МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Куценко Владимир Александрович

Эффекты случайных сред в процессах с генерацией и блужданием частиц по решеткам

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: **Яровая Елена Борисовна**
доктор физико-математических наук,
доцент

Официальные оппоненты: **Пятницкий Андрей Львович**
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник, главный научный сотрудник лаб. №4 ИППИ РАН

Топчий Валентин Алексеевич
доктор физико-математических наук,
профессор, ведущий научный сотрудник лаб. комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики ОФ ИМ СО РАН

Рядовкин Кирилл Сергеевич
кандидат физико-математических наук,
научный сотр. лаб. прикладных вероятностных и алгоритмических методов ПОМИ РАН

Защита диссертации состоится 31 мая 2024 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Россия, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/2956/

Автореферат разослан 11 апреля 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Шерстюков В.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В работе рассматриваются ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) по многомерным решеткам с непрерывным временем и случайными интенсивностями деления и гибели частиц. Данная область теории стохастических процессов активно развивается в последние годы, см., например, обзор В. Кенига[1] и приведенную в нем библиографию.

В физических моделях со случайной средой возникают явления, существенно отличающиеся от обычно рассматриваемых в статистической физике. В частности, средняя энергия некоторой изучаемой величины способна расти медленнее, нежели корень из среднего квадрата этой величины, и обе упоминаемых скорости роста, в свою очередь, будут выше скорости роста типичной реализации этой величины. В одной из первых работ,[2] посвященных данной теме, рассматривалась модель популяции диффундирующих частиц, интенсивность деления которых предполагалась стационарной во времени и случайной по пространственной переменной, со средним значением, равным нулю. С помощью такого рода предположений было показано наличие нерегулярного роста усредненных по среде моментов численностей частиц в системе. Подобный нерегулярный рост моментов, представляющий интерес с физической точки зрения, получил название перемежаемости[2–5].

Эффект перемежаемости был описан для процессов в случайной среде Я. Б. Зельдовичем с соавторами,[2,3] а сами изученные в этих работах процессы представляли собой частный случай модели ВСБ в случайной среде, которая, по-видимому, впервые была детально изучена Ю. Гертнером и С. А. Молчановым[6]. Ключевые понятия и инструменты для анализа моде-

[1] König W. The Parabolic Anderson Model: Random Walk in Random Potential. – Birkhäuser, 2016.

[2] Зельдович Я. Б. и др. Перемежаемость пассивных полей в случайных средах // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 89. – № 6. – С. 2061-2072.

[3] Зельдович Я. Б. и др. Перемежаемость в случайной среде // Успехи физических наук. – 1987. – Т. 152. – № 5. – С. 3-32.

[4] Shukurov A. M., Sokolov D. D., Ruzmaikin A. Explosive growth of the magnetic energy in a turbulent medium // MHD. – 1984. – Vol. 19. – № 3. – pp. 274-279.

[5] Куценко В. А., Соколов Д. Д., Яровая Е. Б. Неустойчивости в случайных средах и режимы с обострением // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2023. – Т. 163. – № 4. – С. 561-573.

[6] Gärtner J., Molchanov S. A. Parabolic problems for the Anderson model: I. Intermittency

ли ВСБ, введенные в указанной работе, основывались на параболической модели Андерсона,[7] а само исследование было признано фундаментальным и дало толчок активному применению модели Андерсона в различных областях[1].

Исследование перемежаемости в ВСБ в случайной среде опирается на анализ асимптотического поведения усредненных по среде моментов численностей частиц. Впервые такое асимптотическое поведение было получено для случайной среды с асимптотически вейбулловским распределением правого хвоста случайного потенциала (разности между интенсивностью деления и интенсивностью гибели)[8]. Для того же типа потенциала было изучено ВСБ в неоднородной случайной среде[9]. Первая глава диссертации посвящена исследованию асимптотического поведения усредненных по среде моментов численностей частиц для случайной среды с асимптотически гумбелевским распределением правого хвоста случайного потенциала. Результаты этой главы получены без применения спинальной техники — инструмента анализа общих процессов ветвления[10]. Спинальная техника выходит за рамки стандартной теории ветвящихся случайных блужданий, однако с помощью нее можно получить результаты об асимптотиках для относительно общего случая случайного субэкспоненциального потенциала[11,12]. Отдельно отметим, что изучался и случай потенциала со степенным распределением, для которого стандартное определение перемежаемости теряет смысл и приходится рассматривать его

and related topics // Communications in mathematical physics. – 1990. – Vol. 132. – pp. 613-655.

[7]Anderson P. W. Absence of diffusion in certain random lattices // Physical review. – 1958. – Vol. 109. – № 5. – pp. 1492-1505.

[8]Albeverio S. A. et al. Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment. – Universität Bonn. SFB 256. Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen, 2000.

[9]Yarovaya E. Symmetric branching walks in homogeneous and non homogeneous random environments // Communications in Statistics-Simulation and Computation. – 2012. – Vol. 41. – № 7. – pp. 1232-1249.

[10]Harris S. C., Roberts M. I. The many-to-few lemma and multiple spines // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. – 2017. – Vol. 53. – № 1. – pp. 226-242.

[11]König W., Gün O., Sekulović O. Moment asymptotics for branching random walks in random environment // Journal of Theoretical Probability. – 2013. – Vol. 18. – pp. 63-81.

[12]Gün O., König W., Sekulović O. Moment asymptotics for multitype branching random walks in random environment // Journal of Theoretical Probability. – 2015. – Vol. 28. – № 4. – pp. 1726-1742.

обобщения[13]. Таким образом, общий вопрос о наличии перемежаемости в модели ВСБ был практически полностью исследован.

Дальнейшие работы были в основном направлены на изучение неусредненных характеристик ВСБ, например неусредненных по среде моментов[14] или вероятностей выживания частиц[15]. Такие характеристики являются более сложными для изучения, но в то же время дают возможность описания не только качественных, но и количественных характеристик отдельных реализаций процесса. При этом одним из основных инструментов для изучения такого рода задач является исследование спектра соответствующего случайного оператора, возникающего в правых частях дифференциальных уравнений, описывающих поведение средних численностей частиц.

Подобное исследование приведено во второй главе настоящей работы для модели ВСБ в неоднородной случайной среде. В ней изучается простейшая характеристика спектра случайного оператора — спектральная бифуркация, состоящая в наличии или отсутствии положительного собственного значения. Также исследуются условия возникновения данной бифуркации и оцениваются ее вероятностные характеристики.

