**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Морозова Станислава Викторовича
на тему: «Построение чебышевских приближений
для матриц и тензоров и их применения»
по специальности 1.1.6. «Вычислительная математика»**

Актуальность диссертационной работы. Малоранговая аппроксимация матриц и тензоров является одним из самых перспективных направлений современной численной линейной алгебры. Возможность приблизить произвольную матрицу (либо, матрицу из определенного класса) суммой матриц малого ранга позволяет значительно снизить вычислительную сложность многих задач. На этом основаны алгоритмы сжатия информации, и т.д. Многочисленные применения в решении линейных систем, в численных задачах дифференциальных уравнений, оптимизации, обработке сигналов, машинном обучении, т.д.

Подобная техника следует общей канве малопараметрических представлений, когда объект, для точного описания которого требуется огромное количество параметров, приближается объектом с малым числом параметров.

Свойства и алгоритмы реализации малоранговых приближений существенно зависят от того, в какой норме измеряется расстояние. При аппроксимации в унитарно-инвариантных нормах, таких как норма Фробениуса или спектральная норма, оптимальное приближение находится явно в терминах сингулярного разложения. Качество аппроксимации в таких нормах, как правило, зависит от скорости убывания сингулярных чисел матриц: медленное убывание ведет к невозможности эффективного приближения. Соответствующие результаты следуют из теории поперечников. В то же время, в чебышевской норме, равной максимальному модулю разности коэффициентов, медленное убывание сингулярных чисел не является препятствием для хорошей малоранговой аппроксимации. В одном из примеров представленной диссертационной работы продемонстрирован довольно неожиданный феномен, когда единичная матрицы, у которой, как известно, все сингулярные числа равны единице, т.е., не убывают вовсе, допускает эффективную малоранговую аппроксимацию. Более того, матрицы, порожденные моделями с латентными переменными, а также многие функционально порожденные матрицы допускают эффективные малоранговые приближения в чебышевской норме, несмотря на то, что их сингулярные числа могут убывать медленно. Одна из основных задач диссертационной работы состоит в построении эффективных малоранговых приближений матриц и тензоров в чебышевской норме. Кроме этого, диссертация анализирует сопутствующую задачу о построении наилучшего равномерного приближения вектора по системе заданных векторов.

Новизна результатов научной работы. В диссертации обобщена теорема Чебышева-Валле-Пуссена о критерии наилучшего приближения на дискретные функции, причем, в отличие от известных обобщений, в диссертации это сделано в терминах альтернанса. Также предложен новый быстрый метод решения задачи о наилучшем равномерном приближении на основе алгоритма Ремеза.

Кроме этого, в диссертации разработан и исследован метод переменных направлений для построения малоранговых приближений матриц в чебышевской норме. Также на основе проведенного анализа впервые предложен метод построения оптимальных в равномерной норме приближений матрицами ранга 1. В диссертации также впервые предложен метод для получения малоранговых приближений тензоров в каноническом формате в чебышевской норме.

Степень обоснованности и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций диссертационной работы. Достоверность результатов работы следует из строгости математических рассуждений и подтверждается проведенными численными экспериментами. Результаты диссертации опубликованы в 4 работах, индексируемых Scopus, WoS и RSCI, и докладывались на российских и международных конференциях.

Краткое содержание диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения.

Первая глава посвящена задаче о наилучшем равномерном приближении по системе векторов. В главе изложены условия существования, единственности и непрерывности решения задачи, а также доказываются критерии оптимальности. Среди них я бы отметил альтернансный критерий оптимальности, являющийся дискретным аналогом теоремы Чебышева об альтернансе. До этого в литературе появлялись обобщения теоремы Чебышева на функции, заданные на произвольных компактах, однако, терялось свойство чередуемости знаков разностей. Автору диссертации удалось сохранить это свойство в критерии, что представляется мне очень интересным. Как следствие, соискатель получает обобщение алгоритма Ремеза на дискретные функции и демонстрирует его эффективность на численных примерах. Техника алгоритма основана на эффективных обновлениях QR разложения матриц.

Вторая глава посвящена задаче построения малоранговых приближений матриц в чебышевской норме. Автор разработал метод переменных направлений, исследовал вопрос о его сходимости и о свойствах стационарных точек. В частности, вводится понятие двумерного альтернанса произвольного ранга и доказывается, что наличие введенной структуры альтернанса является необходимым условием оптимальности решения, а также что все предельные точки метода переменных направлений обладают таким альтернансом. Кроме этого, одним из основных результатов второй главы является детальный анализ метода в случае построения приближений ранга 1, в частности в работе предлагается метод построения оптимальных приближений ранга 1. Результаты снабжены численными экспериментами, в которых автору пришлось продемонстрировать не только высокие программистские навыки, но и изрядное трудолюбие.

Третья глава посвящена построению чебышевских приближений тензоров в каноническом формате. В работе предлагается метод переменных направлений для решения задачи и анализируются его базовые свойства по аналогии с матричным случаем. Глава содержит большое количество численных экспериментов, в том числе для решения задачи о восстановлении данных из равномерного шума.

Автореферат в полной мере передает содержание диссертации.

Критические замечания по диссертационной работе.

Одним из существенных ограничений для задач, решенных в диссертации является предположение о чебышевском свойстве рассматриваемых n x k – матриц (n>k), т.е., что все их k x k – подматрицы невырождены. Из соображений размерности легко следует, что множества чебышевских матриц имеет полную меру. Однако, при больших n с вероятностью близкой к единице матрица является «почти нечебышевской», т.е., определитель одной из ее k x k – подматриц очень мал. В этом случае алгоритм Ремеза будет сходиться чрезвычайно медленно, и при его реализации будут появляться плохо обусловленные матрицы. Что делать в таких случаях? В диссертационной работе данный вопрос не ставится. Возможно, автору стоит им заняться в будущих исследованиях.

Диссертация написана в целом ясно и строго, на хорошем русском языке. Несмотря на внимательное чтение, мне не удалось найти существенных пробелов в рассуждениях или математических ошибок. Обнаружилось лишь небольшое число опечаток, список которых прилагаю:

1. (стр. 34) В последней строке необходимо изменить индекс n+1 на r+1.

2. (стр. 47) В Лемме 1.32 потеряна крышка над символом V.

3. (стр. 68) В определении 2.5 необходимо заменить T на A;

4. (стр. 76) Необходимо поправить опечатку в слове "приближения" (после определения 2.14);

5. (стр.82) Необходимо поправить опечатку в слове "петлевым" (в доказательстве леммы 2.21).

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.6. «Вычислительная математика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Морозов Станислав Викторович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.6. «Вычислительная математика».

Официальный оппонент:

член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общих проблем управления
механико-математического факультет
ФГБОУ ВО «Московский государств ... мени М. В. Ломоносова»

ПРОТАСОВ Владимир Юрьевич

11.12.2024

Контактные данные:

тел.: +7 (495) 939-56-32, e-mail: v-pr
Специальность, по которой официальным оппонентом

защищена диссертация:
01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Адрес места работы:

119234, Москва, ул. Колмогорова, д. 1,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, кафедра общих проблем управления
Тел.: +7 (495) 939-56-32, e-mail: v-protassov@yandex.ru

Подп… сотрудника ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломо… удостоверяю:

…кафедрой Общих проблем управления
…нико-математического ф-та МГУ
А. В. Фурсиков