МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Цупак

Цупак Алексей Александрович

Интегральные уравнения и численный метод решения задач дифракции на системе тел и экранов

Специальность 1.1.6. Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2024

Диссертация подготовлена на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования факультета вычислительной техники Пензенского государственного университета.

Научный консультант	–	**Смирнов Юрий Геннадьевич,** д.ф.-м.н., профессор
Официальные оппоненты:		**Вабищевич Петр Николаевич**, д.ф.-м.н., профессор, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра автоматизации научных исследований, профессор;
		Делицын Андрей Леонидович, д.ф.-м.н., Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), Высшая школа современной математики, лаборатория динамики и стохастики сложных систем им. Р.Л. Добрушина, исследователь;
		Сарафанов Олег Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет, кафедра высшей математики и математической физики, профессор.

Защита диссертации состоится 25 декабря 2024 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, строение 52, факультет ВМК, аудитория 685.

E-mail: ds@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3182

Автореферат разослан «___»_____________2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН А. В. Ильин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих экранах и неоднородных объемных диэлектриках возникают в радиолокации, микроволновой томографии и т.д. Моделирование СВЧ-техники, печатных антенн, а также исследование рассеивателей сложной конструкции приводит к необходимости решения более сложных задач дифракции, в которых рассеиватель представляет собой систему объемных тел и бесконечно тонких экранов, а также частично экранированных тел.

Актуальность разработки и теоретического обоснования численных методов для решения этого нового класса задач дифракции связана с невозможностью получения аналитических решений, за исключением случаев, когда рассеиватель простой формы характеризуется постоянными коэффициентами преломления.

Для приближенного решения задач дифракции применяются метод конечных элементов, разностные методы, метод моментов и т.д. Однако используются они по большей части для решения задач с простейшей геометрией; зачастую отсутствует и доказательство сходимости численных методов.

Таким образом, в последние десятилетия в области задач рассеяния электромагнитных волн на системах экранов и тел сложилась ситуация, когда для численного решения таких задач используются различные приближенные методы, при этом не построена теория разрешимости этих задач и не проведено строгое обоснование численных методов.

Доказательство сходимости численных методов затрудняется отсутствием результатов о разрешимости задач дифракции на системах тел и экранов, а их практическое применение для широкого круга рассеивателей – сложностью в построении расчетных сеток на препятствиях различной размерности; в случае частично экранированных тел для использования некоторых методов требуется также согласование сеток на теле и экране.

Эффективным подходом к решению этих проблем является применение метода интегральных уравнений. В работах А. Б. Самохина[1] определен матричный символ интегро-дифференциального оператора задачи дифракции на анизотропном неоднородном теле, получены результаты об эллиптичности этого оператора и разрешимости системы интегро-дифференциальных уравнений задачи дифракции.

Для исследования задач дифракции на идеально проводящих экранах эффективными оказываются методы теории псевдодифференциальных

[1]Самохин А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и Связь, 1998. – 160 с.

операторов (ПДО). Развитие этих методов и их применение к исследованию задач дифракции на тонких экранах отражено в работах А. С. Ильинского и Ю. Г. Смирнова,[2] в которых исчисление символов ПДО позволило получить фундаментальные результаты о фредгольмовости оператора на экране, а при некоторых ограничениях доказать его эллиптичность.

Теории разрешимости задач дифракции на частично экранированных телах, системах тел и экранов до последнего времени разработано не было.

Построение такой теории – одна из важных задач данной работы, необходимая для теоретического обоснования численного метода решения задач дифракции (метода Галеркина).

Сведение краевых задач к системам интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), исследование операторов этих систем в подходящих пространствах позволяет доказать существование и единственность решения задач дифракции для широкого класса тел и экранов, получить достаточные условия эллиптичности операторов задачи. Это дает возможность применить классические результаты о сходимости метода Галеркина[3] при условии, что базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве решений задачи.

Построение полной системы базисных функций – еще одна актуальная проблема. Наиболее сложным является определение подходящих базисных функций на неплоских бесконечно тонких экранах. Для случая плоских экранов в литературе описаны различные системы функций: функции RWG и roof-top,[4] финитные функции высокого порядка[5] и др.

Методика использования базисных функций на криволинейных экранах не так развита (отметим работу [6], где определены функции на неплоских поверхностях); в частности, не доказано свойство аппроксимации в подходящих пространствах сечений векторных расслоений.

Распространенный подход к численному решению задач на криволинейных экранах состоит в приближении таких экранов кусочно-плоскими; для последних вводятся стандартные базисные функции (типа RWG, roof-top и т.д.).[7] Этот подход удобен с практической точки зрения, но затрудняет теоретическое обоснование проекционного метода, так как поверхность экрана заменяется другой поверхностью.

В диссертации описаны конкретные базисные функции на объемном рас-

[2]Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

[3]Kress R. Linear integral equations : Springer Verlag New York Inc., 1989. – 299 p.

[4]Rao S. M., Wilton D. R. and Glisson A. W. Electromagnetic scattering by surface of arbitrary shape // IEEE Trans. Antennas and Prop. – 1982. – Vol. 30, № 3. – P. 409-411.

[5]Nédélec J.-C. Mixed Finite Elements in $\mathbb{R}^3$ // Numer. Math. – 1980. – Vol. 35, № 3. – P. 315–341.

[6]Wandzura S. Electric current basis functions for curved surface // Electromagnetics. – 1992. – Vol. 12, № 1. – P.77-91.

[7]Сетуха А. В., Семенова А. В. Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 6. – С. 990–1006.

сеивателе и гладких параметризуемых неплоских экранах и доказано свойство аппроксимации в пространствах решений задач дифракции. Полученные в работе результаты позволяют утверждать, что при решении задач дифракции на частично экранированных телах методом Галеркина не требуется согласования расчетных сеток на дву- и трехмерных препятствиях, что значительно расширяет круг применимости метода и упрощает его программную реализацию.

Таким образом, тема исследования, рассматриваемые в диссертации задачи являются актуальными, а полученные результаты – теоретически и практически значимыми.

Цель работы

Цель диссертации – теоретическое обоснование метода Галеркина для решения систем векторных и скалярных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на многообразиях с краем размерности 2 и 3, возникающих при исследовании векторных и скалярных задач дифракции сторонних монохроматических волн на частично экранированных неоднородных телах, а также системах тел и экранов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– разработать строгую математическую постановку задач дифракции;

– доказать единственность решений краевых задач дифракции;

– вывести системы сингулярных ИДУ по области неоднородных тел и поверхности бесконечно тонких экранов;

– доказать эллиптичность матричного интегро-дифференциального оператора;

– доказать непрерывную обратимость оператора системы ИДУ;

– на рассеивателях различной размерности (2 и 3) ввести конечные элементы и определить скалярные или векторные базисные функции в методе Галеркина;

– доказать свойство аппроксимации для выбранных базисных функций;

– доказать сходимость метода Галеркина.

Методы исследования

Для обоснования проекционного метода решения скалярных и векторных задач дифракции в работе применен единый подход, который заключается в исследовании краевых задач и ИДУ на многообразиях с краем различной размерности. Исследование задач дифракции опирается на классические результаты теории потенциала и теории краевых задач, методы теории псевдодифференциальных операторов, действующих в пространствах Соболева, методы функционального анализа и дифференциальной геометрии, а также классические результаты о сходимости проекционных методов.

Научная новизна работы

В диссертации разработан и теоретически обоснован численный метод (метод Галеркина) для решения задач дифракции электромагнитных волн на частично экранированных неоднородных телах, а также на системах тел и экранов. Скалярные задачи дифракции рассмотрены для конкретного случая условий сопряжения на границе области неоднородности: предполагается, что неизвестная функция и ее нормальная производная непрерывны при переходе через границу. Впервые рассмотрен новый класс задач дифракции на неоднородных телах, в которых на одной части границы раздела сред формулируются условия сопряжения, а на другой – граничные условия, отвечающие условиям для поля на экране. При этом при переходе через границу области неоднородности ее характеристики (проницаемость или волновое число) меняются скачкообразно. В работе получены новые результаты о разрешимости таких задач дифракции.

Метод Галеркина сформулирован для систем ИДУ на дву- и трехмерных многообразиях с краем, к которым сводятся краевые задачи дифракции. Показано, что при некоторых ограничениях на параметры среды и объемных рассеивателей матричный интегро-дифференциальный оператор является непрерывно обратимым и эллиптическим, метод Галеркина сходится для этого оператора и выполняется квазиоптимальная оценка скорости сходимости (в векторных задачах – для случая внешней среды с поглощением, т.е. при $\mathrm{Im}(\varepsilon_e) > 0$).

В работе описано построение финитных базисных функций на дву- и трехмерных рассеивателях; предложен способ определения векторных базисных функций на неплоских параметрически заданных экранах. Показано, что построенные базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации.

Из полученных результатов о сходимости проекционного метода следует вывод, важный с точки зрения реализации метода Галеркина в задаче дифракции на частично экранированных телах: для сходимости метода не требуется согласования расчетных сеток на трехмерном рассеивателе и двумерном экране, принадлежащем границе объемного тела.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Проведено теоретическое обоснование метода Галеркина для решения систем ИДУ на ограниченных многообразиях с краем размерности 2 и 3, возникающих в задачах дифракции на частично экранированных телах и системах тел и экранов. Для обоснования метода Галеркина

выполнено аналитическое исследование задач дифракции и получены следующие результаты:

– предложена строгая математическая постановка векторных и скалярных задач дифракции (скалярные задачи рассмотрены для конкретного случая условий сопряжения на границе области неоднородности: неизвестная функция и ее нормальная производная непрерывны при переходе через границу);

– доказана единственность решения краевых задач для системы уравнений Максвелла и уравнения Гельмгольца в случае, когда диэлектрическая проницаемость или коэффициент преломления имеют разрыв на границе области неоднородности;

– краевые задачи дифракции сведены к системам ИДУ по ограниченным многообразиям с краем размерности 2 и 3, причем двумерное многообразие может принадлежать краю трехмерного многообразия или не пересекаться с ним;

– доказаны теоремы о гладкости решений ИДУ при условии гладкости их правых частей;

– доказаны теоремы об эквивалентности исходных краевых задач и систем ИДУ;

– при некоторых ограничениях на диэлектрические свойства рассеивателей и среды доказаны теоремы о непрерывной обратимости и эллиптичности матричных операторов систем ИДУ в выбранных пространствах Соболева на многообразиях с краем размерности 2 и 3 (в векторной задаче эллиптичность оператора имеет место только при $\mathrm{Im}(\varepsilon_e) > 0$);

– на многообразиях с краем размерности 2 и 3 введены скалярные и векторные базисные функции;

– доказано, что введенные базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации в пространствах Соболева (пространствах сечений векторных расслоений на многообразиях с краем), необходимому для сходимости метода Галеркина;

– доказаны теоремы о сходимости метода Галеркина для систем пространствах в пространствах Соболева (в векторных задачах – для случая внешней среды с поглощением).

