и холостой пучок

в нем неразделимы и создают паразитный шум при чувствительных измерениях на основе скоррелированных пучков. В результате работы удалось теоретически объяснить наблюдаемые в экспериментах распределения многомодового сжатия. Также были обоснованы подходы к восстановлению весов мод из экспериментально измеримых ковариаций. Важным вопросом является бесшумное усиление сигналов в параметрических усилителях, которое происходит в фазово чувствительном режиме. В работе выведены общие принципы, как максимизировать степень фазовой чувствительности при усилении квантовых полей в нелинейных кристаллах. Разработан фундаментальный подход мод Шмидта для описания процесса параметрического рассеяния в режиме генерации запутанных терагерцовых и оптических фотонов. Благодаря теоретическому объяснению получаемых в экспериментах частотно-угловых спектров параметрического рассеяния в сильно невырожденном режиме, удалось разработать метод измерения дисперсии среды в терагерцовом диапазоне, предполагающий детектирование только оптического излучения. Изучение взаимодействия кубита с двухмодовым полем открыло новые возможности для генерации перепутанных квантовых состояний, например, NOON состояний, (являющихся перепутанными состояниями двух полевых мод, в одной из которых N фотонов, а в другой - вакуум), важных для практических приложений в технологиях квантовой информации. Также было продемонстрировано, что кубит может использоваться как светоделитель для когерентного состояния, при этом его пропускная способность зависит от времени взаимодействия с полем. Обнаружены возможности для улучшения точности фазовых измерений при взаимодействии поля с кубитом, что является полезным для приложений квантовой метрологии. Проведенные исследования позволили предсказать целый ряд важных физических эффектов, которые затем наблюдались экспериментально, причем во всех случаях имело место полное количественное совпадение теории и эксперимента.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Варьирование интенсивности накачки и относительной фазы полей в интерферометре позволяет управлять пространственными корреляциями фотонов и модовым составом сжатого света, при этом в режиме большого усиления число пространственных мод квазипериодически зависит от расстояния между кристаллами.

2. Измерение ковариаций сигнального и холостого пучков позволяет восстановить профили и эффективные веса радиальных и азимутальных мод Шмидта.
3. Нулевой азимутальный канал в генерируемом сжатом свете можно подавить с помощью использования диафрагмы в ближней зоне до уровня ниже 50% от интенсивности первого азимутального канала, что позволяет получить предельно малые относительные значения дисперсии разности чисел фотонов в скоррелированных каналах порядка 1% и менее.
4. Разработанная схема по измерению показателя преломления исследуемых сред в терагерцовом диапазоне частот основана на использовании частотно-угловых корреляций оптических и терагерцовых фотонов и обеспечивает точность не хуже 0.02.
5. Разработанная схема широкоугольного нелинейного $SU(1,1)$ интерферометра на основе сжатого света позволяет достичь многомодового сжатия в -4.3 Дб, что обеспечивает высокоточные фазово-чувствительные измерения одновременно по всему широкому угловому полю.
6. Разработанная схема параметрического усилителя позволяет получать высокую фазовую чувствительность одновременно для большого числа мод и регулировать ее за счет изменения пространственно-угловой ширины сигнала подсветки на входе.
7. Система, состоящая из кубита, взаимодействующего с двумя близкими по частоте модами квантового поля, при большой отстройке от резонанса позволяет передавать квантовое состояние поля от одной моды в другую с точностью до фазовых множителей, при этом момент времени наилучшей передачи слабо зависит от входного состояния и может регулироваться параметрами системы.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием обоснованных теоретических подходов, а также проверкой численных решений на случаях, где поставленная задача может быть решена аналитически. Результаты теоретического анализа и сделанные теоретические предсказания находятся в полном количественном согласии с экспериментами, проводимыми по сжатому свету в лидирующих мировых экспериментальных группах.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на научных семинарах МГУ и были представлены на целом ряде международных конференций и симпозиумов:

1. XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2017», МГУ имени М.В.Ломоносова, Russia, 20 апреля 2017
2. X Семинар по квантовой оптике памяти Д.Н. Клышко, Завидово Московской области, Russia, 23-26 апреля 2017
3. Quantum 2017 Advances in Foundations of Quantum Mechanics and Quantum Technologies with atoms and photons, Турин Италия, Italy, 7 мая - 11 июня 2017
4. 26th International Laser Physics Workshop (LPHYS'17), Казань, РФ, Russia, 17-21 июля 2017
5. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2018», МГУ имени М.В. Ломоносова, Russia, 10-11 апреля 2018
6. Студенческая конференция факультета физики ВШЭ, учебный центр Вороново, Московская область, Russia, 20-22 апреля 2018
7. XVI Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова («Волны-2018»), Красновиново, Моск. обл., Russia, 27 мая - 1 июня 2018
8. Laser Physics Workshop 27th, Ноттингем, United Kingdom, 16-20 июля 2018
9. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10-11 апреля 2019
10. Всероссийская Микроволновая Конференция (7th All-Russian Microwave Conference), Москва, Россия, 25-27 ноября 2020
11. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10-27 ноября 2020
12. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 12-23 апреля 2021

13. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2022», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11-22 апреля 2022
14. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10-21 апреля 2023

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, в том числе в 9 статьях в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих Положению о присуждении учёных степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова. Список работ автора приведен в конце диссертации перед списком литературы.

Личный вклад. Все представленные в диссертационной работе результаты получены автором лично, либо при его определяющем участии.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка цитируемой литературы. Полный объем диссертации составляет 149 страниц, включая 72 рисунка. Список литературы содержит 178 наименований.

Краткое содержание диссертации. Первая глава представляет собой обзор литературы, в котором рассмотрен процесс параметрического рассеяния и основные его свойства, возможности измерения сжатия, а также применение генерируемого света. Приведено квантовое описание параметрической генерации в подходе мод Шмидта, введены операторы рождения и уничтожения в этих модах. Рассмотрены существующие подходы к решению задачи о взаимодействии кубита с квантовым полем.

Вторая глава посвящена исследованию возможностей управления пространственными свойствами неклассических состояний света, генерируемых в процессе параметрического рассеяния в интерферометре из 2-х нелинейных кристаллов. Продемонстрированы пространственные корреляции при маленьком и большом параметрическом усилении в ближней и дальней зоне. Рассчитаны вид и веса мод, объяснено влияние расстояния между кристаллами и фазы интерферометра на их число. Обнаружен эффект удвоения числа мод при большом расстоянии между кристаллами по сравнению со случаем одного кристалла. Аналитически получены профили мод. Продемонстрировано, что от фазы интерферометра сильно зависит эффективное число азимутальных мод при высоком параметрическом усилении, т.к. меняется резкость спада весов

первых мод Шмидта. Показано, что в ближней зоне можно пространственно разделить азимутальные каналы. На основе это разработаны подходы по подавлению нулевого азимутального канала с помощью диафрагмы и маски. В случае с маской происходит попытка закрыть нулевой канал, а затем усилить полученный свет во втором кристалле. В случае с диафрагмой, наоборот пытаемся выделить только нулевой канал, а затем с помощью подстройки фазы ослабить его генерацию во втором кристалле. Метод с диафрагмой показал существенно лучшие результаты, как по качеству выделения, так и по уровню дополнительно вносимых шумов из-за потери части фотонов.

Третья глава посвящена разработке подходов к описанию генерации запутанных оптического и терагерцового пучков в сильно невырожденном режиме параметрического рассеяния за рамками теории возмущений. Сначала для системы из одного кристалла в сильно невырожденном режиме развит подход мод Шмидта. Изучена зависимость корреляций от длины кристалла и частоты терагерцового излучения. Было обнаружено, что в такой системе одна основная радиальная мода и аналитически найден ее вид. Также показано, что система содержит много азимутальных мод, при этом они довольно близки по пространственным свойствам и невозможно пространственное разделение азимутальных каналов. Далее рассмотрен интерферометр из двух нелинейных кристаллов. Найден модовый состав, который позволяет рассчитать сигнал при любом параметрическом усилении. На основе этих расчетов построены частотно-угловые спектры в оптическом диапазоне. В интерферометре при сильном параметрическом усилении обнаружены выраженные минимумы интенсивности на оптическом спектре, которых нет в случае одного кристалла. Оказалось, что они связаны с появлением двух мод с меньшими весами при определенных частотах холостого факта. Найденный эффект нашел подтверждение в экспериментах. На основе обнаруженных эффектов разработан метод измерения дисперсии среды в терагерцовом диапазоне. Рассмотрены возможности сужения терагерцового сигнала с помощью подсветки. Показано, что добиться сужения можно только в системе из двух кристаллов, так как там присутствуют узкие моды, которые надо усилить. Изучен процесс генерации антистоксовой частоты, рассчитаны корреляции по числу фотонов, когда происходит генерация трех пучков - терагерцового, оптического стоксового и антистоксового фотонов. Рассмотрены корреляции по азимутальному углу стоксового и антистоксового фотонов в зависимости от параметрического усиления.

Четвертая глава посвящена вопросам усиления для широкого набора мод света в нелинейных кристаллах. В такой системе можно достичь чувствительность к фазе между накачкой и усиливаемым светом, превосходящую уровень дробового шума. Экспериментальной группой в такой схеме было достигнуто многомодовое сжатие до уровня -4.3 Дб, которое необходимо для высокой чувствительности. Вначале разработан теоретический подход, позволяющий рассчитать сигнал, когда в одном кристалле происходит генерация сжатого света, а во втором его усиление. Полученный сигнал представляет некогерентную сумму мод Шмидта с некоторыми эффективными весами, зависящими от собственных весов мод. Данные эффективные веса возможно восстановить из ковариаций, что и было сделано. Описаны методы восстановления азимутальных и радиальных весов. Проведенное сравнение с экспериментальными данными показало хорошее соответствие. Также объяснена слабая зависимость весов от фазы между накачкой и квантовым светом на входе во второй кристалл. Рассчитанное многомодовое сжатие получаемого света хорошо совпало с экспериментальными измерениями. Далее изучены вопросы возможности бесшумного усиления сигнала в нелинейных кристаллах. Так как бесшумное усиление должно быть фазово чувствительным, были развит теоретический подход для объяснения режимов фазо-чувствительного и фазо-нечувствительного усиления. Основной метрикой являлась видность сигнала. Оказалось, что для максимизации видности важно подсвечивать как можно больше скоррелированных мод оптического усилителя. Также обсуждено влияния ширины накачки на число мод в системе и необходимости многомодовой системы для таких приложений, как усиление квантовых изображений.

Пятая глава посвящена изучению взаимодействия кубита с двумя квантовыми полями. В вырожденном режиме взаимодействия удалось найти аналитическое решение, получить собственные состояния и энергии трехкомпонентной системы. Был обнаружен эффект электромагнитной индуцированной прозрачности, когда двухмодовое поле не меняет энергию в результате взаимодействия с кубитом. В невырожденном режиме теоретический подход сведен к решению системы дифференциальных уравнений для амплитуд вероятности. Найдены инварианты, один из которых - число возбуждения и показано, что система уравнений разбивается на набор независимых цепочек. Это гарантирует устойчивость решений при обрезке состояний до максимума в N фотонов при численном решении. Обнаружена 2 важных режима. В первом, близ-

ком к резонансному полю могут использоваться для управления кубитом. Во втором, когда кубит сильно отстроен от частот полей и слабо заселяется, наблюдается эффект передачи фотонной статистики между полями. Исследовано качество передачи и чистота получаемых состояний. Другим интересным свойством системы является генерация новых квантовых состояний в процессе взаимодействия с кубитом. Например, из фоковских состояний на входе можно получить NOON состояний. Для когерентного состояния кубит может служить светоделителем с настраиваемой пропускной способностью. Также исследована возможность использования системы для проведения фазовых измерений. Показано, что фазу входного состояния между соседними фоками проще измерить при взаимодействии с двухмодовым полем из-за обнаруженного эффекта стабилизации суммарной интенсивности полей.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы, полученные в данной работе.

Глава 1. Обзор литературы

1.1 Генерация неклассических состояний света в нелинейных кристаллах

Неклассические состояния света представляют большой интерес для различных приложений квантовой оптики.

1.1.1 Спонтанное параметрическое рассеяние

Сжатые состояния света является хорошим примером неклассических состояний. С одной стороны, в таких состояниях может находиться большее среднее число фотонов, с другой стороны такой свет обладает рядом неклассических свойств. Один из известных способов получить сжатые состояния - процесс параметрического рассеяния в кристаллах, обладающих квадратичной нелинейностью. Из фотонов накачки, падающей на кристалл, генерируется 2 связанных фотона, сигнальный и холостой, так что сумма их энергий равна энергии фотона накачки [72], а также должен выполняться закон сохранения импульса .

$$\begin{aligned}\omega_s + \omega_i - \omega_p &= 0 \\ \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $\omega_{s,i}$ - частоты сигнального и холостого фотонов, ω_p - частота накачки, $k_{s,i,p}$ - волновые вектора сигнального, холостого и фотона накачки.

Для выполнения условий синхронизма (1.1) удобно использовать анизотропные нелинейные кристаллы, такие как ВВО или КТР. На самом деле условия синхронизма задают положение максимума вероятности генерации и существует частотно-угловой спектр параметрического рассеяния. Также у сигнального и холостого фотона может отличаться поляризация, тогда это называют синхронизмом 2 типа [73].

С точки зрения частот возможно их совпадение у сигнального и холостого фотонов, в этом случае режим считается вырожденным и $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$. В

остальных случаях режим генерации невырожденный, и возможна, например генерация ТГц и оптического пучков.

Если накачка слабая, то в основном происходит генерация бифотонов, когда в сигнальном и холостом канале образуются 1-фотонные состояния [74; 75]. Такие состояния света были получены в нескольких экспериментальных группах [76–78] и обоснованы теоретически в работе Д.Н. Клышко [11].

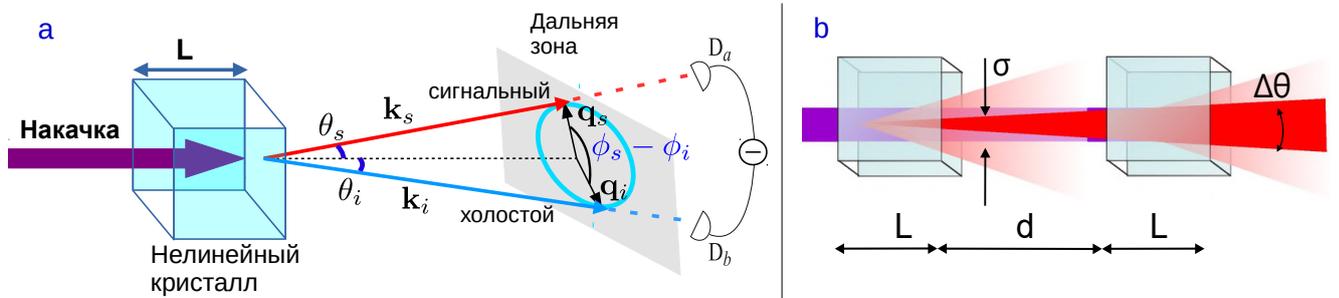


Рисунок 1.1 — (а) Общая схема параметрического рассеяния и обозначения, (б) схема нелинейного интерферометра из двух кристаллов

Важно отметить, что сигнальный и холостой фотоны, сгенерированные в процессе сильно связаны между собой, как по пространственным характеристикам, так и по частотным. Они были обнаружены в эксперименте [79] и получены теоретически в работе Д.Н. Клышко [80].

1.1.2 Яркий сжатый вакуум

Если в кристалле большое параметрическое усиление, то в процессе параметрического рассеяния происходит генерация многофотонных сжатых состояний света. Если на входе, кристалла был вакуум в сигнальном и холостом каналах, то получаемый свет называется ярким сжатым вакуумом [81–84]. Экспериментально в работе [83] были получены состояния со средним числом фотонов 10^{13} . Отметим, что несмотря на большое число фотонов, такой свет сохраняет существенно неклассическое поведение при взаимодействии с веществом, и поэтому представляет собой макроскопический квантовый объект.

Многофотонные состояния сжатого вакуума можно использовать как макроскопический аналог двухфотонных состояния Белла [84], в области квантовой метрологии [9], построения квантовых изображений [85–88], оптомеханики [10]

и высокоточных измерениях [89—94], Многомодовая структура получаемого света может быть использована для улучшения кодирования, передачи и обработки квантовой информации [95].

В отличие от генерации бифотонных пар яркий сжатый вакуум не может быть описан в рамках теории возмущений. Для изучения свойств и многофотонных корреляций сжатого вакуума можно использовать подходы, основанные на введении новых пространственных и частотных мод и операторов рождения и уничтожения фотонов в соответствующих модах [12—14]. Отметим, что в [15; 16] на основе введенных мод Шмидта был произведен анализ пространственных корреляций фотонов, генерируемых в спонтанном параметрическом рассеянии. В работе [17] был развит теоретический подход, основанный на разложении двухфотонной амплитуды по модам Шмидта, который позволяет аналитически описывать пространственные свойства сжатого вакуума. Было показано, что при нахождении модового состава, все остальные характеристики генерируемого света могут быть получены аналитически. Для системы из одного кристалла (рис. 1.1а) моды Шмидта являются известными модами Лаггера-Гаусса [18].

Для управления свойствами сжатого вакуума наиболее удобно использовать систему из 2-х кристаллов (рис. 1.1b). В данной работе будут проанализированы пространственные свойства, модовый состав и корреляции фотонов света, получаемого в системе из нелинейных кристаллов, с использованием подхода, основанного на введении мод Шмидта. В отличие от существующих работ [17; 19; 20], где обычно при описании рассматривается режим генерации при сильной интенсивности накачки, когда доминирует единственная мода, мы исследуем свойства неклассического сжатого света в большом диапазоне интенсивностей накачки, при этом фокусируемся на режиме при котором получается многомодовая структура света с большим количеством фотонов в каждой моде. В данной работе продемонстрирована возможность управлять пространственными свойствами такого света и перепутанностью фотонов с помощью изменения расстояния между кристаллами и характеристик накачки. Предложены методы выделения отдельных каналов, характеризуемых некоторым ненулевым угловым орбитальным моментом (ОУМ) и селекции отдельных радиальных мод.

1.1.3 Генерация и детектирование ТГц излучения в сильно невырожденном режиме параметрического рассеяния

Терагерцовое излучение имеет множество применений, такие как непрерывная спектроскопия в ТГц диапазоне, сверхчувствительные измерения и регистрация слабых сигналов. В работах [96; 97] разработаны экспериментальные методы определения интенсивности ТГц излучения. В настоящее время неплохо развиты методы детектирования коротких ТГц сильных импульсов, основанные на особых свойствах распространения такого излучения через среду, однако для других режимов пока не существует хороших детекторов терагерцового излучения.

При использовании определенных кристаллов (LiNbO_3) можно получить сильно невырожденный режим параметрического рассеяния [98–100], при котором один из пучков фотонов (для определенности - холостой) будет находиться в ТГц диапазоне [101]. Предложенная схема может быть использована для анализа пространственных свойств трудноизмеримых ТГц сигналов с помощью измерения оптического сигнала, генерируемого в системе [102]. Другим способом детектирования является наблюдение за оптическим сигналом на суммарной частоте $\omega_{\text{THz}} + \omega_p$, образующимся в системе при подсветке ТГц. Также чувствительность интерферометра позволяет проводить измерения дисперсии сред в ТГц диапазоне при измерении лишь оптического сигнала.

Данная система в литературе рассматривалась либо классическим способом [103], либо при малых интенсивностях накачки (генерация бифотонных пар). Таким образом, для полного описания характеристик генерируемого ТГц излучения необходимо использовать непertурбативный подход, основанный на введении мод Шмидта. Он может использоваться только при низком поглощении, т.к. пренебрегает им. При частотах более 10 ТГц такое допущение хорошо работает.

1.2 Квантовое описание взаимодействия света с нелинейным кристаллом

1.2.1 Гамильтониан взаимодействия и двухфотонная амплитуда

В процессе параметрического рассеяния поле накачки падает на нелинейный кристалл, на выходе образуются сигнальные и холостые пучки фотонов, которые скоррелированы между собой. Гамильтониан взаимодействия света с кристаллом с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$ можно записать в виде:

$$H \sim \int d^3\mathbf{r} \chi^{(2)}(\mathbf{r}) E_p^+(\mathbf{r}, t) E_s^-(\mathbf{r}, t) E_i^-(\mathbf{r}, t) + h.c. \quad (1.2)$$

где индексы s, i, p обозначают сигнальный, холостый фотоны и накачку соответственно. Интегрируя по пространству, получаем:

$$H = i\hbar\Gamma \int d\mathbf{q}_s d\mathbf{q}_i F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) a_{q_s}^\dagger a_{q_i}^\dagger + h.c. \quad (1.3)$$

где $F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ - двухфотонная амплитуда.

Далее покажем вид двухфотонной амплитуды системы из двух кристаллов длины L при расстоянии между ними d [17] в вырожденном режиме генерации, т.е. когда $w_s = w_i = w_p/2$, где $w_{s,i,p}$ - частоты сигнального, холостого фотонов и накачки соответственно, и гауссовым профилем накачки с шириной σ , то есть $E_p \sim \exp(-(x^2 + y^2)/2\sigma^2)$:

$$F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = C \exp\left(-\frac{\sigma^2(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)^2}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{L(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2}{4k_p}\right) \cos\left(\frac{L(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2}{4k_p} + \frac{\delta n k_s d}{n_s} + \frac{d(\mathbf{q}_s^{air} - \mathbf{q}_i^{air})^2}{4k_p^{air}}\right) \exp\left(-i\left(\frac{L(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2}{2k_p} + \frac{\delta n k_s d}{n_s} + \frac{d(\mathbf{q}_s^{air} - \mathbf{q}_i^{air})^2}{4k_p^{air}}\right)\right) \quad (1.4)$$

где $\mathbf{k}_{s,i,p}$ - волновые векторы сигнального, холостого фотонов и накачки, $\mathbf{q}_{s,i,p}$ - их проекции на плоскость перпендикулярную плоскости распространения, $n_{s,i,p}$ - показатели преломления в кристалле, δn разница между показателями преломления накачки и сигнального (холостого) фотонов в воздухе.

1.2.2 Бифотоны

Если параметрическое усиление слабое, в приближении теории возмущений волновую функцию можно записать в виде [74; 104]:

$$|\Psi\rangle \propto |0\rangle + \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) a_{\mathbf{q}_s}^\dagger a_{\mathbf{q}_i}^\dagger |0\rangle \quad (1.5)$$

В сигнальном и холостом канале генерируются фотоны, при этом между ними есть сильные пространственные корреляции, характеризуемые двухфотонной амплитудой F . Также в таком состоянии есть корреляция по числу фотонов - если в сигнальном канале есть фотон, в холостом тоже будет фотон.

При увеличении параметрического усиления, в генерируемом свете появляются состояния с двумя, четырьмя и более фотонами и такой свет уже не может быть описан в режиме теории возмущений.

В [105] разработан подход, который позволяет аналитически описывать эволюцию системы за при высоком параметрическом усилении, основанный на введении широкополосных пространственных мод, а в [106] аналогичный подход развит для частотных мод.

1.2.3 Подход мод Шмидта

Ключевая сложность при работе с Гамильтонианом (1.3), записанном в терминах плоских волн, заключается в сильной пространственной перепутанности полей. Для упрощения работы можно использовать методы диагонализации такого Гамильтониана.

В работе [107] описано разложение Шмидта для двухкомпонентных систем. Известно, что для непрерывной функции двух переменных существует разложение (если бы x_1, x_2 дискретны, то это известное в математике сингулярное разложение):

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} g_n(x_1) f_n(x_2) \quad (1.6)$$

такое что функции g и f ортогональны для разных n . Функции $g_n(x)$, $f_n(x)$ называются модами Шмидта, а $\sqrt{\lambda_n}$ - весами этих мод. При этом для весов выполняется равенство

$$\sum \lambda_n = 1 \quad (1.7)$$

Если функция $\Psi(x_1, x_2)$ интегрально нормирована на 1, то и моды Шмидта будут нормированными.

Для анализа запутанности используется параметр Шмидта, определяемый как:

$$K = \frac{1}{\sum_n \lambda_n^2} \quad (1.8)$$

Если заселена только 1 мода, то параметр Шмидта равен 1, в остальных случаях он больше 1. Чем больше мод в системе, тем выше будет параметр Шмидта. Например если есть M равноправных мод, то у каждой будет вес $1/M$, тогда параметр Шмидта окажется равным числу мод M .

В нашей задаче двухфотонная амплитуда зависит от двухмерных переменных, поэтому фактически необходимо разложить по модам функцию 4-х переменных. В работах [108–110] разработана методология для такого разложения. Так как у двухфотонной амплитуды (1.4) есть цилиндрическая симметрия и само выражение зависит разности от азимутальных углов волновых векторов, то ее можно разложить в ряд Фурье по азимутальным каналам:

$$F(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i) = \sum_n \chi_n(q_s, q_i) e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \quad (1.9)$$

Далее каждую функцию $\chi_n(q_s, q_i)$ можно, используя подход Шмидта, разложить по набору ортонормированных мод следующим образом:

$$\chi_n(q_s, q_i) = \sum_{n,p} \sqrt{\lambda_{n,p}} \frac{u_{n,p}(q_s)}{\sqrt{q_s}} \frac{v_{n,p}(q_i)}{\sqrt{q_i}} \quad (1.10)$$

Причем выполняются условия ортонормированности мод:

$$\int_0^\infty u_{n,p}(q) u_{n,k}(q) dq = \delta_{p,k} \quad (1.11)$$

(и аналогично для v). Для непрерывной ограниченной функции двух переменных такое разложение существует и единственно, процедура называется

«singular value decomposition». Также легко показать, что выполняется условие нормировки весов $\sum \lambda_{n,p} = 1$.

Такое разложение позволяет ввести новые операторы [17]:

$$A_{n,p}^\dagger = \int d\mathbf{q}_s U_{n,p}(\mathbf{q}_s) a_{\mathbf{q}_s}^\dagger, \quad B_{n,p}^\dagger = \int d\mathbf{q}_i V_{n,p}(\mathbf{q}_i) a_{\mathbf{q}_i}^\dagger \quad (1.12)$$

характеризующие рождение и уничтожение фотонов в пространственных модах Шмидта, определенных следующим образом:

$$U_{n,p}(\mathbf{q}_s) = \frac{u_{n,p}(q_s)}{\sqrt{q_s}} e^{in\varphi_s}, \quad V_{n,p}(\mathbf{q}_i) = \frac{v_{n,p}(q_i)}{\sqrt{q_i}} e^{-in\varphi_i} \quad (1.13)$$

Очевидно, что полные моды U, V тоже ортонормированы в двумерном пространстве $\int U(\mathbf{q})_{n,p}^* U(\mathbf{q})_{m,k} d\mathbf{q} = \delta_{n,m} \delta_{p,k}$ (и аналогично для V). И поэтому введенные операторы рождения уничтожения в этих модах независимы и удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям.

Далее будем называть $\frac{u_{n,p}(q_s)}{\sqrt{q_s}}, \frac{v_{n,p}(q_i)}{\sqrt{q_i}}$ радиальными модами, $e^{in\varphi_s}, e^{-in\varphi_i}$ азимутальными модами, $U_{n,p}(\mathbf{q}_s), V_{n,p}(\mathbf{q}_i)$ полными модами Шмидта для сигнального и холостого фотонов соответственно, $\chi_n(q_s, q_i)$ азимутальными каналами, соответствующими орбитальному моменту $n\hbar$.

Азимутальные моды характеризуются определенной проекцией орбитального углового момента на ось z . Свет в таких модах называется закрученным, так как при проходе по окружности, фаза меняется от 0 до $2\pi n$ или другими словами его волновой фронт вращается по или против часовой стрелки относительно оси z . Также из вида разложения видно, что фотоны с проекцией момента n в сигнальном канале будут скоррелированы с фотонам с проекцией $-n$.

Радиальные моды в случае параметрического рассеяния в одном кристалле являются функциями Лаггера-Гаусса [111; 112]. Если в двухфотонной амплитуде заменить *sinc* на гауссовый профиль, то можно найти разложение в декартовой системе координат, в нем будут моды Эрмита-Гаусса [112].

1.2.4 Эволюция операторов рождения и уничтожения фотонов в модах Шмидта

В терминах новых мод Гамильтониан можно записать как

$$H = i\hbar\Gamma \sum_{n,p} \sqrt{\lambda_{n,p}} (A_{n,p}^\dagger B_{n,p}^\dagger - A_{n,p} B_{n,p}) \quad (1.14)$$

Заметим, что благодаря введению мод Шмидта Гамильтониан принимает диагональный вид и это упрощает решение задачи эволюции.

Из ортогональности мод следуют коммутационные соотношения для операторов в этих модах:

$$\left[A_{m,n}, A_{k,l}^\dagger \right] = \delta_{m,k} \delta_{n,l}, \quad \left[A_{m,n}, B_{k,l}^\dagger \right] = \delta_{m,k} \delta_{n,-l} \quad (1.15)$$

Тогда в представлении Гейзенберга легко найти эволюцию операторов в модах Шмидта:

$$\begin{aligned} A_{n,p}^{out} &= A_{n,p}^{in} \cosh(\sqrt{\lambda_{n,p}}G) + [B_{n,p}^{in}]^\dagger \sinh(\sqrt{\lambda_{n,p}}G) \\ B_{n,p}^{out} &= B_{n,p}^{in} \cosh(\sqrt{\lambda_{n,p}}G) + [A_{n,p}^{in}]^\dagger \sinh(\sqrt{\lambda_{n,p}}G) \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $G = \int \Gamma dt$ - характеризует параметрическое усиление (гейн), пропорциональное амплитуде накачки.

1.2.5 Вычисление экспериментально измеримых величин

Зная эволюцию операторов Шмидта и модовую структуру, можно найти все интересующие характеристики света. Для интенсивности распределения детектируемого сигнала получаем:

$$\langle N_s(q_s) \rangle = \sum_{n,p} \frac{|u_{n,p}(q_s)|^2}{q_s} \sinh^2(G\sqrt{\lambda_{n,p}}) \quad (1.17)$$

Выражение представляет собой сумму пространственных распределений мод Шмидта с новыми эффективными весами:

$$\Lambda_{n,p} = \frac{\sinh^2(G\sqrt{\lambda_{n,p}})}{\sum_{n,p} \sinh^2(G\sqrt{\lambda_{n,p}})} \quad (1.18)$$

Отметим, что в экспериментах часто под параметрическим усилением подразумевают вес нулевой моды $G\sqrt{\lambda_{0,0}}$ [113].

Полное эффективное число радиальных и азимутальных мод в сигнале может быть вычислено с помощью соответствующих параметров Шмидта [105; 113].

Введем эффективный вес радиальных мод:

$$\Lambda_p = \sum_n \Lambda_{n,p} \quad (1.19)$$

И эффективный вес азимутальных мод

$$\Lambda_n = \sum_p \Lambda_{n,p} \quad (1.20)$$

Тогда число радиальных мод

$$K_{rad} = \frac{1}{\sum_p \Lambda_p^2} \quad (1.21)$$

А число азимутальных мод

$$K_{az} = \frac{1}{\sum_n \Lambda_n^2} \quad (1.22)$$

Полное число мод

$$K_{tot} = \frac{1}{\sum_{n,p} \Lambda_{n,p}^2} \quad (1.23)$$

Как и в одномодовой системе параметр K будет равен 1, если в системе ровно 1 мода, и расти с уменьшением весов мод. Т.к. эффективные веса мод зависят от параметрического усиления, то получается модовым составом и перепутанностью можно управлять с помощью изменения интенсивности накачки. При высоком G функции $\sinh(G\sqrt{\lambda_{n,p}})$ начнут убывать быстрее с убыванием $\sqrt{\lambda_{n,p}}$, таким образом эффективные веса $\Lambda_{n,p}$ будут быстрее стремиться к 0 и число мод уменьшится. При $G \rightarrow \infty$ возможно преимущественное выделение 1 моды.

1.3 Сжатие и перепутанность

1.3.1 Корреляции фотонов и перепутанность

Скоррелированные фотоны имеют большое количество практических применений. На основе запутанных фотонов возможна реализация кудитов - фактически это кубиты, но более высокой размерности [114–129], что реализуемо благодаря большому количеству степеней свободы у фотонов - орбитальный угловой момент, поляризация, частота.

Состояние считается запутанным, если многочастичную волновую функцию невозможно представить в виде произведения одночастичных. В литературе разработано несколько количественных подходов к описанию запутанности. Для чистого состояния запутанность можно измерять через параметр Шмидта [127; 128]. Запутанность смешанного состояния можно характеризовать через отрицательность и запутанность образования [130; 131]

Простейшие примеры запутанных состояний - NOON состояния и состояния Белла. С практической стороны такие состояния используются в алгоритмах квантовой телепортации и квантовой метрологии [132–136].

1.3.2 Одномодовое сжатие

В вырожденном одномодовом режиме параметрического рассеяния моды сигнального и холостого каналов совпадают, поэтому происходит генерация сжатого состояния в этой моде, т.е. присутствуют только четные фотонные состояния $|0\rangle$, $|2\rangle$, $|4\rangle$, \dots . Среднее число фотонов в такой системе может быть очень большим, а флуктуации числа фотонов значительно превышают флуктуации когерентного состояния. Однако в терминах квадратур, оказывается, что дисперсия одной из них уменьшена относительно вакуумного состояния. Такое явление называется одномодовым сжатием и может быть полезно при проведении измерений с уровнем шума ниже квантового предела.

Гамильтониан взаимодействия системы параметрической генерации одно-модового сжатого вакуума записывается следующим образом:

$$H = i\hbar \frac{\Gamma}{2} \left[\exp(i\varphi) (a^\dagger)^2 - \exp(-i\varphi) a^2 \right] \quad (1.24)$$

где a^\dagger , a - операторы рождения и уничтожения фотонов в единственной моде, а φ - фаза накачки на входе кристалла.

Если решить уравнение Гейзенберга, можно получить эволюцию операторов рождения и уничтожения фотонов:

$$a_{\text{out}}^\dagger = a_{\text{in}}^\dagger \cosh G + \exp(-i\varphi) a_{\text{in}} \sinh G \quad (1.25)$$

Состояние, которое получено при эволюции вакуумного состояния представляет суперпозицию четных фоковских состояний [137]:

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh G}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in\varphi) \tanh^n G \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} |2n\rangle \quad (1.26)$$

Введем полевые квадратуры:

$$\hat{X} = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{P} = \frac{a - a^\dagger}{i\sqrt{2}} \quad (1.27)$$

В квадратурных переменных при $\varphi = 0$ такое состояние записывается как:

$$\psi_s(X) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{R}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{X}{R} \right)^2 \right] \quad (1.28)$$

где $R = \exp(G)$ называется параметром сжатия.

Выражения для дисперсий проще всего получить из решения уравнений Гейзенберга. Дисперсия одной из квадратур увеличена относительно вакуумного состояния

$$D_X = \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} \exp(2G) \quad (1.29)$$

а другой - уменьшена

$$D_P = \frac{1}{2R^2} = \frac{1}{2} \exp(-2G) \quad (1.30)$$

Если параметрическое усиление G высокое можно, получить существенное сжатие одной из квадратур.

В случае ненулевой фазы накачки, сжатие произойдет вдоль повернутой на угол $\beta = \pi/2 + \varphi/2$ квадратуры:

$$\hat{X}_\beta = \hat{X} \cos \beta + \hat{P} \sin \beta = \frac{\exp(-i\beta)a + \exp(i\beta)a^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (1.31)$$

1.3.3 Двухмодовое квадратурное сжатие

При высоком параметрическом усилении в невырожденном режиме параметрического рассеяния происходит генерация сильно скоррелированных многофотонных пучков, например оптического и ТГц в сильно невырожденном режиме, что является важным свойством получаемого света [84; 138–140]. Несмотря на большую дисперсию среднего числа фотонов в каналах, эти отклонения одинаковы в сигнальном и холостом канале, что позволяет подавлять квантовые флуктуации при измерении разностного сигнала. Теоретически дисперсия разности чисел фотонов в сигнальном и холостом канале должна быть равна 0, однако практически из-за наличия потерь в системе это значение ненулевое, но сильно меньшее уровня дробового шума.

Для того, чтобы охарактеризовать степень корреляции сигнального и холостого канала используют понятие отношение шума к сигналу (noise reduction factor):

$$\text{NRF} = \frac{D_{N_s - N_i}}{\langle N_s + N_i \rangle}, \quad (1.32)$$

где $D_{N_s - N_i}$ - дисперсия разности сигналов в каналах, а $N_{s,i}$ - интенсивность сигнала в сигнальном и холостом канале.

Из-за потерь в экспериментах не удается достичь нулевых значений, но получен NRF существенно ниже 1 [3; 9; 81; 84; 85; 141–144]. В работе [141] обнаружено, что сжатие зависит от размера угловой апертуры - чем она больше, тем выше сжатие, т.к. удастся получить сигнал от большего числа мод. В работе [144] экспериментально удалось выделить одну моду со средним числом фотонов около 20.

Также дисперсия разностной или суммарной квадратуры полевых мод будет сильно уменьшена относительно вакуумного состояния. Это явление называется квадратурным сжатием и приводит к уменьшению флуктуаций при измерении суммарного и разностного сигнала.

Если в системе одна мода для холостого a и сигнального канала b , то Гамильтониан взаимодействия будет выглядеть следующим образом

$$H = i\hbar\Gamma (a^\dagger b^\dagger - ab) \quad (1.33)$$

В такой системе, если на входе было вакуумное состояние, при эволюции следующее получится двухмодовое запутанное состояние [137]:

$$|\Psi_t\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh^n G}{\cosh G} |n\rangle_a |n\rangle_b \quad (1.34)$$

где G - параметрическое усиление, $|n\rangle_{a,b}$ - число фотонов в модах a и b .

Данное состояние можно записать в терминах полевых квадратур X_a, X_b , вводимых аналогично (1.27) для каждой из мод:

$$\begin{aligned} \Psi_R(X_a, X_b) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(X_a - X_b)^2}{4R^2} \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{R^2 (X_a + X_b)^2}{4} \right] \end{aligned} \quad (1.35)$$

Из сравнения вида (1.28) и (1.35), а также знания о сжатии квадратур в одномодовом режиме (1.29) и (1.30) легко прийти к выводу, что сжата будет квадратура $X_a + X_b$:

$$D_{X_a+X_b} = \frac{1}{2R^2} = \frac{1}{2} \exp(-2G) \quad (1.36)$$

Отметим, что состояние (1.34) является сильно перепутанным и непреставимо в виде произведения одночастичных функций. Данное свойство называется запутанностью по числу фотонов и обсуждается в работах [84; 140; 145]. С этим также сильно связана перепутанность в квадратурных переменных X_a и X_b , что видно из состояния (1.35).

Количественно запутанность можно охарактеризовать через параметр Шмидта, если считать что в (1.34) коэффициенты $\frac{\tanh^n G}{\cosh G}$ похожи на разложение Шмидта, но только по фоковским состояниям, а не разным модам.

Вычисление дает [84; 145]:

$$K = 2 \langle N \rangle + 1 \quad (1.37)$$

где $\langle N \rangle$ - среднее число фотонов в сигнальной и холостой моде. Если $\langle N \rangle \gg 1$, то параметр Шмидта практически совпадает с числом фотонов в сгенерированных полях.

1.3.4 Многомодовое сжатие и перепутанность

В случае многомодового сжатого вакуума система характеризуется Гамильтонианом

$$H = i\hbar\Gamma \sum_{n,p} \sqrt{\lambda_{n,p}} (a_{n,p}^\dagger b_{n,p}^\dagger - a_{n,p} b_{n,p}) \quad (1.38)$$

где n - азимутальный индекс моды, p - радиальный индекс.

Запутанность в этом случае определяется как произведение запутанностей в каждой моде. Если пренебречь модами с малым числом фотонов, можно получить следующую оценку перепутанности [146]:

$$\ln K \sim 2G \sum \sqrt{\lambda_{n,p}} \quad (1.39)$$

Для экспериментального измерения квадратурного сжатия обычно используется метод гомодинного детектирования. На светоделитель подается исследуемое входное поле и состояние локального осциллятора с большим числом фотонов, обычно когерентное, с настраиваемой фазой. Тогда в одном из каналов на выходе светоделителя на фоне шумов осциллятора можно наблюдать интерференционное слагаемое, зависящее от квадратуры исследуемого поля. В работе [147] удалось измерить квадратурное сжатие и получить уровень шума ниже дробового. Развитием подхода является использование разностной схемы, которые позволяет исключить шум осциллятора и по измерению разностного сигнала можно получить информацию о квадратуре поля. В работе [148] было проведено оптическое измерение положения в пространстве двух объектов с точностью, превышающей стандартный квантовый предел. Было достигнуто подавление шума разностного сигнала до уровня 2.5 дБ. В эксперименте [A5] было получено квадратурное сжатие на 75 объектах небольшого размера.

1.4 Усиление сигнала без лишнего шума

Квантовое построение изображений имеет преимущества относительно классических методов в связи с более низким достижимым соотношением сигнал-шум [149; 150]. Методы, основанные на использовании сжатых состояний

позволяют превзойти по точности предел, связанный с дробовым шумом [151; 152], однако требуют низких потерь и высокоточных детекторов.

Поэтому важной задачей квантовой оптики является усиление неклассических сигналов без внесения лишних шумов. Один из известных методов усиления - использование оптических параметрических усилителей, например параметрического рассеяния в нелинейных кристаллах, в которых можно и генерировать сжатые состояния.

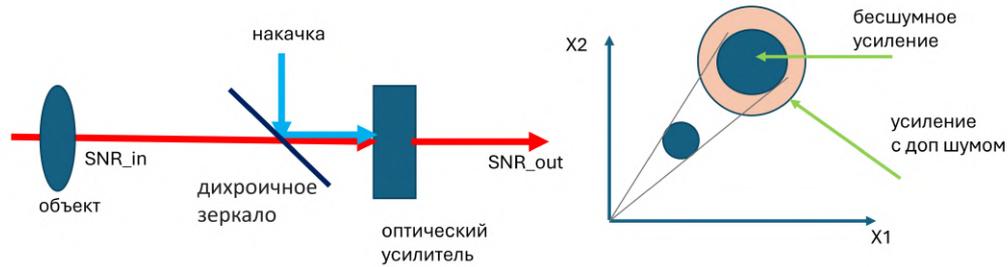


Рисунок 1.2 — Схема усилителя оптических сигналов. Как меняется состояние после усиления при бесшумном и усилении с дополнительным шумом

Бесшумным называется усиление при котором сохраняется отношение сигнал - шум $SNR = P_{signal}/P_{noise}$ на входе и выходе усилителя, т.е. шумы усиливаются также как и сигнал. Для характеристики качества усилителя вводится параметр, называемый фактор шума:

$$NF = SNR_{in}/SNR_{out} \quad (1.40)$$

При бесшумном усилении $NF = 1$. В остальных случаях $NF > 1$, что означает усиление шумов выше, чем усиление сигнала. Демонстрация усилителя и режимов усиления приведена на рисунке 1.2. Обычно бесшумное усиление достигается в вырожденных усилителях. В невырожденном режиме требуется подсветка обоих связанных каналов, иначе будут возникать дополнительные шумы [153; 154]. Также проблемой является наличие сигнала от спонтанного параметрического рассеяния в кристалле, которое также увеличивает шум.

Для построения квантовых изображений важно усиление многомодового поля, возможность такого усиления описана в теоретической работе [155] и продемонстрирована экспериментально в [156–158] на основе нелинейных кристаллов. Также параметрическое усиление возможно достичь в процессе четырех волнового смешения [159] и на основе параметрических осцилляторов [160].

Фазовая чувствительность оптических усилителей широко изучалась с точки зрения их передаточной функции и углового спектра [157; 159; 161]. Чтобы исключить усиление вакуумного шума и получить фазово-чувствительный режим важно сильное перекрытие собственных мод усилителя с входным полем [162], однако пока не исследованы требования к фазово-чувствительному усилению квантовых изображений, а также нет понимания процесса в терминологии собственных мод усилителя.

Для одномодового усилителя легко показать, что в одномодовом усилителе при фазово-чувствительном усилении получается бесшумное усиление: $NF = 1$. Если же усилитель является фазово нечувствительным, тогда $NF = 2 - 1/\cosh^2 G > 1$, где G - параметрическое усиление. Если оно большое, $NF \rightarrow 2$, т.е. шумы усиливаются в 2 раза больше, чем сигнал. Демонстрация различия фазово чувствительного и нечувствительного усиления приведена на рисунке 1.2.

1.5 Взаимодействие квантового света с кубитами

1.5.1 Управление сверхпроводящими кубитами

Методы управления режимами взаимодействия кубита с электромагнитном полем в резонаторе хорошо развиты [163–169]. Характеристики резонатора и кубита возможно настраивать благодаря явлениям макроскопической интерференции на джозефсоновских сверхпроводящих переходах. Также на джозефсоновских переходах можно наблюдать явление нелинейного рассеяния микроволновых фотонов, аналогичное рассеянию света в нелинейных оптических средах [170; 171]. Сверхпроводящие кубиты также могут управляться неклассическими полями или использоваться для их генерации [172–175].

Отмеченные свойства системы из кубита и неклассического поля наблюдались в ряде важных экспериментов квантовой оптики, включающих наблюдения динамического эффекта Лэмба и динамического эффекта Казимира [176–178].