Важно отметить, что в настоящей работе модель ВСБ рассматривается скорее как модель динамики популяции частиц, а не как физическая модель, порождающая параболическую модель Андерсона. Такой подход в первую очередь связан с востребованностью применения ВСБ в естественных и гуманитарных науках. В демографии ветвящиеся процессы и ветвящиеся блуждания зачастую рассматриваются как реалистичная модель развития человеческой популяции, а в биологии — как модель

[13] Ortgiese M., Roberts M. I. Intermittency for branching random walk in Pareto environment // The Annals of Probability. – 2016. – Vol. 44. – № 3. – pp. 2198-2263.

[14] Molchanov S., Zhang H. The parabolic Anderson model with long range basic Hamiltonian and Weibull type random potential // Probability in Complex Physical Systems: In Honour of Erwin Bolthausen and Jürgen Gärtner. – Springer Berlin Heidelberg, 2012. – pp. 13-31.

[15] Chernousova E., Hryniv O., Molchanov S. Branching random walk in a random time-independent environment // Mathematical Population Studies. – 2023. – Vol. 30. – № 2. – pp. 73-94.

эволюции организмов[16–18]. Введение случайной среды в модель ВСБ расширяет круг биологических проблем, для которых ее можно считать разумной моделью эволюции[19].

Достаточно простой, но важной характеристикой популяционного процесса является тип скорости роста популяции частиц. Известно, что в случайной среде популяция частиц может лишь экспоненциально убывать или экспоненциально возрастать[20]. При этом экспоненциальный рост популяции частиц равносилен наличию положительного собственного значения в спектре оператора эволюции для среднего числа частиц. Поэтому описанное ранее исследование спектральной бифуркации рассматривается не в качестве цели работы, а как инструмент для оценки изменений в качественном поведении популяционного процесса.

Большинство результатов для модели ВСБ относится к асимптотическим, при этом ее использование в прикладных задачах требует исследования характеристик модели на конечных временах. Важно отметить, что поиск работ, которые использовали бы теоретические методы для описания характеристик системы на конечных временах, не дал результатов. Аналогичной является ситуация с исследованиями по статистическому моделированию такого рода характеристик. В связи с этим третья глава настоящей работы посвящена моделированию различных моделей ВСБ в случайной среде.

Целью работы является анализ предельного поведения усредненных по среде моментов численностей частиц ВСБ в предположении об асимптотически гумбелевском распределении разности между интенсивностью деления и исчезновения частиц; оценка вероятности возникновения над-

[16] Molchanov S., Whitmeyer J. Spatial models of population processes // International Conference on Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics. – Cham : Springer International Publishing, 2016. – pp. 435-454.

[17] Chernousova E., Hryniv O., Molchanov S. Population model with immigration in continuous space // Mathematical population studies. – 2020. – Vol. 27. – № 4. – pp. 199-215.

[18] Makarova Y., Kutsenko V., Yarovaya E. On Two-Type Branching Random Walks and Their Applications for Genetic Modelling // Recent Developments in Stochastic Methods and Applications: ICSM-5, Moscow, Russia, November 23–27, 2020, Selected Contributions. – Springer International Publishing, 2021. – pp. 255-268.

[19] König W. Branching random walks in random environment // Probabilistic Structures in Evolution. – EMS Press, Berlin, 2021. – pp. 23-41.

[20] Molchanov S. Lectures on random media. // Lectures on Probability Theory – Springer Berlin Heidelberg, 1994. – pp. 242-411.

критического роста средних численностей частиц для ВСБ в одномерной случайной убивающей среде с размножением в нуле; оценка точности оценок и асимптотик, полученных в работе, при помощи численного моделирования.

Научная новизна работы. Получены новые результаты для ВСБ с возможной генерацией частиц в каждой точке решетки в случайной среде с асимптотически гумбелевским потенциалом, а также для ВСБ с единственным центром размножения частиц в ограниченной случайной убивающей среде. Описаны алгоритмы моделирования ВСБ в случайной среде, получены численные результаты для ряда моделей.

Методы исследования. В работе использованы методы теории вероятностей, теории случайных процессов, спектральной теории, теории дифференциальных уравнений, комбинаторики, а также численные методы. В теоретической части в основном применялись метод Лапласа для интегралов, преставление типа Фейнмана–Каца, а также методы исследования спектров случайных операторов. Численное моделирование проведено при помощи языка R, использованы методы Монте-Карло и методы параллельного программирования.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит в основном теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории ВСБ в случайной среде, а также для моделирования практических задач в области динамики популяций.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема об асимптотическом поведении моментов численностей частиц, усредненных по среде для модели ВСБ в случайной среде с однородным гумбелевским потенциалом.

2. Теорема об условиях, при которых ВСБ в случайной среде с единственным центром размножения и ограниченной случайной убивающей средой почти наверное имеет экспоненциальный рост моментов численностей частиц.

3. Теоремы об оценках сверху и снизу вероятности экспоненциального роста моментов численностей частиц ВСБ в случайной среде

с единственным центром размножения и ограниченной случайной убивающей средой.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях.

– 7-я Санкт-Петербургская молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 2023.
– A perpetual search: mathematics, physics, life. Conference dedicated to the 85-th anniversary of Vadim Alexandrovich Malyshev, Москва, Россия, 2023.
– Восьмая международная конференция по стохастическим методам, Дивноморское, Россия, 2023.
– Ломоносовские чтения 2023, Москва, Россия, 2023.
– 6th-St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics, Санкт-Петербург, Россия, 2022.
– Вторая конференция Математических центров России, Москва, Россия, 2022.
– Branching processes, random walks and probability on discrete structures, Moscow, Russia, 2022.
– The 7th International Conference on Stochastic Methods, Дивноморское, Россия, 2022.
– 5th-St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics, Санкт-Петербург, Россия, 2021.
– The 14th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics, Online, London, UK, 2021.
– Математические основы информатики и информационно коммуникационных систем, Тверь, Россия, 2021.
– 63rd ISI World Statistics Congress, Online, The Netherlands, 2021.
– The 5th International workshop on branching processes and their applications, Online, Badajoz, Spain, 2021.
– 13th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics, Online, London, UK, 2020.
– The 5th International Conference on Stochastic Methods. Онлайн, Москва, Россия, 2020.