2. Предложен алгоритм реализации метода Галеркина для систем в ИДУ скалярной и векторной задачах дифракции на системе тел и экранов:

   – описан алгоритм построения расчетных сеток и определения базисных функций для широкого класса тел и (в общем случае неплоских) экранов, удовлетворяющих условию аппроксимации;

– представлены формулы для определения матричных элементов в системах линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач дифракции методом Галеркина;

– установлено, что в задачах дифракции на частично экранированном теле не требуется согласованности расчетных сеток на многообразиях различной размерности.

3. Выполнена программная реализация метода Галеркина для решения систем ИДУ в скалярной и векторной задачах дифракции на системе тел и экранов:

   – показано, что выбранные на криволинейных экранах базисные функции действительно удовлетворяют условию аппроксимации; описан алгоритм построения расчетных сеток и определения базисных функций;

   – показано, что метод Галеркина является сходящимся и допускает эффективную параллельную реализацию на многопроцессорных вычислительных системах;

   – предложен и программно реализован эффективный параллельный алгоритм заполнения матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в методе Галеркина, учитывающий характерные особенности системы ИДУ.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. В ней впервые рассмотрены в строгой математической постановке скалярные и векторные задачи дифракции монохроматических волн на частично экранированных телах и системах тел и экранов (в скалярных задачах дифракции рассмотрены конкретные условия сопряжения на неэкранированной части границы). Проведено исследование таких задач и теоретически обоснован метод Галеркина для их приближенного решения (в векторных задачах – для случая внешней среды с поглощением).

Практическая значимость результатов состоит в разработке аналитических и численных методов исследования задач дифракции на частично экранированных телах, системах тел и экранов; в возможности их использования для создания эффективных вычислительных алгоритмов и программных комплексов для решения задач, возникающих в радиолокации, при создании сложных СВЧ-устройств. Полученные в диссертации теоретические результаты также могут быть использованы при исследовании обратных задач дифракции на препятствиях сложной структуры.

Достоверность результатов

Обоснованность и достоверность результатов, описанных в диссертации, обеспечена строгой постановкой задач, корректным использованием современных математических методов, строгим доказательством теоретических результатов, их непротиворечивостью и сопоставлением их с результатами вычислительных экспериментов.

Апробация работы

Основные результаты диссертации представлены на следующих международных конференциях: Progress In Electromagnetics Research Symposium (Czech Republic, 27–3 August 2007); Progress In Electromagnetics Research Symposium (Russia, 18–21 August 2009); 2015 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (Italy, 7–11 September 2015); 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (Russia, 24–28 August 2015); Days on Diffraction (Russia, 25–29 May 2015); URSI Asia-Pacific Radio Science Conference (Korea, 21–25 August 2016); International Symposium on Electromagnetic Theory (Finland, 14–18 August 2016); Progress In Electromagnetics Research Symposium (Singapore, 19–22 November 2017); Международная конференция, посвященная 90-летию Владимира Александровича Ильина (Москва, 2–6 мая 2018); Пятая Международная конференция, посвященная 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева (Москва, 26–29 ноября 2018); Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовничего (Москва, 13–15 мая 2019); Международная конференция «Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения» (Пенза, 23–27 сентября 2019); XX Международная конференция и молодежная школа «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, 23–27 ноября 2020).

Результаты, полученные в диссертации, использованы при выполнении следующих проектов, где соискатель являлся исполнителем: гранты РФФИ (проекты № 18-01-00219 А, № 21-57-53001 ГФЕН_а), РНФ (№ 14-11-00344, 2014–2016; № 20-11-20087, 2020–2024), ФЦП (проект № 2.1.1/10252 аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)», проект № 2.1.1/1647 аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010), Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 1.2.10, 2011–2013; соглашение № 1.894.2017/4.6, 2017–2019; № 124020200015-7, 2024).

Публикации

Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 37 работах, включая 22 работы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ (все индексируются в WoS и/или Scopus и/или RSCI, из них 8 работ без соавторов, 11 работ индексируются в базах данных Web of Science и Scopus); 1 монографию (2 издания) и 14 прочих публикаций.

Личный вклад автора

Все изложенные в диссертации основные результаты получены автором лично. Вклад соискателя в получение научных результатов (в постановку рассматриваемых задач и их исследование, обсуждение, интерпретацию и приложение полученных теоретических результатов) и опубликованные работы, вошедшие в диссертацию, является решающим. В совместных публикациях Ю. Г. Смирнову принадлежит первоначальная постановка задач и результаты исследования задач дифракции на идеально проводящих экранах; Д. В. Валовику и Ю. Г. Смирнову – частичное доказательство эллиптичности ПДО в области неоднородности; М. Ю. Медведику, Е. Д. Деревянчук, Е. Ю. Смолькину, М. А. Москалевой, О. С. Скворцову – частичная программная реализация численных методов; А. А. Цупаку – конкретные постановки задач дифракции и их исследование, разработка численного метода решения задач дифракции и получение конкретных результатов, необходимых для его теоретического обоснования.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 251 страницу, включая 22 рисунка и 11 таблиц, 14 страниц цитируемой и авторской литературы. Список литературы содержит 150 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулирована ее цель, дан обзор основных публикаций по теме исследований, изложено краткое содержание диссертации и сформулированы ее основные результаты.

Первая глава посвящена теоретическому обоснованию метода Галеркина для решения скалярной задачи дифракции плоской монохроматической волны на системе непересекающихся дву- и трехмерных рассеивателей.

Двумерный рассеиватель образован системами Ω_1 и Ω_2 попарно непересекающихся гладких экранов. Экраны – ориентируемые незамкнутые двумерные параметризуемые поверхности класса C^∞ с гладким краем.

Трехмерный рассеиватель – это ограниченная область Q (возможно, многосвязная, $Q = \cup_j Q_j$) с кусочно-гладкой ориентируемой границей, состоящей из конечного числа поверхностей класса C^∞. Предполагается также, что область Q является липшицевой[8] и удовлетворяет условию конуса. [9] Область Q неоднородна и характеризуется системой гладких функций $k_j(x) \in C^\infty(\overline{Q}_j)$, имеющих ограниченные в $\overline{Q}_j$ производные произвольного порядка. Неоднородность среды описывается функцией

$$k(x) = \begin{cases} k_j(x), & x \in Q_j, \\ k_e, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}. \end{cases}$$

При этом при переходе через границу области Q функция $k(x)$ изменяется *скачкообразно,* т.е. $k(x) \neq k_e$ на ∂Q. Всюду в $\mathbb{R}^3$ выполняются условия

$$\operatorname{Re} k(x) > 0, \ \operatorname{Im} k(x) \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Постановка задачи дифракции. Полное, падающее и рассеянное поля являются монохроматическими:

$$U(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}, \quad U_0(x,t) = u_0(x)e^{-i\omega t}, \quad U_s(x,t) = u_s(x)e^{-i\omega t}. \tag{1.2}$$

Падающее поле определяется заданной гладкой в $\mathbb{R}^3$ функцией $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$; $u_s = u - u_0$ – *рассеянное поле.*

Требуется определить функцию $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \partial\Omega$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \left(\partial Q \cup \overline{\Omega}\right), \tag{1.3}$$

условиям сопряжения на границе ∂Q области неоднородности

$$[u]|_{\partial Q} = 0, \ \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]\Big|_{\partial Q'} = 0, \tag{1.4}$$

[8] Costabel M. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J. of Math. Analysis. – 1988. Vol. 19, № 3. – P. 613–626

[9] Adams R. A., Fournier J. F. Sobolev Spaces. 2nd ed. Amsterdam: Academic Press, 2003. – 305 p.

условиям Дирихле и Неймана во внутренних точках экранов Ω_1 и Ω_2 соответственно

$$u\,|_{\Omega_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Omega_2} = 0, \tag{1.5}$$

условию конечности энергии в произвольной ограниченной области

$$u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \tag{1.6}$$

и условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_s}{\partial r} = ik_e u_s + o\left(r^{-1}\right) \quad \text{при } \operatorname{Im} k_e = 0, \\ &u_s(r) = O\left(r^{-2}\right) \qquad\qquad \text{при } \operatorname{Im} k_e > 0, \quad r := |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Функция $u(x)$ должна удовлетворять условиям гладкости

$$\begin{aligned} &u \in C^2(Q) \bigcap C^\infty\left(\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q} \cup \overline{\Omega})\right) \bigcap_{\delta>0} C\left(\mathbb{R}^3 \setminus (\partial\Omega_{1,\delta})\right) \\ &\bigcap_{\delta>0} C(\overline{M}_+ \setminus \partial\Omega_{2,\delta}) \bigcap_{\delta>0} C(\overline{M}_- \setminus \partial\Omega_{2,\delta}), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где M_-, M_+ – внешняя и внутренняя области по отношению к M, а $M \supset \Omega_2$ – произвольная гладкая замкнутая ориентируемая поверхность; $\partial\Omega_{l,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^3 : dist(x, \partial\Omega_l) < \delta\}$ – трубчатые окрестности края l-го экрана.