1.5.2 Квантовое описание взаимодействия кубита с полем

Рассмотрим квантовую систему: кубит с частотой перехода ω + одномодовое поле с частотой ν . Гамильтониан взаимодействия складывается из энергии поля, энергии кубита и энергии взаимодействия

$$H = \hbar\nu a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\Gamma(\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger). \quad (1.41)$$

Для такого Гамильтониана инвариант - число возбуждений в системе, т.е. число фотонов и возбуждение кубита. Фактически это означает, что при переходе кубита в возбужденное состояние поглощается 1 фотон из поля.

Состояние такой системы можно представить в виде

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n (c_{a,n}(t)|a, n\rangle + c_{b,n}(t)|b, n\rangle) \quad (1.42)$$

где $|a, n\rangle$ - состояние, когда кубит в возбужденном состоянии и в поле n фотонов, а $|b, n\rangle$ - кубит в основном состоянии и в поле n фотонов

Уравнения Шредингера для медленно меняющихся амплитуд:

$$\begin{aligned} \dot{c}_{a,n} &= -ig\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{b,n+1} \\ \dot{c}_{b,n+1} &= -ig\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}c_{a,n}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где $\Delta = \omega - \nu$

Если в начальный момент времени кубит находился в возбужденном состоянии, то решение уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{a,n}(t) &= c_n(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] e^{i\Delta t/2}, \\ c_{b,n+1}(t) &= -c_n(0) \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) e^{-i\Delta t/2}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где

$$\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4g^2(n+1) \quad (1.45)$$

Если на входе вакуум, вероятности состояний осциллируют с частотой Ω_0 . Если на входе когерентное состояние с большим числом фотонов, то все основные коэффициенты будут вблизи $\langle n \rangle$, поэтому осцилляции будут на частоте Ω_n . В других случаях эволюция системы может быть довольно сложна.

Описанные в этой секции известные результаты будут полезны при рассмотрении взаимодействия кубита с 2-мя полями, т.к. после преобразований удастся прийти к похожим уравнениям и решениям.

1.5.3 Подход к расчету спектров излучения

В полуклассическом подходе расчет спектра происходит через Фурье преобразование от $\langle \sigma^- \rangle$.

При взаимодействии кубита с одним квантовым полем

$$\langle \sigma^- \rangle = \sum_n c_{a,n} c_{b,n}^* \quad (1.46)$$

В резонансном случае ($\omega = \nu$), если на входе был вакуум, а кубит был в промежуточном состоянии, будут спектральные линии $\omega \pm g$. В случае когерентного состояния линии будут на ω , $\omega \pm g\sqrt{\langle n \rangle}$, образуя известный триплет Маллоу.

Отметим, что в полуклассическом подходе есть нерешенная проблема - может возникнуть ситуация, когда для любого n один из коэффициентов $c_{a,n}$ или $c_{b,n}$ равен 0. Такое произойдет, например, если изначально кубит возбужден с вероятностью 1, а в поле вакуум. Для устранения данных проблем существуют другие подходы расчёта спектра через матрицу плотности и введение набора диссипативных мод.

Глава 2. Управление свойствами неклассических оптических состояний, генерируемых в процессе параметрического рассеяния

В данной главе будет рассмотрен вырожденный режим параметрического рассеяния. Основные результаты представлены в статьях [A1; A2; A8].

2.1 Управление пространственными свойствами квантового света в нелинейном интерферометре

Интерферометр из двух нелинейных кристаллов позволяет управлять свойствами генерируемого излучения с помощью изменения расстояния между кристаллами. В этом разделе будут рассмотрены свойства генерируемого излучения и возможности управления модовым составом в дальней зоне.

2.1.1 Свойства двухфотонной амплитуды и пространственных мод в дальней зоне

Анализ двухфотонной амплитуды (1.4) сильно затруднен ввиду ее сложной зависимости от азимутальных углов. Поэтому важной задачей является получение более простой аппроксимации, что облегчит процедуру получения мод, поэтому сначала исследуем свойства двухфотонной амплитуды (1.4).

В случае слабой накачки (в режиме теории возмущений) квадрат двухфотонной амплитуды определяет совместное распределение вероятностей по переменным сигнального и холостого фотонов. Для дальней зоны:

$$W_{pt}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = |F(q_s, q_i, \varphi_s, \varphi_i)|^2 \quad (2.1)$$

Тогда распределение по азимутальным углам в силу цилиндрической симметрии имеет вид:

$$W(\varphi_s - \varphi_i) = \int q_s dq_s q_i dq_i |F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)|^2 \quad (2.2)$$

А по радиальным компонентам проекций волновых векторов:

$$W(q_s, q_i) = \int d\varphi_s d\varphi_i |F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)|^2 \quad (2.3)$$

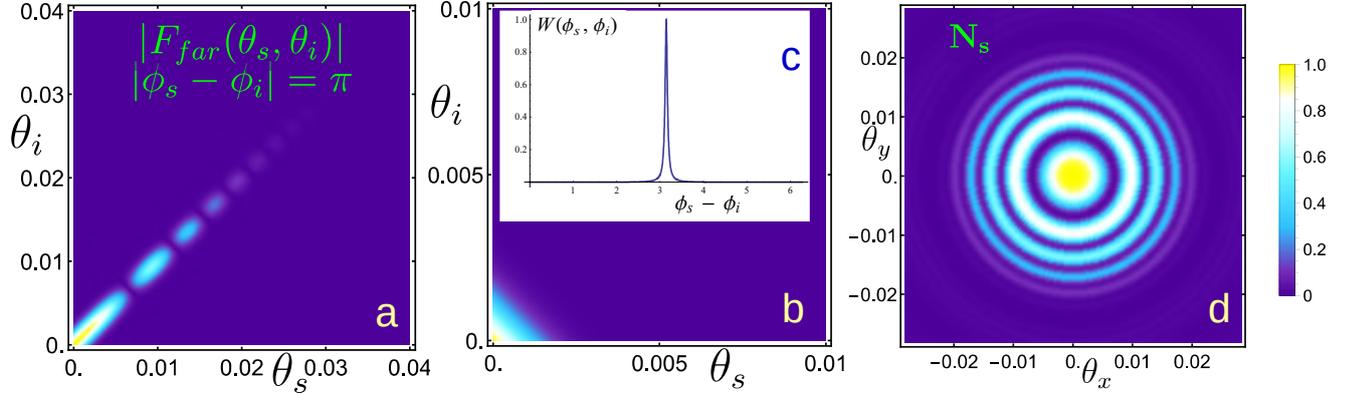


Рисунок 2.1 — Двумерное распределение модуля двухфотонной амплитуды в дальней зоне в зависимости от углов волновых векторов с осью распространения накачки для расстояния между кристаллами $d = 6$ мм, $\alpha = 0$: (a) $\varphi_s - \varphi_i = \pi$, (b) $\varphi_s - \varphi_i = 0$. Вставка (c) показывает распределение $W(\varphi_s, \varphi_i)$ из (2.2). (d) Распределение интенсивности сигнала в дальней зоне. В данной главе рассматривается вырожденный режим $w_s = w_i = w_p/2$ и взяты параметры, соответствующие экспериментальным (см. [20]) : $\lambda_p = 400$ нм, $\lambda_{s,i} = 800$ нм, $L = 2$ мм, ширина накачки на половине высоты 170 мкм.

На рисунке 2.1a приведен вид двухфотонной амплитуды при противоположных азимутальных углах сигнального и холостого фотонов, демонстрирующий сильную корреляцию фотонов по полярному углу. На рисунке 2.1b видно, что двухфотонная амплитуда для одинаковых азимутальных углов фотонов пренебрежимо мала и дает ненулевой вклад только вблизи нулевых проекций волновых векторов. Вставка 2.1c демонстрирует узкое распределение разности азимутальных углов фотонов с резким максимумом на $\varphi_s - \varphi_i = \pi$. Таким образом, фотоны наиболее вероятно вылетают с противоположно направленными проекциями волновых векторов \mathbf{q}_s , \mathbf{q}_i . Также наиболее вероятно, что модули проекций будут также равны $q_s \approx q_i$ (или $\theta_s \approx \theta_i$). Разброс отклонений θ_s от θ_i уменьшается при увеличении ширины накачки. Приведенные результаты являются следствиями закона сохранения импульса, с учетом того, что конечная ширина накачки добавляет небольшой разброс перпендикулярным распространению компонентам \mathbf{q}_s и \mathbf{q}_i .

На диагонали рисунка 2.1a видна интерференционная нарезка, объясняемая усилением или ослаблением мод во втором кристалле в зависимости от разности фаз накачки и нелинейного света. Образуются определенные запрещенные зоны, и сигнал будет состоять из колец 2.1d.

С учетом выявленных свойств двухфотонной амплитуды можно упростить выражение (1.4):

$$F(\theta_s, \theta_i, \varphi_s - \varphi_i) = C \exp\left(-\frac{\theta_s^2 + \theta_i^2 + 2\theta_s\theta_i \cos(\varphi_s - \varphi_i)}{2a^2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\theta_s^2 + \theta_i^2}{b^2}\right) \cos\left(\frac{\theta_s^2 + \theta_i^2}{b_1^2} + \alpha\right) \exp\left(-i\left(\frac{\theta_s^2 + \theta_i^2}{b_2^2} + \alpha\right)\right) \quad (2.4)$$

где $a = \frac{1}{\sigma n_s \frac{\omega_s}{c}}$, $b = \frac{2\sqrt{2}n_p}{n_s \sqrt{k_p L}}$, $b_1 = \frac{2\sqrt{2}n_p}{n_s \sqrt{k_p(L+n_p d)}}$, $b_2 = \frac{2n_p}{n_s \sqrt{k_p(L+n_p d/2)}}$, а $\alpha = \frac{\delta n k_s d}{n_s}$ - разность фаз между накачкой и нелинейным светом на входе во второй кристалл. При необходимости ее можно дополнительно варьировать в эксперименте. Произведенные приближения связаны с резким максимумом двухфотонной амплитуды при $\varphi_s - \varphi_i = \pi$ и ее диагональным видом при этой разности азимутальных углов. Аппроксимация верна, пока выполняется следующее соотношение между параметрами (2.4): $a \ll b$.

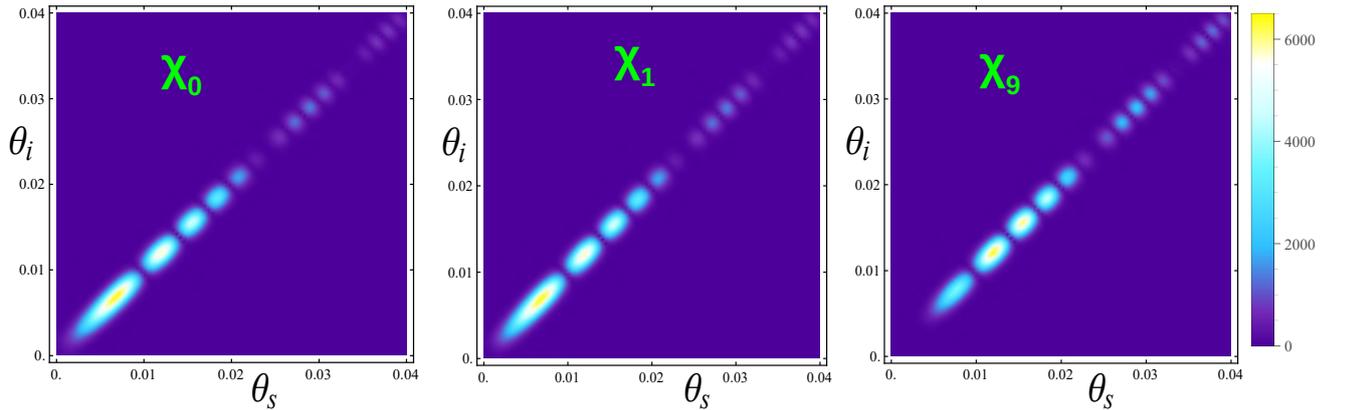


Рисунок 2.2 — Вид азимутальных каналов $\chi_n(\theta_s, \theta_i)$ для $n = 0, 1, 9$. Параметры: $d = 6$ мм, $\alpha = \pi/2$.

На основе полученной аппроксимации (2.4) можно аналитически получить разложение бифотонной амплитуды по азимутальным каналам (1.10):

$$\chi_n(\theta_s, \theta_i) = (-1)^n I_n\left(\frac{\theta_s \theta_i}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{\theta_s^2 + \theta_i^2}{2a^2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\theta_s^2 + \theta_i^2}{b^2}\right) \cos\left(\frac{\theta_s^2 + \theta_i^2}{b_1^2} + \alpha\right) \exp\left(-i\left(\frac{\theta_s^2 + \theta_i^2}{b_2^2} + \alpha\right)\right), \quad (2.5)$$

где $I_n(\xi)$ - функции Инфельда.

Оказывается вид азимутального канала слабо зависит от его номера - это продемонстрировано на рис. 2.2, даже 9-й канал очень похож на первые. Получается пространственно разделить разные каналы в дальней зоне крайне сложно.

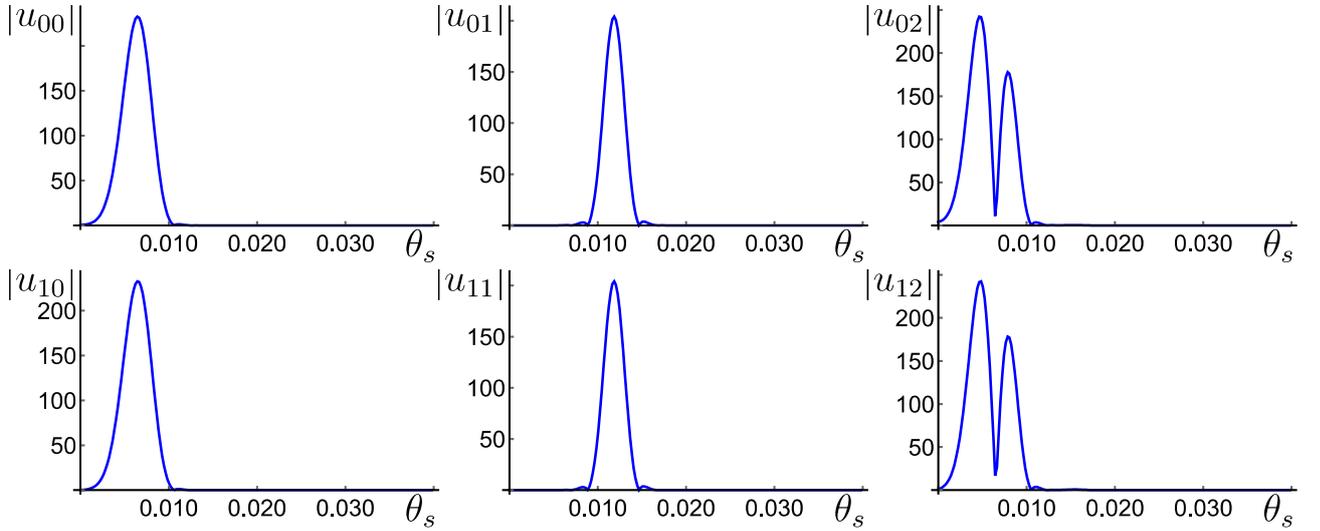


Рисунок 2.3 — Модули мод $u_{np} = u_{np}(\theta)/\sqrt{\theta}$ в дальней зоне, n - азимутальный номер, p - радиальный. Параметры: $d = 6$ mm, $\alpha = \pi/2$.

Разложение Шмидта для азимутальных каналов (2.5) дает радиальные моды для n -ого канала, они приведены на рис. 2.3 для $n = 0,1$ и $p = 0,1,2$. Т.к. азимутальные каналы при разных n похожи, одни и те же радиальные моды неплохо совпадают для разных n . Видна интерференционная нарезка с увеличением радиального номера моды p . Оба этих факта делают сложным процесс пространственного разделения мод в дальней зоне.

2.1.2 Управление числом радиальных и азимутальных мод

В рассматриваемой системе есть 3 свободных параметра - расстояние между кристаллами d , фаза между накачкой и излучением на входе 2-го кристалла α и параметрическое усиление G . Изучим возможности управления модовым составом с помощью этих параметров.

Рассмотрим сначала фиксированное небольшое расстояние между кристаллами. На рис. 2.4а приведена зависимость весов азимутальных мод, вычисляемая как (1.20) при низком параметрическом усилении. Видно, что распределение весов первых азимутальных мод будет зависеть от фазы α . При

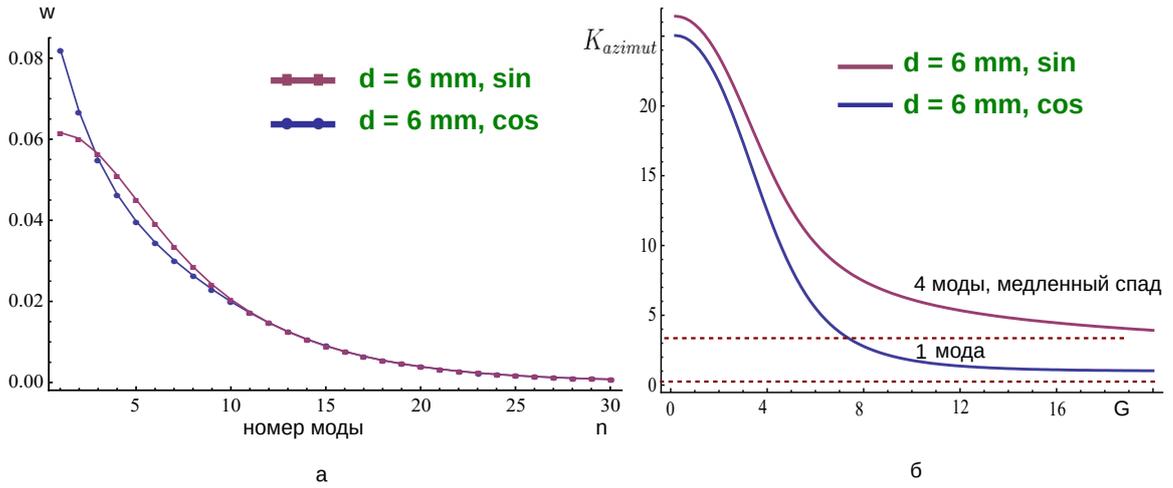


Рисунок 2.4 — (а) Веса азимутальных мод при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, (б) зависимость числа азимутальных мод параметрического усиления. Расстояние между кристаллами $d = 6 \text{ мм}$

$\alpha = 0$ спад более резкий, при $\alpha = \pi/2$ плавный. Существенно на число мод это влияет при увеличении параметрического усиления 2.4б, так как из выражения (1.18) очевидно, что большие веса растут нелинейно быстрее. В случае $\alpha = 0$ довольно быстро выделяется первая мода, а в случае $\alpha = \pi/2$ остается несколько первых мод. При $G \rightarrow 1$ теоретически можно достичь одной моды и во втором случае, однако требуемые для этого значения параметрического усиления недостижимы экспериментально.

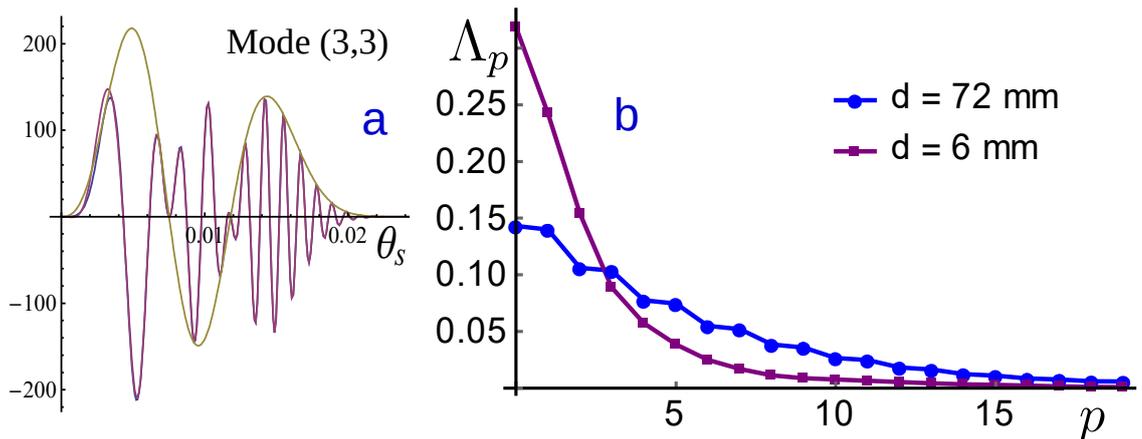


Рисунок 2.5 — (а) формы моды $u_{3,3}$ при $d = 72 \text{ мм}$: синий и красный показывают аналитическую аппроксимацию и численный расчет соответственно cugves , желтая огибающая мода из одного кристалла, (б) веса радиальных мод для $\alpha = 0$ в случае $d = 6 \text{ мм}$ (красный) and $d = 72 \text{ мм}$ (синий)

Теперь исследуем, что меняется с увеличением расстояния между кристаллами. Было обнаружено, что при больших расстояниях между кристаллами

(когда частота нарезки диагонали двухфотонной амплитуды при $|\varphi_s - \varphi_i| = \pi$ высока), моды можно найти аналитически как произведения моды одного кристалла с некоторой фазой на осциллирующий фактор:

$$u_{n,p}^{(1)}(\theta_{s,i}) = u_{n,p}^{(0)}(\theta_{s,i}) \cos\left(\frac{\theta_{s,i}^2}{2b_2^2} + \frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(i\left(\Phi_{s,i} - \frac{\theta_{s,i}^2}{b_2^2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \quad (2.6)$$

$$u_{n,p}^{(2)}(\theta_{s,i}) = iu_{n,p}^{(0)}(\theta_{s,i}) \sin\left(\frac{\theta_{s,i}^2}{2b_2^2} + \frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(i\left(\Phi_{s,i} - \frac{\theta_{s,i}^2}{b_2^2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \quad (2.7)$$

На рисунке 2.5а показан профиль моды от одного кристалла (желтый) и идеальное наложение численно рассчитанной моды и формы моды, найденной по формуле (2.7). Важно отметить, что радиальные моды (2.6), (2.7) будут иметь почти одинаковые веса (рис. 2.5б), что делает практически невозможным выделить в этом случае единственную моду сильной накачкой. Таким образом, число мод при больших расстояниях удваивается, что продемонстрировано на рисунках 2.6а,б - красная линия, соответствующая числу радиальных мод.

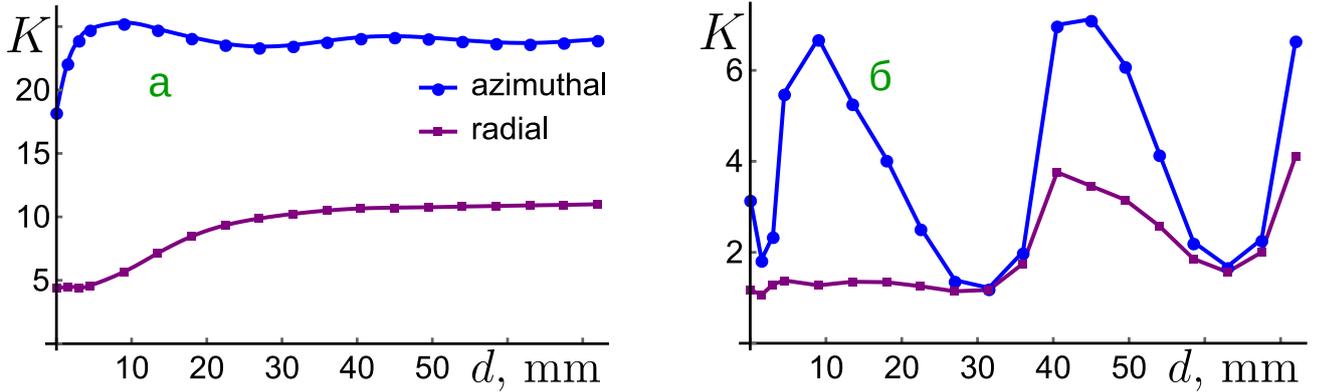


Рисунок 2.6 — Число мод азимутальных (синий) радиальных (красный) в зависимости от расстояния между кристаллами с учетом зависимости $\alpha = \omega(n_s^{air} - n_p^{air})d/$ для (а) слабого параметрического усиления $G = 1$, ($\sqrt{\lambda_{0,0}}G \sim 0.1$) и (б) сильного параметрического усиления $G = 50$ ($\sqrt{\lambda_{0,0}}G \sim 5$).

От расстояния между кристаллами зависит фаза α (если ее искусственно не подстраивать), поэтому при его изменении меняется число азимутальных мод - синяя линия на рис. 2.6а, б. Особенно сильно зависимость выражена при высоком параметрическом усилении 2.6б в связи с нелинейным усилением весов мод. Настраивая параметры интерферометра, можно менять эффективное число мод в несколько раз.

Полученные результаты демонстрируют как с помощью интерферометра возможно управлять модовым составом - регулировать число мод или выделять

единственную моду. Также от модового состава зависят пространственные свойства генерируемого излучения. Обычно первые радиальные моды более узкие, поэтому при высоком параметрическом усилении происходит сужение сигнала.

2.1.3 Корреляции фотонов при низком и высоком параметрическом усилении

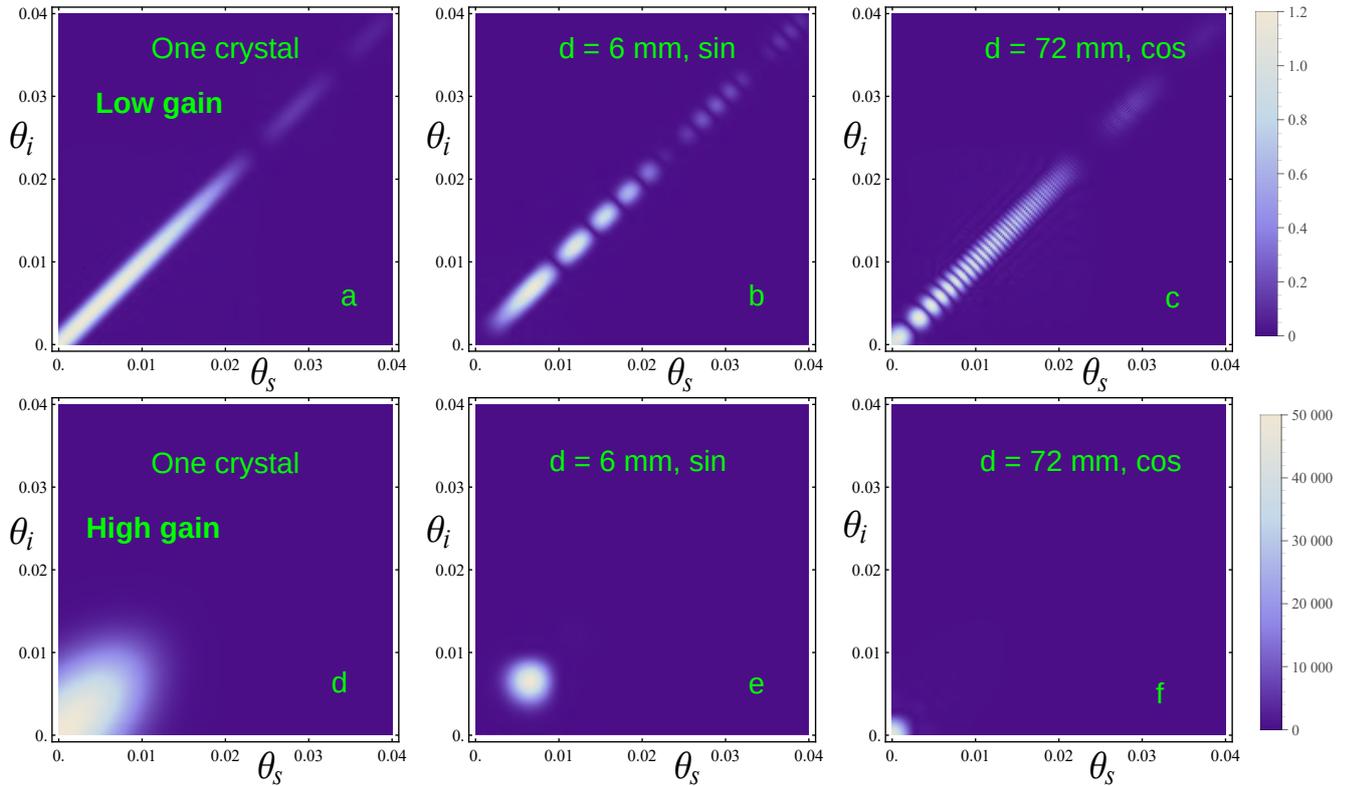


Рисунок 2.7 — Ковариации в дальней зоне, вычисленные при $\varphi_s - \varphi_i = \pi$, при низком параметрическом усилении - $G = 1, \sqrt{\lambda_{00}G} \sim 0.1$ (a-c) и высоком параметрическом усилении (d-e) $G = 50, \sqrt{\lambda_{00}G} \sim 5$ для одного кристалла двойной длины (a,d); $d = 6 \text{ mm}$, $\alpha = \pi/2$ (b,e) и $d = 72 \text{ mm}$, $\alpha = 0$ (c,f)

В наиболее общем случае (при произвольной накачке) корреляции фотонов удобно исследовать с помощью ковариаций, которые экспериментально измеримы. Общее выражение для ковариаций имеет вид:

$$Cov(N_s(\mathbf{q}_s), N_i(\mathbf{q}_i)) = \langle N_s(\mathbf{q}_s) N_i(\mathbf{q}_i) \rangle - \langle N_s(\mathbf{q}_s) \rangle \langle N_i(\mathbf{q}_i) \rangle \quad (2.8)$$

где N_s , N_i - операторы чисел фотонов, сигнальных и холостых. Используя введенные моды Шмидта, можно получить следующие выражения для кросс-

ковариации (сигнального и холостого) и авто-ковариации (фотонов в одном пучке):

$$\begin{aligned} Cov(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)_{cross} &= |Sum(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)_{cross}|^2 \\ Cov(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)_{auto} &= |Sum(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)_{auto}|^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} Sum(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)_{cross} &= \sum_{n,p} \frac{u_{n,p}(q_s)v_{n,p}(q_i)}{\sqrt{q_s q_i}} \sinh(G\sqrt{\lambda_{n,p}}) \cosh(G\sqrt{\lambda_{n,p}}) e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \\ Sum(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)_{auto} &= \sum_{n,p} \frac{u_{n,p}(q_s)u_{n,p}^*(q_i)}{\sqrt{q_s q_i}} \sinh^2(G\sqrt{\lambda_{n,p}}) e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вид радиальных ковариаций при $\varphi_s - \varphi_i = \pi$ представлен на рис. 2.7. Если параметрическое усиление низкое $\sinh(G\sqrt{\lambda_{0,0}}) \approx G\sqrt{\lambda_{0,0}}$, то вид ковариаций совпадает с квадратом модуля двухфотонной амплитуды. В одном кристалле вторые пики на диагонали связаны с видом функции *sinc*, всегда будут слабыми и не представляют интереса. При увеличении расстояния между кристаллами учащается интерференционная нарезка двухфотонной амплитуды 1 кристалла двойной длины. От фазы α зависит, будет ли максимум радиальных корреляций в 0. Отсутствие корреляций будет связано с нулевым сигналом в центре дальней зоны при $\alpha = \pi/2$. При высоком параметрическом усилении $\sinh(G\sqrt{\lambda_{0,0}}) \gg 1$ выделяется несколько первых узких мод, в связи с чем область пространственных корреляций существенно сужается.

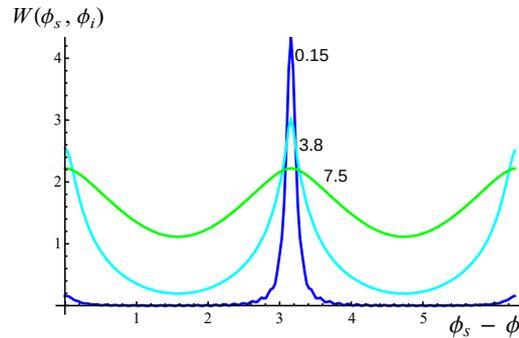


Рисунок 2.8 — Распределение вероятности вылета по азимутальным углам (2.11) для разных значений параметрического усиления ($\sqrt{\lambda_{00}}G$) - 0.15; 3.8 и 7.5 при $d = 18$ mm и $\alpha = \pi/2$; голубая и зеленые кривые домножены на 5 и 10 соответственно.

Теперь рассмотрим корреляции по азимутальным углам $\varphi_s - \varphi_i$, которые можно вычислить как:

$$\widetilde{W}(\varphi_s - \varphi_i) = \int (Cov_{cross}(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i) + Cov_{auto}(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)) q_s dq_s q_i dq_i \quad (2.11)$$

Распределение фотонов по азимутальным углам $\widetilde{W}(\varphi_s - \varphi_i)$ сильно изменяется с гейном, что проиллюстрировано на рис. 2.8. При низком параметрическом усилении единственный выраженный максимум при $\varphi_s - \varphi_i = \pi$ и небольшой максимум при $\varphi_s - \varphi_i = 0$ иллюстрируют вклады кросс и автокорреляций между фотонами соответственно. С увеличением параметрического усиления увеличивается характерная ширина корреляций. Наблюдаемое уширение распределения по азимутальным углам при большом гейне связано с существенным уменьшением числа мод, дающих вклад в суммы (2.9).

Экспериментально есть возможность измерять именно ковариацию, а не двухфотонную амплитуду. Также неизмеримой является фазовая часть, однако можно показать, что фаза мод слабо зависит от номера моды. Поэтому при небольшом параметрическом усилении можно достаточно точно восстановить модовый состав из измеримых величин. При большом усилении удастся вывести вид нескольких первых мод, однако не получится определить их веса.

2.1.4 Выводы

В этом разделе был проведен анализ пространственных корреляций фотонов в дальней зоне в вырожденном режиме параметрического рассеяния. Найден вид мод Шмидта и описаны их характерные свойства. Разработаны методы управления модовым составом с помощью изменения параметров интерферометра и параметрического усиления. Показана экспериментальная возможность восстановления мод.

2.2 Пространственные корреляции фотонов в ближней зоне

Теперь рассмотрим, как можно управлять свойствами генерируемого света в координатных терминах на выходе из кристалла или так называемой ближней зоне. Кроме настройки параметров интерферометра будет исследовано использование определенных пространственных масок для выделения отдельных мод.

2.2.1 Двухфотонная амплитуда в ближней зоне

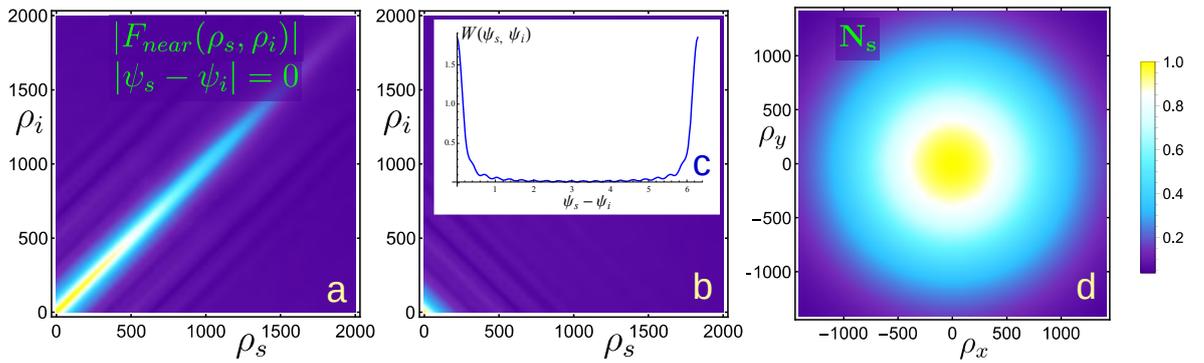


Рисунок 2.9 — Двумерное распределение совместной вероятности в ближней зоне в зависимости радиуса вылета для расстояния между кристаллами $d = 18$ мм, $\alpha = 0$: (a) $\psi_s - \psi_i = \pi$, (b) $\psi_s - \psi_i = 0$. Вставка показывает распределение (2.14). (d) Распределение интенсивности сигнала в ближней зоне. Расстояния

$\rho_s, \rho_i, \rho_x, \rho_y$ по осям измеряются в λ_p .

Двухфотонные амплитуды в ближней и дальней зоне связаны друг с другом Фурье-преобразованием:

$$F_{near}(\mathbf{\rho}_s, \mathbf{\rho}_i) = \iint F_{far}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) \exp(i\mathbf{q}_s \mathbf{\rho}_s) \exp(i\mathbf{q}_i \mathbf{\rho}_i) d\mathbf{q}_s d\mathbf{q}_i, \quad (2.12)$$

где $\mathbf{\rho}_s, \mathbf{\rho}_i$ - координаты в плоскости, перпендикулярной направлению распространения накачки. Точка $(0, 0)$ находится на главной оси накачки. Расстояния для распределений в этом разделе будем измерять в длинах волн накачки $\lambda_p = 400$ нм, если не указано иное.

Аналогично исследованию для дальней зоны теперь исследуем совместное распределение сигнального и холостого фотонов в координатном пространстве на выходе из кристалла:

$$W_{pt}(\rho_s, \rho_i) = |F(\rho_s, \rho_i, \psi_s, \psi_i)|^2 \quad (2.13)$$

Тогда в цилиндрической системе координата $\rho = (\rho, \psi)$:

$$W(\psi_s, \psi_i) = \int \rho_s d\rho_s \rho_i d\rho_i |F(\rho_s, \rho_i)|^2 \quad (2.14)$$

$$W(\rho_s, \rho_i) = \int d\psi_s d\psi_i |F(\rho_s, \rho_i)|^2 \quad (2.15)$$

На рис. 2.9а видно, что есть сильные корреляции фотонов с максимум вдоль диагонали при $\rho_s = \rho_i$ для совместного распределения при $\psi_s - \psi_i = 0$. Если смотреть на диаметрально противоположные точки $\psi_s - \psi_i = \pi$, вероятности такой генерации фотонов очень малы, кроме малой области вблизи оси накачки. Данный факт легко понять из совместного распределения по азимутальным углам на вставке рис. 2.9с - виден выделяющийся максимум в 0. Фактически это означает, что вероятность вылета сигнального и холостого фотонов максимальна при $\rho_s = \rho_i$. Дополняя полученной информацией про дальнюю зону из предыдущего раздела, получается фотоны вылетают из одной точки с противоположными проекциями волновых векторов, что хорошо укладывается в интуитивную картину процесса.

На рис. 2.9а приведен пространственный сигнал на выходе из кристалла. Его радиус $500\lambda_p = 200$ мкм хорошо соответствует ширине накачки в 170 мкм. Было проверено, что при изменении ширины FWHM накачки пропорционально меняется радиус сигнала. Это достаточно логично, т.к. процесс генерации происходит во всех точках, куда попадает накачка, при этом основные углы вылета фотонов небольшие и сигнал не успевает значительно ушириться на размере системы $d + 2L = 22$ мм. Также наличие максимума в центре не зависит от фазы α .

Аналитический вид двухфотонной амплитуды из Фурье преобразования известного выражения в дальней зоне получить сложно, поэтому для дальнейшего анализа разумно вернуться к модам Шмидта. Это также позволит исследовать корреляции фотонов при высоком параметрическом усилении.

2.2.2 Вид мод Шмидта и азимутальных каналов

Выполнив Фурье преобразование, можно показать, что допустимо разложение на азимутальные каналы и в ближней зоне:

$$F(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) = \sum_{n,p} \chi_n(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) e^{in(\psi_s - \psi_i)} = \sum_{n,p} \sqrt{\lambda_{n,p}} \frac{u_{n,p}(\boldsymbol{\rho}_s)}{\sqrt{\rho_s}} e^{in\psi_s} \frac{v_{n,p}(\boldsymbol{\rho}_i)}{\sqrt{\rho_i}} e^{-in\psi_i} \quad (2.16)$$

где

$$U_{n,p}(\boldsymbol{\rho}_s) = i^n e^{in\psi_s} \frac{u_{n,p}(\boldsymbol{\rho}_s)}{\sqrt{\rho_s}}, \quad V_{n,p}(\boldsymbol{\rho}_i) = i^n e^{-in\psi_i} \frac{v_{n,p}(\boldsymbol{\rho}_i)}{\sqrt{\rho_i}} \quad (2.17)$$

При этом связь мод в ближней и дальней зоне записывается следующим образом:

$$u_{n,p}(\rho) = \sqrt{\rho} \int_0^\infty u_{n,p}(q) \sqrt{q} J_n(q\rho) dq \quad (2.18)$$

Используя свойства интегралов от функций Бесселя, можно доказать, что выполняется условие ортогональности мод $U_{n,p}(\rho)$ с весом ρ :

$$\int_0^\infty U_{n,p1}(\rho) U_{n,p2}(\rho) \rho d\rho = \delta_{p1,p2} \quad (2.19)$$

то есть введенные нами моды действительно являются модами Шмидта.

Заметим, что веса мод в дальней зоне эквиваленты весам мод в ближней зоне.

Аналогично дальней зоне можно ввести операторы рождения и уничтожения в модах Шмидта в ближней зоне:

$$A_{n,p}^\dagger = \int d\boldsymbol{\rho}_s U_{n,p}(\boldsymbol{\rho}_s) a_{\boldsymbol{\rho}_s}^\dagger, \quad B_{n,p}^\dagger = \int d\boldsymbol{\rho}_i V_{n,p}(\boldsymbol{\rho}_i) a_{\boldsymbol{\rho}_i}^\dagger \quad (2.20)$$

для которых могут быть записаны и решены уравнения Гейзенберга, аналогичные (1.16). Тогда для интенсивности детектируемого сигнала получаем:

$$\langle N_s(\rho) \rangle = \sum_{n,p} \frac{|u_{n,p}(\rho)|^2}{\rho} \sinh^2(G\sqrt{\lambda_{n,p}}) \quad (2.21)$$

Характерный вид азимутальных каналов в ближней зоне $\chi_n(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i)$ приведен на рис. 2.10. Хорошо видно, каналы с разными номерами локализованы в разных областях пространства, особенно сильно от остальных отличается канал, соответствующий нулевому орбитальному моменту.

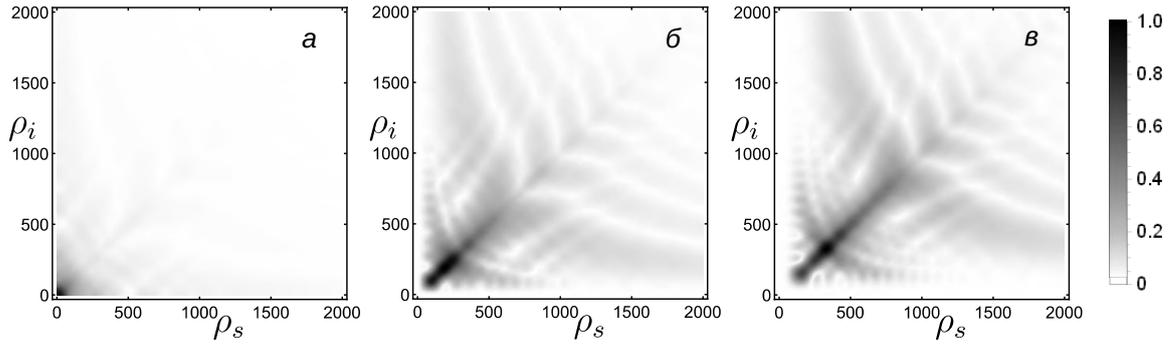


Рисунок 2.10 — 2d распределения азимутальных каналов χ_n для $n = 0, 2, 4$, при расстоянии $d = 6$ мм, $\alpha = \pi/2$. Расстояния по осям даны в единицах λ_p

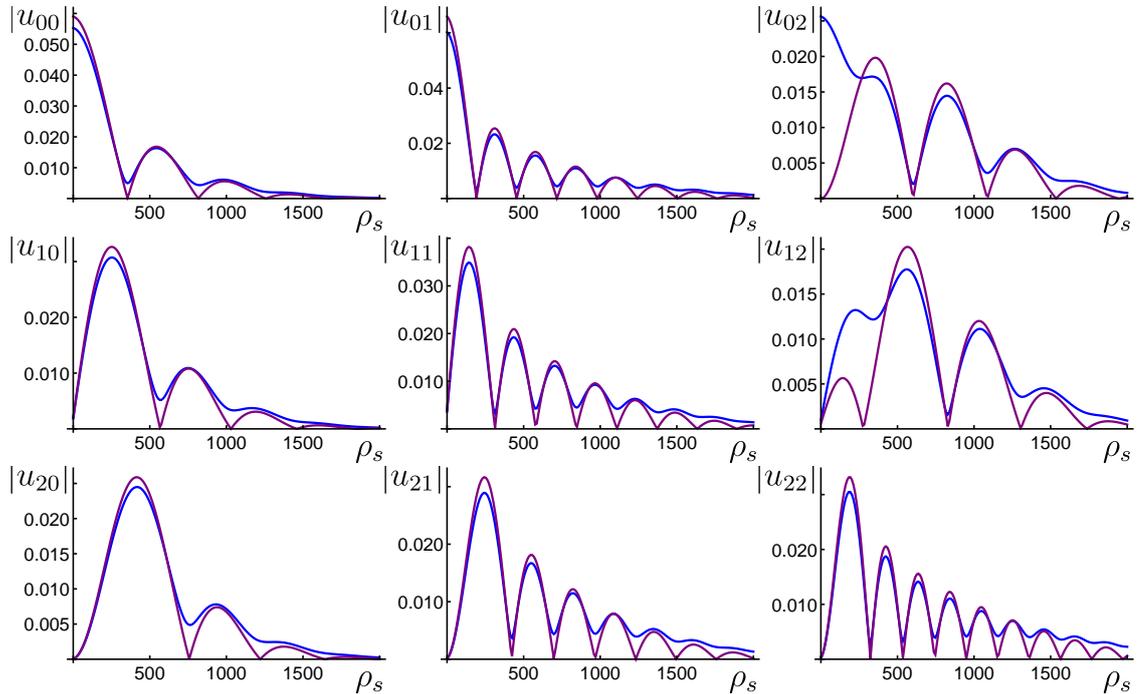


Рисунок 2.11 — Модули мод $u_{np} = u_{np}(\rho)/\sqrt{\rho}$ в ближней зоне, n - азимутальный номер, p - радиальный. Синей линией обозначены реальные моды. Красным обозначено то, что получилось бы, если бы были проинтегрированы моды в дальней зоне без учета фаз. ρ измеряется в длинах волн накачки λ_p . Параметры:

$$d = 6\text{mm}, \alpha = \pi/2.$$

На рис. 2.11 синим изображены моды в ближней зоне. Отметим их основные свойства. Во-первых, все моды локализованы примерно в одинаковых частях пространства. Во-вторых, в отличие от дальней зоны, форма мод с различными азимутальными номерами существенно различается. Математически это связано с наличием функции Бесселя, как раз зависящей от азимутального

номера n в преобразовании (2.18), то есть происходит интегрирование похожих в дальней зоне мод при разных n , но с разным весом.