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в 15 публикациях. В том числе в научных журналах, индексируемых Web of Science, SCOPUS, RSCI опубликовано 6 работ, из которых 1 — без соавторов. В материалах международных конференций опубликовано 9 работ, из которых 2 — в виде статей. Общий список публикаций автора приведен в конце настоящей работы.

Личный вклад автора. Автором диссертационного исследования совместно с научным руководителем проводился выбор темы, осуществлялось планирование всей работы. Научному руководителю, профессору Е. Б. Яровой, принадлежит постановка задач и нахождение общего подхода к их решению. Автору принадлежит доказательство теорем и лемм, а также проведение компьютерных симуляций.

Соответствие паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика. Направления исследований: 6. Предельные теоремы. 7. Стохастические процессы (точечные, гауссовские, мартингалы и другие). 10. Марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели. 15. Методы статистического моделирования.

Структура и объем диссертации. Диссертационное исследование состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объем работы составляет 89 страниц, включая 10 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 30 наименований.

В работу вошли результаты, выполненные при поддержке следующих грантов: фонд РФФИ 20-01-00487А, рук. — проф. Е. Б. Яровая; фонд БАЗИС 22-8-3-36-1; фонд РНФ 23-11-00375, рук. — проф. А. А. Гущин.

Первая глава содержит результаты для модели ВСБ в случайной гумбелевской среде. Основным результатом стал вывод асимптотики усредненных по среде моментов без использования леммы «многие-к-немногим». Во второй главе рассматривается одномерная случайная убивающая среда с единственным центром размножения. В этой модели оценивается вероятность экспоненциального роста в ВСБ в зависимости от параметров среды. Третья глава посвящена описанию способов моделирования для общей модели ВСБ в случайной среде. Также в этой главе содержатся результаты моделирования для моделей ВСБ из настоящей работы.

Содержание работы

Первая глава посвящена ВСБ в случайной среде с асимптотически гумбелевским потенциалом. Рассматривается ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке $\mathbb{Z}^d,\ d \in \mathbb{N}$ с непрерывным временем. На решетке заданы два случайных поля, образованных независимыми одинаково распределенными случайными величинами: $\mathcal{L} = \{\lambda(x),\ x \in \mathbb{Z}\}$ и $\mathcal{M} = \{\mu(x),\ x \in \mathbb{Z}\}$. Поля $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ независимы и определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Поля $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ реализуются до старта ВСБ, их реализации обозначены через $\mathcal{L}(\omega) = \left\{\lambda(x,\omega),\ x \in \mathbb{Z}^d,\ \omega \in \Omega\right\}$ и $\mathcal{M}(\omega) = \left\{\mu(x,\omega),\ x \in \mathbb{Z}^d,\ \omega \in \Omega\right\}$. Предполагается, что случайные величины $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ неотрицательны. Реализации полей $\mathcal{L}(\omega)$ и $\mathcal{M}(\omega)$ образуют на $\mathbb{Z}^d$ «случайную среду», которая будет определять интенсивность «рождения» и «убивания» частиц. Дополнительно введен параметр $\varkappa > 0$, который отвечает за интенсивность передвижения частиц по $\mathbb{Z}^d$.

Пусть в начальный момент времени в нуле находится одна частица. Дальнейшая эволюция происходит следующим образом. Если в произвольный момент времени $t \geqslant 0$ частица находится в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ вне нуля, то за время h она: с вероятностью $\lambda(x,\omega)h + o(h)$ разделится надвое, с вероятностью $\mu(x,\omega)h + o(h)$ исчезнет, с вероятностью $\varkappa h + o(h)$ переместится равновероятно в одну из соседних точек, с вероятностью $1 - \lambda(x,\omega)h - \mu(x,\omega)h - \varkappa h + o(h)$ останется на месте. Для описанной модели введем потенциал ветвления $V(x,\omega)$, который отражает критичность процесса ветвления в точке x:

$$V(x,\omega) = \lambda(x,\omega) - \mu(x,\omega).$$

Заметим, что набор $\left\{V(x,\omega),\ x \in \mathbb{Z}^d\right\}$ есть поле независимых одинаково распределенных случайных величин. Обозначим через через $F(z)$ функцию распределения $V(0,\omega)$.

Ключевое предположение настоящей главы — асимптотическая гумбелевское распределение потенциала $V(x,\omega)$ при $x \to \infty$. Предполагается, что для функции распределения потенциала $F(z)$ существуют константы

$c > 0$, $\alpha > 1$, такие, что

$$\ln\left(1 - F(z)\right) \sim -ce^{z\alpha},$$

где выражение $f(z) \sim g(z)$ означает, что $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)/g(z) = 1$.

ВСБ в момент времени t описывается набором численностей частиц $N_t(y, \omega)$ в точках $y \in \mathbb{Z}^d$. Эти случайные величины достаточно сложны для прямого изучения, поэтому рассматриваются моменты численности частиц при фиксированном ω:

$$m_n(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x N_t^n\left(y, \omega\right),$$

где $\mathbb{E}_x$ — математическое ожидание при условии $N_0(y, \omega) = \delta_y(x)$. Подобные моменты имеют название «замороженных», так как они определены для конкретной «замороженной» среды, образованной реализациями полей $\mathcal{L}(\omega)$ и $\mathcal{M}(\omega)$.

В рассматриваемой модели среда случайна, поэтому замороженные моменты можно считать случайными величинами. Опять же, случайные величины достаточно сложны для прямого изучения, и в данном случае применяется усреднение по реализациям среды, оно же математическое ожидание относительно $(\varOmega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Подобное усреднение обозначим угловыми скобками $\langle\cdot\rangle$. Усредненные по среде моменты порядка p по устоявшейся терминологии имеют наименование «отожженных» (annealed moments[21]) и обозначаются следующим образом:

$$\langle m_n^p(t, x, y, \omega)\rangle.$$

Задача первой главы — исследовать асимптотику $\langle m_n^p(t, x, y, \omega)\rangle$ при $t \to \infty$. Для доказательства проведена модификация методов из работы С. Альбеверио и соавторов[22]. Для трех лемм, требовавших асимптотически вейбулловских хвостов потенциала, доказаны аналоги, требующие асимптоти-

[21] Gärtner J., Molchanov S. A. Parabolic problems for the Anderson model: I. Intermittency and related topics // Communications in mathematical physics. – 1990. – Vol. 132. – pp. 613-655.

[22] Albeverio S. A., et al., Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment // Markov Processes Relat. Fields. - 2000. - Vol. 6. - pp. 473-516.