Определение 1.1. *Решение $u(x)$ задачи (1.3)–(1.7), удовлетворяющее условиям (1.8), называется* ***квазиклассическим****.*

Теорема 1.1. *[2, 8, 10, 23] Пусть объемный рассеиватель Q характеризуется гладким показателем преломления $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, а всюду в $\mathbb{R}^3$ выполнены условия $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$. Пусть $u(x)$ — квазиклассическое решение задачи дифракции (1.3)–(1.7). Тогда это решение единственно.*

Задача (1.3)–(1.7) сводится к системе ИДУ

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (\mathcal{I} - \mathcal{A})u & - & \mathcal{K}_{12}\varphi_1 & + & \mathcal{K}_{13}\varphi_2 & = & u_0|_Q \\ -\mathcal{K}_{21}u & - & \mathcal{S}_1\varphi_1 & + & \mathcal{K}_{23}\varphi_2 & = & u_0|_{\Omega_1} \\ -\mathcal{K}_{31}u & - & \mathcal{K}_{32}\varphi_1 & - & \mathcal{S}_2\varphi_2 & = & u_{0,\mathbf{n}_x}|_{\Omega_2} \end{array} \right. . \tag{1.9}$$

Операторы в (1.9) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}u = \int_Q \tilde{k}(y) G(x,y) u(y) dy, \quad \mathcal{K}_{12}\varphi_1 = \int_{\Omega_1} G(x,y)\varphi_1(y) ds_y, \\ &\mathcal{K}_{13}\varphi_2 = \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi_2(y) ds_y, \quad \mathcal{K}_{21}u = \int_Q \tilde{k}(y) G(x,y) u(y) dy, \\ &\mathcal{S}_1\varphi_1 = \int_{\Omega_1} G(x,y)\varphi_1(y) ds_y, \qquad \mathcal{K}_{23}\varphi_2 = \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi_2(y) ds, \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\mathcal{K}_{31}u = \int_Q \tilde{k}(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_x}u(y)dy,\ \mathcal{K}_{32}\varphi_1 = \int_{\Omega_1} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_x}\varphi_1(y)ds_y,$$
$$\mathcal{S}_2\varphi_2 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\Big(\int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi_2(y)ds_y\Big).$$

В предыдущих формулах $\mathcal{I}$ – тождественный оператор в $L_2(Q)$, $G(x,y) = = \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$, $\tilde{k}(y) = k^2(y) - k_e^2$.

Кроме того, выписывается представление поля вне рассеивателей:

$$\begin{aligned} u(x) = u_0(x) + \int_Q \tilde{k}(y)G(x,y)u(y)dy + \int_{\Omega_1} G(x,y)\varphi_1(y)ds_y - \\ - \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi_2(y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q} \cup \overline{\Omega}). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Рассматриваются пространства Соболева на многообразиях с краем

$$\begin{aligned} H^{\pm 1/2}\left(\Omega_k\right) = \{\varphi|_{\Omega_k} : \varphi \in H^{\pm 1/2}(M_k)\}, \\ \tilde{H}^{\pm 1/2}\left(\overline{\Omega}_k\right) = \{\varphi \in H^{\pm 1/2}(M_k) : supp\, \varphi \in \overline{\Omega}_k\}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Вводится матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ системы (1.9), а сама система (1.9) переписывается в виде

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \tag{1.13}$$
$$\mathbf{u} = (u, \varphi_1, \varphi_2)^T \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{u}_0 = (u_0|_Q, u_0|_{\Omega_1}, u_{0,\mathbf{n}}|_{\Omega_2})^T \in \mathbf{X}',$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ – области определения и прибытия оператора $\widehat{\mathcal{L}}$:

$$\mathbf{X} = L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}_1\right) \times \tilde{H}^{1/2}\left(\overline{\Omega}_2\right),\ \mathbf{X}' = L_2(Q) \times H^{1/2}\left(\Omega_1\right) \times H^{-1/2}\left(\Omega_2\right).$$

Определение 1.2. *Тройка $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}$, удовлетворяющая (1.13), называется* ***решением*** *системы интегро-дифференциальных уравнений.*

Получены следующие основные теоретические результаты.

Теорема 1.2. *[23] Пусть объемный рассеиватель Q характеризуется гладким показателем преломления $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, а всюду в $\mathbb{R}^3$ выполнены условия $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$. Тогда матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ является эллиптическим.*

Следствие 1.1 (2, 4, 23)**.** *Оператор $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ является фредгольмовым оператором (с нулевым индексом).*

Теорема 1.3. *[2, 4, 23] Пусть падающее поле задается функцией $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, а система (1.9) (или (1.13)) имеет решение*

$$(u, \varphi_1, \varphi_2) \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}_1\right) \times \tilde{H}^{1/2}\left(\overline{\Omega}_2\right).$$

Тогда для поверхностных плотностей φ_1, φ_2 верно включение $\varphi_i \in C^\infty(\Omega_i)$, а полное поле $u(x)$, продолженное по формуле (1.11), удовлетворяет условиям гладкости (1.8).

Теорема 1.4. *[2, 4, 23] Пусть параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям* $k(x) \in C^{\infty}(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^3$, *а падающее поле является всюду гладким,* $u_0 \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$. *Тогда задача дифракции в дифференциальной формулировке* $(\mathcal{P}_1)$ *эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений* $(\mathcal{P}_2)$. *Подробнее, если* $u(x)$ *является квазиклассическим решением задачи* $(\mathcal{P}_1)$, *то* $(u, \varphi_1, \varphi_2)$ *удовлетворяет системе* (1.13) *и верно интегральное представление* (1.11). *Обратно, если тройка* $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}_1\right) \times \tilde{H}^{1/2}\left(\overline{\Omega}_2\right)$ *есть решение системы* (1.13) *при* $u_0 \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, *то функция* $u(x)$, *продолженная в* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{(Q \cup \Omega)}$ *по формуле* (1.11), *является квазиклассическим решением задачи дифракции.*

Теорема 1.5. *[2, 4, 23] Пусть параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям* $k(x) \in C^{\infty}(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^3$. *Тогда оператор* $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ *непрерывно обратим.*

Формулировка метода Галеркина для уравнения

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \tag{1.14}$$

с непрерывно обратимым оператором $\widehat{\mathcal{L}}$, действующим из гильбертова пространства $\mathbf{X}$ в антидвойственное пространство $\mathbf{X}'$, имеет вид

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_m. \tag{1.15}$$

Подпространства $\mathbf{X}_m = span\{\mathbf{v}_1^{(m)}, \ldots, \mathbf{v}_m^{(m)}\}$, $m \in \mathbb{N}$, – линейные оболочки линейно независимых (базисных) функций $\mathbf{v}_k^{(m)}$ $(k = 1, \ldots, m)$ удовлетворяющие *условию предельной плотности* (*условию аппроксимации*)

$$\forall\, u \in \mathbf{X} \inf_{u_m \in \mathbf{X}_m} \|u - u_m\|_{\mathbf{X}} \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{1.16}$$

Приближенное решение $\mathbf{u}_m$ записывается в виде линейной комбинации

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \mathbf{v}_k^{(m)} \tag{1.17}$$

функций $\mathbf{v}_k^{(m)}$ с неизвестными коэффициентами $c_k^{(m)}$, которые находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{v}_k^{(m)}, \mathbf{v}_l^{(m)} \rangle = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_l^{(m)} \rangle \quad \forall\, l = 1, \ldots, m. \tag{1.18}$$

Для $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{X}$ соотношение антидвойственности определяется равенством

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = \int_Q w\overline{u}\, dv + \int_{\Omega_1} \phi_1 \overline{\varphi}_1 ds + \int_{\Omega_2} \phi_2 \overline{\varphi}_2 ds. \tag{1.19}$$

Пусть $v_k^{(1)}(x)$ $(k = 1, \ldots, m_1)$, $v_k^{(2)}(x)$ $(k = 1, \ldots, m_2)$ и $v_k^{(0)}(x)$ $(k = 1, \ldots, m_0)$ – базисные функции на экранах Ω_1, Ω_2 и в области неоднородности Q соответственно. Приближенные решения $\mathbf{u}_m = (u_{m_0}, \varphi_{1,m_1}, \varphi_{2,m_2})$ уравнения (1.14) ищутся в виде

$$
\begin{gathered}
u_{m_0}(x) = \sum_{k=1}^{m_0} c_k^{(0)} v_k^{(0)}(x),\ x \in Q, \\
\varphi_{1,m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)} v_k^{(1)}(x),\ x \in \Omega_1,\ \varphi_{2,m_2}(x) = \sum_{k=1}^{m_2} c_k^{(2)} v_k^{(2)}(x),\ x \in \Omega_2.
\end{gathered}
\tag{1.20}
$$

Система линейных алгебраических уравнений (1.18) принимает вид

$$
\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}, \tag{1.21}
$$

где матрица $\mathbf{A}$ и столбец $\mathbf{b}$ записываются в блочном виде:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \end{bmatrix}. \tag{1.22}
$$

Матричные элементы A_{ij}^{kl} определяются равенствами

$$
\begin{aligned}
A_{ij}^{00} &= \int_Q v_j^{(0)}(x) v_i^{(0)}(x) dx - \int_Q \int_Q G(x,y)(k^2(y) - k_e^2) v_j^0(y) v_i^{(0)}(x)\, dy dx, \\
A_{ij}^{01} &= \int_Q \int_{\Omega_1} G(x,y) v_j^{(1)}(y) v_i^{(0)}(x)\, ds_y dx, \\
A_{ij}^{02} &= \int_Q \int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y \partial \mathbf{n}_x} v_j^{(2)}(y) v_i^{(0)}(x),\ ds_y dx, \\
A_{ij}^{10} &= -\int_{\Omega_1} \int_Q G(x,y)(k^2(y) - k_e^2) v_j^{(0)}(y) v_i^{(1)}(x)\, dy ds_x, \\
A_{ij}^{11} &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_1} G(x,y) v_j^{(1)}(y) v_i^{(1)}(x)\, ds_y ds_x, \\
A_{ij}^{12} &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y \partial \mathbf{n}_x} v_j^{(2)}(y) v_i^{(1)}(x)\, ds_y ds_x, \\
A_{ij}^{20} &= \int_{\Omega_2} \int_Q G(x,y)(k^2(y) - k_e^2) v_j^{(0)}(y) v_i^{(2)}(x)\, dy ds_x, \\
A_{ij}^{21} &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} G(x,y) v_j^{(1)}(y) v_i^{(2)}(x)\, ds_y ds_x, \\
A_{ij}^{22} &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y \partial \mathbf{n}_x} v_j^{(2)}(y) v_i^{(2)}(x)\, ds_y ds_x;
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_i^0 = \int_Q u_0(x) v_i^{(0)}(x) dx,\ b_i^1 = \int_{\Omega_1} u_0(x) v_i^{(1)}(x) ds_x, \\
&b_i^2 = \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathbf{n}} v_i^{(2)}(x) ds_x.
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

В работе определены конкретные базисные функции на дву- и трехмерных рассеивателях, удовлетворяющие свойству аппроксимации.