Третьим интересным свойством является то, что полученные моды не имеют нулей, кроме, может быть, $\rho = 0$ что является особенностью, вызванной наличием фаз у мод в дальней зоне ($u_{n,p} = |u_{n,p}|e^{-i\frac{q_s^2}{b^2}}$). Для сравнения на рис. 2.11 красными кривыми были показаны результаты интегрирования без учета этих фаз («неправильные моды»), они имеют 0 там, где синие кривые достигают минимума. Такое сравнение важно, т.к. экспериментально в дальней зоне было возможно восстановить только модули мод, и было бы неправильно через них искать моды в ближней зоне.

2.2.3 Пространственные корреляции фотонов в ближней зоне

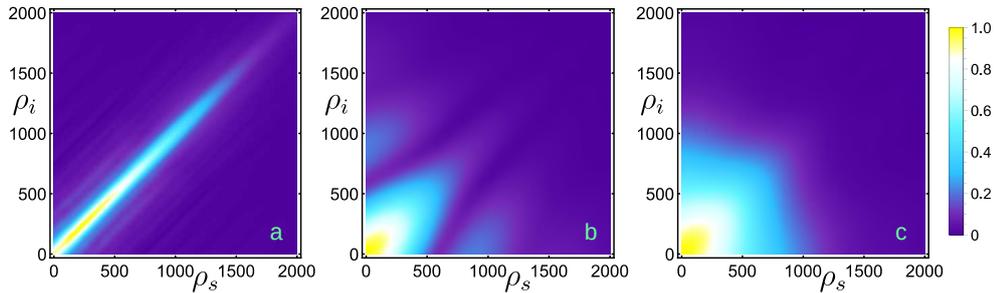


Рисунок 2.12 — Ковариации в ближней зоне, вычисленные при $\psi_s - \psi_i = 0$, для $d = 18 \text{ mm}$ (a) при низком параметрическом усилении - $G = 1, \sqrt{\lambda_{00}G} \sim 0.1$, $\alpha = \pi/2$, (b,c) при высоком параметрическом усилении $G = 50, \sqrt{\lambda_{00}G} \sim 5$ для $\alpha = \pi/2$ (b) и $\alpha = 0$ (c).

Корреляции фотонов в ближней зоне удобнее всего анализировать с помощью ковариаций. Особенностью ковариаций в ближней зоне является совпадение областей локализации кросс и авто ковариаций. Однако, в рамках теоретических расчетов их можно посмотреть отдельно. На рис. 2.12 продемонстрированы кросс ковариации при низком и высоком параметрическом усилении. При низком гейне ковариация имеет диагональный вид (рис. 2.12a), что подтверждает скоррелированность фотонов по радиусу вылета. Оказывается, что вид ковариации слабо меняется при изменении фазы α . Однако при высоком гейне существенно различаются ковариации при $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 0$

(рис. 2.12b,c), так как вклад дает преимущественно одна мода при $\alpha = 0$ и несколько первых при $\alpha = \pi/2$.

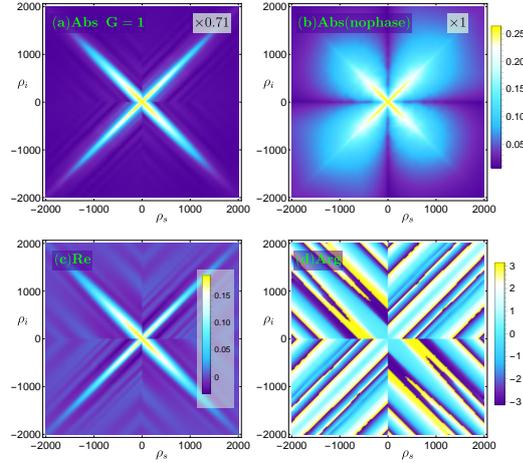


Рисунок 2.13 — Для $d = 6$ мм, $\alpha = \pi/2$, $G = 1$ в ближней зоне (а) модуль (2.10), (б) модуль (2.10), если взять функции u, v без фазовых множителей, (с) реальная часть от 2.10, (д) фаза (2.10). На каждом графике левый верхний и правый нижний квадраты - авто-ковариация при $\psi_s - \varphi_i = 0$, правый верхний и левый нижний - кросс-ковариация при $\psi_s - \varphi_i = 0$.

Расстояния по осям измеряются в λ_p .

В разделе 2.1.3 была показана возможность реконструировать моды в дальней зоне из ковариаций. В ближней зоне все становится по-другому. Каждая функция $u_{n,p}(\rho)$ имеет свой фазовый множитель со сложной зависимостью от ρ . Важно также то, что теперь форма мод зависит от азимутального номера. Это означает, что восстановить правильные моды из корня из ковариаций невозможно. Для демонстрации на рис. 2.13a,b приведены ковариации при суммировании мод с фазами и без фаз, видна существенная разница. Однако также можно заметить, что фаза суммы, аналогичной (2.10) слабо меняется в области, где значения ковариации велики (рис. 2.13c,d). Это также не позволяет восстановить какую-либо фазовую информацию о модах из экспериментально измеримых ковариаций. Более того, экспериментально кросс и авто ковариации в ближней зоне неразделимы.

Другим способом нахождения мод в ближней зоне является расчет их с помощью соотношения (2.18), по полученным экспериментально модулям мод в дальней зоне. Понятно, что отсутствие информации о фазах приведет к получению «неправильных мод». Тем не менее, на рис. 2.11 красные и синие кривые в целом похожи и в первом приближении такое восстановление можно считать удовлетворительным.

2.2.4 Селекция мод с определенным орбитальным угловым моментом

Полученные пространственные свойства мод приводят к идее о возможности разделения каналов с разным орбитальным моментом при помощи диафрагмы или маски. Существуют экспериментальные методы разделения скоррелированных сигнального и холостого каналов, необходимые для проведения чувствительных измерений по разностной схеме. Однако в вырожденном режиме в канале $n = 0$ сигнальный и холостой фотоны неотличимы и невозможно их запутанное состояние разделить на два пучка, сохранив корреляции. Поэтому важной задачей для практических приложений является подавление канала с нулевым орбитальным моментом.

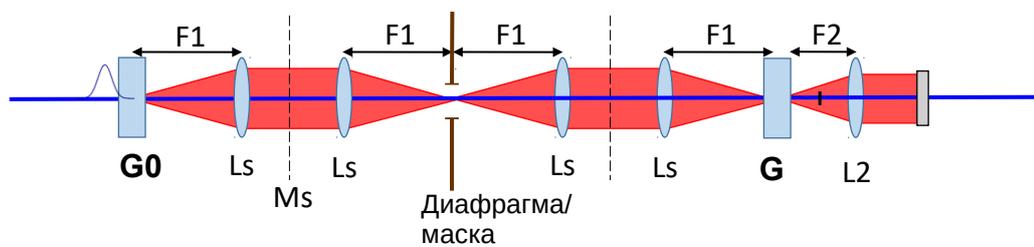


Рисунок 2.14 — Схема для выделения мод с ненулевым орбитальным моментом. Прямоугольником может быть обозначена система кристаллов и это может быть, как 1 кристалл, так и система из двух кристаллов на расстоянии d . G_0 - параметрическое усиление в первой системе, G - во второй системе.

Как обсуждалось в предыдущем разделе, канал с нулевым орбитальным моментом локализован вблизи оси накачки (рис. 2.10) и существенно отличается от остальных. Для его ослабления можно использовать маску специально подобранного размера. При этом для усиления эффекта полученный сигнал с правильно модовой структурой можно усилить во второй системе кристаллов с такими же собственными модами Шмидта. Схема предлагаемой системы приведена на рис. 2.14. Для реализации нужен медленный спад весов азимутальных каналов, которого можно достичь в интерферометре. Так как важно не закрыть маской остальные каналы во избежании потерь, допустимые размеры довольно ограничены и не закроют нулевой канал полностью. Если изначальный вес первого и следующих каналов сильно ниже, чем нулевого, маской будет сложно достаточно сильно снизить вес, чтобы потом нелинейно усилить только ненулевые каналы.

Вторым вариантом является использование диафрагмы и деструктивная интерференция подсветки с накачкой во второй системе кристаллов за счет изменения фазы накачки на π . Рассмотрим сначала именно такой вариант.

Построим теоретический подход к описанию эволюции системы при наличии диафрагмы. Оказалось, что связь операторов до диафрагмы и после записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{n,p}^{(2)} &= \sum_k S_{pk}^n A_{n,k}^{(1)} + i \text{vac}_{n,p} \sqrt{1 - S_{pp}^n} \\ B_{n,p}^{(2)} &= \sum_k S_{pk}^n B_{n,k}^{(1)} + i \text{vac}_{n,p} \sqrt{1 - S_{pp}^n} \end{aligned} \quad (2.22)$$

где vac_{np} - вакуумный (диссипативный) оператор. А S_{pk}^n коэффициенты перекрытия мод u_{np} и u_{nk} по области прохождения света (круг радиуса R_0 для диафрагмы, все кроме круга радиуса R_0 для маски):

$$\begin{aligned} S_{pk}^n(\text{hole}) &= \int_0^{R_0} U_{n,p}^*(r) U_{n,k}(r) r dr \\ S_{pk}^n(\text{mask}) &= \int_{R_0}^{\infty} U_{n,p}^*(r) U_{n,k}(r) r dr \end{aligned} \quad (2.23)$$

При этом для коэффициентов S_{pk}^n выполняется: $\sum_k |S_{pk}^n|^2 = S_{pp}^n$, это позволяет написать для коэффициента прохождения: $T_{np} = \sum_k |S_{pk}^n|^2 = S_{pp}^n$, а значит вес вакуумных шумов равен $R_{np} = 1 - S_{pp}^n$, что определяет квадрат коэффициента перед вакуумным оператором в (2.22). Чем меньше вес моды, тем менее точно она рассчитывается численно, а значит S_{pk}^n при больших p и k могут иметь огромные погрешности, поэтому прямой расчет $\sum_k |S_{pk}^n|^2$ некорректен и полученное соотношение является значимым для дальнейших расчетов.

Очевидно, выполняется соотношение $S_{pk}^n(\text{hole}) + S_{pk}^n(\text{mask}) = \delta_{p,k}$. Поэтому достаточно рассчитать эти коэффициенты для одного из объектов. В силу ограниченности области интегрирования для диафрагмы это сделать оптимальнее.

На рисунке 2.15a,b проведено сравнения коэффициентов прохождения мод через диафрагму для разных каналов. Видно, что для $n = 0$ диагональные элементы выражены лучше, что говорит о хорошем прохождении мод с 0-ым орбитальным моментом через диафрагму. Коэффициенты перекрытия при $k, p \geq 6$ довольно похожи, однако нужно помнить что веса радиальных мод с номером больше 6 достаточно малы, поэтому важно именно поведение

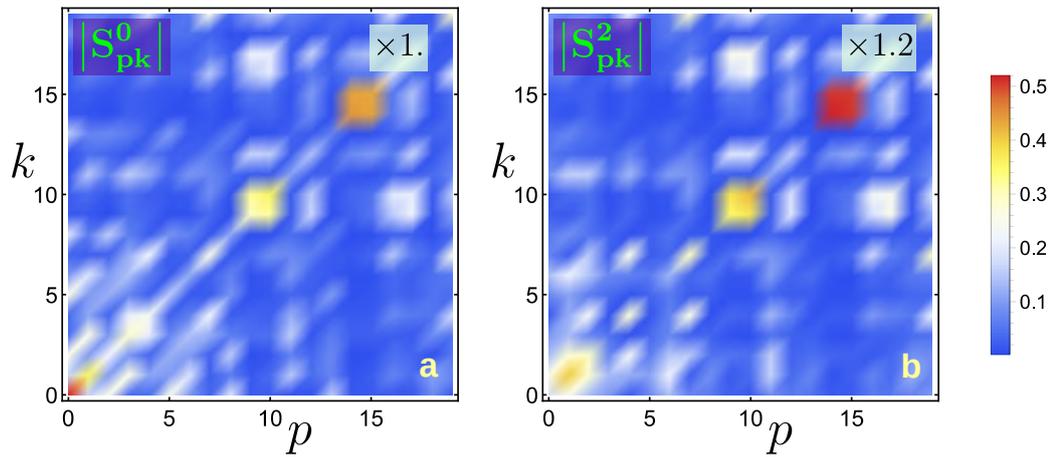


Рисунок 2.15 — Для $d = 6 \text{ mm}$, $\alpha = \pi/2$ рассчитанные модули коэффициентов перекрытия радиальных мод при прохождении через диафрагму радиуса $R_0 = 350\lambda_p$ для канала (a) $n = 0$ (b) $n = 2$

коэффициентов перекрытия в квадрате, соответствующем малыми номерами радиальных мод.

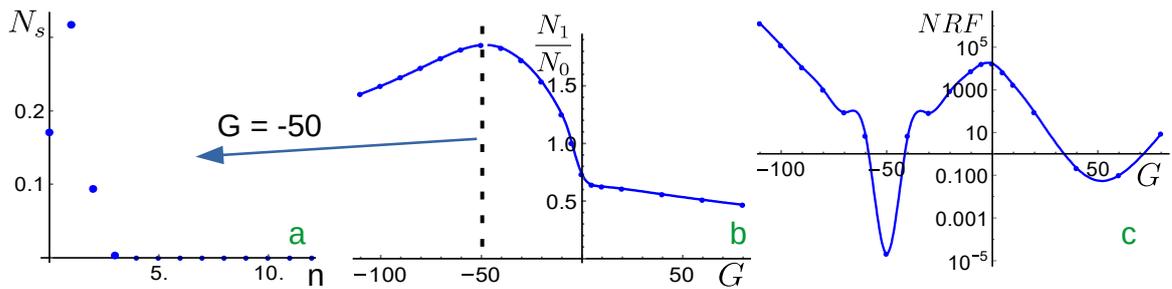


Рисунок 2.16 — Результат выделения мод с помощью диафрагмы радиуса $R_0 = 350\lambda_p$ при параметрическом усилении в первой системе $G_0 = 50$, (a) распределение сигналов по азимутальным каналам при параметрическом усилении во второй системе $G = -50$, (b) отношение сигнала в 1 азимутальном канале к сигналу в 0-ом, (c) степень раскоррелированности фотонов NRF , s и i - индексы обозначающие отношение сигнальному и холостому, от параметрического усиления G во втором кристалле

На рис. 2.16 представлен результат подавления канала с $n = 0$ с помощью диафрагмы. Видно, что имеет место существенное перераспределение весов мод (рис. 2.16a,b) на выходе из второй системы кристаллов. Отметим также, что важно сохранять корреляции в процессе выделения. Для характеристики корреляций вводится параметр $NRF = D(N_s - N_i) / \langle N_s + N_i \rangle$. Оказывается, что существует лишь небольшой диапазон параметрического усиления во второй системе кристаллов, при котором потеря корреляций мала (рис. 2.16c), как в случае маски, так и в случае диафрагмы. При этом в том же диапазоне наблюдается наилучшее выделение каналов с ненулевым орбитальным моментом.

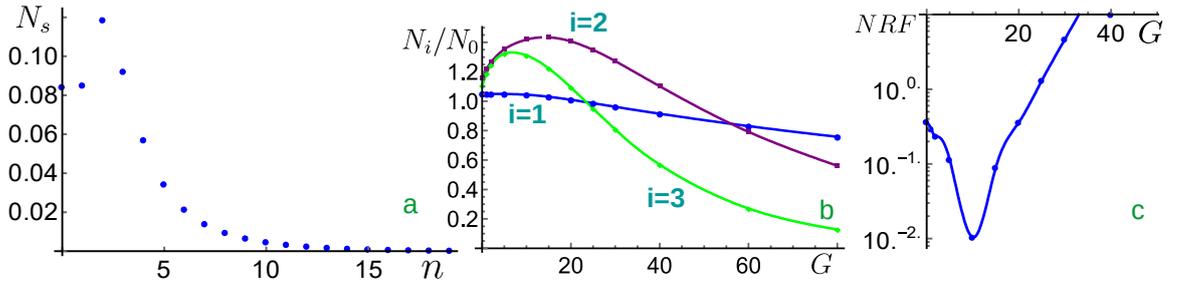


Рисунок 2.17 — Результат выделения мод с помощью маски радиуса $R_0 = 350\lambda_p$ при параметрическом усилении в первой системе $G_0 = 20$, (a) распределение сигналов по азимутальным каналам при параметрическом усилении во второй системе $G = 20$, (b) отношение сигнала в 1,2 и 3 азимутальном канале к сигналу в 0-ом, (c) степень раскоррелированности фотонов NRF , s и i - индексы обозначающие отношение сигнальному и холостому, от параметрического усиления G во втором кристалле

На рис. 2.17 приведены результаты, полученные при использовании маски. Нулевую моду удастся подавить, однако первый канал тоже оказывается подавлен, а интенсивность второго несильно отличается от нулевого рис. 2.16а. На рис. 2.16b приведена зависимость от параметрического усиления во второй системе интенсивности каналов по отношению к нулевому. Лучшего всего выделяется канал с орбитальным моментом $\pm 2\hbar$. Если сравнить со случаем диафрагмы, видно, что подавление нулевого канала оказывается хуже. Это обусловлено большим изначальным весом канала с $n = 0$ (особенно при $G_0 \gg 1$) и невозможностью полностью заблокировать этот канал маской за счет его сравнительно широкого пространственного распределения. На рис. 2.17c показан, как зависит NRF от параметрического усиления во второй системе. Лучшие значения $\sim 10^{-2}$ превышают шумы в случае диафрагмы из-за неизбежных потерь во всех каналах в связи с наличием маски.

2.2.5 Выводы

Таким образом, в данном разделе найдена двухфотонная амплитуда в ближней зоне и проанализирован модовый состав. Исследованы корреляции фотонов при различном параметрическом усилении. Предложены методы выделения азимутальных мод при помощи диафрагмы и маски, показано, что в варианте с диафрагмой можно получить лучшее выделение. Проведено сравне-

ние возможности экспериментальной реконструкции мод в ближней и дальней зоне.

Глава 3. Особенности генерации неклассических состояний света в сильно невырожденном режиме параметрического рассеяния

В главе будет рассмотрен сильно невырожденный режим параметрического рассеяния, когда в одном канале происходит генерация ТГц, а в другом - оптических фотонов. Результаты опубликованы в статьях [A3; A6; A8].

3.1 Генерация состояний в одном кристалле

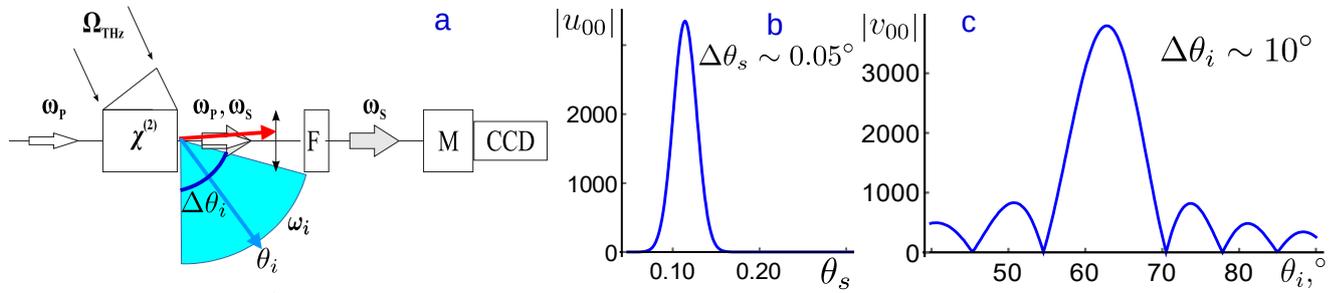


Рисунок 3.1 — (a) Схема генерации и детектирования ТГц излучения, рассчитанные моды (b) оптического и (c) ТГц фотонов, для $\omega_i = 1$ THz, $L = 10$ mm, $\sigma = 1$ mm, $\lambda_p = 514.5$ nm, $\theta_{s,i}$ - углы в кристалле.

В работе [101] с использованием системы кристаллов (LiNbO_3) был получен сильно невырожденный режим параметрического рассеяния, при котором один из пучков фотонов (для определенности - холостой) соответствует терагерцовому частотному диапазону. Схема (рис. 3.1a) может быть использована для детектирования трудноизмеримых ТГц сигналов с помощью измерения оптического сигнала, генерируемого в системе.

Для дальнейших расчетов были взяты параметры, близкие к используемым в эксперименте [102]: $\sigma = 1$ mm, $L = 15$ mm, $\lambda_p = 514.5$ nm, $n_s = 2.33$, зависимость показателя преломления от частоты в ТГц диапазоне $n_i(\nu_i) = 5.102 - 0.0473\nu_i + 0.05887\nu_i^2$ аппроксимирует график, полученный в [102], где $\nu_i = \omega_i/2\pi$ частота холостого фотона в ТГц.

3.1.1 Пространственные корреляции оптического и ТГц фотонов

Рассмотрим процесс сильно невырожденного процесса параметрического рассеяния в одном нелинейном кристалле при оптической гауссовой накачке ширины σ . Двухфотонная амплитуда для такой системы может быть записана в виде:

$$F_{DFG} = \exp\left(-\frac{(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)^2 \sigma^2}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta k_{DFG} L}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\Delta k_{DFG} L}{2}\right) \quad (3.1)$$

где

$$\Delta k_{DFG} = \sqrt{k_p^2 - (\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)^2} - \sqrt{k_s^2 - q_s^2} - \sqrt{k_i^2 - q_i^2} \quad (3.2)$$

, \mathbf{q}_s , \mathbf{q}_i - проекции волнового вектора на плоскость, перпендикулярную направлению распространения накачки, k_s , k_i - модуль волновых векторов.

Опишем характерные особенности двухфотонной амплитуды (3.1). Максимум будет при $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_i$, то есть в плоскости перпендикулярной распространению накачки максимально вероятно, что волновые вектора будут противоположны.

Также в положении максимума должно выполняться $\Delta k_{DFG} = 0$, что соответствует условию продольного синхронизма. Отсюда определим проекцию волнового вектора на плоскость $|q_s| = |q_i| = q$, при которой двухфотонная амплитуда достигает максимального значения:

$$q = \frac{\sqrt{2(k_p^2 k_s^2 + k_p^2 k_i^2 + k_s^2 k_i^2) - k_p^4 - k_s^4 - k_i^4}}{2k_p} \quad (3.3)$$

Отсюда можно получить полярные углы, учитывая, что $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, $k_{p,s,i} = n_{p,s,i} \frac{\omega_{p,s,i}}{c}$, $n_p \approx n_s$, $k_i \ll k_{s,p}$):

$$\begin{aligned} \theta_s &= \frac{q}{k_s} \approx \frac{k_i}{k_p} \sqrt{1 - \frac{n_p^2}{n_i^2(\omega_i)}} \\ \sin(\theta_i) &= \frac{q}{k_i} \approx \sqrt{1 - \frac{n_p^2}{n_i^2(\omega_i)}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Хотя проекции волновых векторов оптического и ТГц фотонов совпадают, сами углы очень сильно отличаются в связи с огромным отличием в модуле волнового вектора. Угол вылета оптического фотона $\theta_s \ll 1$, а угол вылета θ_i может принимать большие значения до 90° .

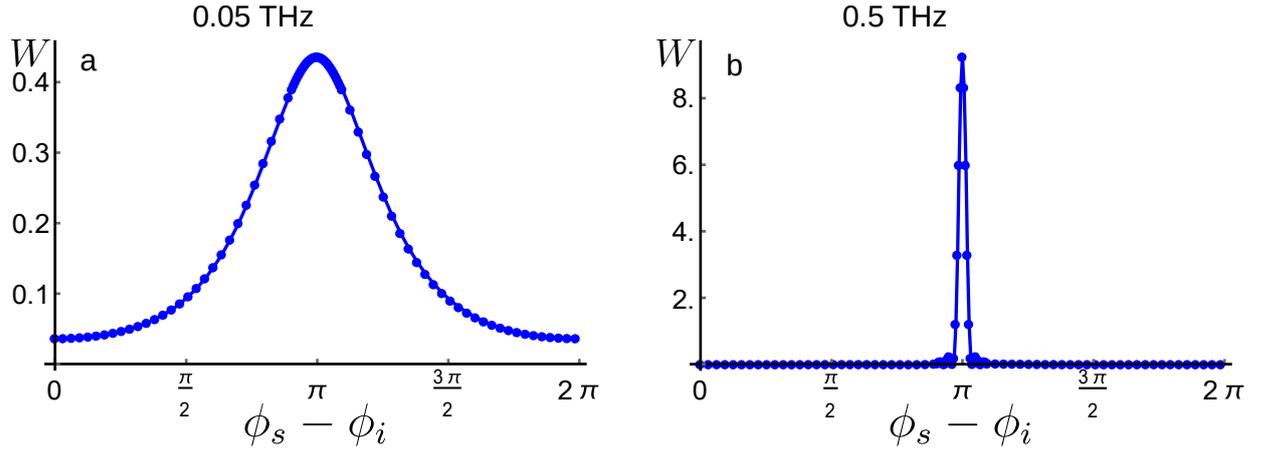


Рисунок 3.2 — Корреляции оптического и терагерцового фотонов по азимутальному углу при частоте холостого фотона (a) $\nu = 0.05$ ТГц (b) $\nu = 0.5$ ТГц

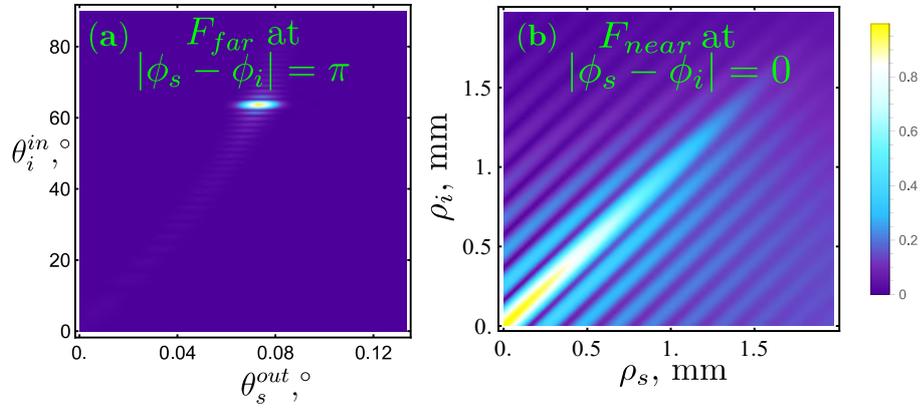


Рисунок 3.3 — Модуль двухфотонной амплитуды для (a) дальней и (b) ближней зоны при $|\varphi_s - \varphi_i|$, таких что в них она максимальна. Частота холостого фотона $\nu_i = 1$ ТГц.

Начнем с анализа корреляций по азимутальному углу, которые можно получить из выражения (2.2). Как и в дальней зоне вырожденного режима, фотоны сильно скоррелированы на $|\varphi_s - \varphi_i| = \pi$ по азимутальным углам. На рис. 3.2 видно, что для частот в ТГц диапазоне получается узкое распределение вблизи $\varphi_s - \varphi_i = \pi$. При достаточно малых частотах ~ 0.1 ТГц распределение уширяется и корреляции уменьшаются, однако в таком режиме эксперименты почти не проводятся из-за высокого поглощения ТГц излучения.

На рис. 3.3а приведено распределение модуля двухфотонной амплитуды по полярным углам в дальней зоне в случае максимальной корреляции по азимутальным углам $|\varphi_s - \varphi_i| = \pi$. Шкалы имеют разные диапазоны, поэтому углы вылета и их разброс у холостого фотона значительно больше, чем у сигнального, который сам распространяется почти параллельно накачке. При этом

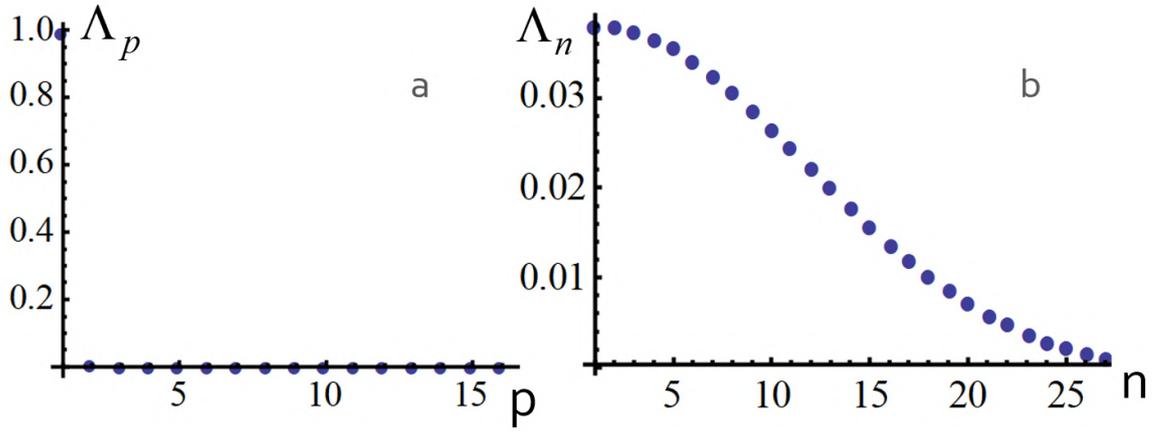


Рисунок 3.4 — Веса (а) радиальных, (б) азимутальных мод Шмидта для 1 кристалла длиной $L = 10$ мм при частоте холостого фотона $\nu_i = 1$ ТГц

относительный разброс углов $\Delta\theta/\langle\theta\rangle$ у сигнального фотона выше. При увеличении частоты ТГц фотона из выражений наиболее вероятных углов (3.4) легко увидеть, что угол вылета ТГц фотона будет оставаться почти постоянным (влияет только изменение показателя преломления), а угол вылета оптического фотона пропорционально растёт.

Также на рис. 3.3b изображена двухфотонная амплитуда в ближней зоне, полученная по формулам (1.9), (1.10) из мод в ближней зоне, которые можно найти из мод в дальней зоне через соотношение 2.18. Несмотря на наличие максимума на диагонали, что соответствует наиболее вероятному вылету из близких точек, имеются побочные диагонали, т.е. точки вылета фотонов разделены какими-то набором вероятных расстояний, что говорит о слабых пространственных корреляциях между фотонами в системе.

3.1.2 Свойства оптической и терагерцовой моды Шмидта

Теперь проанализируем сильно невырожденный режим генерации в формализме мод и операторов Шмидта. Из вида двухфотонной амплитуды в дальней зоне 3.3а, легко увидеть, что такая система будет иметь мало радиальных мод.

Численный расчет без приближений демонстрирует, что при экспериментальных параметрах [102] в такой системе действительно практически одна

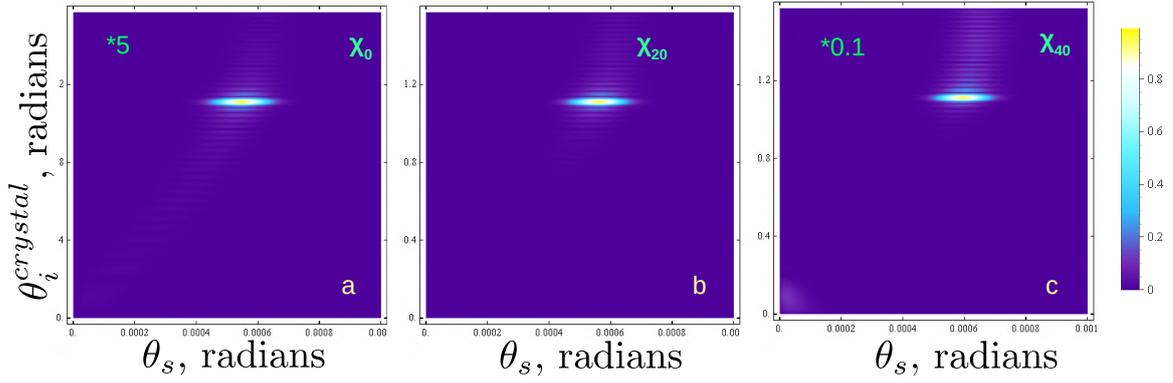


Рисунок 3.5 — Численный расчет азимутальных каналов χ_n (a) $n = 0$, (b) $n = 20$, (c) $n = 40$ кристалла длиной $L = 10$ мм

радиальная мода рис. 3.4а и много азимутальных 3.4б. Из этого следует слабая перепутанность по радиальным переменным, что уже было отмечено при анализе рис. 3.3а. Также маленькие веса второй и следующих радиальных мод делают почти невозможным изменение формы сигнала с помощью подсветки, что будет продемонстрировано в разделе. По азимутальным переменным перепутанность сильная, число азимутальных мод растет с увеличением частоты терагерцового фотона. Это было видно и на распределении по азимутальным углам рис.3.2б.

Вид радиальных мод показан на рисунках 3.1b,c. Оптический сигнал выходит под малым углом накачки с довольно узким разбросом углов. Однако ТГц сигнал из-за больших углов внутри кристалла $\langle \theta_i \rangle \sim 60^\circ$ и показателя преломления просто так не выходит. Дополнив кристалл призмой с подобранной формой и показателем преломления, ТГц излучение все же можно вывести, однако оно будет иметь большую угловую апертуру, что создает трудности. Одним из возможных вариантов решения проблемы является подбор формы накачки.

Попробуем аналитически доказать, что при выбранных параметрах в системе с хорошей точностью одна радиальная мода и найдем явный вид основной моды.

Разложим двухфотонную амплитуду по азимутальным каналам, зависящим только от радиальных переменных и номера канала.

$$F(\theta_s, \theta_i, \varphi_s - \varphi_i) = \sum_n \chi_n(\theta_s, \theta_i) e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \quad (3.5)$$

Так как фотоны сильно скоррелированы на $\varphi_s - \varphi_i = \pi$, то по форме χ_n будут выглядеть как $F(\theta_s, \theta_i, \pi)$, что подтверждается рис. 3.5 - все каналы

очень похожи, даже для больших номеров порядка 40. Тогда:

$$\chi_n(q_s, q_i) \approx F(q_s, q_i, \pi) = W_n \exp\left(-\frac{(q_s - q_i)^2 \sigma^2}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\Delta k L}{2}\right), \quad (3.6)$$

где расстройка:

$$\Delta k = \sqrt{k_p^2 - (q_s - q_i)^2} - \sqrt{k_s^2 - q_s^2} - \sqrt{k_i^2 - q_i^2} \quad (3.7)$$

Нормировочный коэффициент W_n будет зависеть от номера n и является весом канала. Чем сильнее корреляции, тем медленнее спадают веса. В предельном случае $\delta(\varphi_s - \varphi_i) = \sum e^{in(\varphi_s - \varphi_i)}$, т.е. все веса будут одинаковыми и число азимутальных мод бесконечно. Чем медленнее спадают веса, тем больше азимутальных мод в системе.

Введем $\kappa_s = \sqrt{k_s^2 - q^2}$, $\kappa_i = \sqrt{k_i^2 - q^2}$, физический смысл которых - проекции волновых векторов на ось z (параллельную накачке) для фотонов с наиболее вероятным перпендикулярным волновым вектором. Обозначим отстройки от наиболее вероятного перпендикулярного волнового вектора $\Delta q_s = q_s - q$, $\Delta q_i = q_i - q$. Если пренебречь слагаемыми второго порядка малости по Δq в (3.7), получится:

$$\Delta k \approx \frac{\Delta q_s q}{\kappa_s} + \frac{\Delta q_i q}{\kappa_i} \quad (3.8)$$

Легко проверить, что соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q_s q L}{\kappa_s} \ll 1, \text{ if } \Delta q_s \sigma \sim 1 \\ \Delta q_i \sigma \ll 1, \text{ if } \frac{\Delta q_i q L}{\kappa_i} \sim 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

выполняются если

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_i}{\kappa_s} \ll \frac{\sigma}{L} \ll 1 \\ \sigma^2 \gg \frac{L}{k_p} \end{aligned} \quad (3.10)$$

При параметрах, выбираемых в экспериментах [101; 102], условия (3.10) хорошо выполняются.

Если пренебречь слагаемыми из (3.9) в множителях χ_n получим:

$$\chi_n(q_s, q_i) = c_n \exp\left(-\frac{\Delta q_s^2 \sigma^2}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta q_i q L}{\kappa_i}\right) \exp\left(-i \frac{\Delta q_i q L}{\kappa_i}\right) \exp\left(-i \frac{\Delta q_s q L}{\kappa_s}\right) \quad (3.11)$$

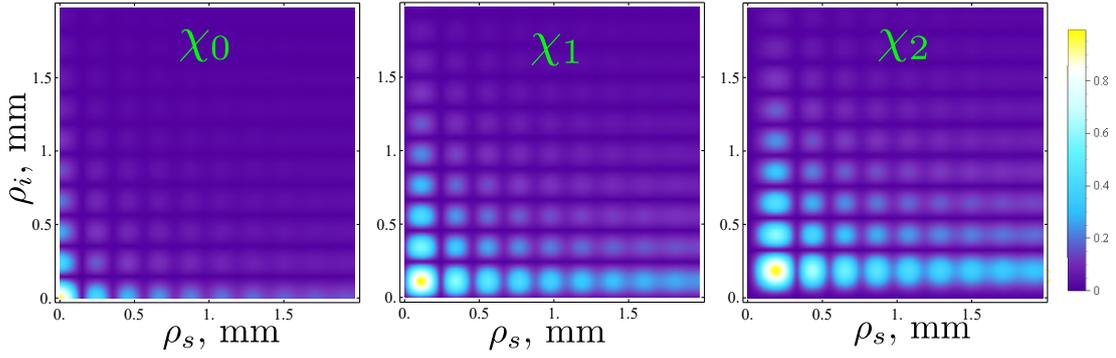


Рисунок 3.6 — Численный расчет азимутальных каналов в ближней зоне χ_n (а) $n = 0$, (б) $n = 1$, (в) $n = 2$ для кристалла длиной $L = 10$ мм при частоте холостого фотона $\nu_i = 1$ ТГц

В выражении (3.11) нет множителей, содержащих одновременно и Δq_s , и Δq_i , т.е. такая функция уже факторизована по радиальным переменным.

Таким образом, единственная радиальная мода Шмидта:

$$\begin{aligned} u(q_s) &= N_u \sqrt{q_s} \exp\left(-\frac{\Delta q_s^2 \sigma^2}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\Delta q_s q L}{\kappa_s}\right) \\ v(q_i) &= N_v \sqrt{q_s} \text{sinc}\left(\frac{\Delta q_i q L}{\kappa_i}\right) \exp\left(-i \frac{\Delta q_i q L}{\kappa_i}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

где N_u, N_v - нормировочные коэффициенты. Важно отметить, что полученные выражения не зависят от номера n , т.е. азимутальные и радиальные переменные оказались полностью факторизованными.

Сделав Фурье-преобразование, легко получить моды в ближней зоне:

$$\begin{aligned} U_n(q_s) &= N_u \int \exp\left(-\frac{\Delta q_s^2 \sigma^2}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\Delta q_s q L}{\kappa_s}\right) J_n(q_s \rho) q_s dq_s \\ V_n(q_i) &= N_v \int \text{sinc}\left(\frac{\Delta q_i q L}{\kappa_i}\right) \exp\left(-i \frac{\Delta q_i q L}{\kappa_i}\right) J_n(q_i \rho) q_i dq_i \end{aligned} \quad (3.13)$$

которые в первом приближении похожи на функции Бесселя.

На рис. 3.6 показаны каналы для разных n . Так как моды в ближней зоне зависят от n , возможно подсветкой выделить отдельные азимутальные каналы.

Последним шагом будет обоснование перехода от двухфотонной амплитуды (3.1) к виду азимутальных каналов (3.6). Из хорошо выполняющихся приближений (3.9) следует, что $\varphi_s - \varphi_i$ остается только в экспоненциальном

множителе. Известно, что $\exp(x \cos \varphi) = \sum_n x^n I_n(x)$, где $I_n(x)$ функция Инфельда n -го порядка. Применив соотношение для (3.1), получим:

$$F_{DFG} = \sum_n (-1)^n I_n(q_s q_i \sigma^2) \exp\left(-\frac{(q_s^2 + q_i^2)\sigma^2}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k_{DFG} L}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\Delta k_{DFG} L}{2}\right) e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \quad (3.14)$$

При экспериментальных параметрах $q^2 \sigma^2 \gg 1$ и $I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} f_n(z)$, где $f_n(z)$ достаточно гладкая функция $z \ll 1$, стремящаяся к 1 при $n \rightarrow \infty$. Для нашего выражения $z = \sigma^2 q^2$. Вид $f_n(z)$ влияет на распределение азимутальных весов, но практически не влияет на форму мод. Тогда:

$$F_{DFG} = \exp\left(-\frac{(q_s - q_i)^2 \sigma^2}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k_{DFG} L}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\Delta k_{DFG} L}{2}\right) \sum_n (-1)^n f_n(q^2 \sigma^2) e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \quad (3.15)$$

Т.е. выражение (3.6) является полностью обоснованным.

3.1.3 Выводы

В данном разделе обнаружены сильные корреляции оптического и ТГц фотонов по азимутальным углам при параметрическом рассеянии в 1 кристалле в сильно невырожденном режиме. Доказано, что в системе единственная радиальная мода и много азимутальных. Найден точный аналитический вид радиальной моды для оптического и ТГц фотона.

3.2 Генерация состояний в нелинейном интерферометре

Теперь рассмотрим генерацию ТГц излучения в более сложной система - интерферометра Маха Цандера, состоящего из двух кристаллов и средой между ними, схема которого представлена на рис. 3.7.

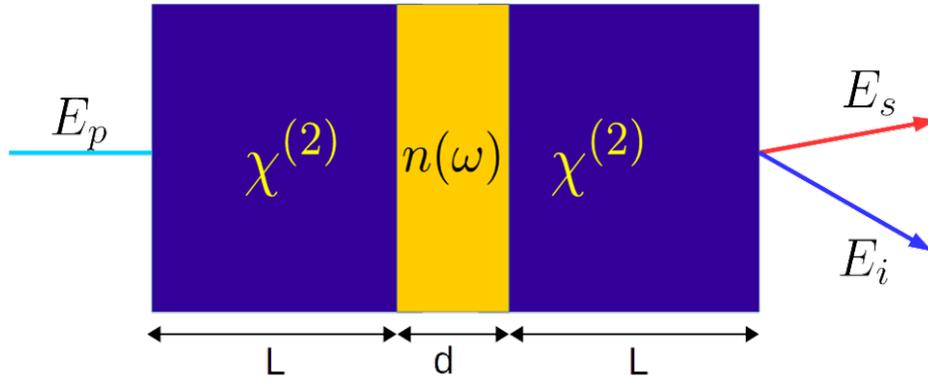


Рисунок 3.7 — Схема интерферометра из 2-х нелинейных кристаллов.

3.2.1 Управление модовым составом

Из выражения (1.2) можно получить двухфотонную амплитуды для нелинейного интерферометра в невырожденном режиме.

$$F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = C \exp\left(-\frac{(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)^2 \sigma^2}{2}\right) \text{Sinc} \frac{\delta_1}{2} \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \exp\left(-i\left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{2}\right)\right) \quad (3.16)$$

где $\delta_1 = L(k_{pe} - \sqrt{k_{se}^2 - q_s^2} - \sqrt{k_{ie}^2 - q_i^2})$, $\delta_2 = d(k_{po} - \sqrt{k_{so}^2 - q_s^2} - \sqrt{k_{io}^2 - q_i^2})$, L - длина кристалла, d - расстояние между кристаллами. Фактически δ_1 , δ_2 - расстройки лучей в кристалле и в прослойке. Волновые вектора $k = n\omega/c$. В соответствии с экспериментальными данными луч в кристаллах был необыкновенным, а в прослойке, которая была тем же кристаллом, повернутым на 90° - обыкновенным.