ческой гумбелевости хвостов потенциала. Дальнейшее доказательство не требует модификаций разработанной С. Альбеверио и соавторами техники, и полученный результат формулируется в следующей теореме.

Теорема 1. *Для введенного ранее ветвящегося случайного блуждания при фиксированных $x, y \in \mathbb{Z}^d$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\ln \langle m_n^p(t,x,y) \rangle \sim \alpha^{-1} pnt \ln t, \ t \to \infty.$$

Во второй главе рассматривается более простая конфигурация ВСБ, однако здесь исследованы существенно более тонкие характеристики модели. ВСБ в данной главе расположено на одномерной решетке $\mathbb{Z}$ в случайной среде с единственным центром размножения и ограниченной случайной убивающей средой. На решетке вне нуля задано поле независимых одинаково распределенных случайных величин $\mathcal{M} = \{\mu(x), \ x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$, которые определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Поле $\mathcal{M}$ реализуется до старта ВСБ, его реализация обозначена через

$$\mathcal{M}(\omega) = \{\mu(x,\omega), \ x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \ \omega \in \Omega\}.$$

Предполагается, что случайная величина $\mu(x)$ принимает значения из отрезка $[0, c]$, $c \geqslant 0$, и имеет на нем положительную плотность. Реализация $\mathcal{M}(\omega)$ образует на $\mathbb{Z}$ «случайную среду», которая будет определять интенсивность «убивания» частиц. Дополнительно введем параметр $\Lambda \geqslant 0$, который будет отвечать за интенсивность размножения частиц в нуле, а также параметр $\varkappa > 0$, который будет отвечать за интенсивность передвижения частиц по $\mathbb{Z}$.

Пусть в начальный момент времени в нуле находится одна частица. Дальнейшая эволюция происходит следующим образом. Если в произвольный момент времени $t \geqslant 0$ частица находится в нуле, то за малое время $h \to 0$ она: с вероятностью $\Lambda h + o(h)$ разделится надвое, с вероятностью $\varkappa h + o(h)$ переместится равновероятно в одну из соседних точек и с вероятностью $1 - \Lambda h - \varkappa h + o(h)$ останется на месте. Если частица находится в точке $x \in \mathbb{Z}$ вне нуля, то за время h она: с вероятностью $\mu(x,\omega)h + o(h)$ исчезнет, с вероятностью $\varkappa h + o(h)$ переместится равновероятно в одну из соседних точек, с вероятностью $1-\mu(x,\omega)h-\varkappa h+o(h)$ останется на месте. Для описанной модели введем потенциал ветвления $V(x,\omega)$, который отражает критичность процесса ветвления в точке x:

$$V(x,\omega) = \Lambda\delta_0(x) - \mu(x,\omega)(1-\delta_0(x)),$$

где $\delta_y(x)$ — функция Кронекера.

Как и в первой главе, ВСБ в момент времени t описывается набором численностей частиц $N_t(y,\omega)$ в точках $y \in \mathbb{Z}$. Обычно[23,24] рассматривают среднюю численность частиц в каждой точке y: $m_1(t,x,y,\omega) = \mathbb{E}_x N_t\,(y,\omega)$, где $\mathbb{E}_x$ — математическое ожидание при условии $N_0(y,\omega) = \delta_y(x)$. Далее будет изучаться $P(\Lambda,\varkappa,c)$ — вероятность реализации среды, на которой наблюдается экспоненциальный рост средних численностей частиц при заданных Λ, $\varkappa$ и c. Формально

$$P(\Lambda,\varkappa,F_\mu) = \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \exists\lambda, C(x,y) > 0 :\ \lim_{t\to\infty} \frac{m_1(t,x,y,\omega)}{C(x,y)e^{\lambda t}} = 1,\ \forall x,y \in \mathbb{Z}\right\},$$

где $C(x,y) = C(x,y,\omega,\Lambda,\varkappa,F_\mu)$, $\lambda = \lambda(\omega,\Lambda,\varkappa,F_\mu)$.

Цель настоящей главы — оценить $P(\Lambda,\varkappa,c)$ как функцию от $\Lambda,\varkappa,c$. Воспользуемся подходами из теории ВСБ[23,24] и запишем для $m_1(t,x,y,\omega)$ задачу Коши:

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_1(t,x,y,\omega)}{\partial t} &= (\varkappa\Delta m_1)\,(t,x,y,\omega) + V(x,\omega)m_1(t,x,y,\omega),\\ m_1(0,x,y) &= \delta_y(x),\end{aligned}$$

где $\varkappa\Delta f(x) = \varkappa\left(\frac{1}{2}f(x+1)+\frac{1}{2}f(x-1)-f(x)\right)$ является разностным лапласианом на $\mathbb{Z}$. Здесь и далее считаем, что все операторы определены на $l_2(\mathbb{Z})$. Получившийся случайный самосопряженный оператор обозначим через

$$H(\omega) = \varkappa\Delta + V(x,\omega).$$

[23]Gärtner J., Molchanov S. A. Parabolic problems for the Anderson model: I. Intermittency and related topics // Communications in mathematical physics. – 1990. – Vol. 132. – pp. 613-655.

[24]Albeverio S. A., et al., Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment // Markov Processes Relat. Fields. - 2000. - Vol. 6. - pp. 473-516.

При таком обозначении задача Коши примет следующий вид:

$$\frac{\partial m_1(t,x,y,\omega)}{\partial t} = H(x,\omega) m_1(t,x,y,\omega),$$
$$m_1(0,x,y) = \delta_y(x).$$

В подобных задачах поведение m_1 зависит от структуры спектра оператора $H(\omega)$. Структура спектра исследована в одной из лемм настоящей главы. Показано, что спектр $H(\omega)$ почти наверное состоит из неслучайной существенной части $[-2\varkappa - c; 0]$ и, возможно, случайного собственного значения $\lambda(\mathit{\Lambda},\varkappa,c,\omega) > 0$. Из общей теории ВСБ в неслучайной среде и подобного вида спектра следует, что для почти всех ω экспоненциальный рост $m_1(t,x,y,\omega)$ равносилен существованию положительного собственного значения $\lambda(\mathit{\Lambda},\varkappa,c,\omega) > 0$ оператора $H(\omega)$.

Было использовано несколько различных подходов к оценке распределения $\lambda(\mathit{\Lambda},\varkappa,c,\omega) > 0$ и соответствующей $P(\mathit{\Lambda},\varkappa,c)$. Начнем с наиболее простой неслучайной оценки в следующей теореме.