Для задания базисных функций $v_i^{(0)}$ на неоднородном объемном теле Q сначала вводится равномерная сетка на параллелепипеде:

$$Q' = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x_1 < a_2,\ b_1 < x_2 < b_2,\ c_1 < x_3 < c_2\right\} \supset Q,$$

$$x_{1,i_1} = a_1 + h_1 i_1,\ x_{2,i_2} = b_1 + h_2 i_2,\ x_{3,i_3} = c_1 + h_3 i_3, \quad i_k = 0, ..., n_k, \qquad (1.25)$$

где $h_1 = \frac{a_2-a_1}{n_1}, h_2 = \frac{b_2-b_1}{n_2}, h_3 = \frac{c_2-c_1}{n_3},\ n_k \in \mathbb{N}$. В Q' вводятся конечные элементы

$$Q'_{i_1 i_2 i_3} = \left\{x : x_{k,i_k-1} < x_k < x_{k,i_k}, k = 1, 2, 3,\ i_k = 1, \ldots, n_k - 1\right\}. \qquad (1.26)$$

В области Q сложной формы определяются элементы $Q_{i_1 i_2 i_3} = Q \cap Q'_{i_1 i_2 i_3}$ и базисные функции $v_i^{(0)}$ с носителями положительного объема:

$$v_i^{(0)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(0)}(x) = \begin{cases} 1,\ x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0,\ x \notin Q_{i_1 i_2 i_3}. \end{cases} \qquad (1.27)$$

Для построения базисных функций на плоском экране Ω_1 вводится прямоугольник $D = \left\{t \in \mathbb{R}^2 : a_1 < t_1 < a_2,\ b_1 < t_2 < b_2\right\} \supset \Omega_1$, на котором определяются конечные элементы

$$D_j = D_{j_1 j_2} = \left\{t : t_{k,j_k} < t_k < t_{k,j_k+1}\right\}, t_{1,j_1} = a_1 + h_1 j_1,\ t_{2,j_2} = b_1 + h_2 i_2,$$

где $j_k = 0, ..., n_k - 1,\ h_1 = \frac{a_2-a_1}{n_1}, h_2 = \frac{b_2-b_1}{n_2},\ m_1 = n_1 n_2$. Вводятся финитные кусочно-постоянные функции

$$\psi_j = \psi_{j_1,j_2} = \begin{cases} 1,\ x \in \overline{D}_{j_1 j_2}, \\ 0,\ x \notin \overline{D}_{j_1 j_2}, \quad j_k = 0, \ldots, n_k - 1. \end{cases} \qquad (1.28)$$

Для определения базисных функций на неплоском экране Ω_1 вводятся конечные элементы $\omega_{1,j}$ $(j = 1, \ldots, m_1)$, пересекающиеся по кусочно-гладким кривым, и такие, что $\overline{\Omega}_1 = \bigcup\limits_i \overline{\omega}_{1,j}$. Требуется выполнение условия

$$\lim_{m_1 \to \infty} \max_j diam(\omega_{1,j}) = 0. \qquad (1.29)$$

Рассмотрен случай параметризуемой гладкой поверхности Ω_1 :

$$\Omega_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2),\ i = 1, 2, 3\right\},\ (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \qquad (1.30)$$

где D – ограниченная двумерная область, а функции $x_i \in C^\infty(\overline{D})$. Область параметров D разбивается на такие конечные элементы D_i, что $\lim\limits_{m_1 \to \infty} \max\limits_i diam(D_i) = 0$. Определяются финитные базисные функции

$$v_j^{(1)}(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \overline{\omega}_{1,j}, \\ 0,\ x \notin \overline{\omega}_{1,j}, \end{cases} \qquad (1.31)$$

где $\omega_{1,j}$ – образы прямоугольников $D_j \subset D$ при параметризации (1.30). Так как $x_i(t_1, t_2)$ – гладкие функции, то условие (1.29) удовлетворено.

В работе определены базисные функции на гладких (класса C^∞) поверхностях Ω_2 с краем, заданных параметрически:

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2),\ i = 1, 2, 3\},\ (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \tag{1.32}$$

где $D = \{(t_1, t_2) : t_i \in (0; a_i)\}$ – прямоугольник. Отображение $x(t) : D \to \Omega_2$ – диффеоморфизм класса C^∞: $x \in C^\infty(\overline{D})$, $x^{-1} = \kappa \in C^\infty(\overline{\Omega}_2)$.

На прямоугольнике D рассматриваются кусочно-линейные функции $v_i^{(2,0)}(t_1, t_2)$ с шестиугольным носителем.[10] В качестве базисных функций $v_i^{(2)}(x)$ на неплоском экране рассматриваются функции

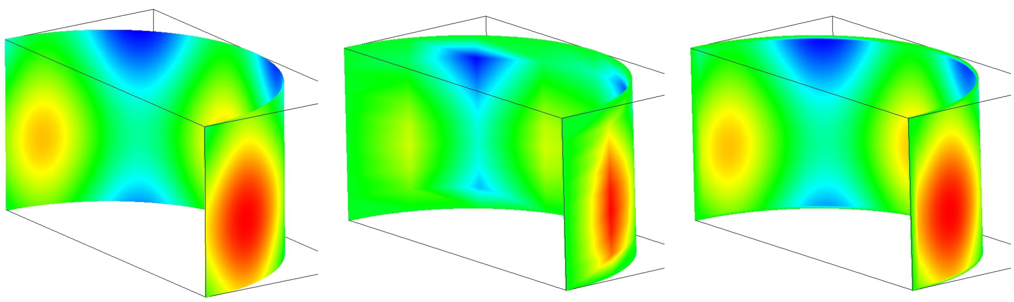
$$v_i^{(2)}(x) = v_i^{(2,0)}(\kappa(x)),\ x \in \Omega_2. \tag{1.33}$$

Проанализирован пример аппроксимации функции $u(x) = \sin(3x_1) + \sin(3x_2) + \sin(2x_3)$, график которой представлен на рисунке 1 (а).

На рисунках 1 (б) и (в) изображены приближения u_{m_2} функции u, отвечающие равномерным сеткам в области параметров D, а в таблице 1 – значения отклонений $\|u - u_{m_2}\|_\infty = \max\limits_{x \in \Omega_{2,C}} |u(x) - u_{m_2}(x)|$.

Таблица 1: Отклонение $\|u - u_{m_2}\|_\infty$ на цилиндрическом экране $\Omega_{2,C}$ в зависимости от значения числа разбиения n ($m_2 = (n-1)^2$) множества D

n	4	8	16	32	64
$\|u - u_{m_2}\|_\infty$	1.5	.324	.185	.098	.057



(а) (б) (в)

Рис. 1: График функции $u(x)$ (а); графики функций $u_{m_2}(x)$ (б), (в)

Теорема 1.6. *[10] Функции $v_i^{(2)}(x)$ на гладком (класса C^∞) ориентируемом параметрически заданном экране Ω_2 удовлетворяют условию аппроксимации в $\tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$.*

Теорема 1.7. *[2, 4] Векторные базисные функции $(v_{i_1}^{(0)}, v_{i_2}^{(1)}, v_{i_3}^{(2)})$ удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве* $\mathbf{X}$.

[10] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. – 416 с.

Теорема 1.8. *[2, 4] Пусть Q – область с кусочно-гладкой границей, параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^3$, а Ω_1, Ω_2 – ориентируемые гладкие (класса C^∞) незамкнутые параметрически заданные поверхности. Пусть базисные функции $(v_{i_0}^{(0)}, v_{i_1}^{(1)}, v_{i_2}^{(2)})$ удовлетворяют условию аппроксимации* (1.16).

Тогда метод Галеркина (1.15) *является сходящимся для оператора $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, приближенные решения $\mathbf{u}_m$ сходятся к единственному решению $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$ уравнения* (1.13) *и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \tag{1.34}$$

Вторая глава посвящена теоретическому обоснованию метода Галеркина для решения скалярной задачи дифракции плоской монохроматической волны на частично экранированных объемных неоднородных телах.

Рассмотрена система неоднородных тел Q_j, расположенных в трехмерном однородном пространстве, характеризующихся функциями

$$k_j(x) \in C^\infty(\overline{Q}_j). \tag{2.1}$$

Неоднородность среды в целом описывается кусочно-гладкой функцией

$$k(x) = \begin{cases} k_j(x), & x \in \overline{Q}_j, \\ k_e, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}, \end{cases}$$

причем $k(x) \neq k_e$ на ∂Q. Всюду в $\mathbb{R}^3$ выполняются условия

$$\operatorname{Re} k(x) > 0, \ \operatorname{Im} k(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}. \tag{2.2}$$

Рассмотрены незамкнутые ориентируемые параметризуемые ограниченные поверхности Ω_1, Ω_2 класса C^∞, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \varnothing$. Предполагается, что края поверхностей $\partial\Omega_i = \overline{\Omega}_i \setminus \Omega_i$ – кривые класса C^∞ без точек самопересечения. Вводится поверхность $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и трубчатые окрестности $\partial\Omega_{i,\delta}$ края iго экрана, $\partial\Omega_{i,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^3 : dist(x, \partial\Omega_i) < \delta\}$.

В задаче дифракции на *частично экранированном теле* предполагается, что экраны лежат на гладкой части границы области неоднородности:

$$\Omega_1, \Omega_2 \subset \partial Q, \quad mes\big(\partial Q \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)\big) > 0, \tag{2.3}$$

где $\partial Q \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ – открытое множество на поверхности ∂Q.