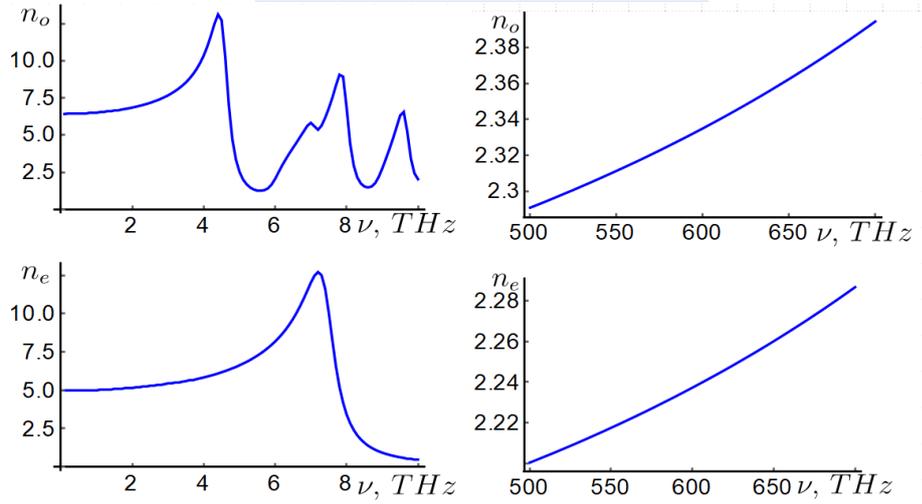


Рисунок 3.8 — Показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле $LiNbO_3$ в интересующих нас терагерцовом и оптическом диапазонах частот.

Показатели преломления обыкновенного и необыкновенного луча в кристалле $LiNbO_3 : Mg$ зависят от частоты ТГц излучения:

$$\begin{aligned}
 n_o^{optic}(\lambda) &= \sqrt{4.8613 + \frac{124489}{41701 - \lambda^2} - 0.26404 \cdot 10^{-8}\lambda^2}; \\
 n_e^{optic}(\lambda) &= \sqrt{4.5583 - \frac{91806}{4.8086 - \lambda^2} - 3.2068 \cdot 10^{-8}\lambda^2}; \\
 n_e^{(THz)}(\nu) &= \Re \left[\sqrt{\frac{24.5 * \nu_0^2}{(\nu_0^2 - \nu^2) - I * \gamma_{eff}(\nu) * \nu}} \right]; \\
 \gamma_{eff}(\nu) &= 0.75 + \frac{3.24}{(3.45^2 - \nu^2 - i\nu 1.35)i\nu} + \frac{0.6^2}{(1 - 2i\pi\nu 0.6)i\nu}; \\
 n_o^{THz}(\nu) &= \Re \left[\sqrt{5.0 + \frac{40 \cdot \nu_1^2}{\nu_1^2 - \nu^2 + 17i\nu}} \right],
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

где λ измеряется в мм, ν в ТГц, $\nu_1 = 152$, $\nu_0 = 7.44$. Показатели преломления в интересующем нас диапазоне частот показаны на рис. 3.8.

В отличие от случая 1 кристалла здесь отсутствует точный синхронизм, однако примерно положения максимума задается следующими условиями:

$$\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i = 0, \quad \delta_1 + \delta_2 \approx 2\pi n, \quad |\delta_1| < 1$$

Рассмотрим как ведут себя множители в двухфотонной амплитуде. Из рис. 3.9 видно, что $\text{sinc}\delta_1$ слабо зависит от q_s (т.е от переменной оптического фотона). Ширина кристалла влияет на ширину sinc по переменной терагерцового фотона.

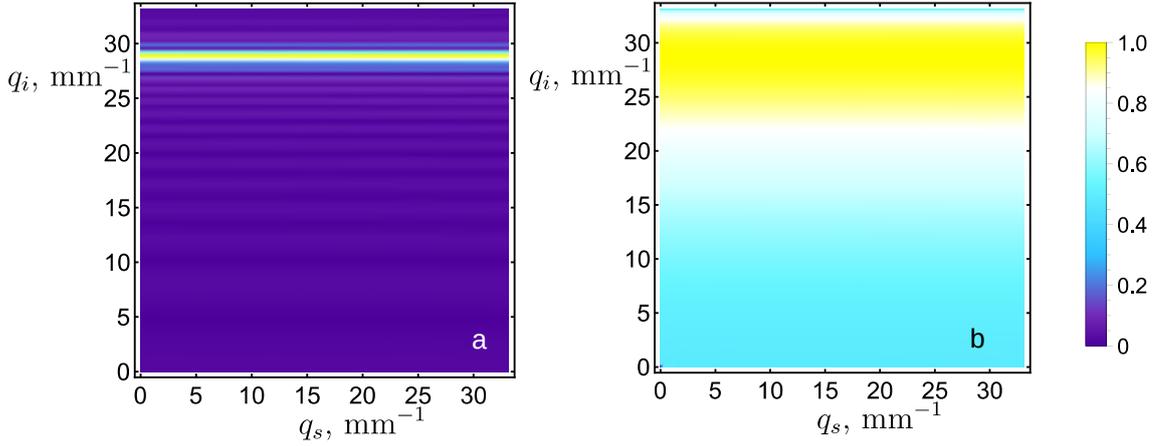


Рисунок 3.9 — Множитель $\text{sinc}(\delta_1)$ в двухфотонной амплитуде при длине кристалла (a) $L = 10$ мм, (b) $L = 0.28$ мм.

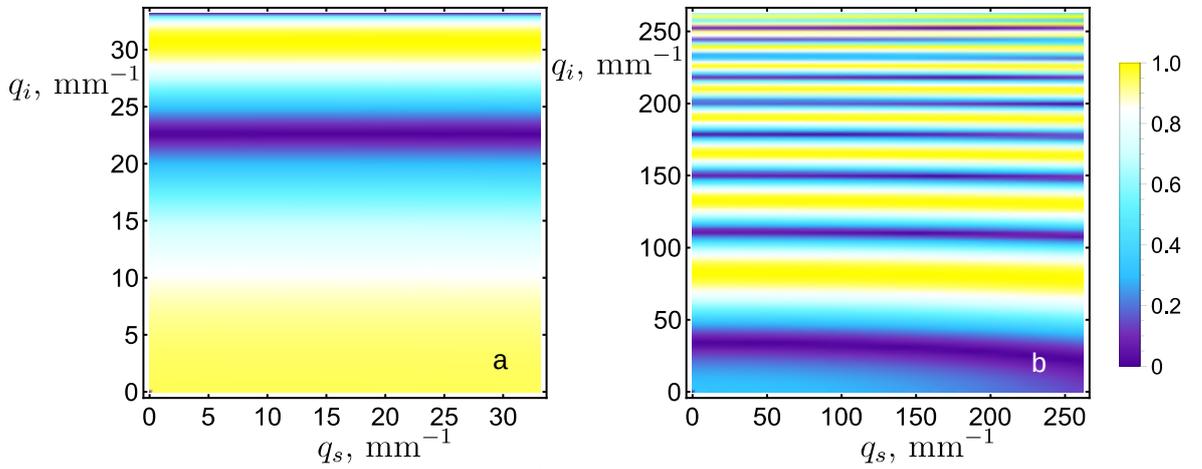


Рисунок 3.10 — Множитель $\cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ в двухфотонной амплитуде при частоте ТГц излучения (a) $\omega_i = 2 c^{-1}$, (b) $\omega_i = 15 c^{-1}$.

Из рис. 3.10 также видно, что $\cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ слабо зависит от q_s (т.е. от переменной оптического фотона). Ширина кристалла влияет на ширину sinc по переменной терагерцового фотона.

Рассмотрим теперь характерное поведение двухфотонной амплитуды в такой системе. В зависимости от попадания нулей функции $\cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ на максимум $\text{sinc} \delta_1$ могут возникнуть ситуации, когда двухфотонная амплитуда имеет 2 положения максимума, например, рис 3.11с, когда частота $w_i = 5 c^{-1}$. При других частотах, например при $w_i = 10 c^{-1}$ рис. 3.11d, будет виден только один максимум, как в случае 1 кристалла.

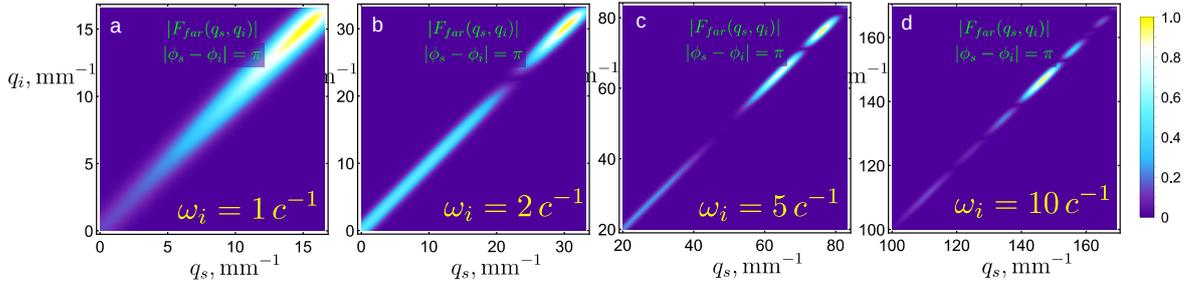


Рисунок 3.11 — Распределение двухфотонной амплитуды по радиальным переменным при $|\varphi_s - \varphi_i| = \pi$. (a-d) отличаются частотой терагерцового излучения.

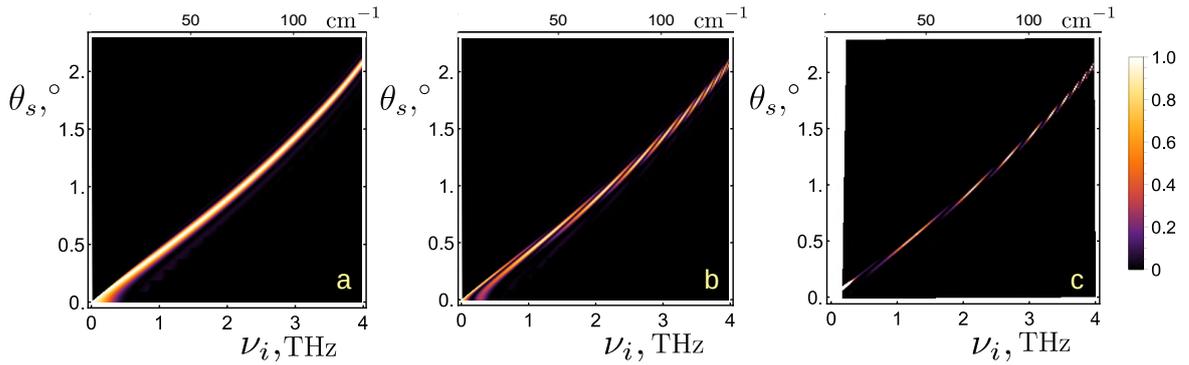


Рисунок 3.12 — Частотно-угловой спектр параметрического рассеяния, рассчитанный теоретически. (a) 1 кристалл, (b) нелинейный интерферометр, слабое параметрическое усиление, (c) нелинейный интерферометр сильное параметрическое усиление

3.2.2 Частотно-угловой спектр

Измерить двухфотонную амплитуду экспериментально практически невозможно. Измерение ковариации оптического и ТГц пучков также представляет непростую задачу из-за отсутствия чувствительных детекторов ТГц излучения, а также проблем с внутренним отражением в кристалле при больших углах выхода. Поэтому проще всего измерить частотно-угловой спектр для оптического канала. Он будет найден теоретически из подхода мод Шмидта и сравнен с экспериментальными результатами.

При анализе двухфотонной амплитуды одного кристалла в предыдущем разделе было получено, что при фиксированной частоте ТГц фотона, средний угол вылета для оптического фотона определяется из выражения (3.4) и имеет небольшой разброс. Поэтому для частотно-углового спектра в одном кристалле (рис. 3.12а) для каждой частоты ТГц будет наблюдаться узкий диапазон углов.

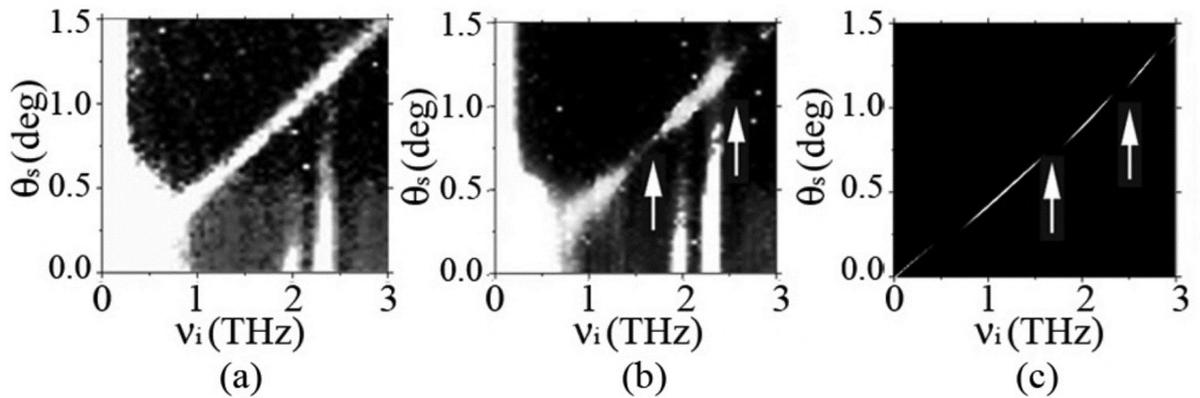


Рисунок 3.13 — Частотно-угловой спектр параметрического рассеяния, полученный экспериментальной группой в совместной работе [A6]. (a) 1 кристалл, (b) нелинейный интерферометр, слабое параметрическое усиление, (c) нелинейный интерферометр сильное параметрическое усиление

В случае двух кристаллов при одних частотах двухфотонная амплитуда будет напоминать вид для одного кристалла, при других иметь 2 максимума и провал на одном из углов с лучшей синхронизацией из-за деструктивной интерференции. В этом случае в системе возникают 2 моды с близкими весами. Таким образом при слабом параметрическом усилении частотно-угловой спектр (рис. 3.12b) будет состоять из набора накладывающихся линий, близких к спектру для одного кристалла.

При сильном параметрическом усилении хорошо различимы минимумы и максимумы на частотно-угловом спектре (рис. 3.12c), там где была сдвоенная линия возникает провал по интенсивности. Это связано с тем, что при наличии двух мод с похожими весами, их веса примерно в 2 раза меньше, а значит усиление сигнала значительно ниже, особенно если накачка очень сильная.

Экспериментальные результаты приведены на рис. 3.13. Видно хорошее совпадение с теорией во всех случаях. Из-за ограниченного разрешения детекторов и не близкого к нулю усиления немного расходятся рисунки в режиме слабого усиления. Однако в режиме сильной накачки получено отличное сходство в промеренном экспериментально диапазоне.

3.2.3 Измерение показателя преломления в среде в ТГц диапазоне

Положение провалов в частотно-угловом спектре на рис. 3.12с сильно зависит от показателя преломления для ТГц луча. Поэтому возникает идея по легко детектируемому оптическому спектру проводить измерения дисперсии среды в терагерцовом диапазоне. Преимуществом такого подхода является отсутствие необходимости измерения интенсивности ТГц излучения. Это является хорошим примером применения свойства скоррелированности генерируемых пучков для решения задач классической физики.

Примерная оценка на точность измерения показателя преломления сделана из идеи о том, что экспериментально легко отличить минимум от максимума интенсивности при некоторой частоте. На положение максимума/минимума влияет слагаемое δ_2 в выражении для двухфотонной амплитуды (3.16). Получаем:

$$\Delta n = \pi c / (2\omega_i d) \quad (3.18)$$

При параметрах $d = 2.5$ мм, $\nu_i = 1.5$ ТГц можно достигнуть точности $\Delta n \sim 0.02$. Существенно больший размер среды проблематичен с практической стороны, поскольку начинается поглощение ТГц излучения.

Отметим, что метод не позволяет определить показатель преломления сразу, а лишь позволяет улучшить точность. Т.е. если известен диапазон, в котором должен находиться показатель преломления, можно промоделировать систему, меняя показатель преломления среды с шагом δn . Сравнивая с экспериментальным частотно-угловым спектром, получим подходящее значение дисперсии. Так как чувствительность метода зависит от длины среды d , которую можно сделать достаточно маленькой (до 0.1 мм), можно начинать с грубых измерений и итеративно увеличивать точность измерения.

3.2.4 Выводы

В разделе изучены особенности генерации ТГц излучения при параметрическом рассеянии в нелинейном интерферометре. На основе частотно-угловых спектров проведено сравнение теоретических результатов с экспериментами.

Предложен метод достаточно точного измерения дисперсии среды в ТГц диапазоне по оптическому спектру системы.

3.3 Управление пространственными свойствами генерируемого ТГц излучения с помощью подсветки

В предыдущем разделе рассматривался процесс параметрического рассеяния, когда на входе кристаллов было состояние вакуума в сигнальном и холостом канале.

Теперь рассмотрим возможности управления сигналом с помощью подсветки кристалла оптическими или терагерцовыми состояниями.

3.3.1 Теоретическое описание системы при наличии подсветки

Для управления важно уметь создавать на входе состояния с определенными пространственными свойствами. Поэтому с точки зрения экспериментальной реализации оптимально использовать когерентные состояния.

Рассмотрим классическую подсветку когерентным состоянием $|\alpha\rangle$ с параметром α в некоторой пространственной моде с орбитальным моментом l

$$f_l(\mathbf{q}) = \tilde{f}_l(q)e^{il\varphi}$$

Такое состояние можно представить в виде:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} (A_{f_l}^\dagger)^n |0\rangle, \quad (3.19)$$

где

$$A_{f_l}^\dagger = \int_0^\infty f_l(\mathbf{q}) a_{\mathbf{q}}^\dagger d\mathbf{q} \quad (3.20)$$

Можно построить полный базис пространственных функций, одной из которых является пространственная мода подсветки $f_{l_0 k_0}$.

Тогда пространственные моды Шмидта раскладываются в новом базисе:

$$u_{n,p}(q) = \sum \beta_{np}^{lk} f_{lk}(q), \quad (3.21)$$

где

$$\beta_{np}^{lk} = \int u_{n,p}(q) f_{lk}^*(q) dq \quad (3.22)$$

Тогда операторы можно переразложить следующими образом:

$$A_{n,p} = \int u_{n,p}(q) a_q dq = \sum \beta_{n,p}^{lk} F_{l,k}, \quad (3.23)$$

причем для $|\psi_{l_0 k_0}\rangle$ состояния в пространственной моде $f_{l_0 k_0}$ выполняется

$$F_{l,k} |\psi_{l_0 k_0}\rangle = \delta_{ll_0} \delta_{kk_0} |\psi'_{l_0 k_0}\rangle \quad (3.24)$$

Для расчетов сигнала запишем эволюцию операторов в модах Шмидта:

$$\begin{aligned} A_{np}^\dagger(t) A_{\tilde{n}\tilde{p}}(t) = & \sinh G_{np} \sinh G_{\tilde{n}\tilde{p}} B_{np} B_{\tilde{n}\tilde{p}}^\dagger + \sinh G_{np} \cosh G_{\tilde{n}\tilde{p}} B_{np} A_{\tilde{n}\tilde{p}} + \\ & \cosh G_{np} \sinh G_{\tilde{n}\tilde{p}} B_{np}^\dagger A_{\tilde{n}\tilde{p}}^\dagger + \cosh G_{np} \cosh G_{\tilde{n}\tilde{p}} A_{np}^\dagger A_{\tilde{n}\tilde{p}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

С экспериментальной точки зрения проще делать подсветку в оптическом диапазоне. Поэтому рассмотрим именно такую конфигурацию. Тогда усреднение первого слагаемого (3.25) даст результат спонтанного параметрического рассеяния, средние второго и третьего слагаемого занулятся, а четвертое будет необходимо честно рассчитать:

$$\begin{aligned} I_s(\mathbf{q}) = & I_s^{spont}(\mathbf{q}) + \\ & \sum_{np} \sum_{\tilde{n}\tilde{p}} u_{np}(\mathbf{q}) u_{\tilde{n}\tilde{p}}^*(\mathbf{q}) \cosh G_{np} \cosh G_{\tilde{n}\tilde{p}} (\beta_{np}^{l_0 k_0})^* \beta_{\tilde{n}\tilde{p}}^{l_0 k_0} \langle \alpha_{l_0 k_0} | F_{l_0 k_0}^\dagger F_{l_0 \tilde{k}_0} | \alpha_{l_0 k_0} \rangle = \\ & = I_s^{spont}(\mathbf{q}) + |\alpha|^2 \left| \sum_{n,p} (\beta_{np}^{l_0 k_0})^* \cosh G_{np} u_{np}(\mathbf{q}) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Если выбрать подсветку с конкретным орбитальным моментом l_0 , т.е. $\beta_{np}^{l_0 k_0} = \delta_{l_0 n} \tilde{\beta}_p$, получаем для оптического сигнала:

$$I_s(\mathbf{q}) = |\alpha|^2 \left| \sum_p (\beta_p)^* \cosh(\sqrt{\lambda_{l_0 p}} G) \frac{u_{l_0 p}(q)}{\sqrt{q}} \right|^2 + \sum_{n,p} \sinh^2(\sqrt{\lambda_{np}} G) \frac{|u_{l_0 p}(q)|^2}{q} \quad (3.27)$$

и похожее выражение для ТГц сигнала:

$$I_i(\mathbf{q}) = |\alpha|^2 \left| \sum_p (\beta_p)^* \sinh(\sqrt{\lambda_{l_0 p}} G) \frac{v_{l_0 p}(q)}{\sqrt{q}} \right|^2 + \sum_{n,p} \sinh^2(\sqrt{\lambda_{np}} G) \frac{|v_{l_0 p}(q)|^2}{q} \quad (3.28)$$

Можно также подсветить светом с моментами $\pm l_0$, тогда

$$I_s(\mathbf{q}) = |\alpha|^2 \left| \sum_p \beta_p^{l_0} \cosh(\sqrt{\lambda_{lp}} G) \frac{u_{l_0 p}(q)}{\sqrt{q}} \right|^2 \cos^2(l_0 \varphi) + \sum_{n,p} \sinh^2(\sqrt{\lambda_{lp}} G) \frac{|u_{np}(q)|^2}{q} \quad (3.29)$$

Из (3.27), (3.28) видно, что если $|\alpha|^2$ достаточно большое, часть сигнала от спонтанного рассеяния будет пренебрежимо малой.

Таким образом при достаточно сильной подсветке можно выделить моды с конкретным орбитальным моментом и контролировать форму выходящего сигнала. Корреляции фотонов при этом не теряются, это будет показано и обсуждено в разделе 3.4.

Полную интенсивность сигнала можно получить, проинтегрировав выражения (3.27), (3.28) по пространству:

$$N_s = |\alpha|^2 \sum_p |\beta_p|^2 \cosh^2(\sqrt{\lambda_{lp}} G) + \sum_{n,p} \sinh^2(\sqrt{\lambda_{np}} G) \quad (3.30)$$

$$N_i = |\alpha|^2 \sum_p |\beta_p|^2 \sinh^2(\sqrt{\lambda_{lp}} G) + \sum_{n,p} \sinh^2(\sqrt{\lambda_{np}} G) \quad (3.31)$$

Можно заметить, что $N_s - N_i = |\alpha|^2 \sum |\beta_p|^2 = |\alpha|^2$ совпадает с начальной разностью интенсивностей сигналов. Это связано с тем что $N_s - N_i$ - инвариант для рассматриваемого гамильтониана, более подробное обсуждение в разделе 3.4.

3.3.2 Проблема сужения пространственного спектра ТГц излучения

Фактически, чтобы сузить сигнал, необходимо подсветить некоторую достаточно узкую моду Шмидта и слабо подсветить остальные. Другими словами нужно подобрать подсветку, которая хорошо перекрывается с некоторой оптической модой Шмидта кристалла (т.е сделать так, чтобы некоторый β_p в выражении (3.28) был высоким, а остальные близкими к 0).

Далее во всех случаях подсвечиваем модой Лаггера Гаусса с проекцией орбитального момента $l = \pm 3$, параметр когерентного состояния $\alpha = 500$. Будем в

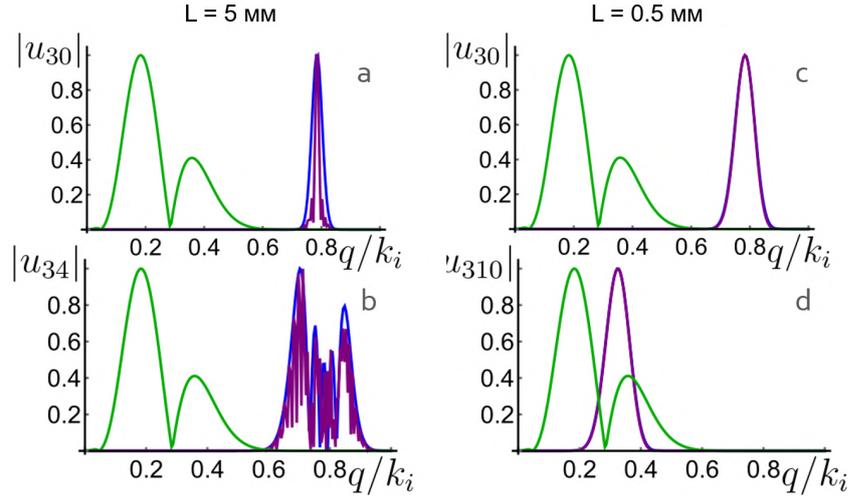


Рисунок 3.14 — Моды Шмидта и мода подсветки для (а),(b) 1 длинного кристалла $L = 5$ мм, (с),(d) 1 короткого кристалла $L = 0.5$ мм. Зеленая - мода подсветки, синяя - оптическая мода, фиолетовая - ТГц мода.

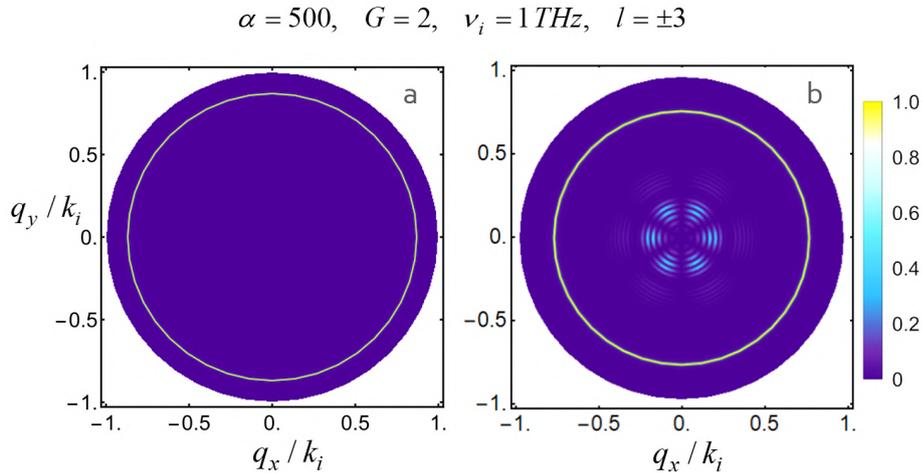


Рисунок 3.15 — Пространственное распределение сигнала для длинного кристалла $L = 5$ мм (а) без подсветки (режим спонтанного параметрического рассеяния) (b) при подсветке когерентным состоянием $|\alpha\rangle$.

этой секции обозначать такое состояние $|\alpha\rangle$. Радиальную моду будем подбирать так, чтобы получилось наилучшее сужение сигнала.

Начнем с рассмотрения длинного кристалла $L = 5$ мм. На рис. 3.14а,b видно, что не получается подобрать моду, которая хорошо бы перекрывалась бы с подсветкой. Более того в системе из 1 длинного кристалла только 1 мода имеет существенный вес, поэтому на пространственном сигнале (рис. 3.15) осталось кольцо на больших углах и появился небольшой сигнал на маленьких. Сужения сигнала достичь не получится.

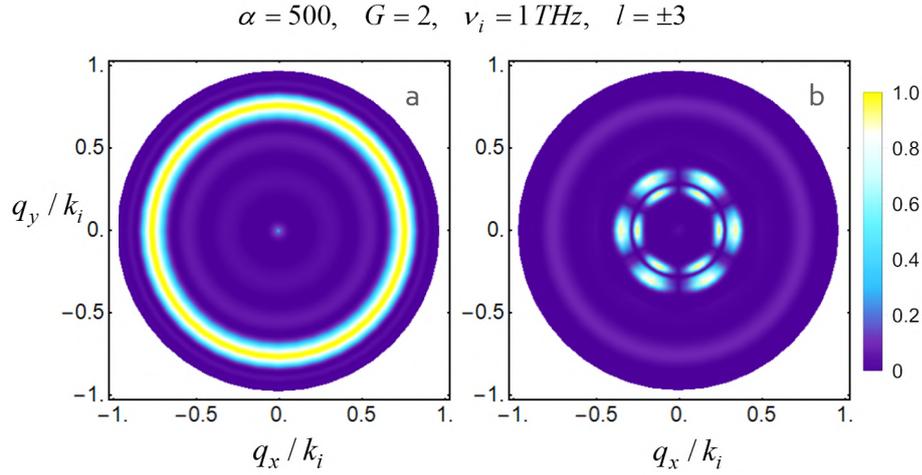


Рисунок 3.16 — Пространственное распределение сигнала для кристалла $L = 0.5$ мм (а) без подсветки (режим спонтанного параметрического рассеяния) (б) при подсветке когерентным состоянием $|\alpha\rangle$.

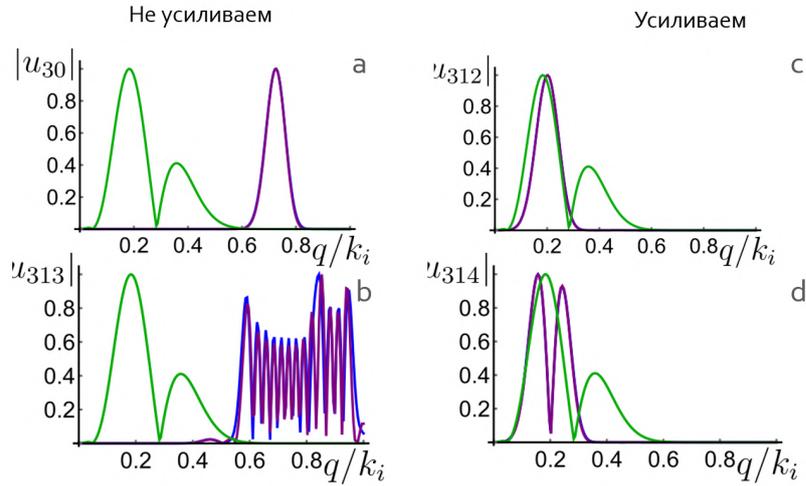


Рисунок 3.17 — Моды Шмидта и мода подсветки для нелинейного интерферометра из 2-х кристаллов ($L = 0.25$ мм, $d = 0.087$ мм). Зеленая - мода подсветки, синяя - оптическая мода, фиолетовая - ТГц мода.

Для короткого кристалла $L = 0.5$ мм число мод больше и некоторые из них узкие. На рис. 3.14d показан пример моды, хорошо перекрывающейся с подсветкой (при этом ее вес примерно тот же, что и для моды на рис. 3.14b). В итоге удается усилить в основном только узкую моду и мы видим существенное сужение сигнала (рис. 3.16).

Стоит отметить, что q/k рассчитываются до выхода из кристалла и с учетом показателя преломления сигнал в виде широкого кольца просто не выйдет из кристалла (будет полное внутреннее отражение).

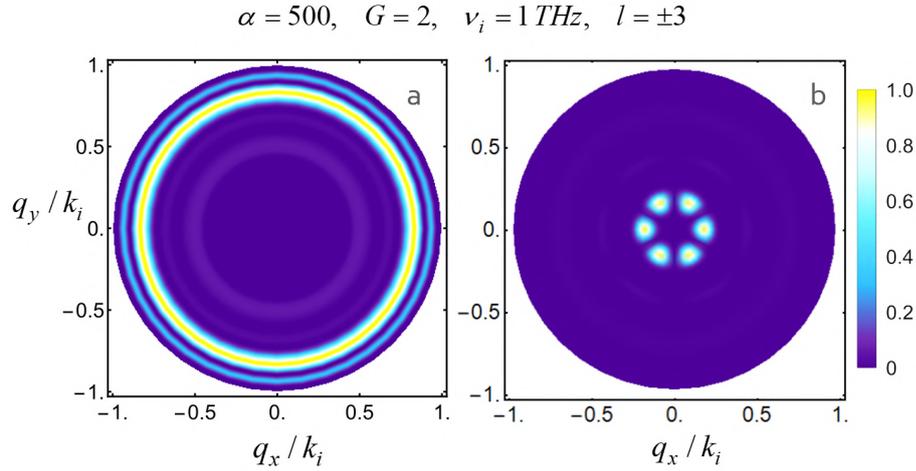


Рисунок 3.18 — Пространственное распределение сигнала для нелинейного интерферометра из 2-х кристаллов ($L = 0.25$ мм, $d = 0.087$ мм) (а) без подсветки (режим спонтанного параметрического рассеяния) (b) при подсветке когерентным состоянием $|\alpha\rangle$.

Более управляемый режим можно получить в нелинейном интерферометре. Варьируя расстояние между кристаллами, на определенных частотах можно получить узкие моды с достаточными весами. На рис. 3.17с,d показано несколько узких мод, которые отлично перекрываются с подсветкой. Стоит отметить, что в терминах q терагерцовые и оптические моды довольно похожи, но в углах это совершенно разные диапазоны из-за существенно различия частот, а соответственно и волновых векторов. При этом широкие моды рис. 3.17а,b почти не перекрываются с подсветкой и не будут усилены. Это связано с тем, что двухфотонная амплитуда в нелинейном интерферометре может иметь 2 максимума (см. секцию 3.2)). Это приводит к более медленному спаду весов мод и наличию как узких, так и широких мод.

В итоге для нелинейного интерферометра также удастся усилить в основном только узкую моду и мы видим сужение сигнала (рис. 3.18), еще более сильное, чем для 1 короткого кристалла. Полученный сигнал выйдет из кристалла с шириной углового спектра $\sim 20^\circ$, что является приемлимым для экспериментаторов.

Для сравнения на рис. 3.19 приведены профили сигналов и подсветки для всех рассмотренных случаев. В случае одного длинного кристалла на рис. 3.19а виден пик сигнала при больших q , и появившийся сигнал на малых q , однако он маленький и такой случай нельзя считать успешным сужением.

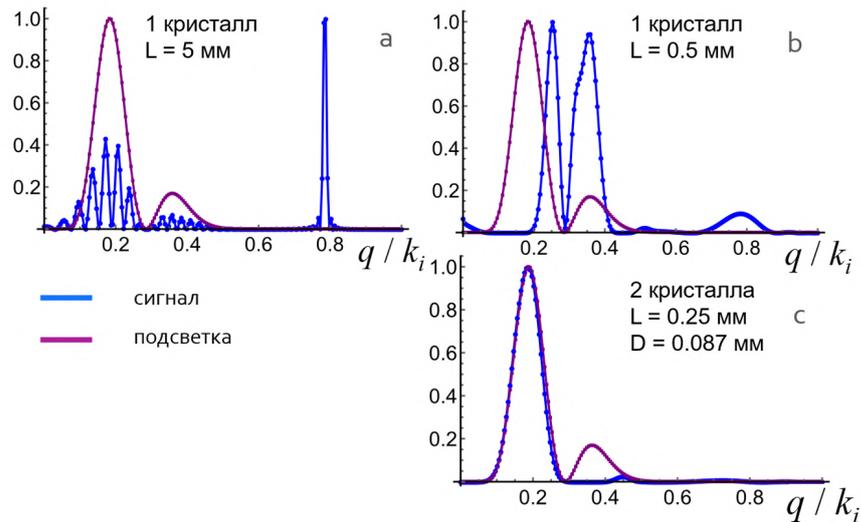


Рисунок 3.19 — Радиальные профили пространственного распределения ТГц сигнала и подсветки для (а) 1 длинного кристалла $L = 5$ мм, (б) 1 короткого кристалла $L = 0.5$ мм, (с) нелинейного интерферометра из 2-х кристаллов ($L = 0.25$ мм, $d = 0.087$ мм)

В коротком кристалле произошло сужение, но видно на рис. 3.19b, что профиль ТГц сигнала шире профиля подсветки, что означает, что совсем узких мод в системе нет и сильнее сузить сигнал не удастся. С учетом показателя преломления ТГц углы выхода из кристалла все равно будут большими.

В случае 2-х кристаллов получено хорошее сужение на (рис. 3.19с), профиль сигнала накладывается на профиль подсветки, т.е. в системе были узкие моды, которые были усилены.

Стоит отметить, что необходимая для подсветки оптическая мода находится в довольно узком угловом диапазоне $\theta \sim 0.01^\circ$, что экспериментально непросто сделать. Однако данный метод позволяет сохранить корреляции чисел фотонов.

3.3.3 Выводы

С помощью подсветки можно существенно сузить ТГц сигнал без потери корреляций по числу фотонов между оптическим и ТГц каналом. В нелинейном интерферометре этого достичь наиболее просто за счет возможности управления модовым составом.

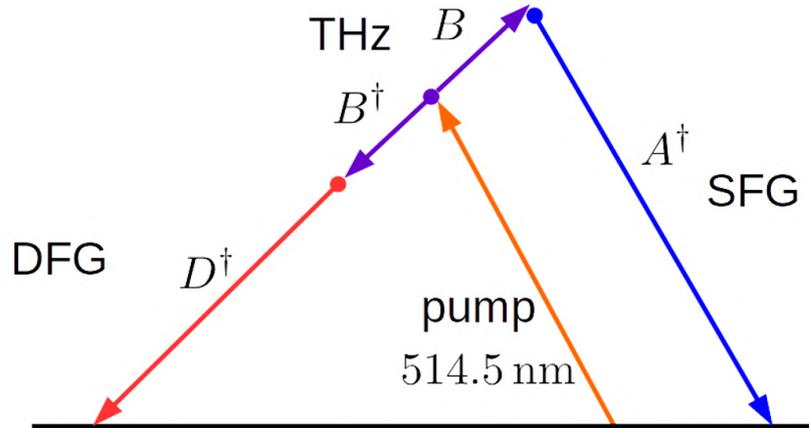


Рисунок 3.20 — Схема генерации суммарной частоты

3.4 Процессы генерации света на суммарной и разностной частоте

3.4.1 Корреляции фотонов при параметрическом рассеянии

В случае параметрического рассеяния справедливо следующее соотношение для операторов числа сигнальных (N_s) и холостых (N_i) фотонов:

$$[H_{PDC}, N_s - N_i] = 0 \quad (3.32)$$

т.е. разность операторов числа оптических и скоррелированных с ними терагерцевых фотонов - интеграл движения и например, $D(N_s - N_i)_{out} = D(N_s - N_i)$. Если на входе вакуум, мы увидим точное совпадение чисел фотонов в сигнальном и холостом пучке. На этом основаны методы сверхточных измерений, так как в результате измерений разностных сигналов мы устраняем шумы.

3.4.2 Генерация антистоксовой компоненты

В кристаллах с квадратичной нелинейностью кроме параметрического рассеяния, возможен процесс генерации суммарной частоты. Качественно он происходит следующим образом: терагерцовый фотон прибавляется к накачке,

образуя фотон на суммарной частоте (оптический), такими образом терагерцовое излучение участвует в 2-х процессах.

Попробуем описать систему, в которой и процесс генерации суммарной частоты, и параметрическое рассеяние идут одновременно. Начнем с записи Гамильтониана для процесса генерации суммарной частоты:

$$H_{SFG} = \int \chi^{(2)}(\mathbf{r}) E_p^+(\mathbf{r}) E_i^+(\mathbf{r}) E_s^-(\mathbf{r}) + h.c. \quad (3.33)$$

где E_p - поле накачки, которое считается классическим, E_i , E_s - поля терагерцового и оптического фотона суммарной частоте. Интегрируя по r получаем двухфотонную амплитуду:

$$F_{SFG} = \exp\left(\frac{-(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2 \sigma^2}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta k_{SFG} L}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\Delta k_{SFG} L}{2}\right) \quad (3.34)$$

где

$$\Delta k_{SFG} = \sqrt{k_p^2 - (\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2} - \sqrt{k_s^2 - q_s^2} + \sqrt{k_i^2 - q_i^2} \quad (3.35)$$

Максимум двухфотонной амплитуды будет при $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s = \mathbf{q}_i$, $\Delta k_{SFG} = 0$:

$$q = \frac{\sqrt{2(k_p^2 k_s^2 + k_p^2 k_i^2 + k_s^2 k_i^2) - k_p^4 - k_s^4 - k_i^4}}{2k_p} \quad (3.36)$$

Заметим, что данный результат совпадает с результатом для параметрического рассеяния с точностью до знака. Все углы по модулю те же. Это означает, что двухфотонная амплитуда даст те же моды, с точностью до постоянного фазового множителя, что и двухфотонная амплитуда для процесса параметрического рассеяния

Отличие в азимутальных каналах будет лишь на $(-1)^n$

$$\chi_n^{DFG}(q_s, q_i) = (-1)^n \sqrt{\lambda_n} \frac{u(q_s) v(q_i)}{\sqrt{q_s} \sqrt{q_i}} \quad (3.37)$$

а

$$\chi_n^{SFG}(q_s, q_i) = \sqrt{\lambda_n} \frac{u(q_s) v(q_i)}{\sqrt{q_s} \sqrt{q_i}} \quad (3.38)$$

что является очевидным следствием корреляции фотонов по азимутальной переменной $\varphi_s - \varphi_i = 0$ вместо $\varphi_s - \varphi_i = \pi$. Полученные пространственные свойства указывают на то, что все 3 канала излучения - ТГц, стокосовый и антистокосовый, сильно перепутаны.

Теперь при фиксированной частоте терагерцового излучения (в данном случае B , оператор уничтожения терагерцового фотона в определенной моде, которая как мы показали одинакова для процесса генерации суммарной и разностной частоты) можно записать полный гамильтониан:

$$H_{all} = i\hbar\Gamma_1 \sum_n \sqrt{\lambda_n} (D_n^\dagger B_n^\dagger - D_n B_n) + i\hbar\Gamma_2 \sum_n (-1)^n \sqrt{\lambda_n} (A_n^\dagger B_n - A_n B_n^\dagger) \quad (3.39)$$

где A относится к фотону на суммарной частоте, а D - на разностной частоте.

Такой гамильтониан включает в себя части из параметрического рассеяния

$$H_{DFG} = i\hbar\Gamma_1 \sum_n \sqrt{\lambda_n} (D_n^\dagger B_n^\dagger - D_n B_n) \quad (3.40)$$

и генерацию суммарной частоты

$$H_{SFG} = i\hbar\Gamma_2 \sum_n (-1)^n \sqrt{\lambda_n} (A_n^\dagger B_n - A_n B_n^\dagger) \quad (3.41)$$

Отметим, что если процесс генерации суммарной частоты рассматривается отдельно от параметрического рассеяния, ничего не будет происходить, если система специально не подсвечивается ТГц фотонами.

3.4.3 Корреляции фотонов при генерации стоксовой и антистоксовой компоненты

Для полного гамильтониан (3.39) существует инвариант из операторов числа антистоксовых (N_a), стоксовых N_d и ТГц (N_i) фотонов:

$$[H_{all}, N_a + N_i - N_d] = 0 \quad (3.42)$$

Или:

$$\hat{N}_a + \hat{N}_i - \hat{N}_d = \hat{N}_a^{in} + \hat{N}_i^{in} - \hat{N}_d^{in} \quad (3.43)$$

Фактически в процессе параметрического рассеяния генерируется пара - терагерцового фотон, дающий вклад в N_i и оптический на разной частоте, дающий вклад в N_d . Терагерцовый фотон может взаимодействуя с накачкой, генерировать сигнал на суммарной частоте, что дает вклад в N_a .