Теорема 2. *Величина $P(\mathit{\Lambda},\varkappa,F_\mu)$ равна единице тогда и только тогда, когда для параметров ВСБ выполняется следующее условие:*

$$\mathit{\Lambda} \geqslant \sqrt{(\varkappa+c)^2 - \varkappa^2} - c. \tag{1}$$

Если условие (1) *выполнено, то для любой реализации сред ω собственное значение $\lambda(\omega)$ лежит в интервале*

$$\lambda(\omega) \in \Big[\sqrt{(\mathit{\Lambda}+c)^2 + \varkappa^2} - (\varkappa + c);\ \sqrt{\mathit{\Lambda}^2 + \varkappa^2} - \varkappa\Big].$$

Численное моделирование, произведенное в третьей главе, покажет, что неслучайные оценки чрезмерно строги, требуется их уточнение. Для получения оценки снизу на величину $P(\mathit{\Lambda},\varkappa,c)$ рассмотрим среду ω_1, в которой убивание частиц происходит только в точках ± 1 с неслучайными интенсивностями $\mu_{\pm 1}$. Этой среде соответствует оператор

$$H_1 = \varkappa\Delta + \delta_0(x)\mathit{\Lambda} - \delta_1(x)\mu_1 - \delta_{-1}(x)\mu_{-1}.$$

Неслучайная среда ω_1 имеет простую структуру, и оператор H_1 допускает точное решение задачи на собственное значение и, как следствие, точное выражение для λ.

Далее рассмотрим набор сред Ω_1, которые в соседних с нулем точках принимают значения $\mu_{\pm 1}$:

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \mu(1,\omega) = \mu_1,\ \mu(-1,\omega) = \mu_{-1}\}\,.$$

Средняя численность частиц на ω_1 будет почти наверное больше средней численности на любой среде из Ω_1. Поэтому если в среде ω_1 положительного собственного значения нет, то и во всех средах из Ω_1 положительного собственного значения нет. Из этого следует, что $P(\Lambda, \varkappa, c)$ не больше, чем $\mathbb{P}\left(\Omega_1\right)$. Данные рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема 3. *Верна следующая оценка сверху:*

$$P(\Lambda, \varkappa, F_\mu) \leqslant \mathbb{P}\left\{\Lambda > \frac{\xi_1}{1+\sigma\xi_1} + \frac{\xi_2}{1+\sigma\xi_2}\right\},$$

где ξ_i *— независимые копии* $\mu(x,\omega)$.

Далее представляет интерес оценка $P(\Lambda, \varkappa, c)$ сверху. Первый вариант получения такой оценки — рассмотреть функцию $\psi(x) = 2^{-a|x|},\ x \in \mathbb{Z}$ и исследовать квадратичную форму $(H(\omega)\psi, \psi)$. Если для какого-то $a > 0$ квадратичная форма $(H(\omega)\psi, \psi)$ положительна с вероятностью p_a, то это означает, что у оператора $H(\omega)$ существует собственное значение как минимум с вероятностью p_a. Данное рассуждение приводит к следующей теореме.

Теорема 4. *Верна следующая оценка снизу:*

$$P(\Lambda, \varkappa, c) \geqslant \max_{a\in(0;\infty)} \mathbb{P}\left(\omega : \Lambda > \varkappa\frac{2^a-1}{2^a+1} + \sum_{\substack{x=-\infty;\\ x\neq 0}}^{\infty} \frac{\mu(x,\omega)}{4^{a|x|}}\right).$$

В частности, для $a = 1$ имеем:

$$P(\varLambda, \varkappa, c) \geqslant \mathbb{P}\left(\omega : \varLambda > \frac{\varkappa}{3} + \sum_{\substack{x=-\infty; \\ x\neq 0}}^{\infty} \frac{\mu(x,\omega)}{4^{|x|}}\right).$$

Второй вариант получения оценки $P(\varLambda, \varkappa, c)$ сверху — исследовать убивающую среду упрощенного вида, которая может образовывать вокруг нуля «острова» без убивания. Рассмотрим следующее распределение для случайных величин $\mu(x,\omega)$:

$$\mu(x,\omega) = \begin{cases} 0, \text{ с вероятностью } p; \\ \mu_{abs}(x,\omega), \text{ с вероятностью } 1-p, \end{cases}$$

где $\mu_{abs}(x,\omega)$ — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $f_{\mu_{abs}}(z)$, такой что $f_{\mu_{abs}}(z)$ положительна для всех $z \in [0; c]$, и равна нулю вне отрезка $[0; c]$. Все $\mu(x,\omega)$ попарно независимы.

Описанная среда с вероятностью p^{2l} образует вокруг нуля «остров», то есть среду из класса $\varOmega_l$:

$$\varOmega_l = \{\omega \in \varOmega : \mu(i,\omega) = 0, \ \forall i \in \{-l \dots l\}\}.$$

Воспользуемся идеей из теоремы 3 и рассмотрим ω_l следующего вида:

$$\mu(x,\omega_l) = \begin{cases} 0, \text{ для } x \in \{-l \dots l\}; \\ c, \text{ для } x \notin \{-l \dots l\}. \end{cases}$$

Среда ω_l из-за присущей ей простоты допускает решение задачи на собственное значение соответствующего ей оператора. Средняя численность частиц на ω_l будет почти наверное меньше средней численности на любой среде из $\varOmega_l$. Поэтому если в среде ω_l положительное собственное значение есть, то оно есть и во всех средах из $\varOmega_l$. из этого следует, что $P(\varLambda, \varkappa, c)$ не меньше, чем $\mathbb{P}(\varOmega_l)$. Данные рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема 5. *Верна следующая оценка снизу:*

$$P(\mathit{\Lambda}, \varkappa, F_\mu) \geqslant \left(\mathbb{P}\{\mu(x,\omega)=0\}\right)^{2\hat{l}},$$

где $\hat{l} \in \mathbb{N}$ — наименьшее число, для которого уравнение (2) имеет положительное решение. Если такого $\hat{l}$ не существует, то $P(\mathit{\Lambda}, \varkappa, F_\mu) = 0$.

$$\frac{2\alpha\varkappa}{1+\sqrt{1-4\alpha^2}} + \varkappa\alpha^{2l} \cdot R(\alpha,\beta) + \mathit{\Lambda} - \varkappa - \lambda = 0, \tag{2}$$

где $\alpha = \frac{\varkappa/2}{\varkappa+\lambda}$, $\beta = \frac{\varkappa/2}{c+\varkappa+\lambda}$, а выражение R определяется следующим образом:

$$R(\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta^{2k+1} - \alpha^{2k+1}\right) C_{k+l}, \tag{3}$$

где C_n обозначает число Каталана.