Постановка задачи дифракции. Требуется определить комплексно-значную функцию $u = u(x)$ $(x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$, удовлетворяющую в классическом смысле вне границы тела однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2(x) u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial Q, \tag{2.4}$$

условиям сопряжения на «неэкранированной» части границы области Q

$$[u]|_{\partial Q\setminus\overline{\Omega}} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]\Bigg|_{\partial Q\setminus\overline{\Omega}} = 0, \tag{2.5}$$

краевым условиям Дирихле на экране Ω_1 и условиям Неймана на Ω_2

$$u|_{\Omega_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Omega_2} = 0, \tag{2.6}$$

условиям ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства

$$u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \tag{2.7}$$

и условиям излучения на бесконечности для рассеянного поля u_s

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_s}{\partial r} = ik_e u_s + o(r^{-1}) && \text{при } \operatorname{Im} k_e = 0,\\ &u_s(r) = O(r^{-2}) && \text{при } \operatorname{Im} k_e > 0, \quad r := |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Искомая функция $u(x)$ должна удовлетворять условиям гладкости

$$\begin{aligned} u \in C^2(Q) \bigcap C^\infty\left(\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q\right) \bigcap C^1\left(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}\right) \bigcap_{\delta>0} C\left(\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{\Omega}_2 \cup \Omega_{1,\delta})\right)\\ \bigcap_{\delta>0} C^1\left((\overline{M}_+ \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \partial\Omega_{2,\delta})) \cup (\overline{M}_- \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \partial\Omega_{2,\delta}))\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где M – произвольная гладкая замкнутая ориентируемая поверхность, $\Omega \subset M$, а M_-, M_+ – внешняя и внутренняя области по отношению к M.

Определение 2.1. *Решение $u(x)$ задачи* (2.4)–(2.8)*, удовлетворяющее условиям* (2.9)*, называется* ***квазиклассическим****.*

Теорема 2.1. *[5, 11, 12, 23] Пусть объемный рассеиватель Q характеризуется гладким показателем преломления $k(x) \in C^\infty(\overline{Q}_j)$, а всюду в $\mathbb{R}^3$ выполнены условия $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$. Пусть $u(x)$ – квазиклассическое решение задачи дифракции* (2.4)–(2.8)*. Тогда это решение единственно.*

Получена система ИДУ

$$\widehat{\mathcal{L}}\left((u, \varphi_1, \varphi_2)^T\right) = (u_0|_Q, u_0|_{\Omega_1}, \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Omega_2})^T. \tag{2.10}$$

Матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ системы и представление полного поля вне рассеивателя определяются так же, как и в предыдущей главе, и рассматривается как отображение в пространствах Соболева на многообразиях с краем:

$$\widehat{\mathcal{L}} = \mathbf{X} \to \mathbf{X}',$$

где $\mathbf{X} = L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$, $\mathbf{X}' = L_2(Q) \times H^{1/2}(\Omega_1) \times H^{-1/2}(\Omega_2)$.

Определение 2.2. ***Решением*** *системы уравнений* (2.10) *называется тройка $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}$, удовлетворяющая уравнению* (2.10).

Теорема 2.2. *[5,11] Пусть рассеиватель Q характеризуется показателем преломления $k(x) \in C^{\infty}(\overline{Q}_j)$ и всюду в $\mathbb{R}^3$ выполнены условия* $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$. *Тогда оператор $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ является эллиптическим.*

Теорема 2.3. *[5,23] Пусть падающее поле задается функцией $u_0 \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, а система уравнений* (2.10) *имеет решение*

$$(u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}.$$

Тогда для поверхностных плотностей φ_1, φ_2 верно включение $\varphi_i \in C^{\infty}(\Omega_i)$, а полное поле $u(x)$, продолженное вне Q согласно (1.11), *удовлетворяет условиям гладкости* (2.9) *и* (2.7).

Теорема 2.4. *[5, 11, 23] Пусть параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям $k(x) \in C^{\infty}(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^3$, а падающее поле всюду является гладким, $u_0 \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$. Тогда задача дифракции в дифференциальной формулировке $(\mathcal{P}_1)$ эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений $(\mathcal{P}_2)$. Подробнее, если $u(x)$ является квазиклассическим решением задачи $(\mathcal{P}_1)$, то $(u, \varphi_1, \varphi_2)$ удовлетворяет системе* (2.10) *и верно интегральное представление* (1.11). *Обратно, если тройка $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}_1\right) \times \tilde{H}^{1/2}\left(\overline{\Omega}_2\right)$ есть решение системы* (2.10) *при $u_0 \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, то функция $u(x)$, продолженная в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ по формуле* (1.11), *является квазиклассическим решением задачи дифракции.*

Теорема 2.5. *[5, 11, 12, 23] Пусть параметры среды и рассеивателей удовлетворяют условиям $k(x) \in C^{\infty}(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^3$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ непрерывно обратим.*

Формулировка метода Галеркина для задачи дифракции на частично экранированном теле аналогична формулировке проекционного метода в задаче дифракции на системе непересекающихся тел и экранов.

Доказана сходимость метода Галеркина в скалярной задаче дифракции на частично экранированном теле.

Теорема 2.6. *[4, 5] Пусть область Q с кусочно-гладкой границей характеризуется заданной комплекснозначной функцией $k(x)$, параметры объемного рассеивателя и среды в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ удовлетворяют условиям*

$$k(x) \in C^{\infty}(\overline{Q}),\ \operatorname{Re} k(x) > 0,\ \operatorname{Im} k(x) \geqslant 0; \quad \operatorname{Re} k_e > 0,\ \operatorname{Im} k_e \geqslant 0, \qquad (2.11)$$

а Ω_1, Ω_2 – ориентируемые гладкие (класса C^{∞}) незамкнутые параметрически заданные поверхности. Пусть для любых $m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ в области Q и на экранах Ω_1, Ω_2 определены произвольным образом базисные функции $v_{i_0}^{(0)}$, $v_{i_1}^{(1)}$ и $v_{i_2}^{(2)}$, удовлетворяющие условию аппроксимации (1.16) *в пространствах $L_2(Q)$, $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1)$ и $\tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$ соответственно.*

Тогда метод Галеркина является сходящимся для оператора $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, *приближенные решения* $\mathbf{u}_m$ *сходятся к единственному решению* $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$ *уравнения* (2.10) *и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \tag{2.12}$$

В работе исследована проблема согласованности расчетных сеток на дву- и трехмерных рассеивателях в задаче дифракции на частично экранированных телах. Теорема 2.6 о сходимости метода Галеркина позволяет ввести минимальные ограничения на расчетные сетки, необходимые для выполнения условия аппроксимации на этих сетках – это условие (1.29). Согласования сеток в области Q и экранах Ω_i, лежащих на границе области, $\Omega_i \subset \partial Q$, не требуется.

Базисные функции определяются так же, как и в задаче на системе непересекающихся тел и экранов. Показано, что эти базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации. Доказано утверждение о предельной плотности подпространств $\mathbf{X}_m$ в $\mathbf{X}$.

Теорема 2.7. *[4] Векторные базисные функции* $(u_{i_1}^{(0)}, u_{i_2}^{(1)}, u_{i_3}^{(2)})$ *удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве* $\mathbf{X}$.

Третья глава посвящена теоретическому обоснованию метода Галеркина для решения векторной задачи дифракции электромагнитной волны на системе непересекающихся дву- и трехмерных рассеивателей.

Рассматривается задача дифракции электромагнитной монохроматической волны с круговой частотой $\omega > 0$ на системе рассеивателей, расположенных в изотропной однородной среде $\mathbb{R}^3$, характеризующейся заданными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей ε_e, μ_e :

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0,\ \operatorname{Im}\varepsilon_e \geqslant 0, \quad \operatorname{Re}\mu_e > 0,\ \operatorname{Im}\mu_e = 0. \tag{3.1}$$

Волновое число $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} k_e > 0,\ \operatorname{Im} k_e \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Двумерные рассеиватели представляют собой бесконечно тонкие идеально проводящие экраны Ω_i, не пересекающиеся друг с другом. Экран Ω_i определяется как незамкнутое двумерное многообразие с краем класса C^∞. Край $\partial\Omega_i$ каждого экрана – объединение конечного числа кривых класса C^∞ без точек самопересечения, сходящихся под углами, отличными от нулевого. Вводятся обозначения $\Omega = \cup\Omega_i$ и $\partial\Omega = \bigcup \partial\Omega_i$ и определяются трубчатые δ-окрестности края i-го экрана:

$$\partial\Omega_{i,\delta} := \{x \in \mathbb{R}^3 : dist(x, \partial\Omega_i) < \delta\}, \quad \delta > 0. \tag{3.3}$$

В качестве трехмерного рассеивателя рассматривается объемное тело Q – ограниченная трехмерная область с гладкой границей ∂Q класса C^∞

(Q может быть многосвязной, $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$). Область Q характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_e и тензор-функцией $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ диэлектрической проницаемости с гладкими компонентами: $\varepsilon_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$.

Вводится тензор относительной диэлектрической проницаемости $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) =$

$= \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)/\varepsilon_e$, такой, что при каждом $x \in \overline{Q}$ существует тензор

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \tag{3.4}$$

где $\widehat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор. Предполагается, что для для $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ в области $\overline{Q}$ выполнено одно из следующих условий:

$$\operatorname{Re}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\big) \geqslant C_1 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \tag{3.5}$$

$$\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\big) \geqslant C_2 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0 \text{ или} \tag{3.6}$$

$$-\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\big) \geqslant C_3 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 > 0 \tag{3.7}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$.

Постановка задачи. Рассматривается задача дифракции стороннего электромагнитного поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_0 \tag{3.8}$$

на системе непересекающихся тел и экранов: $\overline{Q} \cap \overline{\Omega} = \varnothing$.

Требуется определить всюду в $\mathbb{R}^3$, за исключением края экрана $\partial\Omega$, полное электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, удовлетворяющее условиям гладкости (ниже P^+, P^- – произвольные области, «внешняя» и «внутренняя» по отношению к Ω, и такие, что $\Omega \subset \partial P^\pm$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^\infty \left(\mathbb{R}^3 \setminus (\partial Q \cup \overline{\Omega})\right) \bigcap C(\overline{Q}) \bigcap C(\mathbb{R}^3 \setminus (Q \cup \overline{\Omega}) \\ \bigcap_{\delta>0} C(\overline{P^+} \setminus \partial\Omega_\delta) \bigcap_{\delta>0} C(\overline{P^-} \setminus \partial\Omega_\delta), \end{aligned} \tag{3.9}$$

удовлетворяющее в классическом смысле системе уравнений Максвелла всюду вне границы ∂Q области неоднородности и экрана $\overline{\Omega}$,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_e \mathbf{H}, \tag{3.10}$$

условиям сопряжения на границе области неоднородности

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q} = 0, \tag{3.11}$$

краевым условиям для касательных компонент электрического поля во внутренних точках *идеально проводящего* экрана Ω

$$\mathbf{E}_\tau \,|_\Omega = 0, \tag{3.12}$$

условиям конечности энергии в любой ограниченной области пространства

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \tag{3.13}$$

и условиям излучения Сильвера – Мюллера для рассеянного поля

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = o(1/r), & \operatorname{Im} k_e > 0, \\ \mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s = o(1/r), & \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_s = o(1/r), \\ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = O(1/r), & \operatorname{Im} k_e = 0 \end{array} \tag{3.14}$$

при $r \to \infty$. Здесь $r = |x|,\ x \in \mathbb{R}^3$.