Теперь рассмотрим решения уравнений Гейзенберга для операторов рождения/уничтожения фотонов. Для процесса только с параметрическим рассеянием:

$$\begin{aligned} D_{n,p}^{out} &= D_{n,p}^{in} \cosh(\sqrt{\lambda_{n,p}} G_1) + [B_{n,p}^{in}]^\dagger \sinh(\sqrt{\lambda_{n,p}} G_1) \\ B_{n,p}^{out} &= B_{n,p}^{in} \cosh(\sqrt{\lambda_{n,p}} G_1) + [D_{n,p}^{in}]^\dagger \sinh(\sqrt{\lambda_{n,p}} G_1) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Для процесса только генерации суммарной частоты:

$$\begin{aligned} A_{n,p}^{out} &= A_{n,p}^{in} \cos(\sqrt{\lambda_{n,p}} G_2) + B_{n,p}^{in} \sin(\sqrt{\lambda_{n,p}} G_2) \\ B_{n,p}^{out} &= B_{n,p}^{in} \cos(\sqrt{\lambda_{n,p}} G_2) - A_{n,p}^{in} \sin(\sqrt{\lambda_{n,p}} G_2) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Если оба процесса идут одновременно, вид эволюции сложнее:

$$\begin{aligned} B_n(t) &= B_n \cosh(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) + C_n \sinh(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) \\ A_n(t) &= (-1)^n \frac{\Gamma_2}{\Delta\Gamma} \left(C_n \cosh(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) + B_n \sinh(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) \right) + F_n \\ D_n^\dagger(t) &= \frac{\Gamma_1}{\Delta\Gamma} \left(C_n \cosh(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) + B_n \sinh(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) \right) + E_n \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $\Delta\Gamma = \sqrt{\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2}$ (здесь $G_i = \Gamma_i t$), а операторы

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\Gamma_1}{\Delta\Gamma} \left(D_n^\dagger - (-1)^n \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} A_n \right) \\ E_n &= D_n^\dagger - \frac{\Gamma_1}{\Delta\Gamma} C_n \\ F_n &= A_n - (-1)^n \frac{\Gamma_2}{\Delta\Gamma} C_n \end{aligned} \quad (3.47)$$

Далее можно рассчитать сигналы, если на входе вакуум (индексы i , a , d относятся к фотонам на ТГц, суммарной и разностой частотам)

$$\begin{aligned} N_i &= \left(\frac{\Gamma_1}{\Delta\Gamma} \right)^2 \sum_n \sinh^2(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) \\ N_a &= \left(\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Delta\Gamma^2} \right)^2 \sum_n \left(\cosh(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) - 1 \right)^2 \\ N_d &= \left(\frac{\Gamma_1}{\Delta\Gamma} \right)^2 \sum_n \sinh^2(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) + \left(\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Delta\Gamma^2} \right)^2 \sum_n \left(\cosh(\Delta\Gamma \sqrt{\lambda_n t}) - 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Безусловно $N_d = N_i + N_a$, так как часть ТГц фотонов сгенерированных в процессе параметрического рассеяния перешла в свет на суммарной частоте.

Отметим еще одно следствие наличия инварианта (3.42) - когда входное состояние в систему является вакуумным, из 3.42, можно установить соотношение между дисперсиями чисел стоксовых, антистоксовых и ТГц фотонов:

$$D(N_a - N_d) = D(N_i) \quad (3.49)$$

Это дает возможность изучать фотонную статистику терагерцового излучения, основываясь на измерениях только оптических стоксовых и антистоксовых сигналов. Также можно получить информацию о корреляциях стоксовых и ТГц фотонов, анализируя статистику антистоксовых. Учитывая, что детектирование ТГц сигналов затруднительно, такие методы выглядят практически полезными.

Для полноты сказанного выше дадим выражения для расчета корреляций по числу фотонов в оптических пучках на суммарной и разностной частоте. Для дисперсии разности стоксовых и антистоксовых фотнов получим:

$$D(N_a - N_d) = \left(\frac{\Gamma_1}{\Delta\Gamma}\right)^2 \left(\sinh^2(\Delta\Gamma\sqrt{\lambda_n}t) \cosh^2(\Delta\Gamma\sqrt{\lambda_n}t) + \left(\frac{\Gamma_2}{\Delta\Gamma}\right)^2 \left(\cosh(\Delta\Gamma\sqrt{\lambda_n}t) - 1 \right)^2 \right) \quad (3.50)$$

Для дисперсии разности стоксовых и ТГц фотонов:

$$D(N_d - N_i) = \frac{\Gamma_1^2}{\Delta\Gamma^2} \left(\frac{\Gamma_1^2}{\Delta\Gamma^2} - 1 \right) \sinh^2(\Delta\Gamma\sqrt{\lambda_n}) \left(\cosh(\Delta\Gamma\sqrt{\lambda_n}) - 1 \right) + \left(\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Delta\Gamma^2} \right)^2 \cdot \left(\left(\cosh(\Delta\Gamma\sqrt{\lambda_n}) - 1 \right) \left(\frac{\Gamma_1^2}{\Delta\Gamma^2} \left(\cosh(\Delta\Gamma\sqrt{\lambda_n}) - 1 \right) + 1 \right) - \sinh^2(\Delta\Gamma\sqrt{\lambda_n}) \right)^2 \quad (3.51)$$

Для сравнения в простом режиме параметрического рассеяния получается:

$$D(N_d^{out} - N_i^{out}) = D(N_d^{in} - N_i^{in}) = \sum_{n,m} (\langle B_n^\dagger B_n B_m^\dagger B_m \rangle - \langle B_n^\dagger B_n \rangle \langle B_m^\dagger B_m \rangle) \quad (3.52)$$

Если, например, на вход подается когерентное ТГц состояние $|\beta_n\rangle$ (на которое могут действовать операторы В), можно рассчитать $D(N_d - N_i) = |\beta_n|^2$.

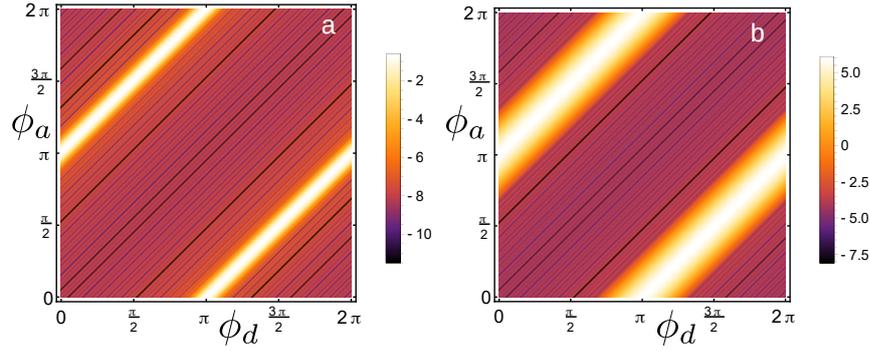


Рисунок 3.21 — Распределение ковариации по азимутальным углам между стоксовыми и антистоксовыми фотонами при (а) маленьком (б) большом параметрическом усилении.

Кроме скоррелированности по числу фотонов, стоксовые и антистоксовые компоненты также сильно скоррелированы по азимутальным углам. В случае одной основной моды ковариация факторизуется на радиальную и азимутальную часть и задается выражением:

$$\text{cov}(\varphi_a, \varphi_d) \sim \sum \lambda_n G^2 (\lambda_n G^2 + 1) e^{in(\varphi_a - (\pi + \varphi_d))} \quad (3.53)$$

Из рис. 3.21 видно, что стоксовые и антистоксовые фотоны сильно запутаны по азимутальной пространственной координате и в основном испускаются с противоположными проекциями волновых векторов на плоскость, перпендикулярную распространению излучения. С увеличением параметрического усиления ширина ковариации значительно возрастает, что означает, что больше фотонов скоррелированы при высоком гейне.

Глава 4. Свойства многомодового сжатого света

В главе будут рассмотрены возможности восстановления модового состава, особенности измерения сжатия и фазово-чувствительного усиления для неклассического света, генерируемого в процессе параметрического рассеяния. Основные результаты данной главы опубликованы в статьях [A4; A5; A7].

4.1 Генерация и последующее усиление сжатых состояний в системе из нелинейных кристаллов

В отличие от случая интерферометра, когда длина импульса накачки больше, чем расстояние между кристаллами, для части экспериментальных измерений, в частности сжатия и восстановления мод, используется конфигурация, когда расстояние между кристаллами достаточно большое. Тогда сигнал, сгенерированный в первом кристалле, может рассматриваться как подсветка для второго кристалла. Экспериментаторы для упрощения установки обычно используют вообще 1 кристалл, через который импульс пройдет 2 раза, отразившись от зеркала. Начнем с рассмотрения подходов к описанию системы при наличии подсветки.

4.1.1 Подсветка - подход Гейзенберга

На рис. 4.1 продемонстрирована схема из двух кристаллов, где в первом кристалле производится генерация квантового света, а второй кристалл играет роль параметрического усилителя. Фактически сигнал от первого кристалла является подсветкой для второго. Такое происходит, если расстояние между кристаллами сильно больше, чем длина импульса накачки. Чтобы собрать сгенерированный в первом кристалле свет, используется линза с фокусными расстоянием $f = d/4$, тогда первый кристалл находится на расстоянии $2f$ от линз и свет без изменений собирается на входе второго кристалла.

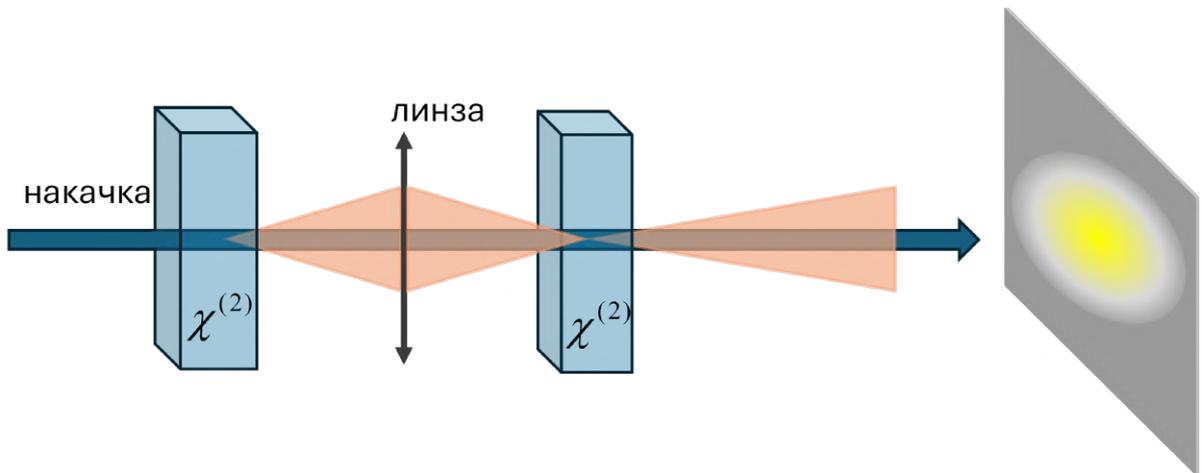


Рисунок 4.1 — Схема, где сигнал из первого кристалла нелинейно усиливается во втором.

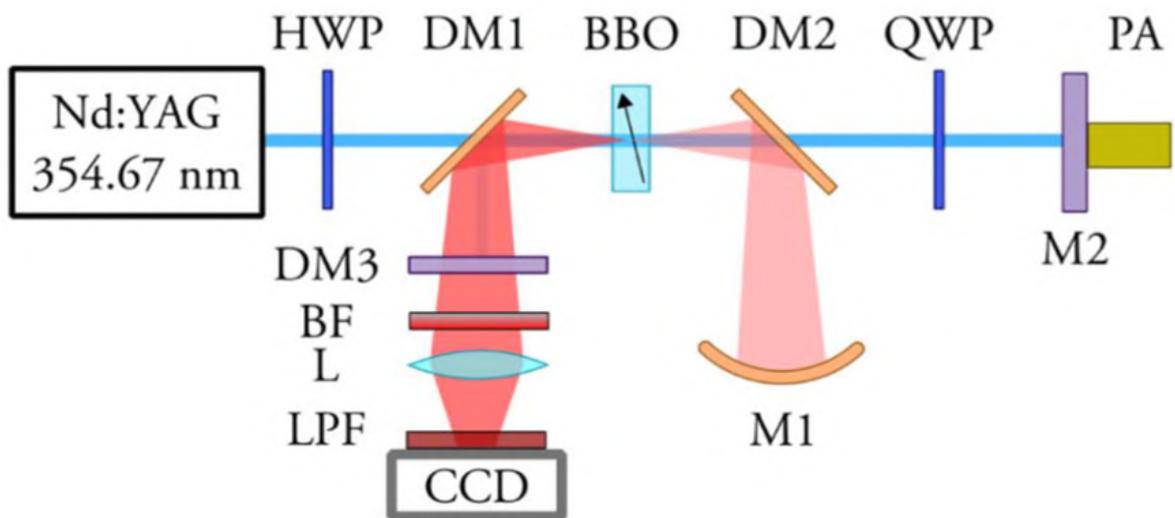


Рисунок 4.2 — Экспериментальная схема, где сигнал, сгенерированный на прямом проходе через кристалл, нелинейно усиливается на обратном.

В экспериментах используется зеркало, чтобы развернуть сгенерированный световой импульс и провести второй раз через тот же кристалл. Также этот подход позволяет избежать рассинхронизации мод из-за возможной неэквивалентности кристаллов. Пример экспериментальной схемы приведен на рис. 4.2. Основным элементом - ВВО кристалл, он подсвечивается лазером, на проходе вправо генерируется квантовый свет, который отражается от зеркала M1. Накачка отражается от зеркала M2. После чего квантовый свет усиливается на обратном проходе и с помощью дихроичного зеркала DM1 собирается на CCD камере.

Пусть эффективное параметрическое усиление в первом кристалле, или на прямом проходе кристалла, G_0 , во втором ближе к CCD камере, или на

обратном проходе кристалла $Ge^{i\Phi}$, где Φ - фаза между подсветкой и накачкой на входе во второй кристалл.

Будем описывать эволюцию состояния операторами S_1, S_2 в первом и втором кристалле соответственно. Генерируемый свет, попадающий на вход второго кристалла имеет состояние $\hat{S}_1 |0\rangle$.

Тогда после усиления во втором кристалле:

$$|\psi\rangle = \hat{S}_2 \hat{S}_1 |0\rangle \quad (4.1)$$

Тогда в представлении Гейзенберга эволюция операторов рождения и уничтожения выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{n,p}^{out} &= \hat{S}_1^\dagger \hat{S}_2^\dagger a_{n,p} \hat{S}_2 \hat{S}_1 = \hat{S}_1^\dagger \left(a_{n,p} \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G + b_{n,p}^\dagger e^{i\Phi} \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G \right) \hat{S}_1 = \\ &= \left(a_{n,p} \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 + b_{n,p}^\dagger \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 \right) \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G + \\ &+ \left(b_{n,p}^\dagger \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 + a_{n,p} \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 \right) e^{i\Phi} \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G = \\ &= w_{1,n,p}^{eff}(G, G_0, \Phi) a_{n,p} + w_{2,n,p}^{eff}(G, G_0, \Phi) b_{n,p}^\dagger \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} w_{1,n,p}^{eff}(G, G_0, \Phi) &= \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G + e^{i\Phi} \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G \\ w_{2,n,p}^{eff}(G, G_0, \Phi) &= \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G + e^{i\Phi} \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из этого легко получить пространственное распределение сигнала на выходе из системы:

$$I_s(q) = \sum_{n,p} \left| w_{2,n,p}^{eff}(G, G_0, \Phi) \right|^2 \frac{|u_{n,p}(q)|^2}{q} \quad (4.4)$$

Его полная интенсивность (среднее число фотонов), получаемая интегрированием по q :

$$N_s = \sum_{n,p} \left| w_{2,n,p}^{eff}(G, G_0, \Phi) \right|^2, \quad (4.5)$$

где $\left| w_{2,n,p}^{eff}(G, G_0, \Phi) \right|^2$ можно воспринимать как число фотонов в моде (n,p) .

Из (4.4) получается, что сигнал состоит из мод некогерентной суммы мод Шмидта с эффективными весами:

$$\Lambda_{n,p}(G, G_0, \Phi) = \left| w_{2,n,p}^{eff}(G, G_0, \Phi) \right|^2 \quad (4.6)$$

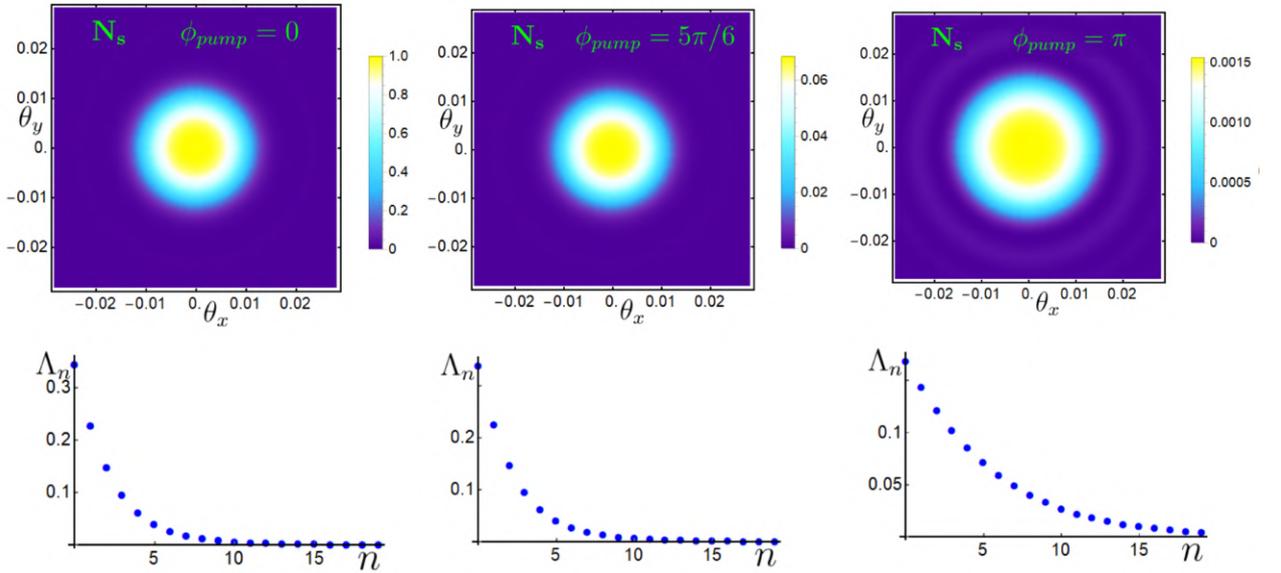


Рисунок 4.3 — (а-в) Пространственное распределение сигнала (4.5) в при фазах $\Phi = 0, 5\pi/6, \pi$, (г-е) веса азимутальных мод Шмидта при фазах $\Phi = 0, 5\pi/6, \pi$

Исследуем как зависят эффективные веса от настраиваемых параметрических усилений. Оказывается, что приближение

$$\Lambda_{n,p}(G, G_0, \Phi) \approx \frac{1}{4} \sinh^2 \left(\sqrt{\lambda_{n,p}}(G + G_0) \right) \left| 1 + e^{i\Phi} \right|^2 \quad (4.7)$$

хорошо работает, если Φ не близко к π и параметрические усиления не являются маленькими. Данный факт продемонстрирован на рис. 4.3.

Объясним причины возникновения приближения (4.7). Если $\sqrt{\lambda_{n,p}}G \gg 1$, тогда $\sinh(\sqrt{\lambda_{n,p}}G) \approx \cosh(\sqrt{\lambda_{n,p}}G) \approx 0.5 \exp(G)$. То же самое выполняется для G_0 . Тогда в слагаемых (4.3) появляется общий множитель $\exp(\sqrt{\lambda_{n,p}}(G + G_0)) \approx 2 \sinh(\sqrt{\lambda_{n,p}}(G + G_0))$.

Особым случаем является область вблизи $\Phi = \pi$, т.к. происходит вычитание 2-х больших слагаемых и надо более точно их оценивать, чтобы понять, насколько близка разность к 0. Поэтому приближение верно, пока $\sqrt{\lambda_{n,p}}(G + G_0) |1 + e^{i\Phi}| \gg \sinh(G - G_0) \sqrt{\lambda_{n,p}}$, где последнее это в точности $\Lambda_{n,p}(G, G_0, \Phi = \pi)$. Если параметрические усиления высокие это соотношение не выполняется только в малой области вблизи $\Phi = \pi$.

Если одно из параметрических усилений слабое, можно пренебречь слагаемым $\sinh \sqrt{\lambda_{n,p}}G$ по сравнению с $\cosh \sqrt{\lambda_{n,p}}G$ и в квадрате модуля $|w_{2,n,p}^{eff}|^2$ зависимость от фазы исчезает.

Если оба параметрических усиления малы, систему можно описывать в приближении теории возмущений и это не представляет интереса в данной ра-

боте. Также моды с малыми весами дают почти нулевой вклад в сигнал и ими также можно пренебречь.

4.1.2 Идея восстановления эффективных весов экспериментально измеримых характеристик

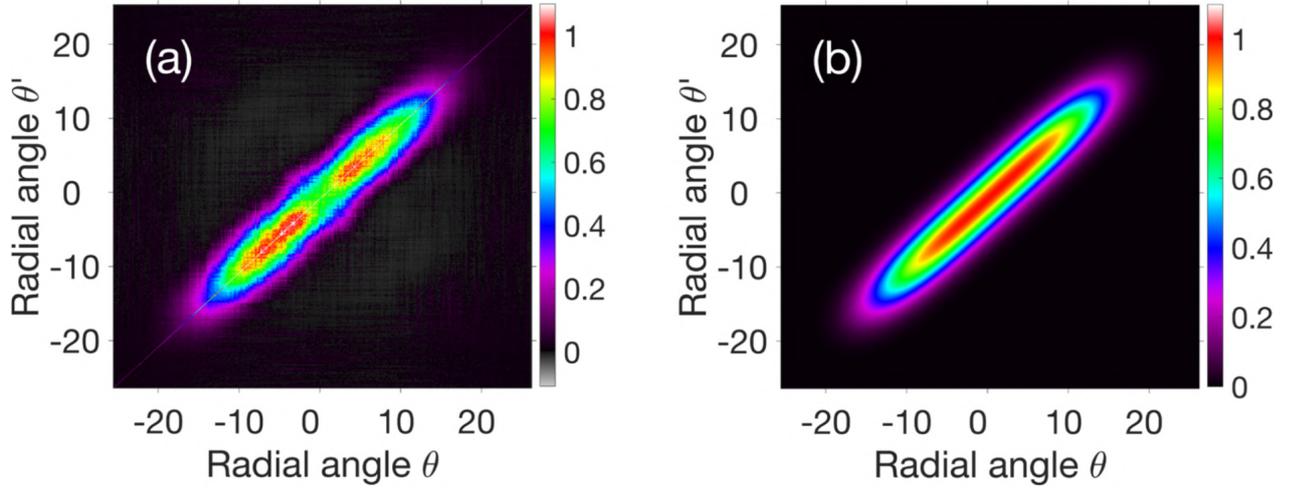


Рисунок 4.4 — Ковариация: теория vs эксперимент

В эксперименте возможно измерить пространственные корреляции фотонов (cov_c - кросс, cov_a - авто), которые в рассматриваемой системе равны:

$$cov_c(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i) = \left| \sum_{n,p} w_{1,n,p}^{eff}(G, G_0, \varphi) w_{2,n,p}^{eff}(G, G_0, \varphi) \frac{u_{n,p}(q_s) v_{n,p}(q_i)}{\sqrt{q_s q_i}} e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \right|^2$$

$$cov_a(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i) = \left| \sum_{n,p} w_{2,n,p}^{eff}(G, G_0, \varphi) w_{2,n,p}^{eff}(G, G_0, \varphi) \frac{u_{n,p}(q_s) u_{n,p}^*(q_i)}{\sqrt{q_s q_i}} e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \right|^2$$
(4.8)

А полная ковариация является суммой $cov_c(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i) + cov_a(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)$

Для измерения w_2^{eff} лучше подходит автоковариация, так как там нет второго веса. Экспериментально возможно измерить автоковариацию, исключив фильтрами по частоте один из пучков, что и было сделано экспериментальной группой в совместной работе [A4].

Эффективные веса можно восстановить из вида функции $f(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)$, где $f(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i) = \sqrt{cov(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i)}$. Для этого можно измерять ковариацию при определенных радиальных переменных, тогда зависимость остается

только от фаз φ_s и φ_i :

$$\sqrt{\text{cov}}|_{q_s=q_i=q} = \sum \Lambda_{n,p} \frac{|u_{n,p}(q)|^2}{q} e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} = \sum \tilde{\Lambda}_{n,p} e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \quad (4.9)$$

где $\tilde{\Lambda}_{n,p}$ веса которые будут реконструированы, а настоящие веса $\Lambda_{n,p}$. Они не совпадут из-за наличия множителя $\frac{|u_{n,p}(q)|^2}{q}$.

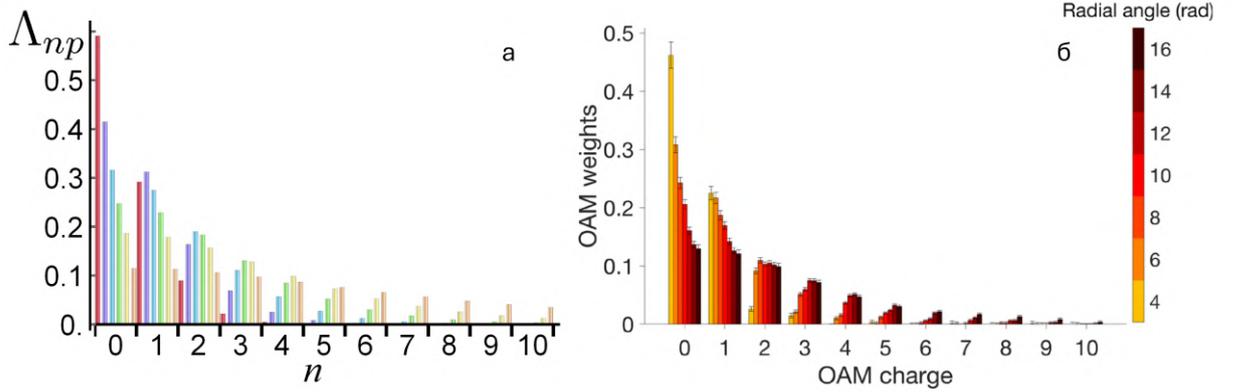


Рисунок 4.5 — Эффективные веса мод в зависимости от номера азимутального канала (а) рассчитанные теоретически, разными цветами обозначены разные радиальные моды, (б) полученные экспериментально из ковариаций, разными цветами обозначен полярный угол, на котором происходило измерение ковариации.

Суммарный сигнал можно мысленно разбить на набор колец. С определенной точностью в каждое кольцо основной вклад дает одна радиальная мода, причем чем дальше кольцо, тем выше номер мод. Тогда можно для каждого номера p радиальной моды выбрать некоторую координату q , где ее вклад максимален и пренебречь вкладом остальных мод.

На рис. 4.5а приведен теоретический расчет весов радиальных мод, а на рис. 4.5б экспериментально восстановленные из ковариации. При этом были выбраны радиальные углы, соответствующие нужным модам. Приведенные данные демонстрируют очень хорошее согласие теории и эксперимента. Во-первых, практически совпадает распределение весов азимутальных каналов, оно одинаково уменьшается с увеличением номера. Во-вторых в азимутальных каналах в теории и эксперименте похоже распределение весов радиальных мод. Для нескольких первых азимутальных каналов (0 и 1), чем больше радиальный номер, тем меньше вес мод, а для больших номеров азимутальных каналов (начиная с 4-го), зависимость меняется на противоположную. Это связано с

локализацией азимутальных каналов - чем больше номер, тем сильнее их максимум сдвинут от точки $(0,0)$, где сосредоточены первые радиальные моды.

На самом деле веса азимутальных каналов $\Lambda_n^{eff} = \sum_p \Lambda_{n,p}$ можно получить с большей точностью, если проинтегрировать ковариации, измеренные при одинаковых радиальных переменных:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{cov}|_{q_s=q_i=q} q dq &= \sum \Lambda_{n,p} \frac{|u_{n,p}(q)|^2}{q} e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} q dq = \\ &= \sum \Lambda_{n,p} e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} = \sum_n \left(\sum_p \Lambda_{n,p} \right) e^{in(\varphi_s - \varphi_i)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

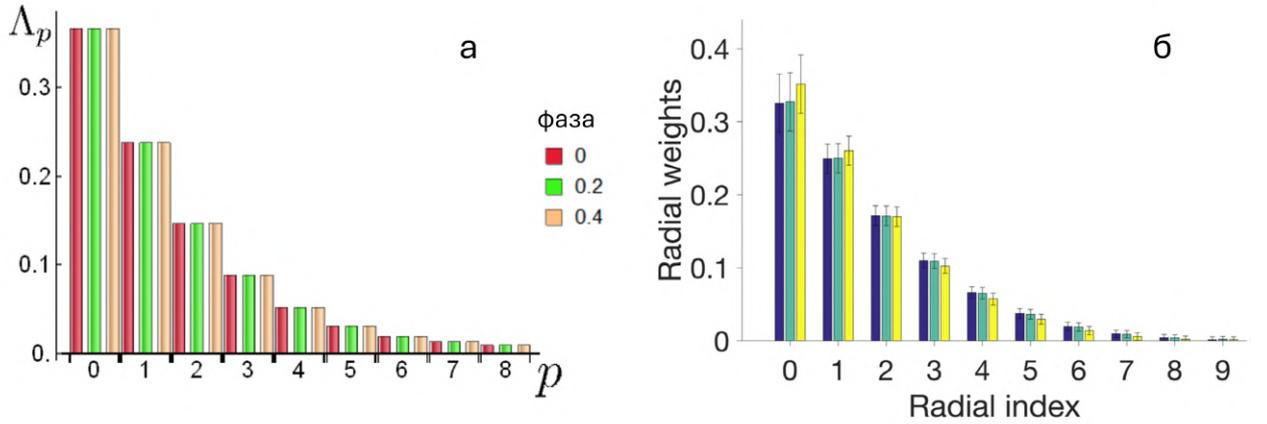


Рисунок 4.6 — Веса радиальных мод при разных фазах Φ между накачкой и сигналом на входе второго кристалла, полученные с помощью (а) теоретического расчета, (б) восстановления из экспериментальных ковариаций

Для восстановления весов радиальных мод $\Lambda_p = \sum_n \Lambda_{n,p}$ можно использовать измерение ковариации при одинаковых азимутальных углах:

$$\sqrt{Cov|_{\varphi=\varphi'=0}(\theta, \theta')} = \sum_p \Lambda_p \frac{u_p(\theta)}{\sqrt{\theta}} \frac{u_p^*(\theta')}{\sqrt{\theta'}} \quad (4.11)$$

На рис. 4.6 проведено сравнение теоретических весов радиальных мод с экспериментальными восстановлением через разложения по модам Шмидта выражения (4.11). Эксперимент отлично соответствует факту предсказанному теоретически - веса практически не зависят от фазы накачки Φ , если она не π . Также неплохо совпадают сами распределения весов радиальных мод. Также из (4.11) можно восстановить модули мод. При этом полностью теряется информация от фаз мод.

4.1.3 Многомодовое сжатие

Измерение сжатия является непростой экспериментальной задачей. Из-за того что система многомодовая, использовать метод гомодинного детектирования невозможно. В работе [95] было показано, что для света генерируемого в рассматриваемой системе интенсивность сигнала связана с вариациями квадратур x_i , p_i следующим образом:

$$I = C \cdot Var(x_\psi), \quad (4.12)$$

где C - некоторая константа, а $x_\psi = x_i \cos \psi + p_i \sin \psi$, а фаза интерферометра $\Phi = 2\psi$. Выражение верно, если $Var(x_i)e^{4G} \gg Var(p_i)$

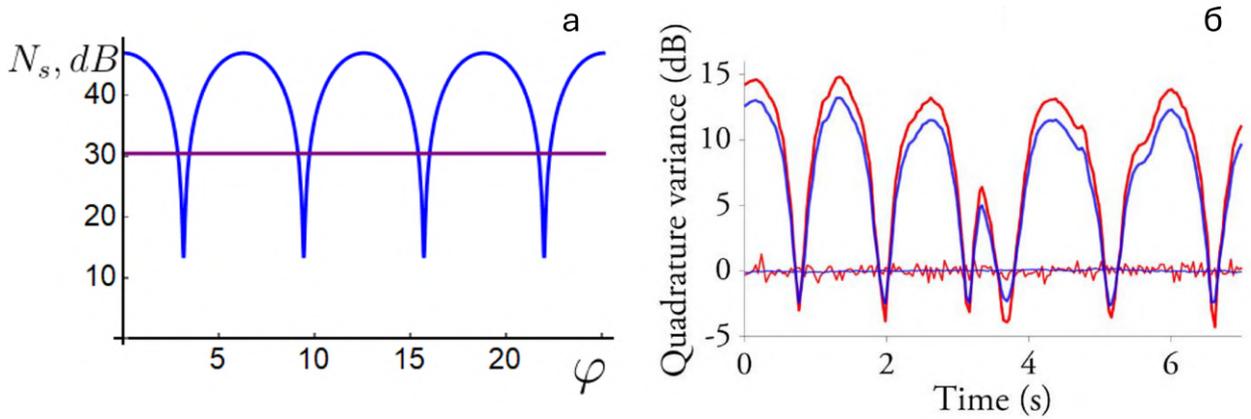


Рисунок 4.7 — Измерение сжатия в зависимости от фазы интерферометра (а) в теоретическом расчете показан полный сигнал, фиолетовая линия соответствует вакуумному состоянию на входе второго кристалла (б) в эксперименте измерено сжатие через нормировку на дробовой шум (линии около 0) и вместо фазы по оси время, от которого она зависит.

В совместной работе с экспериментальной группой [A5] было проведено измерение сжатия. На рис. 4.7 приведено сравнение зависимостей теоретического и экспериментального сжатия. Масштабы отличаются, т.к. коэффициент C неизвестен. Однако теоретически уровень сигнала для случая вакуума на входе усилителя изображен фиолетовой линией на рис. 4.7а. Разница между максимумом сигнала и уровнем усиления вакуума примерно равно 15 дБ, что соответствует экспериментальным показателям. В теории приведена зависимость

от фазы интерферометра, в эксперименте фаза создавалась с помощью пьезоэлектрического движения зеркала и время на оси пропорционально изменению фазы.

В лучшем случае было достигнуто существенное подавление шума до -4.3 дБ для плосковолновых мод благодаря использованию интерферометра Маха Цандера из 2-х нелинейных кристаллов. Излучение, генерируемое в первом кристалле фокусировалось на втором и таким образом происходило еще более существенное усиление в широком пространственном спектре. В теории в данной схеме достижимо еще большее сжатие - это можно увидеть по просадкам сигнала относительно фиолетовой линии на рис. 4.7а.

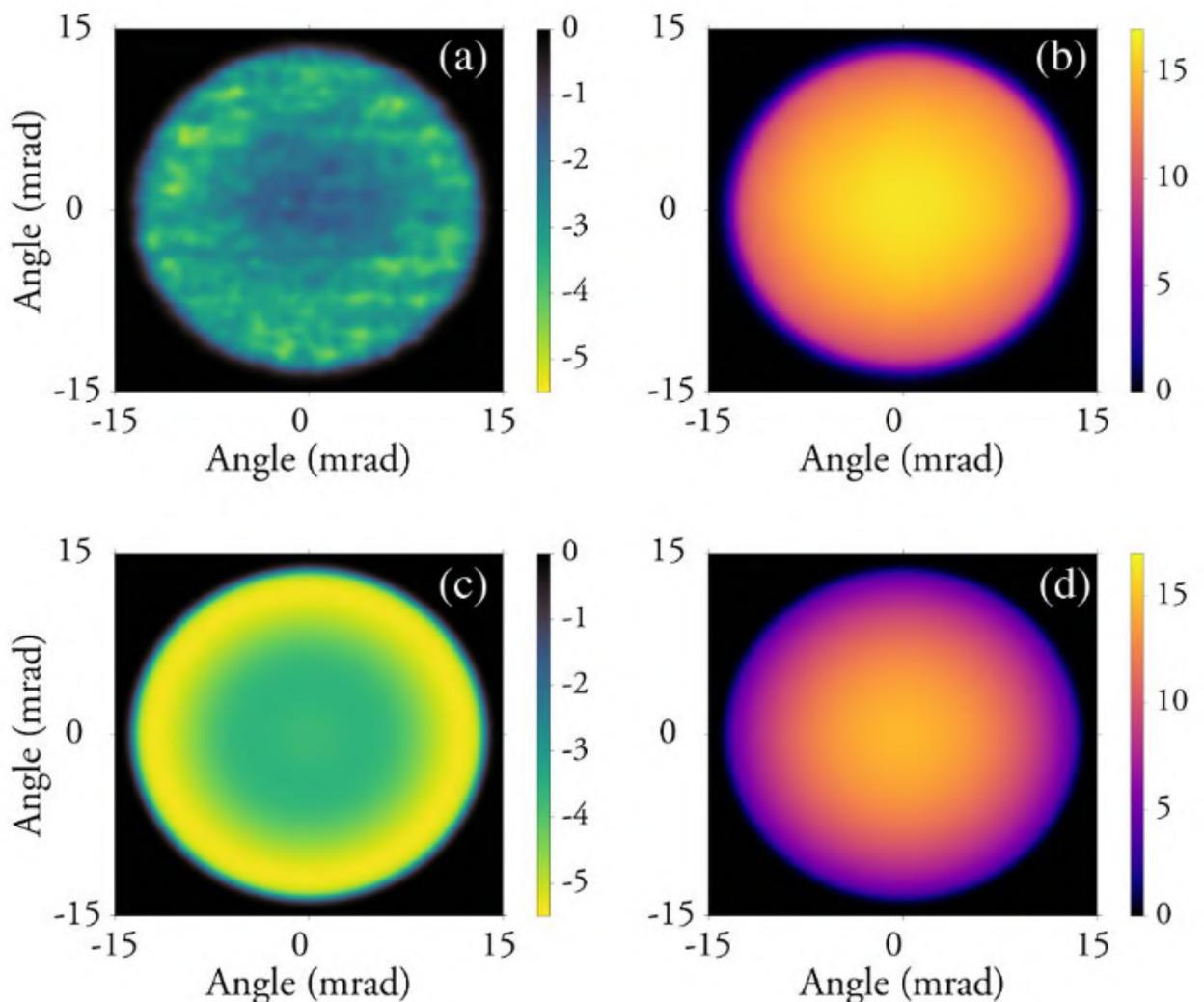


Рисунок 4.8 — Оптическое гомодинное детектирование для плоских волн. (а) Сжатие, эксперимент, (b) антисжатие, эксперимент, (c) сжатие, теория, (d) антисжатие теория

На рис. 4.8 было измерено сжатие для всех плоских волн, генерируемых в системе. На рис. 4.8(а,с) представлен режим максимального сжатия, на рис. 4.8(б,д) режим максимального антисжатия, т.е. когда дисперсия квадратуры наоборот увеличена. Хорошо видно сходство теории и эксперимента по пространственной структуре и по абсолютным значениям. Различия могут быть связаны с неточным сходством формы кристалла при проходе туда и обратно, а также отклонением направления распространения света от центральной оси.

Рассмотрим, как это влияет на результат. Если накачка падает не перпендикулярно на кристалл, тогда эффективный показатель преломления изменится, что приводит к возникновению дополнительной фазы φ_d в множителе с sinc в двухфотонной амплитуде.

Это означает, что моды в кристаллах разные и необходимо переразложение мод Шмидта $u_{np}^{(1,2)}(q)$ - в 1 и 2 кристаллах соответственно:

$$\begin{aligned} u_{np}^{(2)}(q) &= \sum_k S_{pk}^n u_{nk}^{(1)}(q) \\ u_{np}^{(1)}(q) &= \sum_k (S_{pk}^n)^\dagger u_{nk}^{(2)}(q) \end{aligned} \quad (4.13)$$

где коэффициенты

$$S_{pk}^n = \int dq u_{np}^{(2)}(q) \left(u_{np}^{(1)}(q) \right)^* \quad (4.14)$$

Тогда операторы Шмидта в 1 и 2 кристалле будут связаны так:

$$\begin{aligned} A_{n,p}^{(2)} &= \sum_k S_{pk}^n A_{n,k}^{(1)} \\ B_{n,p}^{(2)} &= \sum_k S_{pk}^n B_{n,k}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Проведя расчет, можно получить:

$$\begin{aligned} a_{n,p}^{out} &= \hat{S}_1^\dagger \hat{S}_2^\dagger a_{n,p}^{(2)} \hat{S}_2 \hat{S}_1 = \hat{S}_1^\dagger \left(a_{n,p}^{(2)} \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G + (b_{n,p}^{(2)})^\dagger e^{i\Phi} \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G \right) \hat{S}_1 = \\ &= \sum_k S_{pk}^n \left(a_{n,k} \cosh \sqrt{\lambda_{n,k}} G_0 + b_{n,k}^\dagger \sinh \sqrt{\lambda_{n,k}} G_0 \right) \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G + \\ &+ (S_{pk}^n)^* \left(b_{n,p}^\dagger \cosh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 + a_{n,p} \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G_0 \right) e^{i\Phi} \sinh \sqrt{\lambda_{n,p}} G = \\ &= \sum_k Q1_{p,k}^n(G, G_0, \Phi) a_{n,k} + \sum_k Q2_{p,k}^n(G, G_0, \Phi) b_{n,k}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
Q1_{pk}^n(G_0, G, \Phi) &= S_{pk}^n \cosh(\sqrt{\lambda_{nk}} G_0) \cosh(\sqrt{\lambda_{np}^{second}} G) + \\
&\quad + (S_{pk}^n)^* e^{i\Phi} \sinh(\sqrt{\lambda_{nk}} G_0) \sinh(\sqrt{\lambda_{np}^{second}} G) \\
Q2_{pk}^n(G_0, G, \Phi) &= S_{pk}^n \sinh(\sqrt{\lambda_{nk}} G_0) \cosh(\sqrt{\lambda_{np}^{second}} G) + \\
&\quad + (S_{pk}^n)^* e^{i\Phi} \cosh(\sqrt{\lambda_{nk}} G_0) \sinh(\sqrt{\lambda_{np}^{second}} G)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Тогда пространственный сигнал можно рассчитать так:

$$I_s^{(2)}(q) = \sum_{n,k} \left| \sum_p Q2_{pk}^n(G_0, G) \frac{u_{np}^{second}(q)}{\sqrt{q}} \right|^2 \tag{4.18}$$

И общую интенсивность сигнала получить в виде:

$$N_s^{(2)}(q) = \sum_{n,k,p} |Q2_{pk}^n(G_0, G)|^2 \tag{4.19}$$

Практически полученные результаты могут быть использованы для измерения характеристик полупрозрачного объекта, помещенного между кристаллами, с точностью лучше дробового шума.

4.1.4 Выводы

В данном разделе обсуждаются теоретические проработки экспериментальных схем по измерению весов мод, их зависимости от фазы интерферометра, а также получения многомодового сжатия и его измерению. Разработан теоретический подход, позволяющий рассчитывать измеряемые параметры, что помогает объяснить наблюдаемые в эксперименте эффекты. Продемонстрировано хорошее согласие сходство теории и эксперимента.

4.2 Бесшумное усиление сигнала

Бесшумное усиление сжатого света важно для его эффективного детектирования в связи с неизбежными потерями. Также усиление сигналов в

широком пространственном спектре важно для таких приложений, как построение квантовых изображений. Интерферометр из нелинейных кристаллов является многомодовой системой и является настраиваемым параметрическим усилителем. Число мод может достигать сотен штук, ширина углового спектра в этом случае оказывается порядка десятков мрад. Также моды с высоким порядковым номером имеют много узких пиков и могут повысить точность измерений.

В одномодовом параметрическом усилителе бесшумное усиление сигнала может происходить только в фазово-чувствительном режиме. В многомодовом усилителе связь между фактором шума и фазовой чувствительностью менее тривиальная. Однако можно показать, что чем выше фазовая чувствительность, тем меньше шума вносит усилитель. Поэтому будем исследовать возможности получить фазово-чувствительное усиление сигнала.

4.2.1 Усиление сигнала в многомодовой системе

Пусть на систему помимо накачки падает подсветка - некоторое состояние $|\psi_{in}\rangle$ в пространственной моде $f(\mathbf{q})$.