На первый взгляд, данная теорема может представляться бесполезной в силу своей чрезмерной сложности. Однако в отличие от теоремы 4 она предлагает конкретный алгоритм оценки $P(\mathit{\Lambda}, \varkappa, c)$, который позволяет применить численные алгоритмы, основанные не на методах Монте-Карло. Причем алгоритмы работают быстро из-за экспоненциально быстрой сходимости рядов в теореме.

Третья глава содержит описание и результаты численного моделирования. Цель данной главы — исследовать, возможно ли смоделировать качественные и количественные результаты, предсказанные теорией ВСБ на конечных временах. Поиск подобных исследований для случайной среды результатов не дал. Первая часть главы относится к модели, описанной в ВСБ с гумбелевским потенциалом. Описаны два алгоритма: первый моделирует ВСБ как систему частиц и использует наивную Монте–Карло оценку характеристик этой системы, второй напрямую оценивает представление Фейнмана–Каца при помощи Монте-Карло методов. Первый алгоритм потенциально позволяет оценивать произвольные характеристики системы, однако его реализация в техническом отношении весьма сложна. В частности, в процессе исследования была достигнута достаточно точная оценка только для общей средней численности частиц. В то же время второй алгоритм позволил точно оценить локальные средние численности, однако он сконструирован таким образом, что другие оценки с его помощью произвести нельзя.

Первый использованный способ моделирования системы частиц основан на разложении ВСБ на набор экспоненциальных и полиномиальных случайных величин. Для удобства введем среднее время ожидания $\tau(x)$ в произвольной точке $x \in \mathbb{Z}^d$: $\tau(x) = (\varkappa + \lambda(x,\omega) + \mu(x,\omega))^{-1}$. С точки зрения такого подхода эволюция частицы, находящейся в точке x, выглядит следующим образом. Частица, которая находится в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, ждет экспоненциально распределенное время с параметром $\tau(x)^{-1}$, а затем мгновенно делится, исчезает или перемещается равновероятно в одну из соседних точек решетки. Выбор из этих трех событий производится с соответствующими вероятностями $\lambda(x,\omega)\tau(x)$, $\mu(x,\omega)\tau(x)$ и $\varkappa\tau(x)$. Эволюция частиц при этом происходит независимо друг от друга и от всей предыстории. Алгоритм содержит большое число технических особенностей, которые не приведены в настоящем автореферате. Алгоритм позволяет численно исследовать асимптотики общей численности частиц $m_1(t,0,\omega)$ и $\langle m_1(t,0,\omega)\rangle$, а также исследовать их качественные особенности. Наиболее интересный результат здесь — наличие явной перемежаемости на конечных временах в ВСБ различной размерности и в различных конфигурациях случайной среды.

Для детекции перемежаемости была использована интерпретация перемежаемости как «больших флуктуаций». Перемежаемость приводит к невозможности адекватного описания случайной величины ее моментами. При ее наличии основной вклад в моменты случайной величины вносит небольшое количество редких событий, причем этот вклад увеличивается со временем. В частности, мы должны наблюдать, что основной вклад в первый отожженный момент вносит небольшое количество больших замороженных моментов. Для оценки такого влияния были рассмотрены «урезанные» моменты. При этом значение k-урезанного момента определяется как среднее значение, оцененное по выборке без наименьшего и наибольшего $k\%$ наблюдений. Соответственно, хорошей мерой перемежаемости будет обозначенное $R_k(t)$ отношение обычного отожженного момента и k-урезанного отожженного момента

$$R_k(t) = \frac{\widehat{\langle m_1(t,0)\rangle}}{\widehat{\langle m_1(t,0)\rangle}_{k\text{-trim}}},$$

где угловая крышка означает, что величины были оценены при помощи алгоритма.

На рисунке 1 представлены результаты для ВСБ в случайной гумбелевской среде и в отдельной неслучайной реализации гумбелевской среды. Правая часть рисунка соответствует случаю, когда интенсивности деления и гибели определены в каждой точке решетки, левая часть — случаю, когда деление и гибель возможны только в нуле. Как показало моделирование, величина $R_k(t)$ растет, что свидетельствует о перемежаемости в случае случайной среды. Было проведено численное исследование $R_k(t)$, которое показало, что для всех $k \in [1; 50]$ величина $R_k(t)$ монотонно растет в случайной среде. Вновь заметим, что моделирование системы частиц напрямую сопряжено с серьезными техническими сложностями. В частности, не удалось оценить средние численности частиц в отдельных точках решетки.

Второй вариант моделирования основывается на идее не моделировать ВСБ как систему частиц, а оценивать характеристики ВСБ непосредственно через теоретические результаты. Представление типа Фейнмана–Каца для соответствующей задачи Коши имеет следующий вид:

$$m_1(t,x,y,\omega) = \mathbb{E}_x \left[\exp\left\{ \int_0^t V\left(x_s,\omega\right) \mathrm{d}s \right\} \delta(x_s,y) \right],$$

где x_s — случайное блуждание с генератором $\varkappa\Delta$, а математическое ожидание $\mathbb{E}_x$ вычисляется для траекторий случайного блуждания при условии старта в точке x.

Было принято решение применить метод Монте–Карло и заменить математическое ожидание в формуле типа Фейнмана–Каца на усреднение по выборке из реализаций x_s. Блуждание x_s достаточно просто устроено и соответственно может быть смоделировано за небольшое время.

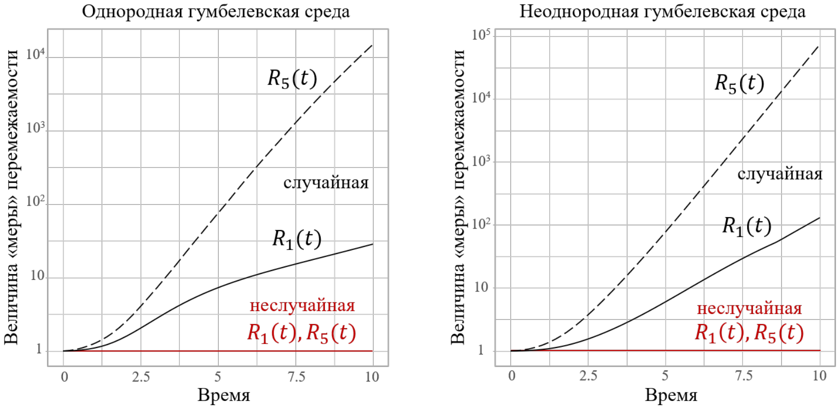

Рис. 1: Оценка меры перемежаемости для ВСБ в различных средах.