Определение 3.1. *Решение* $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ *задачи* (3.10)–(3.14), *удовлетворяющее условиям* (3.9), *называется* ***квазиклассическим***.

Теорема 3.1. *[6, 18, 19, 23] Пусть свободное от рассеивателей трехмерное пространство характеризуется постоянными значениями проницаемостей* ε_e, μ_e, *удовлетворяющих условиям* (3.1) *и* (3.2). *Диэлектрическая проницаемость в* $\overline{Q}$ *удовлетворяет одному из условий:*

- *если* $\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(x) \neq 0$, *то тензор* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ *удовлетворяет условиям* (3.4)–(3.7) *и является симметрическим;*
- *если* $\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(x) \equiv 0$ *в* Q, *то* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$.

Тогда если квазиклассическое решение задачи (3.10)–(3.14) *существует, то оно единственно.*

Задача дифракции на системе тел и экранов, сформулированная в неограниченном трехмерном пространстве, сводится к системе ИДУ по области неоднородных тел и поверхности идеально проводящих экранов. Выводится система ИДУ

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}(x) =& (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy + \\ & + (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y + \mathbf{E}_0(x),\ x \in Q, \\ & \Big(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy - \\ & - (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y \Big)_\tau = \mathbf{E}_{0,\tau}(x),\ x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.15}$$

и представление полного электрического поля вне экрана и границы области неоднородности

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) =& (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_Q G(x,y)(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)dy + \\ & + (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y + \mathbf{E}_0(x),\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{\Omega} \cup \partial Q). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь $\mathbf{J} = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}$ – неизвестный вектор тока поляризации в Q, $\mathbf{u}$ – неизвестная поверхностная плотность тока на Ω; $(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r - \widehat{\mathbf{I}})^{-1} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathbf{E} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}$, а $(\mathbf{v})_\tau = \mathbf{v} - \boldsymbol{\nu}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu})$ – касательная компонента вектора $\mathbf{v}$ во внутренних точках экрана Ω ($\boldsymbol{\nu}$ – вектор нормали на Ω).

Магнитное поле $\mathbf{H}$ определяется через решение $\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(Q)$ формулой

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}_0(x) - i\omega\varepsilon_e \operatorname{rot}\int\limits_Q G(x,y)(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3.17}$$

Вводится матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}} & \widehat{\mathcal{K}}_1 \\ \widehat{\mathcal{K}}_2 & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J} &:= \widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}(x) - (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy,\ x \in Q,\\
\widehat{\mathcal{S}}\mathbf{u} &:= \Big(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\Big)_\tau,\ x \in \Omega,\\
\widehat{\mathcal{K}}_1\mathbf{u} &:= -(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y,\ x \in Q,\\
\widehat{\mathcal{K}}_2\mathbf{J} &:= \Big(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy\Big)_\tau,\ x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J} &:= \mathbf{L}_2(Q) \to \mathbf{L}_2(Q), \quad \widehat{\mathcal{K}}_1\mathbf{u} := W(\overline{\Omega}) \to \mathbf{L}_2(Q),\\
\widehat{\mathcal{K}}_2\mathbf{J} &:= \mathbf{L}_2(Q) \to W'(\Omega), \quad \widehat{\mathcal{S}}\mathbf{u} := W(\overline{\Omega}) \to W'(\Omega).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Пространство $W(\overline{\Omega})$ определено[11] как пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|\mathbf{u}\|_W^2 = \|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{-1/2}^2.$$

Введены обозначения $\mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega}) =: \mathbf{X}$ и $\mathbf{L}_2(Q) \times W' =: \mathbf{X}'$.

Окончательно система уравнений записывается в виде

$$\widehat{\mathcal{L}}(\mathbf{J},\mathbf{u}) = \mathbf{f} = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})^T. \tag{3.20}$$

Определение 3.2. ***Решением уравнения*** (3.20) *называется удовлетворяющая системе* (3.15) *пара векторов* $(\mathbf{J},\mathbf{u})$ *из пространства* $\mathbf{X}$.

Получены следующие основные теоретические результаты.

Теорема 3.2. *[21, 23] Пусть в* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ *выполнены условия*

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0,\ \operatorname{Im}\varepsilon_e \geqslant 0, \quad \operatorname{Re}\mu_e > 0,\ \operatorname{Im}\mu_e = 0. \tag{3.21}$$

Пусть в $\overline{Q}$ *тензор относительной диэлектрической проницаемости* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ *таков, что в* $x \in \overline{Q}$ *существует ограниченный тензор*

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \tag{3.22}$$

где $\widehat{\mathbf{I}}$ *– единичный тензор. Пусть для* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ *в* $\overline{Q}$ *выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

$$\operatorname{Re}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \tag{3.23}$$

[11] Ильинский, А.С., Смирнов, Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

$$\operatorname{Im}\bigl(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\bigr) \geqslant C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2>0 \text{ или} \tag{3.24}$$

$$-\operatorname{Im}\bigl(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\bigr) \geqslant C_3|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3>0 \tag{3.25}$$

для всех векторов $\mathbf{v}\in\mathbb{C}^3$.

Тогда оператор $\widehat{\mathcal{A}}:\mathbf{L}_2(Q)\to\mathbf{L}_2(Q)$, *определенный по формуле* (3.18), *является эллиптическим.*

Теорема 3.3. *[18, 23] Пусть тензор диэлектрической проницаемости удовлетворяет условиям* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)=\varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$, *причем* $\varepsilon(x)\in C^\infty(\overline{Q})$ *и* $\varepsilon_r(x)>1$ *для всех* $x\in\overline{Q}$. *Пусть* $(\mathbf{E},\mathbf{u})\in\mathbf{X}$ *– решение системы* (3.15), *отвечающее падающему полю* $\mathbf{E}_0(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. *Тогда вектор-функции* $\mathbf{E},\mathbf{H}$, *определенные согласно* (3.16)–(3.17), *удовлетворяют условиям* (3.9). *Кроме того, имеет место включение*

$$\mathbf{E},\mathbf{H}\in C^{0,\alpha}(\overline{Q})\cap C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^3\setminus(Q\cup\Omega_\delta)\right), \tag{3.26}$$

где $0<\alpha<1/2$, *а* $\Omega_\delta\subset\mathbb{R}^3$ *– произвольная область, такая что* $\Omega_\delta\supset\overline{\Omega}$.

Теорема 3.4. *[18, 23] Если задача дифракции* (3.10)–(3.14) *имеет квазиклассическое решение* $\mathbf{E},\mathbf{H}$, *то вектор-функции* $\mathbf{E},\mathbf{u}$ *удовлетворяют системе* (3.15). *Обратно, если пара* $(\mathbf{E},\mathbf{u})\in\mathbf{L}_2(Q)\times W(\overline{\Omega})$ *является решением системы* (3.15) *с гладкой правой частью* $\mathbf{E}_0(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, *то поле* $\mathbf{E},\mathbf{H}$, *определенное согласно* (3.16)–(3.17), *есть квазиклассическое решение исходной задачи* (3.10)–(3.14).

Теорема 3.5. *[14, 18, 23] Пусть в* $\mathbb{R}^3\setminus\overline{Q}$ *выполнены условия* (3.21), *а для тензора относительной диэлектрической проницаемости* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ *в* $\overline{Q}$ *выполнены условия* (3.22)–(3.25). *Пусть, кроме того,* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)=\varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$, *если* $\operatorname{Im}\varepsilon_{ij}=0$. *Тогда матричный оператор* $\widehat{\mathcal{L}}:\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ *является непрерывно обратимым, а задача дифракции имеет единственное решение.*

Рассмотрена формулировка метода Галеркина для системы

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U}=\mathbf{f},\quad \mathbf{f}=(\mathbf{E}_{0,Q},\mathbf{E}_{0,\tau})^T. \tag{3.27}$$

Приближенные решения $\mathbf{U}_m=(\mathbf{J}_{m_0},\mathbf{u}_{m_1})^T$ уравнения (3.27) ищутся в виде

$$\mathbf{J}_{m_0}(x)=\sum_{k=1}^{m_0}c_k^0\mathbf{v}^{(0)}(x),\quad \mathbf{u}_{m_1}(x)=\sum_{k=1}^{m_1}c_k^1\mathbf{v}^{(1)}(x), \tag{3.28}$$

коэффициенты находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\langle\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U}_m,\mathbf{v}_k\rangle=\langle\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_k\rangle\quad\forall\,\mathbf{v}_k\in\mathbf{X}_m, \tag{3.29}$$

где $\mathbf{X}_m\subset\mathbf{X}$ – конечномерные подпространства:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_m=\mathbf{X}^0_{m_0}\times\mathbf{X}^1_{m_1},\quad \mathbf{X}^0_{m_0}&=span\{\mathbf{v}_1^{(0)},\ldots,\mathbf{v}_{m_0}^{(0)}\}\subset\mathbf{L}_2(Q),\\ \mathbf{X}^1_{m_1}&=span\{\mathbf{v}_1^{(1)},\ldots,\mathbf{v}_{m_1}^{(1)}\}\subset W(\overline{\Omega}).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Матрица $\mathbf{A}$ и столбец $\mathbf{b}$ СЛАУ записаны в блочном виде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} \\ A^{10} & A^{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Матричные элементы A_{ij}^{kl} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{00} &= \int_Q \Big(\widehat{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{v}_j^{(0)}(x) - (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_Q G(x,y) \mathbf{v}_j^{(0)}(y) dy \Big) \mathbf{v}_i^{(0)} dx, \\
A_{ij}^{01} &= \int_Q \Big(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_\Omega G(x,y) \mathbf{v}_j^{(1)}(y) ds_y \Big) \mathbf{v}_i^{(0)} dx, \\
A_{ij}^{10} &= \int_\Omega \Big(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_Q G(x,y) \mathbf{v}_j^{(0)}(y) dy \Big) \mathbf{v}_i^{(1)} ds_x, \\
A_{ij}^{11} &= \int_\Omega \Big(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_\Omega G(x,y) \mathbf{v}_j^{(1)}(y) ds_y \Big) \mathbf{v}_i^{(1)} ds_x.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

При вычислении интегралов по поверхности параметризованного экрана (D – область параметров) учитывается определение поверхностной дивергенции. Например, формула для вычисления элементов A_{ij}^{11} приобретает вид

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{11} = \int_D \int_D G(x(t), y(s)) \sqrt{g(t)} \sqrt{g(s)} \Big(-k_0^2 \mathbf{v}_j^{(1)}(y(s)) \cdot \mathbf{v}_i^{(1)}(x(t)) + \\
+ g^{\alpha\beta}(s) \partial_\alpha \mathbf{v}_j^{(1)}(y(s)) \partial_\beta \mathbf{x}(s) \; g^{\mu\nu}(t) \partial_\mu \mathbf{v}_i^{(1)}(x(t)) \partial_\nu \mathbf{x}(t) \Big) \, dt ds.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

В работе построены конкретные базисные функции на дву- и трехмерных рассеивателях, удовлетворяющие свойству аппроксимации.