Разложим эту функцию по модам Шмидта:

$$f(\mathbf{q}) = \sum_{n,p} \beta_{n,p} U_{n,p}(\mathbf{q}) \quad (4.20)$$

где коэффициенты разложения можно вычислить как

$$\beta_{n,p} = \int f^*(\mathbf{q}) U_{n,p}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (4.21)$$

Введем оператор рождения фотона в моде $f(\mathbf{q})$

$$A_f^\dagger = \int_0^\infty f(\mathbf{q}) a_{\mathbf{q}}^\dagger d\mathbf{q} \quad (4.22)$$

Интенсивность сигнала можно рассчитать как:

$$I_s(\mathbf{q}) = \langle \psi_{in} | E_s^-(\mathbf{q}) E_s^+(\mathbf{q}) | \psi_{in} \rangle = \langle \psi_{in} | \sum_{np} \sum_{\tilde{n}\tilde{p}} u_{np}(\mathbf{q}) u_{\tilde{n}\tilde{p}}^*(\mathbf{q}) A_{np}^\dagger(t) A_{\tilde{n}\tilde{p}}(t) | \psi_{in} \rangle \quad (4.23)$$

Учтем эволюцию операторов

$$A_{np}^\dagger(t)A_{\tilde{n}\tilde{p}}(t) = \sinh G_{np} \sinh G_{\tilde{n}\tilde{p}} B_{np} B_{\tilde{n}\tilde{p}}^\dagger + \sinh G_{np} \cosh G_{\tilde{n}\tilde{p}} B_{np} A_{\tilde{n}\tilde{p}} + \cosh G_{np} \sinh G_{\tilde{n}\tilde{p}} B_{np}^\dagger A_{\tilde{n}\tilde{p}}^\dagger + \cosh G_{np} \cosh G_{\tilde{n}\tilde{p}} A_{np}^\dagger A_{\tilde{n}\tilde{p}} \quad (4.24)$$

Также тот факт, что в вырожденном режим $B_{n,p} = A_{-n,p}$. Тогда интенсивность сигнала принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle = & \sum_{n,p} \cosh^2 G_{n,p} \langle \psi_{in} | A_{n,p}^\dagger A_{n,p} | \psi_{in} \rangle + \\ & + \sinh^2 G_{n,p} \langle \psi_{in} | A_{-n,p} A_{-n,p}^\dagger | \psi_{in} \rangle + \\ & + \sinh G_{n,p} \cosh G_{n,p} \langle \psi_{in} | A_{n,p}^\dagger A_{-n,p}^\dagger | \psi_{in} \rangle + \\ & + \sinh G_{n,p} \cosh G_{n,p} \langle \psi_{in} | A_{-n,p} A_{n,p} | \psi_{in} \rangle \end{aligned} \quad (4.25)$$

С экспериментальной точки зрения проще всего подсвечивать когерентным состоянием $|\psi_{in}\rangle = |\alpha\rangle$. Найдем выражение для сигнала при подсветке когерентным состоянием с $\alpha = |\alpha| \cdot e^{i\gamma}$, γ - фаза относительно накачки:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle = & \sum_{n,p} \sinh^2 G_{n,p} + |\alpha|^2 \sum_{n,p} (\cosh^2 G_{n,p} |\beta_{n,p}|^2 + \sinh^2 G_{n,p} |\beta_{-n,p}|^2 + \\ & + \sinh G_{n,p} \cosh G_{n,p} \beta_{n,p}^* \beta_{-n,p}^* e^{-2i\gamma} + \sinh G_{n,p} \cosh G_{n,p} \beta_{-n,p} \beta_{n,p} e^{2i\gamma}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Данное выражение можно переписать в более общем виде, из которого будет лучше понятен физический смысл слагаемых:

$$N = N_0 + |\alpha|^2 \cdot (S_a + \text{Re}(S_b \cdot e^{2i\gamma})) \quad (4.27)$$

где $N_0 = \sum_{n,p} \sinh^2 G_{n,p}$ - сигнал спонтанного параметрического рассеяния

$$S_a = \sum_{n,p} (\sinh^2 G_{n,p} + \cosh^2 G_{n,p}) |\beta_{n,p}|^2 \quad (4.28)$$

- фазово нечувствительная часть сигнала,

$$S_b = \sinh 2G_{n,p} \beta_{-n,p} \beta_{n,p} \quad (4.29)$$

- фазово чувствительная часть сигнала.

Очевидно, что если $S_b = 0$ сигнал не зависит от фазы γ и сигнал будет фазово-нечувствительным. Рассмотрим случай, как это может произойти.

Из (4.29) видно, что если мы подсвечиваем моду с орбитальным моментом $n_0\hbar$, т.е. ($\beta_{n_0p} \neq 0$) и при этом не подсвечиваем моду с орбитальным $-n_0\hbar$, т.е.

($\beta_{-n_0p} = 0$), тогда сигнал будет фазово-нечувствительным. Таким образом, подсветка системы состоянием с определенным орбитальным моментом приведет к фазово-нечувствительному режиму.

Как простой пример фазово-чувствительного режима можно рассмотреть функцию $f(\mathbf{q}) = \delta(q - q_0)$. Такой свет содержит только 0 орбитальный угловой момент. Вычислив $\beta_{n,p} = U_{0,p}(q_0)\delta_{n,0}$, получим:

$$S_b = \sum_p \sinh 2G_{0,p}(U_{0,p}(q_0))^2 \neq 0$$

На самом деле S_b возникает из-за взаимодействия связанных мод, поэтому важно, чтобы усиление происходило в обеих модах в паре.

4.2.2 Влияние двухфотонной амплитуды на фазовую чувствительность

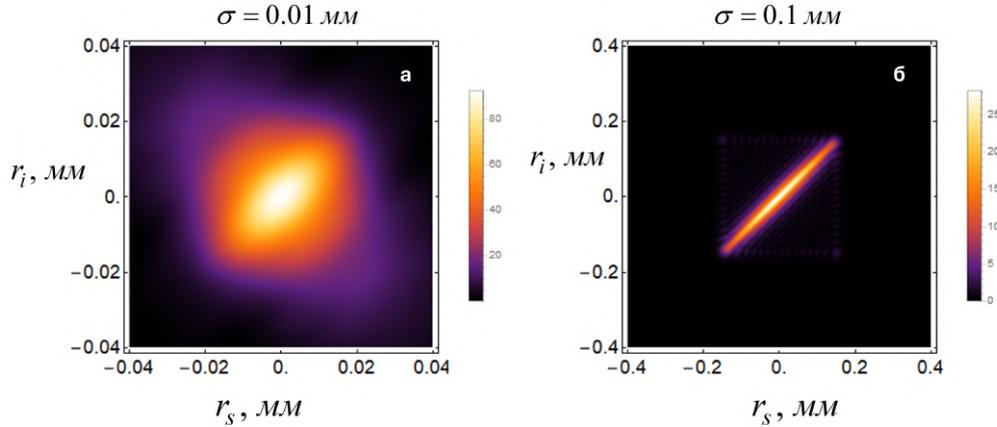


Рисунок 4.9 — Вид двухфотонной амплитуды в ближней зоне в зависимости от ширины накачки (а) узкая накачка, $\sigma = 0.01 \text{ мм}$, (б) широкая накачка, $\sigma = 0.1 \text{ мм}$

Для простоты описания рассмотрим двумерный случай, когда в одном из направлений накачка имеет бесконечную ширину. Во втором направлении гауссовый профиль с шириной σ . При узкой накачке двухфотонная амплитуда имеет широкое распределение 4.9а и корреляции между фотонами слабые. В

случае широкой накачки корреляции усиливаются, вид начинает напоминать дельта-функцию от разности радиальных переменных фотонов 4.9б.

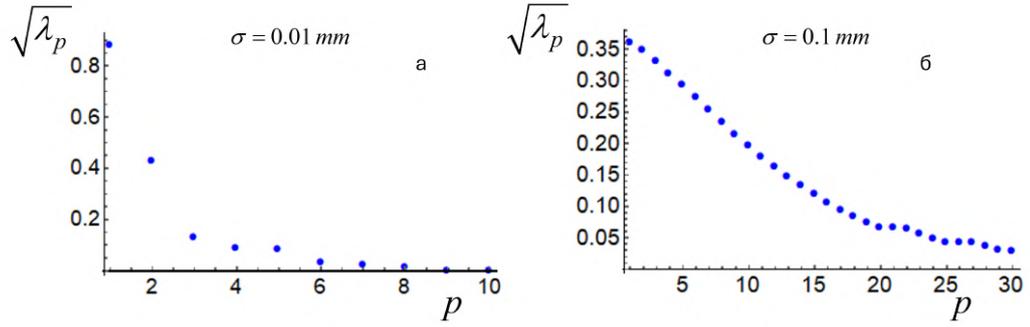


Рисунок 4.10 — Веса мод в зависимости от ширины накачки

Также от ширины накачки зависит и число мод в системе. В случае узкой накачки мод будет мало 4.10а, а основные моды будут иметь широкое угловое распределение. В случае широкой накачки мод много, их веса медленно спадают 4.10б, а моды будут иметь небольшие угловые области локализации.

Для приложений бесшумного усиления важен многомодовый состав усилителя и локализованность мод, что соответствует режиму широкой накачки. В предельном случае накачка является плоской волной.

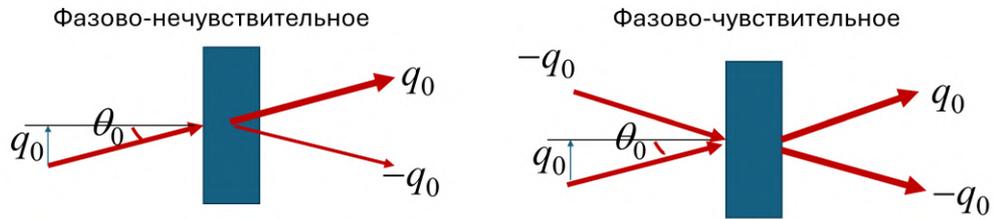


Рисунок 4.11 — Качественный рисунок с сигналами при фазово-нечувствительном и фазово-чувствительном усилении

В двумерном случае двухфотонная амплитуда в предельном случае имеет вид $F_{far}(q_s, q_i) \sim \delta(q_s + q_i)$. В такой системе очень много мод и они близки к дельта-функциями. Из анализа Гамильтониана очевидно, что если подсветить моду с пиком на q_0 , но не подсветить $-q_0$, то усилиться сигнал в q_0 , но также произойдет генерация в скоррелированной моде $-q_0$ и результат будет фазово-нечувствительным. Идея качественно продемонстрирована на рис. 4.11.

В трехмерном случае $F_{far}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) \sim \delta(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$, а Гамильтониан

$$H = i\hbar\Gamma \int d\mathbf{q} a^\dagger(\mathbf{q}) a^\dagger(-\mathbf{q}) + h.c. \quad (4.30)$$

Аналогично, если подсветить плоской волной с \mathbf{q}_0 , но не подсветить $-\mathbf{q}_0$ сигнал будет фазово-нечувствительным.

Покажем, как такие же результаты можно получить в подходе мод Шмидта, так как неочевидно, почему сумма в выражении (4.29) обращается в 0.

Существует набор мод $U_{n,p}(\mathbf{q}) = u_p(q) \cdot e^{in\varphi}$ такой что :

$$\delta(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) = \sum U_{n,p}(\mathbf{q}_s)U_{-n,p}(\mathbf{q}_i) \quad (4.31)$$

Фактически это разложение Шмидта, но веса всех мод одинаковы, так как:

$$\delta(\varphi_s - \varphi_i) = \sum_n e^{in\varphi_s} e^{-in\varphi_i} \quad (4.32)$$

Тогда слагаемое с S_b в (4.27) превратится:

$$\text{Re} \sum_{n,p} \sinh(2G_{n,p}) \beta_{-n,p} \beta_{n,p} e^{2i\gamma} = \sinh(2G) \text{Re} e^{2i\gamma} \sum_{n,p} \beta_{-n,p} \beta_{n,p} \quad (4.33)$$

При подсветке плоской волной $f(\mathbf{q}) \sim \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$:

$$\begin{aligned} \beta_{n,p} &= \int \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) U_{n,p}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = U_{n,p}(\mathbf{q}_0) \\ \sum_{n,p} \beta_{-n,p} \beta_{n,p} &= \sum U_{n,p}(\mathbf{q}_0) U_{-n,p}(\mathbf{q}_0) = \delta(\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Последнее выполняется в силу (4.31).

Как и ожидалось подсветка плоской волной дает фазово-нечувствительный результат.

Покажем, что подсветка состоянием из 2-х плоских волн \mathbf{q}_0 и $-\mathbf{q}_0$ приведет к фазово-чувствительному результату

В таком случае

$$\begin{aligned} \beta_{n,p} &= U_{n,p}(\mathbf{q}_0) + U_{n,p}(-\mathbf{q}_0) \\ \sum_{n,p} \beta_{-n,p} \beta_{n,p} &= \sum U_{n,p}(\mathbf{q}_0) U_{-n,p}(\mathbf{q}_0) + U_{n,p}(\mathbf{q}_0) U_{-n,p}(-\mathbf{q}_0) = \\ &= \delta(\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_0) + \delta(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_0) = \delta(0) \neq 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

От простого примера можно прийти к общему выводу - чтобы получить фазово-чувствительное бесшумное усиление необходимо, чтобы свет на входе одинаково хорошо подсвечивал скоррелированные собственные моды усилителя.

4.2.3 Как получить лучшую фазо-чувствительность

Для измерения фазовой чувствительности воспользуемся понятием видности, т.е. варьируя фазу накачки получим максимальный I_{max} и минимальный I_{min} сигнал. Видность сигнала в этом случае равна $2\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}$.

Теперь осталось решить следующую задачу: для заданного сигнала надо настроить модовый состав оптического усилителя, так чтобы достичь максимальной видности. Однако в такой постановке будет сложно визуализировать решение, поэтому сформулируем обратную задачу - для заданных параметров усилителя найти идеальную с точки зрения видности подсветку гауссовым пучком

$$f(q) = \exp\left(-\frac{(q - q_0)^2 w^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))^2 k_s^2 w^2}{2}\right) \quad (4.36)$$

где варьируемые параметры q_0 - смещение направления подсветки относительно оси, а w - ширина распределения. Также вместо q_0 иногда будет использоваться угол падения подсветки $\sin(\theta_0) = q_0/k_s$, где k_s - волновой вектор подсветки.

В (4.27) есть 2 фазово-нечувствительных слагаемых. N_0 не зависит от силы подсветки и легко сделать α достаточно большим, чтобы сигналом спонтанного рассеяния можно было пренебречь. Тогда фазовая чувствительность зависит в основном соотношения S_a/S_b

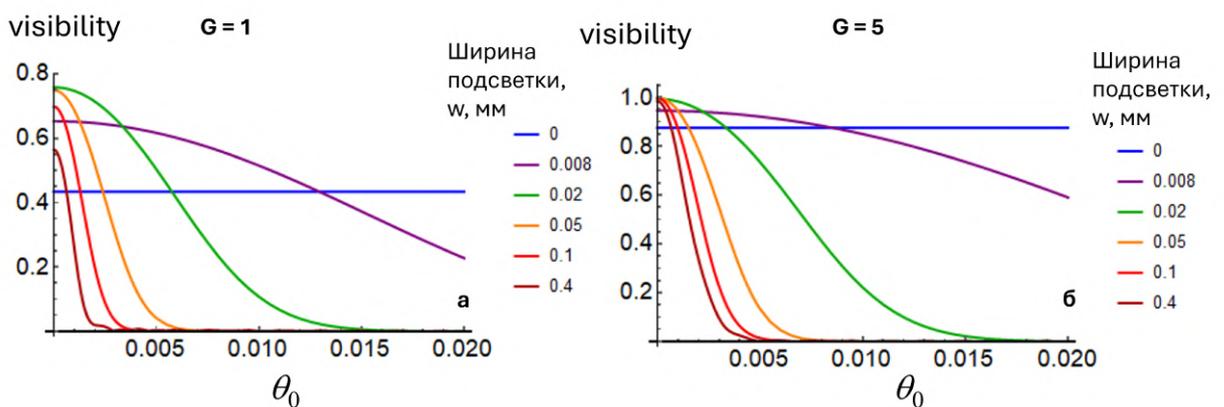


Рисунок 4.12 — Зависимость видности от угла падения подсветки при (а) низком параметрическом усилении, (б) высоком параметрическом усилении.

На рис. 4.12а приведена зависимость видности от угла падения подсветки. При очень узкой ширине подсветка (4.36) является сферической волной, поэтому подсвечиваются все моды, а видность сигнала постоянна и не зависит от

θ_0 . С ростом ширины подсветки угловой спектр уменьшается и соответственно быстрее падает видность с увеличением угла падения, т.к. не подсвечиваются скоррелированные моды. При этом усиление нескоррелированных мод дает вклад в фазово-нечувствительную часть сигнала. При высоком параметрическом усилении эффективное число мод уменьшается и видность увеличивается 4.12б. Для практических приложений важно усиливать широкий угловой диапазон, с этой точки зрения оптимальной является ширина, соответствующая фиолетовой линии на рис. 4.12

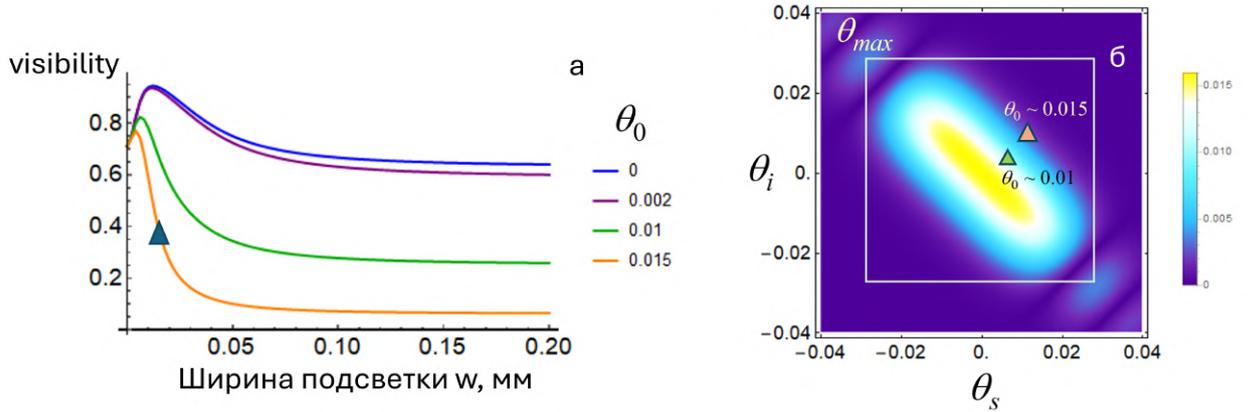


Рисунок 4.13 — (а) Зависимость видности от ширины подсветки при разных углах падения, (б) демонстрация ширины корреляций θ_{max} на ковариации

Можно также проанализировать зависимости видности от ширины подсветки при разных углах θ_0 , они показаны на рис. 4.13а. Мы видим изменение видности при трансформации подсветки из сферической волны в плоскую. Довольно логично, что видность плоской волны резко падает с увеличением угла падения, так как тогда слабее подсвечиваются связанные моды. Интересной особенностью является то, что максимум видности, примерно равный 0.9, достигается не в режиме сферической волны, а при некоторой ненулевой ширине подсветки, которая еще и зависит от угла падения θ_0 . Причина в том, что сферическая волна подсвечивает еще много слабо скоррелированных мод с большими номерами, которые дают вклад в фазово нечувствительное слагаемое S_a . Поэтому оптимально попадать в ширину корреляций θ_{max} для ковариации, отмеченную на рис. 4.13б. Эту ширину можно определить по формуле:

$$w_{opt} \sim \frac{1}{k_s(\theta_{max} + \theta_0)} \quad (4.37)$$

Также легко увидеть, что $S_b \sim \cos(\theta_0, \theta_0)$. Соответственно это значение можно увидеть на рис. 4.13б, где цветными треугольниками отмечены углы θ_0 соответствующие линиям того же цвета что и на рис. 4.13а. Данная демонстрация объясняет резкое падение видности с увеличением θ_0 .

4.2.4 Выводы

Было изучено многомодовое усиление входного сигнала в процессе параметрического рассеяния. Объяснено, как фазовая чувствительность зависит от параметров системы и подсветки. Также показано, что для таких приложений, как квантовая визуализация, оптимально использовать накачку, засвечивающую основной спектр собственных мод кристалла, чтобы получить бесшумное усиление в многомодовой системе.

Глава 5. Взаимодействие неклассических состояний света с кубитами

Результаты данной главы представлены в статье [A9].

5.1 Особенности взаимодействия двухмодового поля с кубитом

Широко известно решение задачи взаимодействия кубита с 1 квантовым полем. Однако для практических приложений важно решить задачу о взаимодействии кубита с двумя полями.

5.1.1 Теоретический подход и постановка задачи

Рассмотрим 2 квантовых поля с частотами ω_1 , ω_2 , взаимодействующие с кубитом с частотой перехода ω , с силами взаимодействия Γ_1 и Γ_2 соответственно. Запишем Гамильтониан такой системы:

$$H = \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\Gamma_1(\sigma^+ a_1 + \sigma^- a_1^\dagger) + \hbar\Gamma_2(\sigma^+ a_2 + \sigma^- a_2^\dagger). \quad (5.1)$$

Он состоит из гамильтонианов свободных полей, гамильтониана свободного кубита и взаимодействия каждого поля с кубитом.

Состояние такой квантовой системы можно представить в виде суммы:

$$\psi = \sum C_{n_1 n_2}^g(t) |g n_1 n_2\rangle + \sum C_{n_1 n_2}^e(t) |e n_1 n_2\rangle, \quad (5.2)$$

Здесь g, e характеризует состояние кубита - основное или возбужденное, n_1, n_2 - числа фотонов в полях.

Для рассматриваемого гамильтониана найдено 2 инварианта. Первый инвариант - число возбуждений, т.е. число фотонов в полях и возбуждение кубита

$$N = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + \sigma_+ \sigma_- \quad (5.3)$$

Второй инвариант связан с взаимодействием

$$W = \frac{\Delta}{2} \sigma_z + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} (a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2) + \Gamma_1 (\sigma^+ a_1 + \sigma^- a_1^+) + \Gamma_2 (\sigma^+ a_2 + \sigma^- a_2^+) \quad (5.4)$$

На самом деле выполняется:

$$H = \hbar \left(W + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} N \right) \quad (5.5)$$

Поэтому других очевидных инвариантов нет.

С точки зрения гамильтониана (5.1) прямые переходы возможны между состояниями (g, n_1, n_2) и $(e, n_1 - 1, n_2)$ или $(e, n_1, n_2 - 1)$. Можно записать уравнения Шредингера для коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{n_1 n_2}^g}{dt} &= -i\Gamma_1 \sqrt{n_1} e^{i(\omega_1 - \omega)t} C_{n_1 - 1 n_2}^e - \\ &\quad -i\Gamma_2 \sqrt{n_2} e^{i(\omega_2 - \omega)t} C_{n_1 n_2 - 1}^e \\ \frac{dC_{n_1 n_2}^e}{dt} &= -i\Gamma_1 \sqrt{n_1 + 1} e^{i(\omega - \omega_1)t} C_{n_1 + 1 n_2}^g - \\ &\quad -i\Gamma_2 \sqrt{n_2 + 1} e^{i(\omega - \omega_2)t} C_{n_1 n_2 + 1}^g \end{aligned} \quad (5.6)$$

В общем случае данную систему можно решить численно для конкретной системы. Однако важно обсудить некоторые свойства уравнений, которые упрощают их решение.

В силу инварианта (5.3), состояния с разным числом возбуждений никак не взаимодействуют между собой. Например, если начальное состояние было $(g, 2, 0)$ (число возбуждений равно 2), то заселиться смогут только состояния $(e, 1, 0)$, $(e, 0, 1)$, $(g, 2, 0)$, $(g, 0, 2)$, $(g, 1, 1)$ (у них у всех число возбуждений равно 2). Это соответствует салатовой диагонали на поясняющем рис. 5.1. Состояния, отмеченные разными цветами, не взаимодействуют между собой. Состояния одного цвета с соседними номерами $(k - 1, k, k + 1)$ войдут в 1 уравнение в системе (5.6), например есть уравнение, связывающее (4,5,6).

Таким образом, система уравнений (5.6) разбивается на набор независимых цепочек, что существенно упрощает ее решение численными методами для больших N . Также данное свойство обеспечивает стабильность решения: если при моделировании мы пренебрегли состояниями с высоким числом возбуждений, это никак не повлияет на решение системы для остальных состояний. Ошибка будет не выше вероятности состояний, которыми пренебрегли.

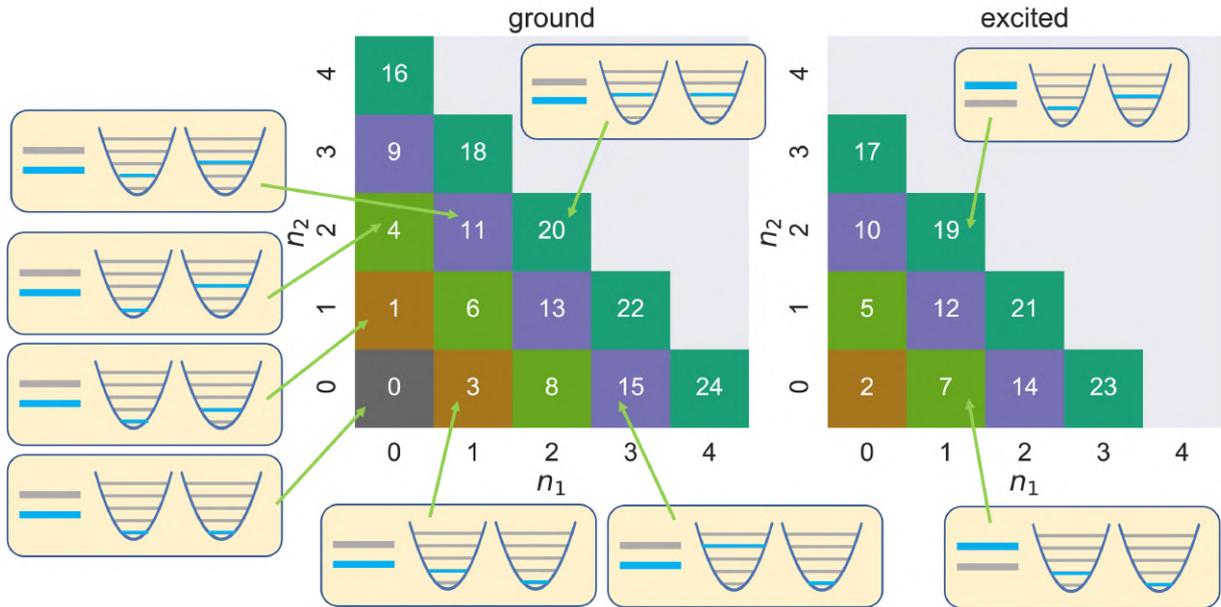


Рисунок 5.1 — Состояния системы

5.1.2 Аналитическое решение задачи эволюции оператора в вырожденном режиме

Для начала будем рассмотреть вырожденный режим, когда т.е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Поля при этом могут отличаться поляризацией.

В вырожденном режиме можно перейти в новую систему мод, в которой решаются уравнения эволюции. Введем операторы:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\Gamma_1 a_1 + \Gamma_2 a_2}{G} \\ b_2 &= \frac{\Gamma_2 a_1 - \Gamma_1 a_2}{G} \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $\Gamma = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}$

Обратным преобразованием можно переходить из новых мод в старые

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Gamma_1 b_1 + \Gamma_2 b_2}{\Gamma} \\ a_2 &= \frac{\Gamma_2 b_1 - \Gamma_1 b_2}{\Gamma} \end{aligned} \quad (5.8)$$

В новых модах b уравнения эволюции Гейзенберга выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{db_1}{dt} = -i\Gamma\sigma^- - i\omega b_1 \\ \frac{db_2}{dt} = -i\omega b_2 \\ \frac{d\sigma^-}{dt} = -i\omega\sigma^- + i\Gamma\sigma_2 b_1 \\ \frac{d\sigma_z}{dt} = 2i\Gamma(b_1^+\sigma^- - b_1\sigma^+) \end{cases} \quad (5.9)$$

Видно, что уравнение для b_2 отвязано от остальных и задача становится похожа на взаимодействие кубита с одним полем в моде b_1 .

Стоит отметить, что в новых модах сохраняется вид инварианта возбуждений:

$$N = b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2 + \sigma_+ \sigma_- \quad (5.10)$$

А инвариант взаимодействия существенно упрощается:

$$W = \Gamma(\sigma_+ b_1 + \sigma_- b_1^+) \quad (5.11)$$

Заметим, что:

$$W^2 = \Gamma^2(\sigma_+ \sigma_- + b_1^+ b_1) = \Gamma^2 M, \quad (5.12)$$

где $M = \sigma_+ \sigma_- + b_1^+ b_1$ - число фотонов в суммарном поле и возбуждение кубита.

Поэтому решение уравнений эволюции будет таким:

$$\begin{cases} \sigma_-(t) = e^{-i\nu t} (\beta\sigma_-(0) + \gamma b_1(0)) \\ b_1(t) = e^{-i\nu t} (\beta^+ b_1(0) + \gamma\sigma_-(0)) \\ b_2(t) = b_2(0)e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (5.13)$$

Были введены следующие инвариантные операторы

$$\begin{aligned} \varkappa &= \Gamma\sqrt{M+1} \\ \beta &= \cos(\varkappa t) + iW \frac{\sin \varkappa t}{\varkappa} \\ \gamma &= -i\Gamma \frac{\sin \varkappa t}{\varkappa} \\ \nu &= \omega - W \end{aligned} \quad (5.14)$$

Данное решение позволяет рассчитать любую необходимую статистику, например число фотонов в полях. Однако техническая сложность заключается в необходимости переразложения начального состояния в модах $b_{1,2}$. Также при необходимости найти конечное состояние придется делать обратное переразложение.

Чтобы оценить все трудности, попробуем посчитать дипольный момент $\langle \sigma^-(t) \rangle$ для простого начального состояния - смеси 1 фотона с вакуумом: $\alpha_1 |g,1,0\rangle + \alpha_2 |g,0,0\rangle$

Для начала это состояние надо представить в модах b :

$$|g,1,0\rangle_a = a_1^+ |g,0,0\rangle = \frac{\Gamma_1}{\Gamma} |g,1,0\rangle_b + \frac{\Gamma_2}{\Gamma} |g,0,1\rangle_b \quad (5.15)$$

Далее посчитаем эволюцию оператора

$$\sigma^-(t) \left(\alpha_1 \frac{\Gamma_1}{\Gamma} |g,1,0\rangle_b + \alpha_1 \frac{\Gamma_2}{\Gamma} |g,0,1\rangle_b + \alpha_2 |g,0,0\rangle \right) = \alpha_1 \frac{\Gamma_1}{\Gamma} e^{-i\omega t} \sin \Gamma t |g,0,0\rangle \quad (5.16)$$

Так происходит из-за того что $M |g,1,0\rangle = |g,1,0\rangle$, $M |g,0,0\rangle = 0$, $M |g,0,1\rangle = 0$, $W |g,1,0\rangle = |e,0,0\rangle$, $W |g,0,0\rangle = 0$, $W |g,0,1\rangle = 0$

В итоге получаем

$$\langle \sigma^-(t) \rangle e^{i\omega t} = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \sin \Gamma t \quad (5.17)$$

Для состояний с еще большим числом фотонов выполнять расчеты становится гораздо сложнее, поэтому вернемся к численному решению уравнений Шредингера.

5.1.3 Свойства взаимодействия в вырожденном режиме

Уравнения для коэффициентов (5.6) в вырожденном режиме можно записать в матричной форме

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = -ig\Lambda\mathbf{C} \quad (5.18)$$

где Λ - двухдиагональная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{m} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{m} & 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & \sqrt{m-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m-1} & 0 & \sqrt{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{1} & 0 & \sqrt{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{m} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

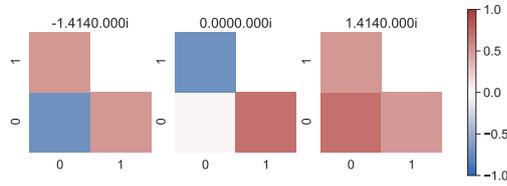


Рисунок 5.2 — Собственные вектора матрицы (5.19) для числа возбуждений $m = 1$

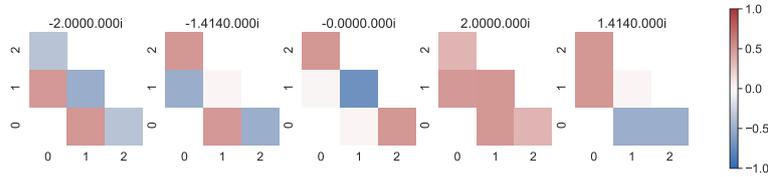


Рисунок 5.3 — Собственные вектора матрицы (5.19) для числа возбуждений $m = 2$

Собственные значения и вектора (5.18) могут быть найдены для любого m .

Выражения для собственных векторов довольно сложны. Они приведены на рис. 5.2 для $m = 1$ и рис. 5.3 для $m = 2$. Однако есть простое выражение для собственных значений для любого числа возбуждений m :

$$0, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{4}, \pm\sqrt{6}, \dots, \pm\sqrt{2m} \quad (5.20)$$

Важно отметить, что 0 собственное значение всегда соответствует режиму индуцированной электромагнитной прозрачности. Т.е. атом и поле заселены, однако происходит интерференция переходов и состояние сохраняется. Фактически поле как будто не взаимодействует с кубитом.

5.1.4 Выводы

В вырожденном режиме взаимодействия двухмодового поля с кубитом получено аналитическое решение, найдены собственные состояния и соответствующие им энергии. Обнаружен режим индуцированной электромагнитной прозрачности.

5.2 Управление состоянием двухмодового поля с помощью кубита

В данном разделе рассмотрим более общий случай, когда частоты кубита и полей отличаются. Эта задача уже существенно сложнее предыдущей и будет решена численно.

5.2.1 Особенности взаимодействия при разных параметрах

Допустим, что силы взаимодействия кубита с модами поля одинаковы $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$.

Далее в данном разделе будем без ограничений общности считать, что $\Gamma = 1$ у.е., где условная единица имеет размерность частоты. Соответственно все времена на графиках будут иметь размерность обратной условной единицы, а все частоты измеряются в у.е., если не указано иное. Для сверхпроводящих систем параметр взаимодействия можно настраивать, порядок величины находится в ГГц, соответственно порядок времени - наносекунды.

Режим взаимодействия сильно зависит от нескольких параметров. Первый - отстройка полей друг от друга.

$$\delta = \frac{2(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} \quad (5.21)$$

Если $|\delta| \sim 1$, то при передаче фотона из одного поля в другое, будет меняться энергия системы, т.к. число возбуждений должно оставаться посто-

янным. Это означает, что поля будут очень слабо взаимодействовать друг с другом.

Чтобы поля взаимодействовали через кубит, важно, чтобы $|\delta| \ll 1$. Т.к. мы хотим увидеть эффекты от наличия 2-х полей, нам интересен именно такой режим, поэтому далее будем рассматривать только его.

Вторым важным параметром является отстройка частоты кубита от частоты полей.

$$\Delta = \omega_0 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (5.22)$$

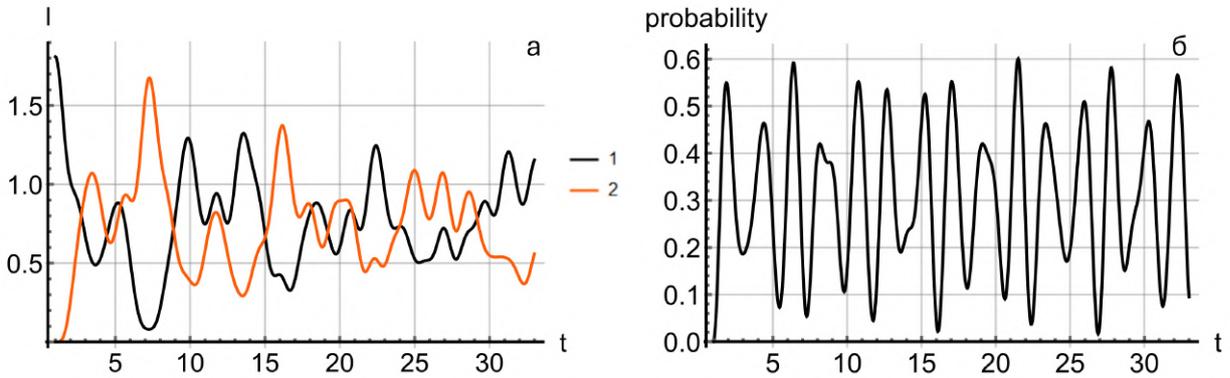


Рисунок 5.4 — (а) Число фотонов в полях и (б) вероятность обнаружить кубит в возбужденном состоянии в зависимости от времени при взаимодействии кубита с частотой $\omega = 11$ с полями $\omega_1 = 11.1$ и $\omega_2 = 11.105$. При $t = 0$ в первом поле когерентное состояние с $\alpha = \sqrt{2}$, во втором поле вакуум.

Если $\Delta \sim \Gamma(\langle N \rangle + 1)$, где $\langle N \rangle$ - среднее число фотонов в полях, то кубит сильно связан с полями, и в отдельные моменты времени он может сильно заселяться (рис. 5.4б). Такой режим подходит для управления состоянием кубита, если возможно остановить взаимодействие в заданный момент времени. При этом числа фотонов в полях меняются довольно хаотично (рис. 5.4а), не наблюдается эффектов перехода состояния из поля в другое.

Если $\Delta \gg \Gamma(\langle N \rangle + 1)$, то кубит будет очень слабо заселяться (рис. 5.5б) и фактически основной динамикой в системе будут переходы фотонов между полями (рис. 5.5а). В рассматриваемом на рисунке примере $\Delta = 10$. Выбран самый простой случай - когда в первом поле фоковское 1 фотонное, а втором - вакуум. В некоторой момент времени $t = 16.5$ видно, что происходит переход

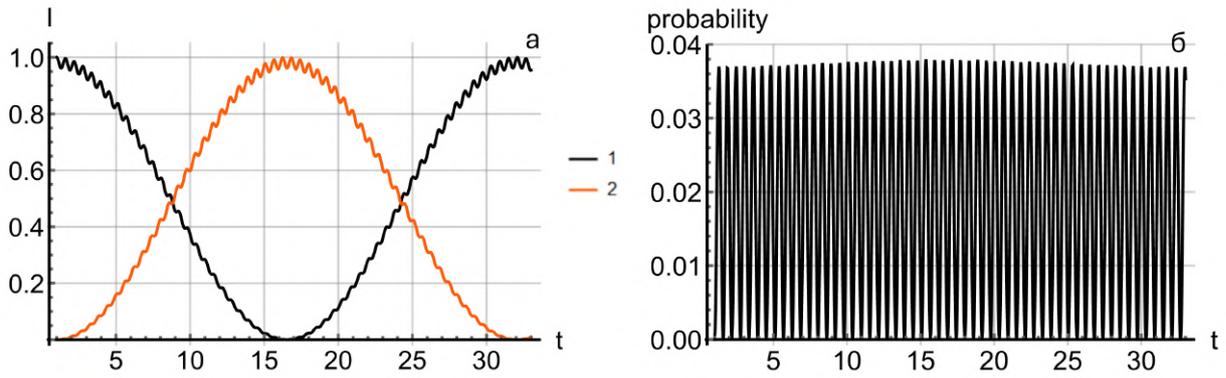


Рисунок 5.5 — (а) Число фотонов в полях и (б) вероятность обнаружить кубит в возбужденном состоянии в зависимости от времени при взаимодействии кубита с частотой $\omega = 11$ с полями $\omega_1 = 1.0$ и $\omega_2 = 1.005$. При $t = 0$ в первом поле один фотон, во втором поле вакуум.

всех фотонов из первого поля во второе (небольшой заселенностью кубита можно пренебречь). Т.к. в системе число возбуждений было 1 и оно сохраняется, это означает, что состояние первого поля было передано во второе.

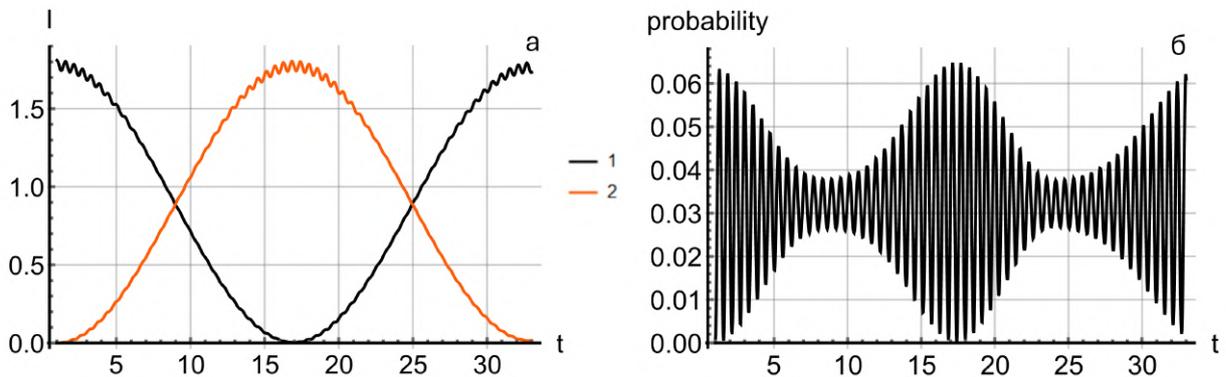


Рисунок 5.6 — (а) Число фотонов в полях и (б) вероятность обнаружить кубит в возбужденном состоянии в зависимости от времени при взаимодействии кубита с частотой $\omega = 11$ с полями $\omega_1 = 1.0$ и $\omega_2 = 1.005$. При $t = 0$ в первом поле когерентное состояние с $\alpha = \sqrt{2}$, во втором поле вакуум.

Теперь рассмотрим более сложный случай, когда на входе в первом поле когерентное состояние с небольшим числом фотонов (рис. 5.6). Принципиальных изменений в переходе фотонов между полями не обнаружено, а динамика заселенности состояний кубита поменялась. Однако, т.к. вероятность возбуждения кубита низкая, ее поведение не представляет большого интереса. А тот факт, что в момент $t = 16.5$ все фотоны оказались во втором поле (небольшой

заселенностью кубита можно пренебречь), приводит к гипотезе, что фотонная статистика была передана. Фактически кубит в данном случае играет роль слабой связи между осцилляторами.

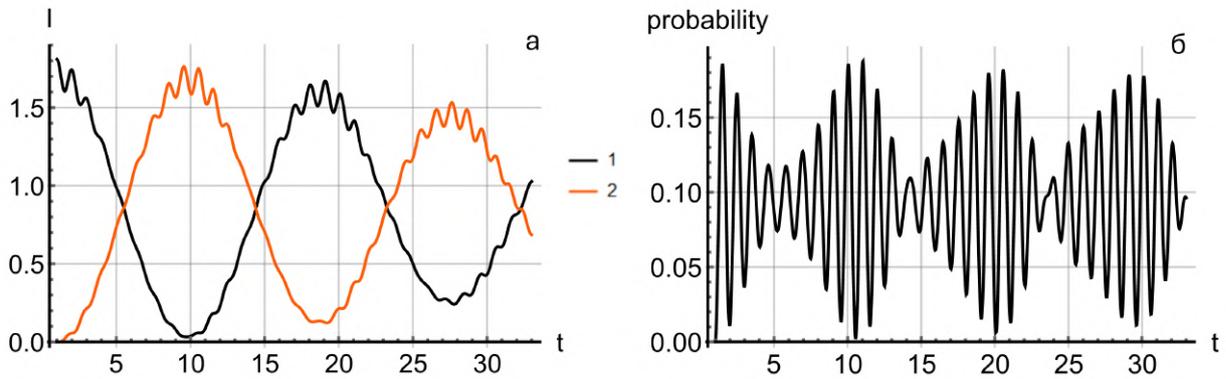


Рисунок 5.7 — (а) Число фотонов в модах поля и (б) вероятность обнаружить кубит в возбужденном состоянии в зависимости от времени при взаимодействии кубита с частотой $\omega = 11$ с полями $\omega_1 = 6.0$ и $\omega_2 = 6.005$. При $t = 0$ в первом поле когерентное состояние с $\alpha = \sqrt{2}$, во втором поле вакуум.

Для понимания влияния параметров системы, посмотрим, что случится при уменьшении Δ . На рис. 5.7 показана ситуация при $\Delta = 5$. Видно, что кубит стал сильнее возбуждаться, но все равно еще незначительно. При этом число фотонов уже не полностью переходит из одного поля в другое.

В следующем подразделе подробно обсудим передачу состояний между полями через слабую связь в виде кубита.

5.2.2 Передача состояния между модами с разной частотой

Рассмотрим эволюцию фотонной статистики, когда изначально в первом поле было когерентное состояние с $\alpha = \sqrt{2}$, а во втором - вакуум. На рис. 5.8а,в видно, как фотонная статистика передалась из первого поля (состояние в строке $n_2 = 0$) в во второе поле (состояние в столбце $n_1 = 0$). В промежуточном состоянии фотоны были в обоих полях 5.8б, в конце этой подсекции мы узнаем о чистоте такого состояния. Также отметим, что несмотря на передачу вероятностей, фазы поменялись. На рис. 5.8г появилась относительная

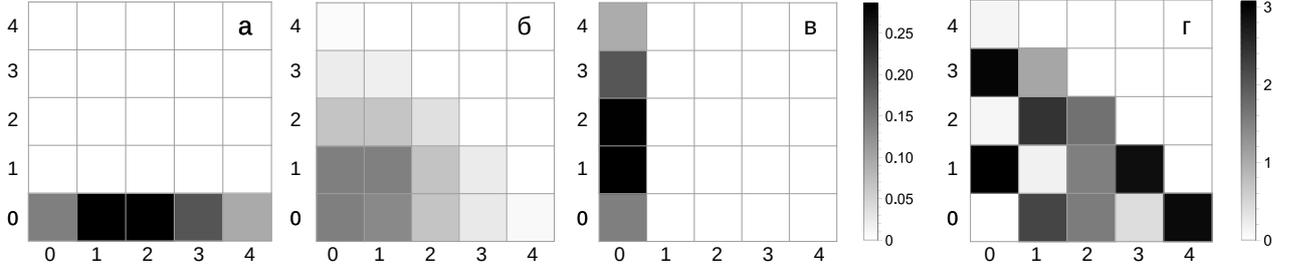


Рисунок 5.8 — Вероятности состояний (g, n_1, n_2) в (а) начальный момент времени, (б) в момент времени посередине цикла передачи, (в) в момент наилучшей передачи состояний, (г) фазы состояний в момент наилучшей передачи (в начальный момент времени они были равны 0). Параметры: кубита с частотой $\omega = 11$, поля - $\omega_1 = 1.0$ и $\omega_2 = 1.005$. При $t = 0$ в первом поле когерентное состояние с $\alpha = \sqrt{2}$, во втором поле вакуум.