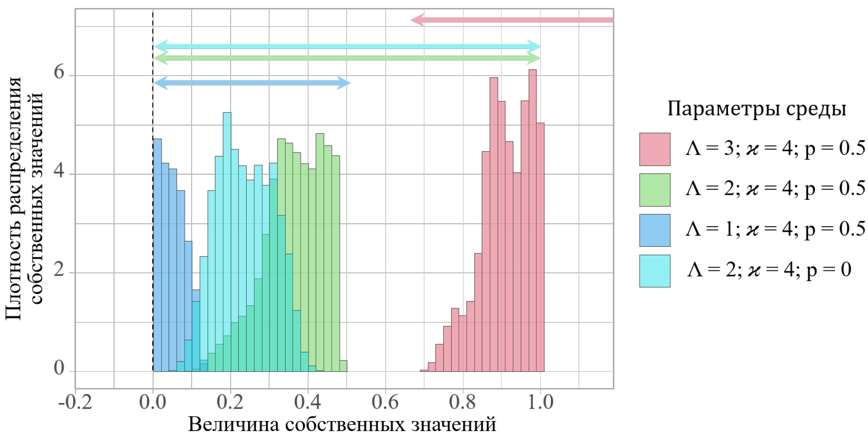

Рис. 2: Оценки распределений собственных значений в зависимости от параметров случайной среды. Стрелки показывают полученные теоретические границы.

Данный подход, в отличие от предыдущего, позволил с достаточной точностью оценить локальные моменты. Также помощью данного алгоритма было установлено, что, по-видимому, невозможно оценить точность асимптотик отожженных моментов. Оценка асимптотики по выборке не сходится к теоретической с достаточной скоростью в силу эффекта перемежаемости.

Вторая часть третьей главы посвящена численному исследованию ВСБ в случайной среде с единственным центром размножения. Основная цель — оценить точность случайных и неслучайных границ для положительного собственного значения $\lambda(\omega)$ оператора $H(\omega)$, введенного в исследование во второй главе. Для решения этой задачи в основном использовались численные методы решения уравнений и методы Монте–Карло.

Было принято решение численно оценить распределение $\lambda(\omega)$ для определенных $\Lambda, \varkappa$ и при фиксированном законе распределения поля $\mathcal{M}$. Для этого при фиксированном ω был разработан алгоритм приближенного решения задачи на собственное значение. Полное описание решения содержится в тексте работы. Было вычислено решение задачи на собственное значение для набора $\omega_1, \ldots, \omega_K$ различных реализаций случайных сред. Наконец, по полученному набору $\lambda(\omega_1), \ldots, \lambda(\omega_K)$ был построен $\hat{P}(\Lambda, \varkappa, c)$ интересующей нас вероятности надкритического поведения ВСБ.

Для моделирования рассматривалось упрощенное распределение случайной гибели:

$$\mu(x, \omega) = \begin{cases} 0, \text{ с вероятностью } p; \\ U[0,1], \text{ с вероятностью } 1-p. \end{cases}$$

На рисунке 2 показаны результаты моделирования распределения собственных значений для нескольких различных наборов параметров среды. Теоретические неслучайные оценки из теоремы 2 второй главы показаны стрелками сверху.

В таблице 1 представлены результаты для теоретических случайных оценок и полученные по выборке значения. Прочерки означают, что теорема неприменима к рассматриваемой случайной среде. К почти наверное надкритичным средам оценки применять бессмысленно, поэтому для них также стоят прочерки. В целом очевидно, что теоретические оценки могут быть улучшены.

$\varLambda$	$\varkappa$	$P(\mu=0)$	П.н. надкр. (теорема 1)	МК оценка $\hat{P}(\varLambda,\varkappa,F_\mu)$	Оценка снизу для $P(\varLambda,\varkappa,F_\mu)$ (т.2)	Оценка снизу для $P(\varLambda,\varkappa,F_\mu)$ (т.4)	Оценка сверху для $P(\varLambda,\varkappa,F_\mu)$ (т.3)
3	4	0,5	есть	1	—	—	—
2	4	0,5	есть	1	—	—	—
1,9	4	0	нет	0,998	0,997	0	1
0,5	4	0,9	нет	0,643	0,520	0,018	0,939
0,5	4	0,99	нет	0,985	0,963	0,683	0,990
0,5	4	0,999	нет	0,999	0,999	0,963	0,998

Таблица 1: Сравнение теоретических оценок вероятности надкритичности ВСБ $P(\varLambda,\varkappa,F_\mu)$ и результатов Монте-Карло (МК) моделирования.

Заключение. Тематика диссертации относится к области анализа ВСБ. В диссертации изучаются характеристики ВСБ в случайной среде в различных предположениях на распределение среды. Перечислим основные результаты диссертации.

Для ВСБ в многомерной случайной среде, в которой случайный потенциал имеет асимптотически гумбелевский правый хвост, без спинальной техники вычислены асимптотики усредненных по среде моментов численностей частиц. Результат сформулирован в виде теоремы. При помощи вычисленных асимптотик показано наличие перемежаемости соответствующих полей моментов. Для ВСБ по одномерной решетке в случайной убивающей среде с единственным центром размножения получен ряд оценок вероятности появления среды, в которой наблюдается экспоненциальный рост. Результат сформулирован в следующих теоремах: об условиях, при которых рассматриваемое ВСБ имеет экспоненциальный рост моментов численностей частиц с вероятностью 1; об оценке сверху вероятности появления среды, в которой наблюдается экспоненциальный рост; о двух оценках снизу для той же вероятности. Для рассмотренных в работе моделей проведены следующие симуляционные эксперименты: моделирование системы частиц методом Монте-Карло, приближенное решение дифференциальных уравнений для моментов при помощи представлений типа Фейнмана-Каца, Монте-Карло оценка плотности распределения положительного собственного значения эволюционного оператора ВСБ. При помощи этих инструментов, показано, что аналог перемежаемости для усредненных по среде моментов ВСБ в случайной однородной и неоднородной среде можно наблюдать на конечных временах. Кроме того, для ВСБ в случайной убивающей среде с единственным центром исследована точность полученных оценок вероятности появления среды, в которой наблюдается экспоненциальный рост.

Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться в направлении вывода без спинальной техники асимптотики усредненных по среде моментов численностей частиц в более широких предположениях на случайный потенциал. Другим направлением может быть улучшение точности оценок вероятности появления среды, в которой наблюдается экспоненциальный рост для ВСБ в случайной убивающей среде с единственным центром. Также представляется интересным проведение численного моделирования старших моментов ВСБ при помощи представления типа Фейнмана-Каца.

Благодарность. Автор благодарит научного руководителя — профессора Елену Борисовну Яровую — за постановки и обсуждение задач, а также за постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS и RSCI

1. *Makarova Y., Kutsenko V., Yarovaya E.* On Two-Type Branching Random Walks and Their Applications for Genetic Modelling // Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. — Cham, Switzerland: Springer, 2021. — C. 255–268.
   SCOPUS SJR — 0.18 / Общий объем 0.73 а.л. / Вклад соискателя 0.29 а.л.
   Постановка задач и результаты принадлежат Ю.К. Макаровой и Е.Б. Яровой. Введение модели и описание приложений (разделы 1 и 2) принадлежат В.А. Куценко.

2. *Kutsenko V., Yarovaya E.* Symmetric branching random walks in random media: comparing theoretical and numerical results // Stochastic Models. — 2023. — Т. 39, №1. — 60–79.
   WoS JIF — 0.7 / общий объем 1.10 а.л. / вклад соискателя 1.10 а.л.
   Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.

3. *Куценко В. А., Соколов Д. Д., Яровая Е. Б.* Неустойчивости в случайных средах и режимы с обострением // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2023. — Т. 163, №4. — 561–573.
Kutsenko V., Sokoloff D., Yarovaya E. Instabilities in random media and peaking regimes // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2023. — Т. 136, №4. — С. 498–508.
WoS JIF — 1.1 / общий объем 1.03 а.л. / вклад соискателя 0.95 а.л. Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой и Д.Д. Соколову, введение принадлежит Д.Д. Соколову, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.

4. *Куценко В. А.* О моментах ветвящегося блуждания в случайной среде с гумбелевским потенциалом // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2023. — Т. 78, №4. — С. 49–53.
Kutsenko V. A. On the Moments of Branching Random Walk in a Random Medium with a Gumbelian Potential // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2023. — Т. 78, №4. — С. 193–197.
WoS JIF — 0.4 / общий объем 0.34 а.л. / вклад соискателя 0.34 а.л.

5. *Куценко В. А., Молчанов С. А., Яровая Е. Б.* Условия надкритичности для ветвящихся блужданий в случайной убивающей среде с единственным центром размножения // Успехи математических наук. — 2023. — Т. 78, №5. — 181–182.
Kutsenko V., Molchanov S., Yarovaya E., Supercriticality conditions for branching walks in a random killing environment with a single reproduction centre // Russian Math. Surveys, — 2023. —Т. 78, №5. — 961–963.
WoS JIF — 0.9 / общий объем 0.17 а.л. / вклад соискателя 0.17 а.л. Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой и С.А. Молчанову, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.

6. *Kutsenko V., Molchanov S., Yarovaya E.* Branching Random Walks in a Random Killing Environment with a Single Reproduction Source // Mathematics. — 2024. — Т. 12, №4. — 550.
WoS JIF — 2.4 / общий объем 1.35 а.л. / вклад соискателя 1.35 а.л.

Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой и С.А. Молчанову, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.

Статьи в трудах научных конференций

7. Kutsenko V., Makarova Y., Yarovaya E. Model of the effect of gene recombination on lethal mutations. an approach using branching random walks // Proceedings of the 5th international conference on stochastic methods (ICSM-5). — Типография РУДН Москва, 2020. — С. 329–333.
Постановка задач и результаты принадлежат Ю.К. Макаровой и Е.Б. Яровой. Введение модели и описание приложений принадлежат В.А. Куценко

8. Куценко В.А., Яровая Е.Б. Моделирование процессов с генерацией и транспортом частиц в случайной среде // Всероссийская научная конференция Математические основы информатики и информационно коммуникационных систем сборник трудов. — Тверской государственный университет, 2021. — С. 190–198.
Постановка задач принадлежит Е.Б. Яровой, все результаты получены В.А. Куценко самостоятельно.

Тезисы докладов в материалах научных конференций.

9. Kutsenko V., Yarovaya E. Evolution Operators of Symmetric Branching Walks with Random Points Perturbation // The 5th International Workshop on Branching Processes and their Applications: Book of Abstracts — 2021. - С. 108–108.

10. Kutsenko V., Yarovaya E. Simulation of branching random walks in random media // Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress. — 2021.

11. Kutsenko V., Yarovaya E. Comparing Numerical Results for Branching Random Walks in Non Random and Random Media // Programme and Abstracts. 14th International Conference of the ERCIM Working Group on Computational and Methodological Statistics (Virtual CMStatistics 2021), Ecosta Econometrics And Statistics.

12. Куценко В. А., Яровая Е. Б. Ветвящееся случайное блуждание в случайной среде с гумбелевским потенциалом // Тезисы докладов, представленных на Седьмой международной конференции по стохастическим методам. — Т. 67. — Теория вероятностей и ее применения, Москва. 2022. — С. 834–834.

13. Kutsenko V., Yarovaya E. Branching random walks with the generation of particles determined by Gumbel-type random potential. Simulation. // International Conference "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures" Book of Abstracts 2022. — C. 26–27.

14. Куценко В.А. Асимптотика моментов численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании в случайной среде // Вторая конференция Математических центров России (7-11 ноября 2022 г.): сборник тезисов. — Издательство Московского университета, Москва. 2022. — С. 142–144.

15. Куценко В. А., Яровая Е. Б. Ветвящееся случайное блуждание в случайной убивающей среде с сильным центром размножения // Тезисы докладов, представленных на Восьмой международной конференции по стохастическим методам. — Т. 68. — Теория вероятностей и ее применения, Москва. 2023. — С. 16.

Куценко Владимир Александрович

Эффекты случайных сред в процессах с генерацией
и блужданием частиц по решеткам

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать __.__.____. Заказ №____
Формат $60 \times 90/16$. Усл. печ. л. 1. Тираж 150 экз.
Типография ________