Пусть Q – область произвольной формы в $\mathbb{R}^3$. Вводится параллелепипед Q', содержащий Q, элементарные прямоугольники Q'_i (1.26) и подобласти

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = Q \cap Q'_{i_1 i_2 i_3}, \quad i_k = 1, \dots, l_k.$$

Определяются функции

$$v_i^0(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^0(x) = \begin{cases} 1, \; x \in Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, \; x \notin Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3} \end{cases} \tag{3.34}$$

с носителями положительного объема. Тогда

$$\mathbf{J}_{m_0} = \left[\mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \mathbf{J}^3 \right]^T = \left[\sum_{i=1}^{l} b_i^1 v_i^0(x), \; \sum_{i'=1}^{l} b_{i'}^2 v_{i'}^0(x), \; \sum_{i''=1}^{l} b_{i''}^3 v_{i''}^0(x) \right]^T. \tag{3.35}$$

Лемма 3.1. *[14] Финитные кусочно-постоянные функции $\mathbf{v}_i^{(0)}$ удовлетворяют условию аппроксимации в векторном пространстве $\mathbf{L}_2(Q)$.*

Рассмотрены кусочно-линейные базисные функции на равномерной прямоугольной сетке. Вводятся обозначения

$$h^1 := |x_{1,i_1} - x_{1,i_1-1}|, \; h^2 := |x_{2,i_2} - x_{2,i_2-1}|, \; h^3 := |x_{3,i_3} - x_{3,i_3}| \tag{3.36}$$

и определяется три набора функций, кусочно-линейных по одной из декартовых координат и постоянных по двум другим, например

$$\tilde{v}^1_{i_1 i_2 i_3}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^1}|x_1 - x_{1,i_1}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1,i_2,i_3} \cup Q'_{i_1+1,i_2,i_3}}, \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1,i_2,i_3} \cup Q'_{i_1+1,i_2,i_3}}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Лемма 3.2. *[14] Введенные финитные функции* $\mathbf{v}_i^{(0)}$ *удовлетворяют условию аппроксимации в векторном пространстве* $\mathbf{L}_2(Q)$.

Описаны построение и свойства базисных вектор-функций на *неплоских* ориентируемых гладких параметризуемых экранах

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2),\ i = 1, 2, 3\},\ (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (3.38)$$

где $D = \{(t_1, t_2) : t_i \in (0; a_i)\}$. Отображение $x(t) : D \to \Omega$ есть диффеоморфизм класса C^∞, $x \in C^\infty(\overline{D})$, $x^{-1} = \kappa \in C^\infty(\overline{\Omega})$, с матрицей Якоби $\frac{\partial x}{\partial t}$ ранга 2.

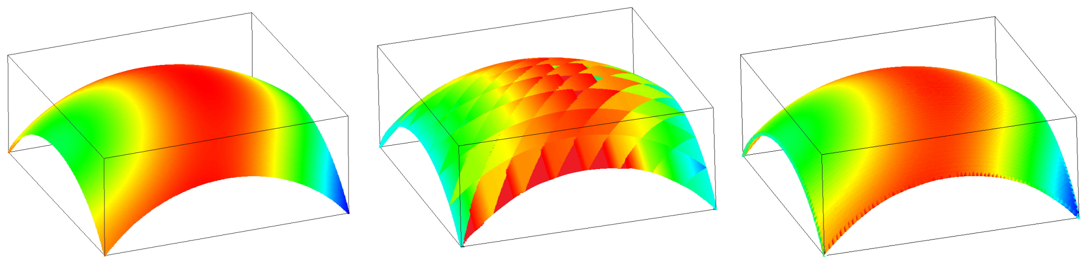
В области D определяются функции RWG $\mathbf{v}_j^{(1)}(x') =: \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1, t_2)$. Базисные функции $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ на неплоском экране определяются по формуле

$$\mathbf{v}_j^{(1)}(x(t)) = \frac{\partial x}{\partial t}\, \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1, t_2),\ x(t) \in \Omega. \quad (3.39)$$

Теорема 3.6. *[14, 22] Вектор-функции* $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ *на гладком (класса* C^∞*) незамкнутом ориентируемом параметрически заданном экране* Ω *удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве* $W = W(\overline{\Omega})$.

Рассмотрен пример аппроксимации на сферической поверхности Ω_S вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{f}(x)_\tau$, где $\mathbf{f}(x) = (x_2, x_3, x_2)^T$. На рисунке 2 (а) представлен график третьей компоненты $u^3(x)$ вектор-функции $\mathbf{u}$. На Рисунках 2 (б) и (в) изображены приближения $u^3_{m_1}(x)$ функции u^3, отвечающие равномерным сеткам в области параметров D с числами разбиения $n = 8$ и $n = 64$, а в Таблице 2 – значения отклонений

$$\|u^3 - u^3_{m_1}\|_\infty = \max_{x \in \Omega_S} |u^3(x) - u^3_{m_1}(x)|.$$



(а) (б): $n = 8$ (в): $n = 64$

Рис. 2: график функции $u^3(x)$ (а); графики функций $u^3_{m_1}(x)$ (б),(в)

Доказана теорема о сходимости метода Галеркина.

Таблица 2: Отклонение $\|u^3 - u^3_{m_1}\|_\infty$ на сферическом экране Ω_S в зависимости от значения параметра разбиения n множества D

n	8	16	32	64
$\|u^3 - u^3_{m_1}\|_\infty$	0.61	0.21	0.09	0.05

Теорема 3.7. *[14, 22] Пусть в $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ выполнены условия*

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0,\ \operatorname{Im}\varepsilon_e > 0, \quad \operatorname{Re}\mu_e > 0,\ \operatorname{Im}\mu_e = 0. \tag{3.40}$$

Пусть в Q тензор относительной диэлектрической проницаемости $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ таков, что в $x \in \overline{Q}$ существует ограниченный тензор

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \tag{3.41}$$

где $\widehat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор. Пусть для $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ в $\overline{Q}$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\operatorname{Re}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \tag{3.42}$$

$$\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0 \text{ или} \tag{3.43}$$

$$-\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_3|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 > 0 \tag{3.44}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$. Кроме того, $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$, если $\operatorname{Im}\varepsilon_{ij} = 0$.

Пусть базисные функции $\mathbf{v}^0_i(x)$ и $\mathbf{v}^{(1)}_j(x)$ удовлетворяют условию аппроксимации в пространствах $\mathbf{L}_2(Q)$ и $W(\overline{\Omega})$ соответственно, причем Ω – ориентируемая гладкая (класса C^∞) незамкнутая параметрически заданная поверхность.

Тогда метод Галеркина (3.29) *является сходящимся для оператора $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, приближенные решения $\mathbf{u}_m$ сходятся к единственному решению $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$ уравнения* (3.27) *и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}_m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \tag{3.45}$$

Четвертая глава посвящена теоретическому обоснованию метода Галеркина для решения векторной задачи дифракции электромагнитной волны на частично экранированном диэлектрическом теле.

Рассматривается ограниченная область Q с гладкой границей ∂Q, расположенная в однородном изотропном пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0,\ \operatorname{Im}\varepsilon_e \geqslant 0, \quad \operatorname{Re}\mu_e > 0,\ \operatorname{Im}\mu_e = 0, \tag{4.1}$$

а волновое число $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e\mu_e}$ определено так, чтобы

$$\operatorname{Re}k_e > 0,\ \operatorname{Im}k_e \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Область Q характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_e и тензор-функцией $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ диэлектрической проницаемости с гладкими компонентами $\varepsilon_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$. Для тензора относительной диэлектрической проницаемости $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)/\varepsilon_e$ выполнено условие

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1} \in C^\infty(\overline{Q}) \tag{4.3}$$

и одно из следующих условий:

$$\operatorname{Re}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\big) \geqslant C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \tag{4.4}$$

$$\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\big) \geqslant C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0 \text{ или} \tag{4.5}$$

$$-\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\big) \geqslant C_3|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 \neq 0 \tag{4.6}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$.

Ω – конечная система попарно непересекающихся идеально проводящих экранов Ω_i $(i = 1, \dots, n)$, $\Omega = \cup\Omega_i$, $\bar{\Omega} \subset \partial Q$. Край $\partial\Omega$ экрана Ω – гладкая кривая (или система кривых) класса C^∞ без точек самопересечения, $\partial\Omega_\delta$ – трубчатые окрестности края экрана, а $P^+ \subset \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q})$, $P^- \subset Q$ – произвольные области, соответственно внешняя и внутренняя к экрану Ω, и такие, что $\Omega \subset \partial P^\pm$; также $\partial Q' := \partial Q \setminus \overline{\Omega}$. Условие частичного экранирования таково:

$$\overline{\Omega} \subset \partial Q, \quad mes(\partial Q \setminus \overline{\Omega}) > 0, \tag{4.7}$$

причем $\partial Q \setminus \overline{\Omega}$ – открытое множество на поверхности ∂Q.