фаза π между соседними состояниями (стоит смотреть только на первый столбец, т.к. вероятности остальных состояний близки к 0). Фактически параметр α превратился в $-\alpha$.

Разберемся, почему с математической точки зрения происходит передача состояния, но меняются фазы. Для этого перейдем в новые моды

$$b_1 = \frac{\Gamma_1 a_1 + \Gamma_2 a_2}{\Gamma}, b_2 = \frac{\Gamma_2 a_1 - \Gamma_1 a_2}{\Gamma}, \Gamma = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} \quad (5.23)$$

Легко показать, что когда $\omega_1 \approx \omega_2$, для амплитуды $B_{m_1 m_2}^{(g,e)}$ в новых модах $b_{1,2}$ представляют сумму функций вида $\cos(\Omega_{m_1} t/2)$ и $\sin(\Omega_{m_1} t/2)$ с некоторым независимыми от времени коэффициентами:

$$B_{m_1 m_2}^e(t) = -\frac{2i\Gamma\sqrt{m_1+1}}{\Omega_{m_1}} \beta_{m_1+1m_2} \sin\left(\frac{\Omega_{m_1} t}{2}\right) e^{i\Delta t/2}$$

$$B_{m_1+1m_2}^g(t) = \beta_{m_1+1m_2} \left(\cos\left(\frac{\Omega_{m_1} t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_{m_1}} \sin\left(\frac{\Omega_{m_1} t}{2}\right) \right) e^{-i\Delta t/2} \quad (5.24)$$

Здесь $\Omega_{m_1}^2 = \Delta^2 + 4\Gamma_{eff}^2(m_1 + 1)$, а $m_{1,2}$ число фотонов в модах $b_{1,2}$.

Если все фотоны перешли из первого поля во второе в то же состояние, все средние моменты операторы b_1 не должны меняться, т.к. оператор полностью симметричен относительно полей при $\Gamma_1 = \Gamma_2$. А средние моменты b_2 либо меняют знак, либо не меняются.

Получается, что коэффициенты $B_{m_1 m_2}^{(g,e)}$ в случае передачи состояния должны либо остаться такими же, либо поменять знак. Из (5.24) очевидно, что это

может произойти только если выполнено $\Omega_n t/2 = \pi N(n)$, где N - целое число зависящее от n , одновременно для всех заселенных полевых состояний. Из этого следует, что в момент передачи состояния t_0 должно выполняться

$$(\Omega_{n+1} - \Omega_n)t_0/2 \approx Z\pi, \quad (5.25)$$

где Z - целое число. Самый первый момент будет достигнут, когда $Z = 1$.

Точное выполнение данного соотношения для всех состояний невозможно. Однако в рассматриваемом режиме $\Delta \gg \Gamma_{eff}\sqrt{\langle n \rangle + 1}$, поэтому

$$(\Omega_{n+1} - \Omega_n) \approx 2\Gamma_{eff}^2/\Omega_n \quad (5.26)$$

Также Ω_n слабо зависит от n , и можно заменить $\Omega_n \approx \Omega_{\langle n \rangle}$.

Тогда из (5.25) получаем первый момент времени передачи состояния:

$$t_0 \approx \pi\Omega_{\langle n \rangle}/2g^2 \quad (5.27)$$

В этом случае

$$\Omega_n t/2 \approx \pi n_0 + \pi n, \quad (5.28)$$

где n_0 - целое число.

Из (5.24) легко увидеть, что $B_{0,m}^{g,e}(t_0) = (-1)^m B_{m,0}^{g,e}(0)$. Таким образом, удалось объяснить как эффект передачи фотонной статистики, так и появления разности фаз π между соседними состояниями.

Также отметим, что t_0 довольно слабо зависит от входного состояния - достаточно знать среднее число фотонов. Это позволяет заранее задать момент времени, в который нужно остановить взаимодействие, чтобы достичь передачи.

Также важно определить критерии хорошей передачи. Одной из количественных метрик может быть качество передачи, т.е. то насколько статистика переданного во вторую моду состояния совпадает с исходной статистикой в первой моде.

Пусть исходно все фотоны находятся в первом поле и состояние представляет суперпозицию фоковских состояний, без возбуждений второго поля или кубита:

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_{n_1} C_{g,n_1,0}(t=0) |gn_1 0\rangle \quad (5.29)$$

В общем случае эволюция состояния может быть представлена в виде:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{a,n_1,n_2} C_{a,n_1,n_2}(t) |an_1n_2\rangle \quad (5.30)$$

где индексы $a = g, e$ характеризуют состояние кубита.

Допустим мы хотим передать фотонную статистику из первого поля во второе. Тогда вероятность обнаружить k фотонов во втором поле в некоторый момент времени t :

$$|C_k^{red}(t)|^2 = \sum_{a,n_1} |C_{a,n_1,k}(t)|^2 \quad (5.31)$$

Если взаимодействие не остановить в нужный момент времени часть энергии останется в первом поле и полной передачи статистики не произойдет. Определим ошибку передачи как разницу между вероятностям обнаружить k фотонов в определенной момент времени t и вероятностью обнаружить k фотонов первом поле в исходный момент времени. Просуммируем модули ошибок для все k :

$$\sum_k Error_k(t) = \sum_k ||C_k^{red}(t)|^2 - |C_{g,k,0}(0)|^2| \quad (5.32)$$

Легко показать, что $\sum Error_k \leq 2$. Максимальная ошибка $\sum Error_k = 2$ достигается в случае, когда фотонная статистика совсем не совпадает - если был фотон в состоянии k , вероятность такого состояния во втором поле нулевая.

Поэтому можно определить метрику качества передачи как

$$quality(t) = 1 - \frac{\sum Error_k(t)}{2}, \quad (5.33)$$

где значение равное 1 означает идеальную передачу фотонной статистики, а 0 означает, что между фотонными статистиками отсутствуют пересечения.

Другой важной метрикой является чистота состояния во втором поле:

$$purity(t) = Tr(\rho_{red}^2(t)) \quad (5.34)$$

где $\rho_{red}^{i,j} = \sum_{a,n_1} C_{a,n_1,i} C_{a,n_1,j}^*$

Если чистота близка к 1, состояние во втором поле можно охарактеризовать своей волновой функцией, что кажется необходимым условием для передачи фотонной статистики с высоким качеством. Далее рассмотрим, каких значений этих метрик можно достичь при передаче различных входных состояний.

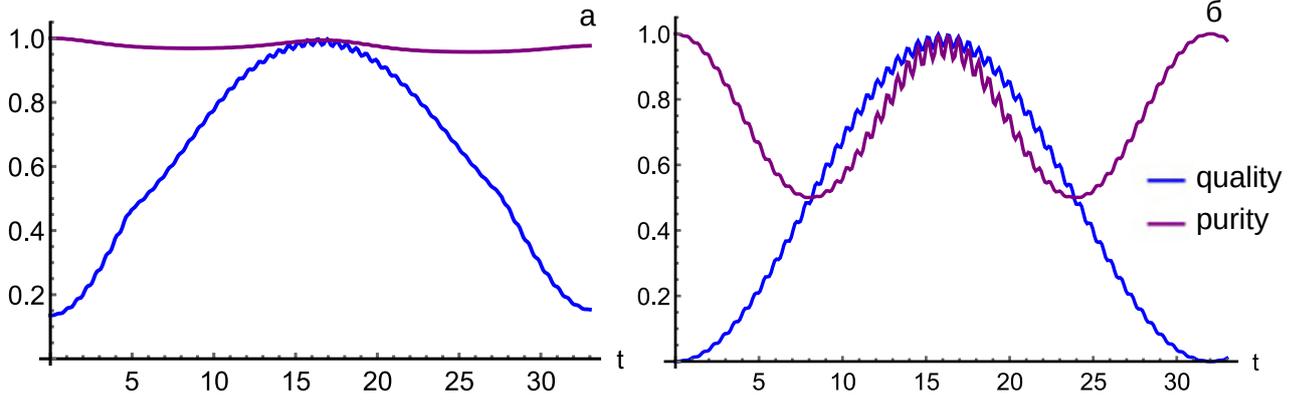


Рисунок 5.9 — Чистота и качество передачи состояния в зависимости от времени для начального состояния (а) когерентного с $\alpha = \sqrt{2}$ (б) фокса 1. Во втором поле изначально вакуум. Параметры: кубит с частотой $\omega = 11$, поля - $\omega_1 = 1.0$ и $\omega_2 = 1.005$.

Передача когерентного состояния происходит с высокой чистотой и качеством (рис. 5.9а). При этом чистота состояния остается почти все время близкой к 1, а качество достигается в момент t_0 .

Похожими свойствами обладает и передача фоксовского состояния (рис. 5.9б). Чистота высокая только в момент передачи, качество также достигает 1. Минимум чистоты достигается в $t_0/2$. Это говорит о сильной перепутанности промежуточного состояния. Отметим, что моменты времени, где достигается максимум качества очень близки для обоих начальных состояний.

5.2.3 Генерация новых состояний

В процессе взаимодействия кубита с полями, могут появляться новые состояния в первом и втором поле, в этой подсекции будет рассмотрено несколько интересных случаев.

Начнем с анализа факта, отмеченного в предыдущей подсекции, что при передаче когерентного состояния чистота всегда равна 1 (рис. 5.9а - фиолетовая кривая). Это означает, что между полевыми модами нет перепутанности и их состояния можно охарактеризовать собственными волновыми функциями. Оказывается, что в любой момент времени моды находятся в когерентных состояниях с параметрами α_1 и α_2 , зависящими от времени. Зависимость от

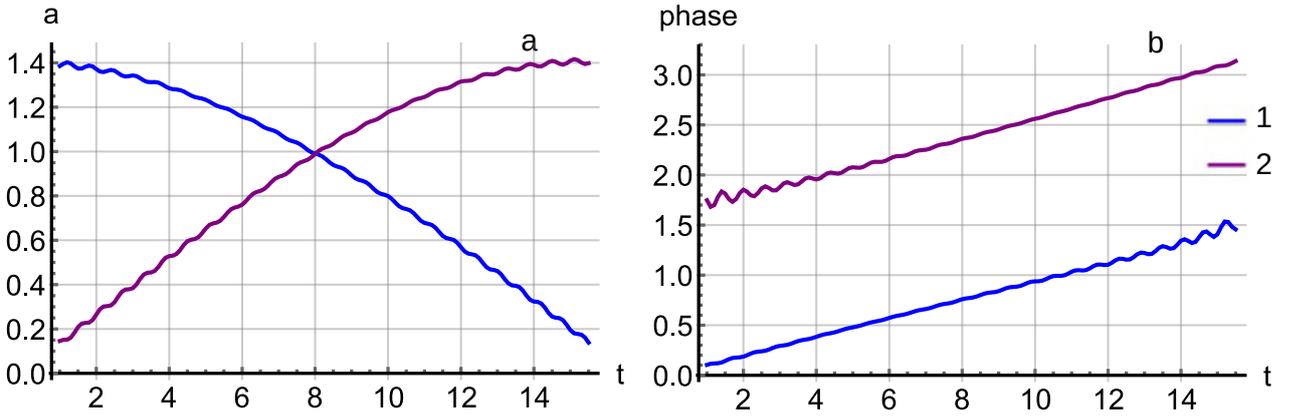


Рисунок 5.10 — (а) модуль и (б) фаза параметров $\alpha_{1,2}$ когерентных состояний в 1 и 2 полевых модах соответственно.

абсолютных значений и фаз параметров α_1 и α_2 представлены на рис. 5.10(а,б). При этом всегда выполнено $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 \approx const$, если пренебречь возбуждением кубита.

В процессе взаимодействия с кубитом происходит переход энергии из одного поля в другое, таким образом среднее число фотонов уменьшается в первом поле и увеличивается во втором. Получается, что в рассматриваемом режиме кубит похож на светоделитель микроволновых сигналов, с зависящими от времени вероятностями пропускания и отражения. Т.е. настройка делителя производится моментом времени, когда необходимо остановить взаимодействие.

Отметим, что хотя фазы когерентных состояний в полях меняются (рис. 5.10б), между ними остается постоянная разница в $\pi/2$. Для примера запишем состояния системы в момент времени посередине между начальным моментом и моментом лучшей передачи:

$$|\Psi_{mid}\rangle \approx \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \right\rangle_1 \times \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} e^{i3\pi/4} \right\rangle_2 \quad (5.35)$$

Так как состояние является прямым произведением отдельных состояний в каждом поле, возможно независимо производить измерения полей в модах. Таким образом, за счет взаимодействия с кубитом возможно генерировать различные когерентные состояния в обеих модах. Сильно нерезонансное взаимодействие с кубитом приводит к его слабому возбуждению и делает его устройством для передачи энергии между полями.

Другим интересным начальным состоянием в первом поле является фоковское состояние. Если остановить взаимодействие посередине между началом и моментом лучшей передачи, оказывается можно генерировать $N00N$ состояния.

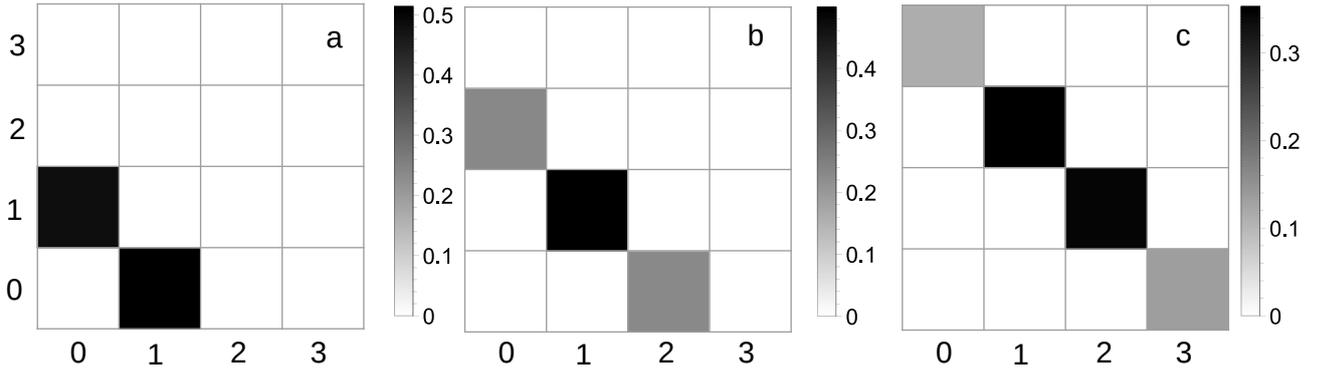


Рисунок 5.11 — Состояния в промежуточный момент времени, равный половине от времени лучшей передачи для разных начальных состояний в первом поле:

(а) фок 1, (б) фок 2, (в) фок 3

Такие состояния характеризуются сильной перепутанностью и представляют собой состояние, когда в одной моде N фотонов, а в другой вакуум, и наоборот.

$$|N00N\rangle = (|N0\rangle + |0N\rangle)/\sqrt{2} \quad (5.36)$$

При этом может быть относительная фаза в комбинации.

$N00N$ -состояния важны для многих приложений в области квантовой информации, поэтому их генерация представляет особый экспериментальный интерес. На рис. 5.11 показаны состояния, которые можно получить в промежуточный момент времени для различных состояний в первом поле в начальный момент. Если в начальный момент заселено первое фоковское состояние в первой моде, то можем получить $(|10\rangle + i|01\rangle)/\sqrt{2}$ где в отличие от стандартного $NOON$ -состояния есть относительная фаза в $\pi/2$.

Если изначально было заселено второе фоковское состояние, можно получить $(|2\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle)/2 + |1\rangle|1\rangle/\sqrt{2}$. Данное состояние уже не является $NOON$ в стандартном определении, т.к. соержжит вклад состояния $|1\rangle|1\rangle$.

В случае изначально трехфотонного состояния, получится еще более богатая суперпозиция: $\gamma(|3\rangle|0\rangle + |0\rangle|3\rangle) + i\beta(|2\rangle|1\rangle + |1\rangle|2\rangle)$. Само состояние показано на (рис. 5.11с).

Отметим, что указанные состояния генерируются в момент, когда чистота состояния системы минимальна.

На рис. 5.12 также представлена эволюция отдельных состояний, которые можно получить из определенного фоковского состояния. Например, для 2-го фоковского состояния возможные состояния - $|2\rangle|0\rangle, |0\rangle|2\rangle, |1\rangle|1\rangle$, если считаем, что заселением кубита можно пренебречь. Для 3-го фоковского состояния

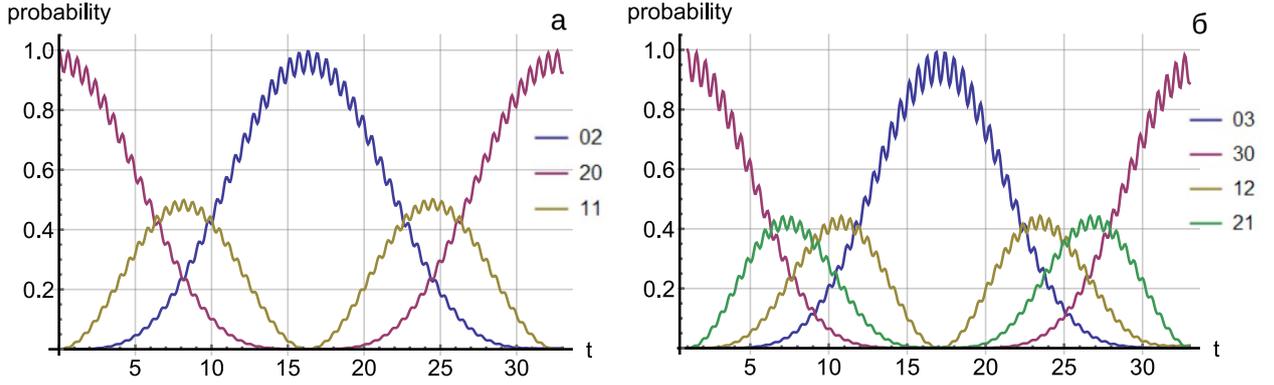


Рисунок 5.12 — Зависимость вероятности отдельных полевых состояний от времени для разных начальных фоковских состояний (а) $n = 2$, (б) $n = 3$.

Подписями указаны числа n_1, n_2 характеризующие состояние.

суперпозиции состояний $|3\rangle|0\rangle, |2\rangle|1\rangle, |1\rangle|2\rangle, |3\rangle|0\rangle$. Как видно из графиков эволюции амплитуд вероятностей, можно сгенерировать множество запутанных состояний.

5.2.4 Идея фазовых измерений

Покажем, что рассматриваемая система может использоваться для фазовых измерений. Допустим мы хотим узнать разность фаз φ начального состояния первого поля ω_1 между соседними фоковскими состояниями $|n-1\rangle$ и $|n\rangle$:

$$|\psi\rangle = (|\gamma\rangle|n-1\rangle + |\beta|e^{i\varphi}|n\rangle)|0\rangle \left(\frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.37)$$

Очевидно, что в зависимости от этой относительной фазы φ взаимодействие с кубитом будет происходить по-разному. Это можно увидеть с помощью измеримых величин - например, числа фотонов в полевых модах.

Безусловно зависимость есть даже при взаимодействии с одним полем. На рис. 5.13а видно, что среднее число фотонов в полях сильно зависит от начальной относительной фазы. Однако из-за быстрых осцилляций будет довольно сложно различить состояния с разной начальной фазой, т.к. потребуется точно попасть в нужный момент времени. При небольшой ошибке в моменте измерения можно получить очень большую ошибку в определении относительной фазы.

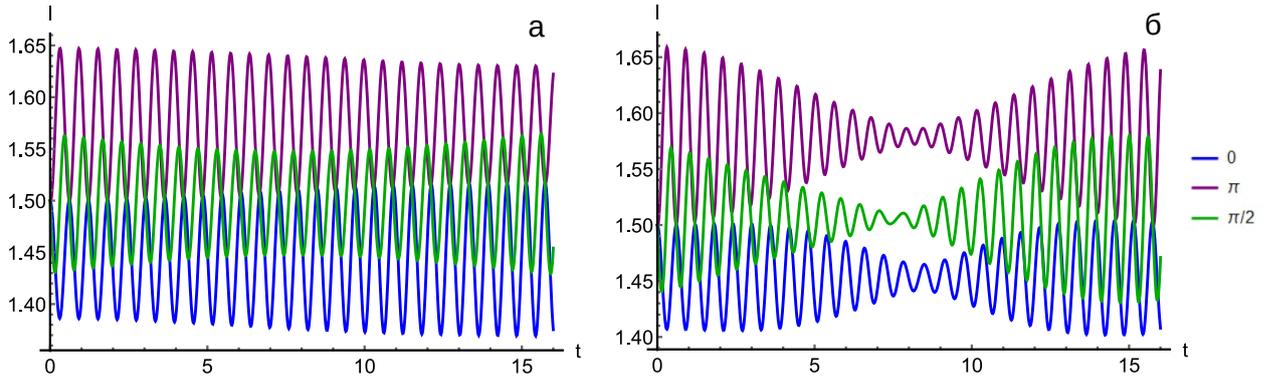


Рисунок 5.13 — Суммарное число фотонов $I = \langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle$ в модах в зависимости от времени для начального состояния (5.37) при $\beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n = 2$. Цветами обозначены различные начальные относительные фазы φ . (а) Взаимодействие происходит с одним полем $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 0$, (б) взаимодействие происходит с двумя полевыми модами $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

При взаимодействии с 2-мя полями ситуация существенно меняется - появляется некоторый промежуток времени, когда число фотонов в полях мало меняется. На рис. 5.13 это промежуток $7 < t < 9$, при этом сам промежуток не зависит от фазы. На рисунке видны, что сигналы при разных относительных фазах становятся легко различимы. С экспериментальной точки зрения такие измерения провести значительно проще.

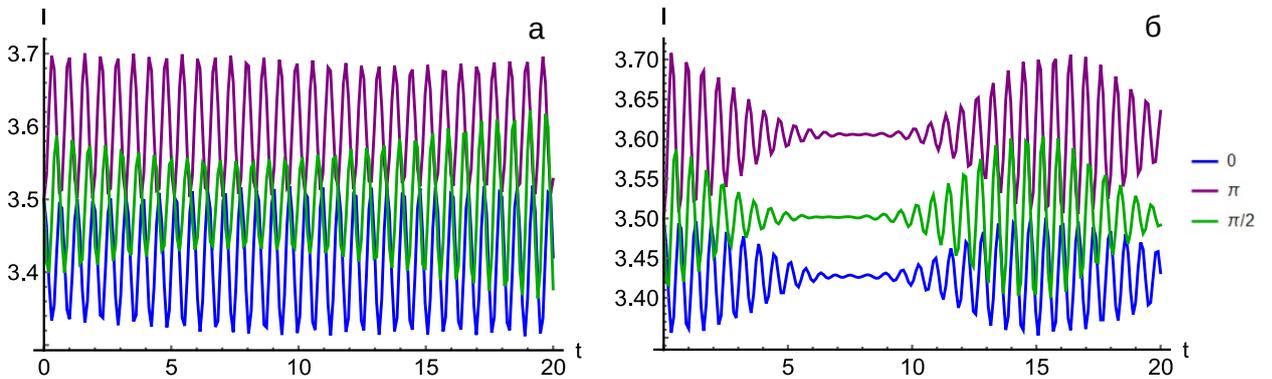


Рисунок 5.14 — Суммарное число фотонов $I = \langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle$ в модах в зависимости от времени для начального состояния (5.37) при $\beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n = 4$. Цветами обозначены различные начальные относительные фазы φ . (а) Взаимодействие происходит с одним полем $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 0$, (б) взаимодействие происходит с двумя полевыми модами $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Для других фотонных состояний эффект также сохраняется. Вспомним, что существует инвариант числа возбуждений, поэтому возможно мерить толь-

ко фазу между соседними фотонными состояниями, т.к. выбирая состояние кубита, можно добиться взаимодействия $|g, n, 0\rangle$ и $|e, n - 1, 0\rangle$. При этом наличие состояний с более низким и более высоким числом возбуждений (число фотонов $n + 1$ и более или $n - 2$ и менее) не уберет эффект, но уменьшит чувствительность, т.к. измеряем общий сигнал, а фаза влияет лишь на часть, формируемую состояниями $|g, n, 0\rangle$ и $|e, n - 1, 0\rangle$. Рассмотрим пример для большего $n = 4$. На рис. 5.14 видно, что суммарный сигнал стал больше - в среднем 3.5 фотона. При взаимодействии с одним полем изменений нет (рис. 5.14а). А при взаимодействии с двумя полями промежуток времени со стабилизацией сигнала увеличивается (рис. 5.14б) - теперь хороший диапазон $5 < t < 10$, он стал в 2.5 раза больше, что еще сильнее упрощает измерения.

Также заметим, что предложенный метод не предполагает сложных измерений фотонной статистики или вероятностей отдельных состояний, а требует лишь измерения суммарного сигнала в полях, которые можно измерить экспериментально с высокой точностью. Таким образом, предлагаемая схема позволяет проводить чувствительное измерение относительной фазы во входном состоянии между соседними фоковскими состояниями.

5.2.5 Выводы

Есть режимы сильного и слабого взаимодействия. В режиме сильного взаимодействия можно управлять кубитом с помощью полей.

В режиме слабого взаимодействия возможна передача фотонной статистики между полями с высоким качеством. Также можно генерировать новые состояния, например делить когерентное или создавать NOON состояния.

Взаимодействие кубита с 2-мя полевыми модами упрощает фазовые измерения по сравнению со случаем взаимодействия с одномодовым полем.

5.3 Спектр излучения в резонансном режиме

Последний вопросом, который стоит затронуть - спектр излучения при взаимодействии двух мод квантового поля с кубитом.

5.3.1 Спектр в полуклассическом приближении при взаимодействии с двумя полями

Будем рассматривать режим, близкий к резонансному. Пусть частоты полей $\omega_{1,2} = \omega \pm \Delta\omega$, при этом $\Delta\omega \ll \Gamma_{eff}$.

Для расчета спектра излучения будем использовать подход через дипольный момент.

$$\langle \sigma^-(t) \rangle = \sum C_{g,n,n}(t) C_{e,n,n}^*(t) \quad (5.38)$$

Отметим, что такой подход является полуклассическим. Несмотря на квантовое решение задачи взаимодействия подход работает, только если фотонная статистика не имеет резких скачков в зависимости от n . Как один из контрпримеров - сжатое состояние, для него в определенных случаях выражение (5.38) может обратиться в 0.

Для расчетов спектра будем использовать численное моделирование. Для избежания проблем с бесконечно узкими и высокими пиками можно добавить небольшой распад в систему. Далее будут использоваться параметры: частота кубита $\omega = 10$ у.е, отстройки полей $\Delta\omega = 0.2$ у.е, т.е. $\omega_1 = 9.8$ у.е, $\omega_2 = 10.2$ у.е. Изучим зависимость спектров от параметров взаимодействия $\Gamma_{1,2}$ и начального состояния.

На рис. 5.15 показано взаимодействие поля с одним фотоном с кубитом. Видны пики, отстроенные примерно на $\Delta\omega$ от центральной частоты. Атом берётся в состоянии $(|g\rangle + |e\rangle) / \sqrt{2}$, так как иначе полуклассический способ расчета через $\langle \sigma^- \rangle$ даст 0. В целом, само распределение заселенности между возбужденным и основным состоянием кубита слабо влияет на вид спектра, а только на его интенсивность. Например, если взять суперпозицию $\sqrt{0.05} |g\rangle + \sqrt{0.95} |e\rangle$ принципиально изменится только масштаб.

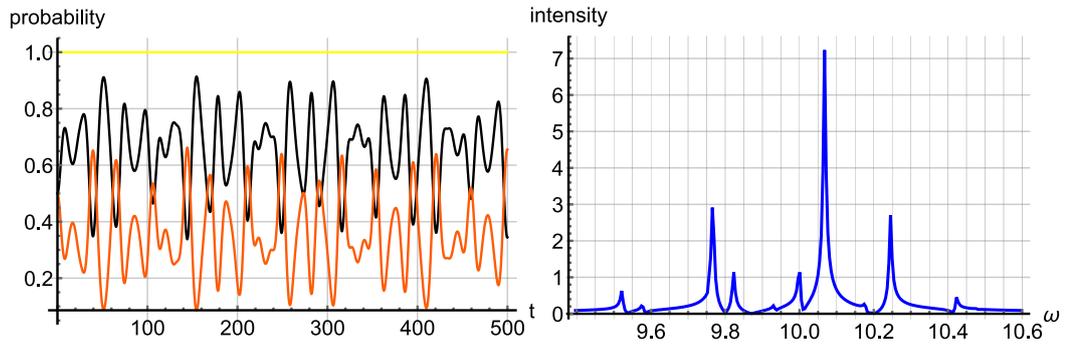


Рисунок 5.15 — (а) заселенность кубита, (б) спектр излучения, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.1$. В начальный момент времени состояние $|1,0\rangle$ в поле, кубит в состоянии $(|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$

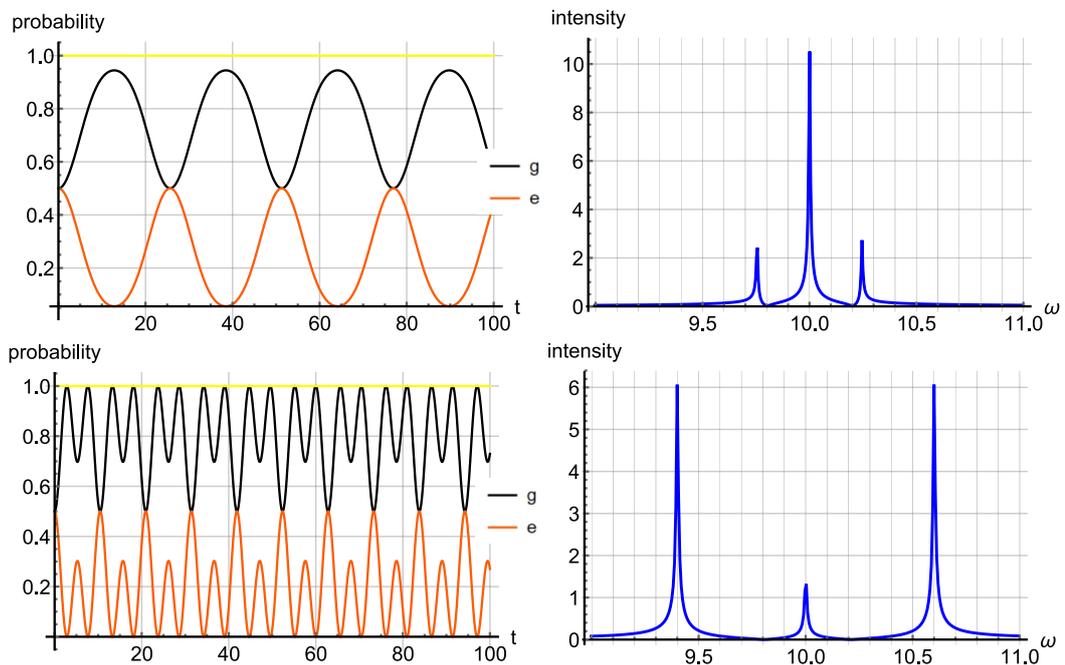


Рисунок 5.16 — (а,в) заселенность кубита, (б, г) спектр излучения, при параметрах (а,б) $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.1$, (в,г) $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.4$. В начальный момент времени в полях вакуум, кубит находится в состоянии $(|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$

Более простым случаем является ситуация, когда в полях вакуум, а кубит в суперпозиции состояний $(|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$. В результате взаимодействия в модах появятся фотоны и можно получить спектр излучения. В этом случае уравнения для амплитуд состояний могут быть решены аналитически.

$$\begin{aligned}
\frac{dC_{g10}}{dt} &= -i \left(\frac{\omega}{2} + \Delta\omega \right) C_{g10} - i\Gamma_1 C_{e00} \\
\frac{dC_{g01}}{dt} &= -i \left(\frac{\omega}{2} + \Delta\omega \right) C_{g01} - i\Gamma_2 C_{e00} \\
\frac{dC_{e00}}{dt} &= -i\frac{\omega}{2} C_{e00} - i\Gamma_1 C_{g10} - i\Gamma_2 C_{g01} \\
\frac{dC_{g00}}{dt} &= 0
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Можно сделать замену $\tilde{C} = C e^{-i\omega t/2}$ и искать решение в виде $\tilde{C}(t) = \sum A_i e^{i\lambda t}$.

Тогда получатся следующие уравнения для λ :

$$\lambda^3 - (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Delta\omega^2)\lambda + \Delta\omega(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2) = 0 \tag{5.40}$$

Если силы взаимодействия полей с кубитом равны $\Gamma_1 = \Gamma_2$, тогда решения (5.40): $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Delta\omega^2}$. На рис. 5.16, полученном при численном расчете как раз видно пики, отстроенные от центральной частоты на $0, \pm 0.36$ для случая $g_1 = g_2 = 0.1, \Delta\omega = 0.2$ и $0, \pm 0.6$ для случая $g_1 = g_2 = 0.4, \Delta\omega = 0.2$.

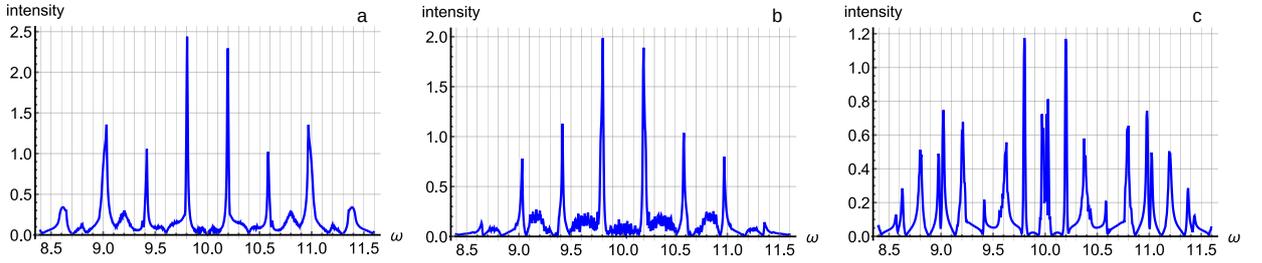


Рисунок 5.17 — Спектры излучения при силах взаимодействия, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.1$, $\Delta\omega = 0.2$. кубит в основном состоянии, оба поля в (а) когерентном состоянии с числом фотонов, равным 9, (б) состоянии с равновероятным заселением фоковских состояний с номерами 0-10, (с) состоянии с равновероятным заселением фоковских состояний с номерами в интервале 8-10.

Представленный на рис. 5.17а спектр, полученный при взаимодействии кубита с когерентными состояниями полевых мод, похож на случай взаимодействия с классическим полем - видны пики на $(2n + 1)\Delta\omega$ от центральной частоты, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Если поменять состояние на суперпозицию фоковских состояний от 0 до 10 с одинаковыми вероятностями, принципиальных изменений в форме спектра не будет рис. 5.17б. Однако похожесть на классический случай сохраняется только при медленном изменении фотонной

статистики. Например, если взять состояние $(|8\rangle + |9\rangle + |10\rangle) / \sqrt{3}$, на рис. 5.17с вид спектра уже принципиально изменяется, появляются побочные пики.

5.3.2 Сравнение со случаем взаимодействия с классическим полем

Динамику напряженности двухмодового классического поля с одинаковыми амплитудами можно записать как:

$$\varepsilon(t) = E_0 \cos((\omega + \Delta\omega)t) + E_0 \cos((\omega - \Delta\omega)t) = 2E_0 \cos \omega t \cos \Delta\omega t \quad (5.41)$$

Гамильтониан в случае взаимодействия классического поля с кубитом имеет следующий вид:

$$H = H_{free} - (d \cdot \varepsilon(t)), \quad (5.42)$$

где H_{free} - свободный Гамильтониан кубита, а d - дипольный момент кубита в проекции на поле.

Волновую функцию можно представить в виде:

$$|\psi\rangle = C_g(t) |g\rangle + C_e(t) |e\rangle \quad (5.43)$$

Тогда уравнения для амплитуд вероятностей состояний, полученные из нестационарного уравнения Шредингера, будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dC_g}{dt} = -i\omega_g C_g + id_{ge}/\hbar \cdot \varepsilon(t) C_e \\ \frac{dC_e}{dt} = -i\omega_e C_e + id_{eg}/\hbar \cdot \varepsilon(t) C_g \end{cases} \quad (5.44)$$

Сделав преобразования

$$C_{g,e} = c_{g,e} e^{-i\omega_{g,e}t}, \quad \Omega_R = 2|d_{ge}|E_0/\hbar, \quad (5.45)$$

получим

$$\begin{cases} \frac{dc_g}{dt} = i\frac{\Omega_R}{2} \cos(\Delta\omega t) \cdot c_e \\ \frac{dc_e}{dt} = i\frac{\Omega_R}{2} \cos(\Delta\omega t) \cdot c_g \end{cases} \quad (5.46)$$

Тогда решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} c_g &= \frac{1}{2} \left(A_1 e^{i\frac{\Omega_R}{2} \cos(\Delta\omega t)} + A_2 e^{-i\frac{\Omega_R}{2} \cos(\Delta\omega t)} \right) \\ c_e &= \frac{1}{2} \left(A_1 e^{i\frac{\Omega_R}{2} \cos(\Delta\omega t)} - A_2 e^{-i\frac{\Omega_R}{2} \cos(\Delta\omega t)} \right), \end{aligned} \quad (5.47)$$

где $z = \Omega_R/\Delta\omega$

Сделав преобразования, можно рассчитать дипольный момент:

$$dip(t) \sim \sum_n J_{2n+1}(z) e^{in\Delta\omega t} e^{i\omega_0 t} \quad (5.48)$$

А спектр, как Фурье преобразование будет иметь вид:

$$spectr(\omega) \sim \sum_n J_{2n+1}(z) \delta(\omega - (2n+1)\Delta\omega) \quad (5.49)$$

Для сравнения с квантовым поле аналогичный параметр должен быть равен $z = \frac{4g\sqrt{\langle N \rangle}}{\Delta\omega}$, где $\langle N \rangle$ - среднее число фотонов в поле.

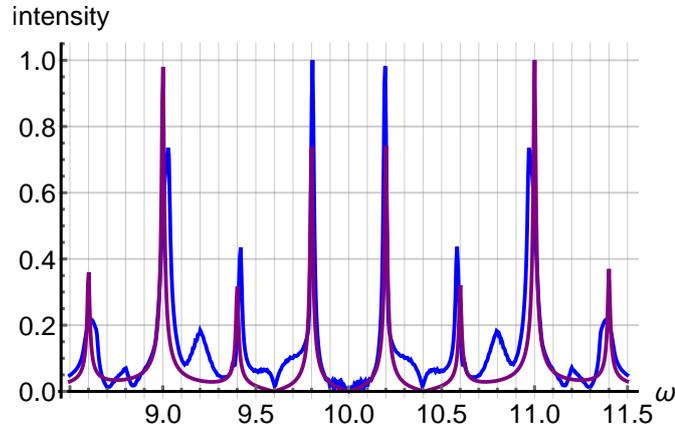


Рисунок 5.18 — Квантовый (синий) и классический спектр, рассчитанный по формуле (5.50) (фиолетовый), при среднем числе фотонов в полях, равном 9,

$$g_1 = g_2 = 0.1, \Delta\omega = 0.2.$$

Для сравнения результатов введем небольшой фактор распада $e^{-\gamma t}$ в систему для дипольного момента (5.48), чтобы уйти от дельта-функций. Тогда выражение спектра запишется в виде:

$$spectr(\omega) \sim \left| \sum_n (-1)^{2n+1} J_{2n+1}(z) \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + (\omega - \omega_0 - n\Delta\omega)^2}} \right| \quad (5.50)$$

Данный спектр изображен фиолетовой линией на рис. 5.18. Видны пики на частотах $(2n+1)\Delta\omega$ от центральной. Некоторые отличия квантового случая (синяя кривая) от классического связаны с все еще малым числом фотонов, что не позволяет считать рассматриваемое когерентное состояние классическим.

Также сравним динамику населенности кубита в классическом и квантовом случае. Если изначально кубит в основном состоянии, можно получить в

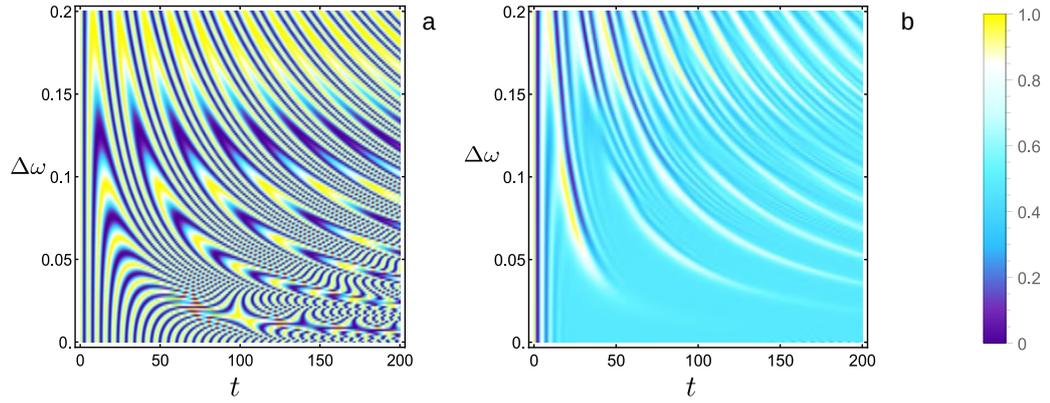


Рисунок 5.19 — Частотно-временные распределения для заселенности кубита, при одинаковой силе взаимодействия полей с кубитом $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.1$, в полях когерентное состояние со средним значением в 9 фотонов. (а) Классическое решение, рассчитанное по формуле (5.51), (б) квантовое решение, получаемое численно

случае классического поля из (5.47):

$$\begin{aligned} |C_g|^2 &= \cos^2\left(\frac{z}{2} \sin(\Delta\omega t)\right) \\ |C_e|^2 &= \sin^2\left(\frac{z}{2} \sin(\Delta\omega t)\right) \end{aligned} \quad (5.51)$$

На рис. 5.19 видно существенное различие в частотно-временных распределениях в случае квантового и классического поля, особенно при маленькой отстройке $\Delta\omega$. Поэтому совпадение спектров при таком малом числе фотонов является неочевидным результатом.

5.3.3 Выводы

Таким образом, изучен спектр излучения при взаимодействии двухмодового квантового поля с кубитом. Классический результат получается только в случае медленно меняющейся фотонной статистики.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Проведен анализ пространственных корреляций фотонов в дальней зоне в вырожденном режиме параметрического рассеяния в нелинейном интерферометре. Найдены профили мод Шмидта и описаны их характерные свойства. Разработаны методы управления модовым составом с помощью изменения параметров интерферометра и параметрического усиления. Показано, что число азимутальных мод сильно зависит от фазы интерферометра, в режиме сильного параметрического усиления их число может варьироваться от 1 до 10. Объяснено удвоение числа радиальных мод при увеличении расстояния между кристаллами.
2. Предложены методы выделения отдельных азимутальных каналов с помощью диафрагмы и маски, основанные на их различающей пространственной локализации в ближней зоне. Удалось добиться веса первого канала, вдвое превышающего вес нулевого, при этом сохранить корреляции между фотонами, обеспечив $NRF < 0.01$.
3. Подход мод Шмидта развит на случай сильно невырожденного процесса параметрического рассеяния. Показано, что при использовании одного кристалла свет генерируется в основном в одной радиальной моде и найден ее аналитический вид. Разработаны способы сужения терагерцового сигнала с помощью подсветки.
4. Объяснен вид частотно-угловых спектров при сильном параметрическом усилении и на их основе предложен метод по измерению дисперсии среды в ТГц диапазоне.
5. Рассмотрен процесс, когда сигнал генерируется в одном нелинейном кристалле, а затем усиливается во втором. Предложены методы восстановления эффективных весов мод из экспериментально измеримых ковариаций для вырожденного режима параметрического рассеяния. Получено хорошее совпадение теории и эксперимента. Показана слабая зависимость весов от фазы между квантовым светом и накачкой на входе во второй кристалл. Рассчитано пространственное распределение

- многомодового сжатия. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.
6. Исследовано многомодовое усиление в нелинейном кристалле. Найдены режимы, в которых может происходить фазово-чувствительное усиление и фазово-нечувствительное и разработаны методы, позволяющие максимизировать видность сигнала.
 7. Разработан подход для описания взаимодействия двухмодового квантового поля с кубитом. Изучены различные режимы взаимодействия, характеризующиеся относительной отстройкой кубита от полей, полей между собой и параметром взаимодействия. В режиме слабой связи получен эффект передачи фотонной статистики между модами квантового поля.
 8. Предложены методы генерации новых состояний на основе взаимодействия двухмодового квантового поля с кубитом. Показана возможность создавать NOON состояния из фоковских на входе, а также использовать кубит как настраиваемый светоделитель когерентного состояния.
 9. Продемонстрировано преимущество использования двухмодового квантового поля при проведении фазовых измерений по сравнению с взаимодействием кубита с одним полем.
 10. Показано, что спектр излучения при взаимодействии квантовых полей с кубитом похож на классический только в случае медленно меняющейся фотонной статистики.

Таким образом, теоретически в подходе мод Шмидта изучены возможности управления свойствами неклассического света, генерируемого в нелинейных кристаллах в вырожденном и сильно невырожденном режим, проведен расчет измеряемых величин и сравнение с экспериментальными данными, а также рассмотрено взаимодействие квантового поля с кубитом.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Тихоновой О. В. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Чехову М. В. и Китаеву Г. Х. за проведение экспериментов, с которыми можно сравнивать теоретические результаты, Клёнова Н. В. за обсуждение результатов по взаимодействию квантового света с кубитами.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых научных журналах,
удовлетворяющих Положению о присуждении учёных степеней в
МГУ имени М.В. Ломоносова:

- A1. **R.V. Zakharov**, O.V. Tikhonova. *Managing the spatial properties and photon correlations in squeezed non-classical twisted light* // Laser Physics Letters. — 2018. — Vol. 15, no. 5. — P. 055205. — **JIF = 1.7 (WoS)**.
Общий объём статьи = 0,62 п.л.; личный вклад = 0,3 п.л.
- A2. **Р.В. Захаров**, О.В. Тихонова. *Пространственные свойства и корреляции фотонов в неклассических сжатых состояниях света, несущего орбитальный момент* // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2018. — Т. 82, № 11. — С. 1525–1530. — **IF = 0.9 (РИНЦ)**.
Общий объём статьи = 0,37 п.л.; личный вклад = 0,2 п.л.
— Переводная версия: **R.V. Zakharov**, O.V. Tikhonova. *Photon Spatial Properties and Correlations in Nonclassical Squeezed States of Light Carrying the Orbital Moment* // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics — 2018. — Vol. 52, No. 11. — P. 1388–1393. — **SJR = 0.21 (Scopus)**.
Общий объём статьи = 0,37 п.л.; личный вклад = 0,2 п.л.
- A3. **R.V. Zakharov**, O.V. Tikhonova. *Spatial features and photon correlations of squeezed light in strongly non-degenerate parametric down conversion* // Laser Physics. — 2019. — Vol. 29, no. 12. — P. 124010. — **JIF = 1.2 (WoS)**.
Общий объём статьи = 0,4 п.л.; личный вклад = 0,2 п.л.
- A4. G. Frascella,, **R.V. Zakharov**, O.V. Tikhonova, M.V. Chekhova . *Experimental reconstruction of spatial Schmidt modes for a wide-field SU(1,1) interferometer* // Laser Physics. — 2019. — Vol. 29, no. 12. — P. 124013. — **JIF = 1.2 (WoS)**.
Общий объём статьи = 0,5 п.л.; личный вклад = 0,2 п.л.
- A5. G. Frascella,, E.E. Mikhailov, N. Takanashi, **R.V. Zakharov**, O.V. Tikhonova, M.V. Chekhova. *Wide-field SU(1,1) interferometer* //

- Optica. — 2019. — Vol. 6, no. 9. — P. 1233—1236. — **JIF** = **8.4 (WoS)**.
Общий объём статьи = 0,25 п.л.; личный вклад = 0,1 п.л.
- A6. К.А. Kuznetsov, Е.И. Malkova, **R.V. Zakharov**, О.В. Tikhonova, G.Kh. Galiya. *Nonlinear interference in the strongly nondegenerate regime and Schmidt mode analysis* // Physical Review A. — 2020. — Vol. 101, no. 5. — P. 053843. — **JIF** = **2.6 (WoS)**. Общий объём статьи = 0,4 п.л.; личный вклад = 0,1 п.л.
- A7. G. Frascella, **R.V. Zakharov**, О.В. Tikhonova, М.В. Chekhova. *Multimode optical parametric amplification in the phase-sensitive regime* // Optics Letters. — 2021. — Vol. 46, no. 10. — P. 2364—2367. — **JIF** = **3.1 (WoS)**.
Общий объём статьи = 0,3 п.л.; личный вклад = 0,1 п.л.
- A8. **Р.В. Захаров**, О.В. Тихонова. *Корреляции фотонов и свойства неклассических оптических полей в состоянии сжатого вакуума* // Успехи физических наук. — 2023. — Т. 193, № 04. — С. 406—436. — **IF** = **3.1 (РИНЦ)**. Общий объём статьи = 2,50 п.л.; личный вклад = 0,50 п.л. —
Переводная версия: **R.V. Zakharov**, О.В. Tikhonova. *Photon correlations and features of nonclassical optical fields in a squeezed vacuum state* // Physics-Uspekhi. — 2023. — Vol. 66, No. 04. — P. 381–409. — **JIF** = **3.3 (WoS)**. Общий объём статьи = 2,50 п.л.; личный вклад = 0,50 п.л.
- A9. **R.V. Zakharov**, О.В. Tikhonova, N.V. Klenov, I.I. Soloviev, V.N. Antonov, D.S. Yakovlev. *Solid-State Qubit as an On-Chip Controller for Non-Classical Field States* // Advanced Quantum Technologies. — 2024. — Vol. 7, no. 10. — P. 2400141. — **JIF** = **4.4 (WoS)**. Общий объём статьи = 0,75 п.л.; личный вклад = 0,4 п.л.

Список литературы

1. *Bogdanov, Y. I.* Statistical Estimation of the Efficiency of Quantum State Tomography Protocols / Y. I. Bogdanov, G. Brida, M. Genovese et. al. // Physical Review Letters. — 2010. — Vol. 105, no. 1. — P. 1200.
2. *Bogdanov, Y. I.* The efficiency of quantum tomography based on photon detection / Y. I. Bogdanov, S. P. Kulik // Laser Physics Letters. — 2013. — Vol. 10, no. 12. — P. 125202.
3. *Kravtsov, K. S.* Experimental adaptive Bayesian tomography / K. S. Kravtsov, S. S. Straupe, I. V. Radchenko et. al. // Physical Review A. — 2013. — Т. 87, № 6.
4. *Pan, J.-W.* Multiphoton entanglement and interferometry / J.-W. Pan, Z.-B. Chen, C. Lu et. al. // Reviews of Modern Physics. — 2012. — Май. — Т. 84, № 2. — С. 777–838.
5. *Bondani, M.* Sub-shot-noise photon-number correlation in a mesoscopic twin beam of light / M. Bondani, A. Allevi, G. Zambra et. al. // Physical Review A. — 2007. — Июль. — Т. 76, № 1.
6. *Iskhakov, T. S.* Two methods for detecting nonclassical correlations in parametric scattering of light / T. S. Iskhakov, E. D. Lopaeva, A. N. Penin et. al. // JETP Letters. — 2008. — ЯНВ. — Т. 88, № 10. — С. 660–664.
7. *Chuprina, I. N.* Generating frequency-bin qubits via spontaneous four-wave mixing in a photonic molecule / I. N. Chuprina, A. A. Kalachev // Physical Review A. — 2019. — Окт. — Т. 100, № 4.
8. *Kalachev, A.* Raman quantum memory based on an ensemble of silicon-vacancy centers in diamond / A. Kalachev, A. Berezhnoi, P. Hemmer et. al. // Laser Physics. — 2019. — СЕНТ. — Т. 29, № 10. — С. 104001.
9. *Brida, G.* Detection of multimode spatial correlation in PDC and application to the absolute calibration of a CCD camera / G. Brida, I. P. Degiovanni, M. Genovese et. al. // Optics Express. — 2010. — СЕНТ. — Т. 18, № 20. — С. 20572.

10. *Khalili, F.* Preparing a Mechanical Oscillator in Non-Gaussian Quantum States / F. Khalili, S. Danilishin, H. Miao et. al. // Physical Review Letters. — 2010. — Август. — Т. 105, № 7.
11. *Клышко, Д. Н.* / Д. Н. КЛЫШКО // ПИСЬМА В ЖЭТФ. — 1967. — Т. 6. — С. 490.
12. *Dayan, B.* Theory of two-photon interactions with broadband down-converted light and entangled photons / B. Dayan // Phys. Rev. A. — 2007. — Октябрь. — Т. 76, ВЫП. 4. — С. 043813.
13. *Christ, A.* Theory of quantum frequency conversion and type-II parametric down-conversion in the high-gain regime / A. Christ, B. Brecht, M. Wolfgang et. al. // New Journal of Physics. — 2013. — Май. — Т. 15, № 5. — С. 053038.
14. *Eckstein, A.* A quantum pulse gate based on spectrally engineered sum frequency generation / A. Eckstein, B. Brecht, C. Silberhorn // Optics express. — 2011. — Т. 19, № 15. — С. 13770—13778.
15. *Fedorov, M. V.* Anisotropically and High Entanglement of Biphoton States Generated in Spontaneous Parametric Down-Conversion / M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov et. al. // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Август. — Т. 99, ВЫП. 6. — С. 063901.
16. *Fedorov, M. V.* Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions / M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P.A. Volkov et. al. // Phys. Rev. A. — 2008. — Март. — Т. 77, ВЫП. 3. — С. 032336.
17. *Sharapova, P.* Schmidt modes in the angular spectrum of bright squeezed vacuum / P. Sharapova, A. M. Perez, O.V. Tikhonova et. al. // Physical Review A. — 2015. — Апрель. — Т. 91, № 4.
18. *Calvo, G. F.* Measuring two-photon orbital angular momentum entanglement / G. F. Calvo, A. Picon, A. Bramon // Phys. Rev. A. — 2007. — Январь. — Т. 75, ВЫП. 1. — С. 012319.
19. *Perez, A. M.* Bright squeezed-vacuum source with 11 spatial mode / A. M. Perez, T. S. Iskhakov, P. Sharapova et. al. // Optics Letters. — 2014. — Апрель. — Т. 39, № 8. — С. 2403.

20. *Beltran, L.* Orbital angular momentum modes of high-gain parametric down-conversion / L. Beltran, G. Frascella, A.M. Perez et. al. // Journal of Optics. — 2017. — Март. — Т. 19, № 4. — С. 044005.
21. *Kitaeva, G. K.* Direct detection of the idler THz radiation generated by spontaneous parametric down-conversion / G. K. Kitaeva, V. V. Kornienko, K.A. Kuznetsov et. al. // Optics Letters. — 2019. — Февр. — Т. 44, № 5. — С. 1198.
22. *Kitaeva, G. K.* Generation of optical signal and terahertz idler photons by spontaneous parametric down-conversion / G. K. Kitaeva, V. V. Kornienko, A. A. Leontyev et. al. // Physical Review A. — 2018. — Дек. — Т. 98, № 6.
23. *Haase, B.* Spontaneous parametric down-conversion of photons at 660 nm to the terahertz and sub-terahertz frequency range / B. Haase, M. Kutas, F. Riexinger et. al. // Optics Express. — 2019. — Февр. — Т. 27, № 5. — С. 7458.
24. *Woolard, D.* Terahertz Frequency Sensing and Imaging: A Time of Reckoning Future Applications? / D. Woolard, R. Brown, M. Pepper et. al. // Proceedings of the IEEE. — 2005. — Окт. — Т. 93, № 10. — С. 1722–1743.
25. *Tonouchi, M.* Cutting-edge terahertz technology / M. Tonouchi // Nature Photonics. — 2007. — Февр. — Т. 1, № 2. — С. 97–105.
26. *Dhillon, S. S.* The 2017 terahertz science and technology roadmap / S. S. Dhillon, M. S. Vitiello, E.H. Linfield et. al. // Journal of Physics D: Applied Physics. — 2017. — Янв. — Т. 50, № 4. — С. 043001.
27. *Mittleman, D. M.* Twenty years of terahertz imaging [Invited] / D. M. Mittleman // Optics Express. — 2018. — Апр. — Т. 26, № 8. — С. 9417.
28. *Jansen, C.* Terahertz imaging: applications and perspectives / C. Jansen, S. Wietzke, O. Peters et. al. // Applied Optics. — 2010. — Май. — Т. 49, № 19. — E48.
29. *Chekhova, M. V.* Nonlinear interferometers in quantum optics / M. V. Chekhova, Z. Y. Ou // Advances in Optics and Photonics. — 2016. — Март. — Т. 8, № 1. — С. 104.
30. *Burlakov, A. V.* Three-wave interference with participation of polaritons / A. V. Burlakov, Y. B. Mamaeva, A. N. Penin et. al. // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2001. — Июль. — Т. 93, № 1. — С. 55–62.

31. *Korystov, D. Y.* Rozhdestvenski hooks in two-photon parametric light scattering / D. Y. Korystov, S. P. Kulik, A. N. Penin // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. — 2001. — Март. — Т. 73, № 5. — С. 214–218.
32. *Kalashnikov, D. A.* Infrared spectroscopy with visible light / D. A. Kalashnikov, A. V. Paterova, S.P. Kulik et. al. // Nature Photonics. — 2016. — ЯНВ. — Т. 10, № 2. — С. 98–101.
33. *Grover, L. K.* A fast quantum mechanical algorithm for database search / L. K. Grover // Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing. — 1996. — С. 212–219.
34. *Shor, P. W.* Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer / P. W. Shor // SIAM review. — 1999. — Т. 41, № 2. — С. 303–332.
35. *AI, G. Q.* Suppressing quantum errors by scaling a surface code logical qubit / G. Q. AI // Nature. — 2023. — Т. 614, № 7949. — С. 676–681.
36. *Nakamura, Y.* Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box / Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, J. Tsai // Nature. — 1999. — Т. 398, № 6730. — С. 786–788.
37. *Mooij, J. E.* Josephson persistent-current qubit / J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov et. al. // Science. — 1999. — Т. 285, № 5430. — С. 1036–1039.
38. *Martinis, J. M.* Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit / J. M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado et. al. // Physical Review Letters. — 2002. — Т. 89, № 11. — С. 117901.
39. *Vion, D.* Manipulating the quantum state of an electrical circuit / D. Vion, A. Aassime, A. Cottet et. al. // Science. — 2002. — Т. 296, № 5569. — С. 886–889.
40. *Chiorescu, I.* Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit / I. Chiorescu, Y. Nakamura, C.Ma. Harmans et. al. // Science. — 2003. — Т. 299, № 5614. — С. 1869–1871.
41. *Clarke, J.* Superconducting quantum bits / J. Clarke, F. K. Wilhelm // Nature. — 2008. — Т. 453, № 7198. — С. 1031–1042.

42. *Martinis, J. M.* Superconducting phase qubits / J. M. Martinis // Quantum Information Processing. — 2009. — T. 8. — C. 81–103.
43. *Manucharyan, V. E.* Fluxonium: Single cooper-pair circuit free of charge offsets / V. E. Manucharyan, J. Koch, L.I. Glazman et. al. // Science. — 2009. — T. 326, № 5949. — C. 113–116.
44. *Ladd, T. D.* Quantum computers / T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme et. al. // Nature. — 2010. — T. 464, № 7285. — C. 45–53.
45. *Krantz, P.* A quantum engineer’s guide to superconducting qubits / P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan et. al. // Applied physics reviews. — 2019. — T. 6, № 2. — C. 021318.
46. *Arute, F.* Quantum supremacy using a programmable superconducting processor / F. Arute, K. Arya, R. Babbush et. al. // Nature. — 2019. — T. 574, № 7779. — C. 505–510.
47. *Kjaergaard, M.* Superconducting qubits: Current state of play / M. Kjaergaard, M. E. Schwartz, J. Braumüller et. al. // Annual Review of Condensed Matter Physics. — 2020. — T. 11. — C. 369–395.
48. *Moskalenko, I. N.* High fidelity two-qubit gates on fluxoniums using a tunable coupler / I. N. Moskalenko, I. A. Simakov, N.N. Abramov et. al. // npj Quantum Information. — 2022. — T. 8, № 1. — C. 130.
49. *Tan, S.-H.* Quantum illumination with Gaussian states / S.-H. Tan, B. I. Erkmen, V. Giovannetti et. al. // Physical Review Letters. — 2008. — T. 101, № 25. — C. 253601.
50. *Lopaeva, E.* Experimental realization of quantum illumination / E. Lopaeva, I. R. Berchera, I.P. Degiovanni et. al. // Physical Review Letters. — 2013. — T. 110, № 15. — C. 153603.
51. *Zhang, Z.* Entanglement-enhanced sensing in a lossy and noisy environment / Z. Zhang, S. Mouradian, F.N. Wong et. al. // Physical Review Letters. — 2015. — T. 114, № 11. — C. 110506.
52. *Kurpiers, P.* Deterministic quantum state transfer and remote entanglement using microwave photons / P. Kurpiers, P. Magnard, T. Walter et. al. // Nature. — 2018. — T. 558, № 7709. — C. 264–267.

53. *Cacciapuoti, A. S.* Quantum internet: networking challenges in distributed quantum computing / A. S. Cacciapuoti, M. Caleffi, F. Tafuri et. al. // IEEE Network. — 2019. — T. 34, № 1. — C. 137–143.
54. *Magnard, P.* Microwave quantum link between superconducting circuits housed in spatially separated cryogenic systems / P. Magnard, S. Storz, P. Kurpiers et. al. // Physical Review Letters. — 2020. — T. 125, № 26. — C. 260502.
55. *Pompili, M.* Realization of a multinode quantum network of remote solid-state qubits / M. Pompili, S. L. Hermans, S. Baier et. al. // Science. — 2021. — T. 372, № 6539. — C. 259–264.
56. *Zhong, Y.* Deterministic multi-qubit entanglement in a quantum network / Y. Zhong, H.-S. Chang, A. Bienfait et. al. // Nature. — 2021. — T. 590, № 7847. — C. 571–575.
57. *Singh, A.* Quantum internet—applications, functionalities, enabling technologies, challenges, and research directions / A. Singh, K. Dev, H. Siljak et. al. // IEEE Communications Surveys & Tutorials. — 2021. — T. 23, № 4. — C. 2218–2247.
58. *Somoroff, A.* Fluxonium qubits in a flip-chip package / A. Somoroff, P. Truitt, A. Weis et. al. // Physical Review Applied. — 2024. — T. 21, № 2. — C. 024015.
59. *Walls, D. F.* Analysis of a quantum measurement / D. F. Walls, M. J. Collet, G. J. Milburn // Physical Review D. — 1985. — T. 32, № 12. — C. 3208.
60. *Dmitriev, A. Y.* Probing photon statistics of coherent states by continuous wave mixing on a two-level system / A. Y. Dmitriev, R. Shaikhaidarov, T. Hönigl-Decrinis et. al. // Physical Review A. — 2019. — T. 100, № 1. — C. 013808.
61. *Pogosov, W. V.* Effects of photon statistics in wave mixing on a single qubit / W. V. Pogosov, A. Y. Dmitriev, O. V. Astafiev // Physical Review A. — 2021. — T. 104, № 2. — C. 023703.
62. *Neeley, M.* Emulation of a quantum spin with a superconducting phase qudit / M. Neeley, M. Ansmann, R.C. Bialczak et. al. // Science. — 2009. — T. 325, № 5941. — C. 722–725.

63. *Kiktenko, E.* Single qudit realization of the Deutsch algorithm using superconducting many-level quantum circuits / E. Kiktenko, A. Fedorov, A.A. Strakhov et. al. // *Physics Letters A.* — 2015. — Т. 379, № 22/23. — С. 1409—1413.
64. *Choi, S.* Observation of discrete time-crystalline order in a disordered dipolar many-body system / S. Choi, J. Choi, R. Landig et. al. // *Nature.* — 2017. — Т. 543, № 7644. — С. 221—225.
65. *Parigi, V.* Storage and retrieval of vector beams of light in a multiple-degree-of-freedom quantum memory / V. Parigi, V. D'Ambrosio, C. Arnold et. al. // *Nature communications.* — 2015. — Т. 6, № 1. — С. 7706.
66. *Ding, D.-S.* High-dimensional entanglement between distant atomic-ensemble memories / D.-S. Ding, W. Zhang, S. Shi et. al. // *Light: Science & Applications.* — 2016. — Т. 5, № 10. — e16157—e16157.
67. *Cozzolino, D.* High-dimensional quantum communication: benefits, progress, and future challenges / D. Cozzolino, B. Da Lio, D. Bacco et. al. // *Advanced Quantum Technologies.* — 2019. — Т. 2, № 12. — С. 1900038.
68. *Erhard, M.* Advances in high-dimensional quantum entanglement / M. Erhard, M. Krenn, A. Zeilinger // *Nature Reviews Physics.* — 2020. — Т. 2, № 7. — С. 365—381.
69. *Lu, H.-H.* Quantum phase estimation with time-frequency qudits in a single photon / H.-H. Lu, Z. Hu, M.S. Alshaykh et. al. // *Advanced Quantum Technologies.* — 2020. — Т. 3, № 2. — С. 1900074.
70. *Danilin, S.* Quantum-enhanced magnetometry by phase estimation algorithms with a single artificial atom / S. Danilin, A. V. Lebedev, G.B. Lesovik et. al. // *npj Quantum Information.* — 2018. — Т. 4, № 1. — С. 29.
71. *Danilin, S.* Quantum sensing with superconducting circuits / S. Danilin, M. Weides // *arXiv preprint arXiv:2103.11022.* — 2021.
72. *Клышко, Д. Н.* Фотонны и нелинейная оптика / Д. Н. Клышко. — М.: Наука, 1980.
73. *Rubin, M. H.* Transverse correlation in optical spontaneous parametric down-conversion / M. H. Rubin // *Physical Review A.* — 1996. — Дек. — Т. 54, № 6. — С. 5349—5360.

74. *Belinsky, A. V.* / A. V. Belinsky, D. N. Klyshko // Laser Phys. — 1994. — Т. 4. — С. 663.
75. *Клышко, Д. Н.* / Д. Н. КЛЫШКО // ЖЭТФ. — 1982. — Т. 83. — С. 1313.
76. *Ахманов, С. А.* / С. А. АХМАНОВ // ПИСЬМА В ЖЭТФ. — 1967. — Т. 6. — С. 575.
77. *Harris, S. E.* Observation of Tunable Optical Parametric Fluorescence / S. E. Harris, M. K. Oshman, R. L. Byer // Physical Review Letters. — 1967. — Т. 18, № 18. — С. 732–734.
78. *Magde, D.* Study in Ammonium Dihydrogen Phosphate of Spontaneous Parametric Interaction Tunable from 4400 to 16 000 Å / D. Magde, H. Mahr // Physical Review Letters. — 1967. — Т. 18, № 21. — С. 905–907.
79. *Burnham, D. C.* Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs / D. C. Burnham, D. L. Weinberg // Physical Review Letters. — 1970. — Т. 25, № 2. — С. 84–87.
80. *Зельдович, Б. Я.* / Б. Я. ЗЕЛЬДОВИЧ, Д. Н. КЛЫШКО // ПИСЬМА В ЖЭТФ. — 1969. — Т. 9. — С. 69.
81. *Iskhakov, T.* Generation and Direct Detection of Broadband Mesoscopic Polarization-Squeezed Vacuum / T. Iskhakov, M. V. Chekhova, G. Leuchs // Physical Review Letters. — 2009. — Май. — Т. 102, № 18.
82. *Spasibko, K. Y.* Spectral properties of high-gain parametric down-conversion / K. Y. Spasibko, T. S. Iskhakov, M. V. Chekhova // Optics Express. — 2012. — Март. — Т. 20, № 7. — С. 7507.
83. *Sh. Iskhakov, T.* Superbunched bright squeezed vacuum state / T. Sh. Iskhakov, A. M. Perez, Yu.K. Spasibko et. al. // Optics Letters. — 2012. — Т. 37, № 11. — С. 1919.
84. *Chekhova, M.* Bright squeezed vacuum: Entanglement of macroscopic light beams / M. Chekhova, G. Leuchs, M. Zukowski // Optics Communications. — 2015. — Февр. — Т. 337. — С. 27–43.
85. *Brida, G.* Experimental realization of sub-shot-noise quantum imaging / G. Brida, M. Genovese, I. Ruo Berchera // Nature Photonics. — 2010. — Февр. — Т. 4, № 4. — С. 227–230.

86. Experimental Realization of Quantum Illumination / E. D. Lopaeva, I. Ruo Berchera, I. P. Degiovanni, S. Olivares, G. Brida, M. Genovese // Physical Review Letters. — 2013. — Апр. — Т. 110, № 15.
87. *Kolobov, M. I.* Quantum Imaging / M. I. Kolobov. — New York: Springer, 2007.
88. *Magnitskiy, S.* Quantum ghost polarimetry with entangled photons / S. Magnitskiy, D. Agapov, A. Chirkin // Optics Letters. — 2022. — Февр. — Т. 47, № 4. — С. 754.
89. *Anderson, B. E.* Phase sensing beyond the standard quantum limit with a variation on the SU(1,1) interferometer / B. E. Anderson, P. Gupta, B.L. Schmittberger et. al. // Optica. — 2017. — Июль. — Т. 4, № 7. — С. 752.
90. *Gong, Q.-K.* Intramode-correlation-enhanced phase sensitivities in an SU(1,1) interferometer / Q.-K. Gong, X.-L. Hu, D. Li et. al. // Physical Review A. — 2017. — Сент. — Т. 96, № 3.
91. *Manceau, M.* Detection Loss Tolerant Supersensitive Phase Measurement with an SU(1,1) Interferometer / M. Manceau, G. Leuchs, F. Khalili et. al. // Physical Review Letters. — 2017. — Ноябрь. — Т. 119, № 22.
92. *Manceau, M.* Improving the phase super-sensitivity of squeezing-assisted interferometers by squeeze factor unbalancing / M. Manceau, F. Khalili, M. Chekhova // New Journal of Physics. — 2017. — Янв. — Т. 19, № 1. — С. 013014.
93. *Knyazev, E.* Quantum tomography enhanced through parametric amplification / E. Knyazev, K. Y. Spasibko, M.V. Chekhova et. al. // New Journal of Physics. — 2018. — Янв. — Т. 20, № 1. — С. 013005.
94. *Knyazev, E.* Overcoming inefficient detection in sub-shot-noise absorption measurement and imaging / E. Knyazev, F. Y. Khalili, M. V. Chekhova // Optics Express. — 2019. — Март. — Т. 27, № 6. — С. 7868.
95. *Shaked, Y.* Lifting the bandwidth limit of optical homodyne measurement with broadband parametric amplification / Y. Shaked, Y. Michael, R.Z. Vered et. al. // Nature Communications. — 2018. — Февр. — Т. 9, № 1.

96. *Kitaeva, G. K.* Absolute brightness measurements in the terahertz frequency range using vacuum and thermal fluctuations as references / G. K. Kitaeva, P. V. Yakunin, V. V. Kornienko et. al. // Applied Physics B. — 2014. — Февр. — Т. 116, № 4. — С. 929—937.
97. *Kitaeva, G. K.* Strongly nondegenerate spontaneous parametric down-conversion for calibration of terahertz-wave detectors / G. K. Kitaeva, V. V. Kornienko // International Journal of Quantum Information. — 2017. — Дек. — Т. 15, № 08. — С. 1740024.
98. *Ma, G. H.* Terahertz generation in Czochralski-grown periodically poled Mg:Y:LiNbO₃ by optical rectification / G. H. Ma, S. H. Tang, G. Kh. Kitaeva et. al. // Journal of the Optical Society of America B. — 2006. — Янв. — Т. 23, № 1. — С. 81.
99. *Kitaeva, G. K.* Generation and detection of terahertz radiation by means of periodically and aperiodically poled crystals / G. K. Kitaeva, A. N. Penin, A. N. Tuchak // Optics and Spectroscopy. — 2009. — Окт. — Т. 107, № 4. — С. 521—528.
100. *Wang, T. D.* Forward and backward terahertz-wave difference-frequency generations from periodically poled lithium niobate / T. D. Wang, S. T. Lin, Y.Y. Lin et. al. // Optics Express. — 2008. — Апр. — Т. 16, № 9. — С. 6471.
101. *Kitaeva, G. K.* Absolute brightness measurements in the terahertz frequency range using vacuum and thermal fluctuations as references / G. K. Kitaeva, P. V. Yakunin, V. V. Kornienko et. al. // Applied Physics B. — 2014. — Февр. — Т. 116, № 4. — С. 929—937.
102. *Kornienko, V. V.* Terahertz continuous wave nonlinear-optical detection without phase-locking between a source and the detector / V. V. Kornienko, S. A. Savinov, Y.A. Mityagin et. al. // Optics Letters. — 2016. — Авг. — Т. 41, № 17. — С. 4075.
103. *Kitaeva, G. K.* Parametric frequency conversion in layered nonlinear media / G. K. Kitaeva, A. N. Penin // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2004. — Февр. — Т. 98, № 2. — С. 272—286.

104. *Rytikov, G. O.* Detection of two-mode compression and degree of entanglement in continuous variables in parametric scattering of light / G. O. Rytikov, M. V. Chekhova // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2008. — Дек. — Т. 107, № 6. — С. 923–932.
105. *Sharapova, P.* Schmidt modes in the angular spectrum of bright squeezed vacuum / P. Sharapova, A. M. Perez, O. V. Tikhonova et. al. // Physical Review A. — 2015. — Апр. — Т. 91, № 4.
106. *Sharapova, P. R.* Bright squeezed vacuum in a nonlinear interferometer: Frequency and temporal Schmidt-mode description / P. R. Sharapova, O. V. Tikhonova, S. Lemieux et. al. // Physical Review A. — 2018. — Май. — Т. 97, № 5.
107. *Fedorov, M.* Schmidt modes and entanglement / M. Fedorov, N. Miklin // Contemporary Physics. — 2014. — ЯНВ. — Т. 55, № 2. — С. 94–109.
108. *Law, C. K.* Analysis and Interpretation of High Transverse Entanglement in Optical Parametric Down Conversion / C. K. Law, J. H. Eberly // Physical Review Letters. — 2004. — Март. — Т. 92, № 12.
109. *Schmidt, E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen: I. Teil: Entwicklung willkrlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener / E. Schmidt // Mathematische Annalen. — 1907. — Дек. — Т. 63, № 4. — С. 433–476.
110. *Ekert, A.* Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition / A. Ekert, P. L. Knight // American Journal of Physics. — 1995. — Май. — Т. 63, № 5. — С. 415–423.
111. *Miatto, F. M.* Spatial Schmidt modes generated in parametric down-conversion / F. M. Miatto, H. Di Lorenzo Pires, S. M. Barnett et. al. // The European Physical Journal D. — 2012. — Окт. — Т. 66, № 10.
112. *Miatto, F. M.* Cartesian and polar Schmidt bases for down-converted photons: How high dimensional entanglement protects the shared information from non-ideal measurements / F. M. Miatto, T. Brougham, A. M. Yao // The European Physical Journal D. — 2012. — Июль. — Т. 66, № 7.
113. *Beltran, L.* Orbital angular momentum modes of high-gain parametric down-conversion / L. Beltran, G. Frascella, A.M Perez et. al. // Journal of Optics. — 2017. — Март. — Т. 19, № 4. — С. 044005.

114. *Krivitskii, L. A.* Biphotons as three-level systems: Transformation and measurement / L. A. Krivitskii, S. P. Kulik, A. N. Penin et. al. // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2003. — T. 97, № 4. — C. 846—857.
115. *Molina-Terriza, G.* Management of the Angular Momentum of Light: Preparation of Photons in Multidimensional Vector States of Angular Momentum / G. Molina-Terriza, J. P. Torres, L. Torner // Physical Review Letters. — 2001. — T. 88, № 1.
116. *Vaziri, A.* Concentration of Higher Dimensional Entanglement: Qutrits of Photon Orbital Angular Momentum / A. Vaziri, J. Pan, T. Jennewein et. al. // Physical Review Letters. — 2003. — T. 91, № 22.
117. *Langford, N. K.* Measuring Entangled Qutrits and Their Use for Quantum Bit Commitment / N. K. Langford, R. B. Dalton, M. D Harvey et. al. // Physical Review Letters. — 2004. — T. 93, № 5.
118. *Bogdanov, Y. I.* Qutrit State Engineering with Biphotons / Y. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik et. al. // Physical Review Letters. — 2004. — T. 93, № 23.
119. *Neves, L.* Generation of Entangled States of Qudits using Twin Photons / L. Neves, G. Lima, G. Aguirre et. al. // Physical Review Letters. — 2005. — T. 94, № 10.
120. *Malcolm, N.* Pixel Entanglement: Experimental Realization of Optically Entangled Qudits / N. Malcolm, I. A. Khan, R. W. Boyd et. al. // Physical Review Letters. — 2005. — T. 94, № 22.
121. *Fedorov, M. V.* Anisotropically and High Entanglement of Biphoton States Generated in Spontaneous Parametric Down-Conversion / M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov et. al. // Physical Review Letters. — 2007. — T. 99, № 6.
122. *D'Ariano, G.* Generating qudits with encoded on two-photon states / G. D'Ariano, P. Mataloni, M.F. Sacchi et. al. // Physical Review A. — 2005. — T. 71, № 6.
123. *Moreva, E. V.* Realization of Four-Level Qudits Using Biphotons / E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, S.S. Straupe et. al. // Physical Review Letters. — 2006. — T. 97, № 2.

124. *Bogdanov, Y. I.* Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons / Y. I. Bogdanov, E. V. Moreva, G.A. Maslennikov et. al. // Physical Review A. — 2006. — T. 73, № 6.
125. *Baek, S.-Y.* Preparation and characterization of arbitrary states of four-dimensional qudits based on biphotons / S.-Y. Baek, S. S. Straupe, A.P. Shurupov et. al. // Physical Review A. — 2008. — T. 78, № 4.
126. *Fedorov, M. V.* Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions / M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov et. al. // Physical Review A. — 2008. — T. 77, № 3.
127. Entanglement of biphoton states: qutrits and ququarts / M. V. Fedorov, P. A. Volkov, J.M. Mikhailova et. al., S. S. Straupe, S. P. Kulik // New Journal of Physics. — 2011. — T. 13, № 8. — C. 083004.
128. *Fedorov, M. V.* Qutrits and ququarts in spontaneous parametric down-conversion, correlations and entanglement / M. V. Fedorov, P. A. Volkov, J. M. Milhailova // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2012. — T. 115, № 1. — C. 15—35.
129. *Saygin, M. Y.* Quantum holographic teleportation of entangled two-color optical images / M. Y. Saygin, A. S. Chirkin, M. I. Kolobov // Journal of the Optical Society of America B. — 2012. — T. 29, № 8. — C. 2090.
130. *Wootters, W. K.* Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits / W. K. Wootters // Physical Review Letters. — 1998. — T. 80, № 10. — C. 2245—2248.
131. *Vidal, G.* Computable measure of entanglement / G. Vidal, R. F. Werner // Physical Review A. — 2002. — T. 65, № 3.
132. Experimental quantum teleportation / D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl et. al. // Nature. — 1997. — T. 390, № 6660. — C. 575—579.
133. *Kim, Y.-H.* Quantum Teleportation of a Polarization State with a Complete Bell State Measurement / Y.-H. Kim, S. P. Kulik, Y. Shih // Physical Review Letters. — 2001. — T. 86, № 7. — C. 1370—1373.

134. *Brida, G.* Generation of different Bell states within the spontaneous parametric down-conversion phase-matching bandwidth / G. Brida, M. Chekhova, M. Genovese et. al. // Physical Review A. — 2007. — Т. 76, № 5.
135. *Shurupov, A. P.* Quantum state engineering with ququarts: Application for deterministic QKD protocol / A. P. Shurupov, S. S. Straupe, S. P. Kulik et. al. // EPL (Europhysics Letters). — 2009. — Т. 87, № 1. — С. 10008.
136. *Jack, B.* Precise quantum tomography of photon pairs with entangled orbital angular momentum / B. Jack, J. Leach, H. Ritsch et. al. // New Journal of Physics. — 2009. — Т. 11, № 10. — С. 103024.
137. *I, L. A.* Squeezed light: Photonics Vol. 1 / L. A. I. — Hoboken, NJ: John Wiley, Sons, 2015.
138. *Eibl, M.* Experimental Observation of Four-Photon Entanglement from Parametric Down-Conversion / M. Eibl, S. Gaertner, M. Bourennane et. al. // Physical Review Letters. — 2003. — Т. 90, № 20.
139. *Radmark, M.* Experimental Test of Fidelity Limits in Six-Photon Interferometry and of Rotational Invariance Properties of the Photonic Six-Qubit Entanglement Singlet State / M. Radmark, M. Zukowski, M. Bourennane // Physical Review Letters. — 2009. — Окт. — Т. 103, № 15.
140. *Stobinska, M.* Entanglement witnesses and measures for bright squeezed vacuum / M. Stobinska, F. Toppel, P. S. et. al. // Physical Review A. — 2012. — Т. 86, № 2.
141. *Agafonov, I. N.* Two-color bright squeezed vacuum / I. N. Agafonov, M. V. Chekhova, G. Leuchs // Physical Review A. — 2010. — Июль. — Т. 82, № 1.
142. *Heidmann, A.* Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams / A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud et. al. // Physical Review Letters. — 1987. — Ноябрь. — Т. 59, № 22. — С. 2555—2557.
143. *Brida, G.* Measurement of Sub-Shot-Noise Spatial Correlations without Background Subtraction / G. Brida, L. Caspani, A. Gatti et. al. // Physical Review Letters. — 2009. — Май. — Т. 102, № 21.

144. *Harder, G.* Single-Mode Parametric-Down-Conversion States with 50 Photons as a Source for Mesoscopic Quantum Optics / G. Harder, T. J. Bartley, A.E. Lita et. al. // Physical Review Letters. — 2016. — Апр. — Т. 116, № 14.
145. *Fedorov, M. V.* Entanglement of multiphoton states in polarization and quadrature variables / M. V. Fedorov // Laser Physics. — 2019. — Окт. — Т. 29, № 12. — С. 124006.
146. *Zakharov, R. V.* Managing the spatial properties and photon correlations in squeezed non-classical twisted light / R. V. Zakharov, O. V. Tikhonova // Laser Physics Letters. — 2018. — Март. — Т. 15, № 5. — С. 055205.
147. *La Volpe, L.* Multimode single-pass spatio-temporal squeezing / L. La Volpe, S. De, T. Kouadou et. al. // Optics Express. — 2020. — Апр. — Т. 28, № 8. — С. 12385.
148. *Treps, N.* Surpassing the Standard Quantum Limit for Optical Imaging Using Nonclassical Multimode Light / N. Treps, U. Andersen, B. Buchler et. al. // Physical Review Letters. — 2002. — Май. — Т. 88, № 20.
149. *Brida, G.* Experimental realization of sub-shot-noise quantum imaging / G. Brida, M. Genovese, I. Ruo Berchera // Nature Photonics. — 2010. — Февр. — Т. 4, № 4. — С. 227–230.
150. *Genovese, M.* Real applications of quantum imaging / M. Genovese // Journal of Optics. — 2016. — Июнь. — Т. 18, № 7. — С. 073002.
151. *Brambilla, E.* High-sensitivity imaging with multi-mode twin beams / E. Brambilla, L. Caspani, O. Jedrkiewicz et. al. // Physical Review A. — 2008. — Май. — Т. 77, № 5.
152. *Samantaray, N.* Realization of the first sub-shot-noise wide field microscope / N. Samantaray, I. Ruo-Berchera, A. Meda et. al. // Light: Science & Applications. — 2017. — Янв. — Т. 6, № 7. — e17005—e17005.
153. *Levenson, J. A.* Reduction of quantum noise in optical parametric amplification / J. A. Levenson, P. Grangier, I. Abram et. al. // Journal of the Optical Society of America B. — 1993. — Ноябрь. — Т. 10, № 11. — С. 2233.
154. *Ou, Z. Y.* Quantum noise reduction in optical amplification / Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble // Physical Review Letters. — 1993. — Май. — Т. 70, № 21. — С. 3239–3242.

155. *Kolobov, M. I.* Noiseless amplification of optical images / M. I. Kolobov, L. A. Lugiato // *Physical Review A*. — 1995. — Дек. — Т. 52, № 6. — С. 4930—4940.
156. *Devaux, F.* Parametric amplification of a polychromatic image / F. Devaux, E. Lantz // *Journal of the Optical Society of America B*. — 1995. — Ноябрь. — Т. 12, № 11. — С. 2245.
157. *Choi, S.-K.* Noiseless Optical Amplification of Images / S.-K. Choi, M. Vasilyev, P. Kumar // *Physical Review Letters*. — 1999. — Сент. — Т. 83, № 10. — С. 1938—1941.
158. *Devaux, F.* Gain in Phase Sensitive Parametric Image Amplification / F. Devaux, E. Lantz // *Physical Review Letters*. — 2000. — Сент. — Т. 85, № 11. — С. 2308—2311.
159. *Corzo, N. V.* Noiseless Optical Amplifier Operating on Hundreds of Spatial Modes / N. V. Corzo, A. M. Marino, K. M. Jones et. al. // *Physical Review Letters*. — 2012. — Июль. — Т. 109, № 4.
160. *Lopez, L.* Quantum Processing of Images by Continuous Wave Optical Parametric Amplification / L. Lopez, N. Treps, B. Chalopin et. al. // *Physical Review Letters*. — 2008. — Янв. — Т. 100, № 1.
161. *Gavrielides, A.* Diffractive imaging in three-wave interactions / A. Gavrielides, P. Peterson, D. Cardimona // *Journal of Applied Physics*. — 1987. — Окт. — Т. 62, № 7. — С. 2640—2645.
162. *Lovering, D. J.* Noiseless optical amplification in quasi-phase-matched bulk lithium niobate / D. J. Lovering, J. Webjorn, P.St.J. Russell et. al. // *Optics Letters*. — 1996. — Сент. — Т. 21, № 18. — С. 1439.
163. *Wallraff, A.* Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics / A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais et. al. // *Nature*. — 2004. — Т. 431, № 7005. — С. 162—167.
164. *Gambetta, J.* Qubit-photon interactions in a cavity: Measurement-induced dephasing and number splitting / J. Gambetta, A. Blais, D.I. Schuster et. al. // *Physical Review A*. — 2006. — Т. 74, № 4. — С. 042318.
165. *Blais, A.* Circuit quantum electrodynamics / A. Blais, A. L. Grimsom, S.M. Girvin et. al. // *Reviews of Modern Physics*. — 2021. — Т. 93, № 2. — С. 025005.

166. *Lu, L.* Advances in Chip-Scale Quantum Photonic Technologies / L. Lu, X. Zheng, Y. Lu et. al. // Advanced Quantum Technologies. — 2021. — T. 4, № 12. — C. 2100068.
167. *Vozhakov, V. A.* State control in superconducting quantum processors / V. A. Vozhakov, M. V. Bastrakova, N.V Klenov et. al. // Phys.-Uspekhi. — 2022. — T. 65. — C. 457—476.
168. *Ranadive, A.* Kerr reversal in Josephson meta-material and traveling wave parametric amplification / A. Ranadive, M. Esposito, L. Planat et. al. // Nature Communications. — 2022. — T. 13, № 1. — C. 1737.
169. *Milul, O.* Superconducting cavity qubit with tens of milliseconds single-photon coherence time / O. Milul, B. Guttel, U. Goldblatt et. al. // PRX Quantum. — 2023. — T. 4, № 3. — C. 030336.
170. *Grimsmo, A. L.* Squeezing and quantum state engineering with Josephson travelling wave amplifiers / A. L. Grimsno, A. Blais // npj Quantum Information. — 2017. — T. 3, № 1. — C. 20.
171. *Fasolo, L.* Josephson traveling wave parametric amplifiers as non-classical light source for microwave quantum illumination / L. Fasolo, A. Greco, E. Enrico et. al. // Measurement: Sensors. — 2021. — T. 18. — C. 100349.
172. *Peng, Z.* Tuneable on-demand single-photon source in the microwave range / Z. Peng, S. De Graaf, J.S. Tsai et. al. // Nature communications. — 2016. — T. 7, № 1. — C. 12588.
173. *Zhou, Y.* Tunable microwave single-photon source based on transmon qubit with high efficiency / Y. Zhou, Z. Peng, Y. Horiuchi et. al. // Physical Review Applied. — 2020. — T. 13, № 3. — C. 034007.
174. *Sokolova, A. A.* Single-atom maser with an engineered circuit for population inversion / A. A. Sokolova, G. P. Fedorov, E.V. Il'ichev et. al. // Physical Review A. — 2021. — T. 103, № 1. — C. 013718.
175. *Ilin, D.* Frequency Combs with Parity-Protected Cross-Correlations and Entanglement from Dynamically Modulated Qubit Arrays / D. Ilin, A. V. Poshakinskiy, A.N. Poddubny et. al. // Physical Review Letters. — 2023. — T. 130, № 2. — C. 023601.

176. *Shapiro, D.* Dynamical Lamb effect in a tunable superconducting qubit-cavity system / D. Shapiro, A. Zhukov, W.V. Pogosov et. al. // Physical Review A. — 2015. — T. 91, № 6. — C. 063814.
177. *Kannan, B.* Waveguide quantum electrodynamics with superconducting artificial giant atoms / B. Kannan, M. J. Ruckriegel, D.L Campbell et. al. // Nature. — 2020. — T. 583, № 7818. — C. 775—779.
178. *Fedorov, G.* Photon transport in a Bose-Hubbard chain of superconducting artificial atoms / G. Fedorov, S. Remizov, D.S. Shapiro et. al. // Physical Review Letters. — 2021. — T. 126, № 18. — C. 180503.