Постановка задачи. В задаче дифракции стороннего электромагнитного поля $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющего уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_e\mathbf{E}_0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}_0 = i\omega\mu_e\mathbf{H}_0, \tag{4.8}$$

требуется определить поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s) + (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$, удовлетворяющее в $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$ системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu_e\mathbf{H} \tag{4.9}$$

условиям непрерывности касательных компонент

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q'} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q'} = 0 \tag{4.10}$$

на неэкранированной части границы области неоднородности, условию

$$\mathbf{E}_\tau|_\Omega = 0, \tag{4.11}$$

условиям конечности энергии

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \tag{4.12}$$

и условиям излучения Сильвера – Мюллера для рассеянного поля

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = o(1/r), & \operatorname{Im} k_e > 0, \\ \mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s = o(1/r), & \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_s = o(1/r), \\ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = O(1/r), & \operatorname{Im} k_e = 0 \end{array} \tag{4.13}$$

при $r \to \infty$. Здесь $r = |x|,\ x \in \mathbb{R}^3$.

Полное поле должно удовлетворять условиям гладкости

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E},\mathbf{H} \in C^1(Q)\bigcap C^1(\mathbb{R}^3\setminus\overline{Q})\bigcap C(\overline{Q}\setminus\overline{\Omega})\bigcap C(\mathbb{R}^3\setminus(\overline{Q}\cup\overline{\Omega}))\\
\bigcap_{\delta>0} C(\overline{P^+}\setminus\partial\Omega_\delta)\bigcap_{\delta>0} C(\overline{P^-}\setminus\partial\Omega_\delta).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Определение 4.1. *Решение* $(\mathbf{E},\mathbf{H})$ *задачи* (4.9)–(4.13)*, удовлетворяющее условиям* (4.14)*, называется* ***квазиклассическим решением*** *задачи дифракции в дифференциальной формулировке.*

Теорема 4.1. *[20, 26] Пусть свободное от рассеивателей трехмерное пространство характеризуется постоянными значениями проницаемостей* ε_e, μ_e, *удовлетворяющих условиям* (4.1) *и* (4.2)*. Диэлектрическая проницаемость в* Q *удовлетворяет одному из условий:*

- $\operatorname{Im}\varepsilon_{ij}(x) > 0$ *в* Q, *тензор* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ *удовлетворяет условиям* (4.3), (4.4) *и является симметрическим;*
- $\operatorname{Im}\varepsilon_{ij}(x) \equiv 0$ *в* Q, *и* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$.

Тогда если квазиклассическое решение задачи (4.9)–(4.13) *существует, то оно единственно.*

Выписана система ИДУ задачи:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\overline{k}_e}\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x)\mathbf{J}(x) - \frac{1}{\overline{k}_e}(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy-\\
&\quad - \frac{1}{\overline{k}_e}(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y = \frac{1}{\overline{k}_e}\mathbf{E}_0(x),\ x\in Q,\\
&\Big(- \big(k_e + \frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\big)\int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy-\\
&\quad - \big(k_e + \frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\big)\int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\Big)_\tau = \frac{1}{k_e}\mathbf{E}_{0,\tau}(x),\ x\in\Omega.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Определен матричный оператор системы (4.15), действующий в определенных выше пространствах:

$$
\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{L}_2(Q)\times W(\overline{\Omega}) \to \mathbf{L}_2(Q)\times W'(\Omega). \tag{4.16}
$$

Пространство решений $(\mathbf{J},\mathbf{u})^T =: \mathbf{w}$ обозначено через $\mathbf{X}$; $\mathbf{X}' := \mathbf{L}_2(Q)\times W'(\Omega)$.

В работе получены следующие теоретические результаты.

Теорема 4.2. *[7, 9, 23] Пусть постоянные* ε_e, μ_e *удовлетворяют условиям* (4.1) *(причем* $\operatorname{Im} k_e > 0$*), а тензор диэлектрической проницаемости удовлетворяет условиям* (4.3)–(4.6)*. Тогда квадратичная форма* $\langle\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle$ *матричного оператора* $\widehat{\mathcal{L}}$ *коэрцитивна, т.е. найдется константа* $\gamma > 0$ *и* *такой компактный оператор* $\widehat{\mathcal{L}}^c : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, *что для всех* $\mathbf{w} \in \mathbf{X}$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{Im}\langle(\widehat{\mathcal{L}} - \widehat{\mathcal{L}}^c)\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle_{\mathbf{X}} \geqslant \gamma\|\mathbf{w}\|^2_{\mathbf{X}}. \tag{4.17}$$

Теорема 4.3. *[7, 9, 23] Пусть постоянные* ε_e, μ_e *удовлетворяют условиям* (4.1) *(причем* $\operatorname{Im} k_e > 0$*), а тензор диэлектрической проницаемости удовлетворяет условиям* (4.3)–(4.6). *Тогда оператор* $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ *является эллиптическим и фредгольмовым с нулевым индексом.*

Теорема 4.4. *[20, 23] Если система* (4.15) *имеет решение* $(\mathbf{E}, \mathbf{u}) \in \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega})$ *при* $\mathbf{E}_0 \equiv 0$, *то* $\mathbf{E} \equiv 0$ *и* $\mathbf{u} \equiv 0$.

Теорема 4.5. *[20, 23] Пусть постоянные* ε_e, μ_e *удовлетворяют условиям* (4.1), *причем* $\operatorname{Im} k_e > 0$. *Пусть тензор диэлектрической проницаемости* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$ *удовлетворяет условиям* (4.3)–(4.6). *Тогда оператор*

$$\hat{\mathcal{L}} : \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega}) \to \mathbf{L}_2(Q) \times W'(\Omega)$$

является непрерывно обратимым.

Формулировка метода Галеркина для уравнения

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U} = \mathbf{f},\ \mathbf{U} = (\mathbf{J}, \mathbf{u})^T \tag{4.18}$$

с правой частью $\mathbf{f} = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})^T$ и матричным оператором

$$\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}' \tag{4.19}$$

аналогична формулировке метода, данной в предыдущей главе.

Доказана теорема о сходимости метода Галеркина для оператора $\widehat{\mathcal{L}}$.

Теорема 4.6. *[20] Пусть в* $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ *выполнены условия*

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0,\ \operatorname{Im}\varepsilon_e > 0, \quad \operatorname{Re}\mu_e > 0,\ \operatorname{Im}\mu_e = 0. \tag{4.20}$$

Пусть в Q *тензор относительной диэлектрической проницаемости* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ *таков, что в* $x \in \overline{Q}$ *существует ограниченный тензор*

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \tag{4.21}$$

где $\widehat{\mathbf{I}}$ *– единичный тензор. Пусть для* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ *в* $\overline{Q}$ *выполнены условия*

$$\operatorname{Re}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \tag{4.22}$$

$$\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0 \text{ или} \tag{4.23}$$

$$-\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_3|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 > 0 \tag{4.24}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$, *и* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$.

Пусть для любых $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ *в области* Q *и на экране* Ω *определены произвольным образом базисные функции* $\mathbf{v}^{(0)}_{i_1}$ *и* $\mathbf{v}^{(1)}_{i_2}$, *удовлетворяющие* *условию аппроксимации (1.16) в пространствах* $\mathbf{L}_2(Q)$ *и* $W(\overline{\Omega})$ *соответственно, причем* Ω *– ориентируемая гладкая (класса* C^∞*) незамкнутая параметрически заданная поверхность.*

Тогда метод Галеркина является сходящимся для оператора $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, *приближенные решения* $\mathbf{U}_m$ *сходятся к единственному решению* $\mathbf{U} \in \mathbf{X}$ *уравнения (4.18) и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости*

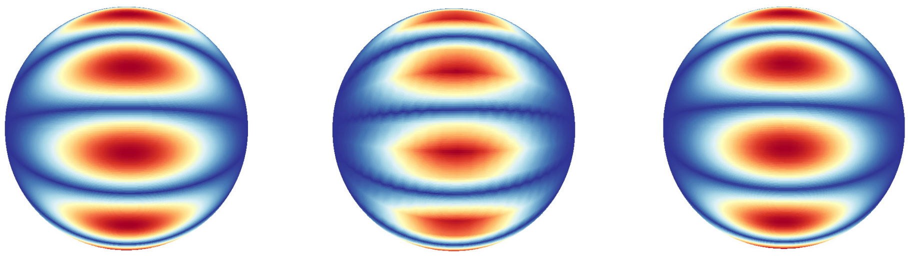
$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{U} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \tag{4.25}$$

В силу сходимости метода Галеркина для эффективной реализации численного метода достаточно потребовать, чтобы базисные функции удовлетворяли условию аппроксимации, а согласования сеток на Q и $\Omega \subset \partial Q$ не требуется. В качестве конкретных базисных функций предлагается использовать функции, описанные в предыдущей главе.

В **пятой главе** описаны результаты вычислительных экспериментов, а также некоторые аспекты программной реализации метода Галеркина.

В первом пункте рассмотрена скалярная задача дифракции на акустически жесткой единичной сфере, для которой известно ее точное решение.

Графики модулей точного решения и нескольких приближенных решений представлены на рисунке 3, а данные о значениях среднеквадратичного отклонения $\triangle_m := \|u_* - u_m\|_{L_2}$ – в таблице 3



(а) (б): $n = 32$ (в): $n = 128$

Рис. 3: Графики аналитического (а) и приближенных решений (б, в) на сфере

Таблица 3: Решение задачи дифракции на единичной сфере

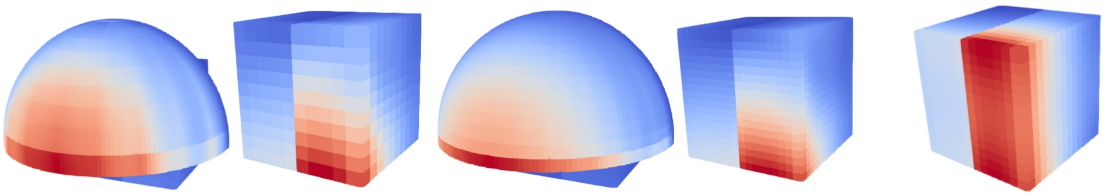
n	16	32	64	128
$\triangle_m$	0.76	0.19	0.051	0.013

Во втором пункте решена векторная задача дифракции плоской электромагнитной волны на квадратном идеально проводящем экране; проведено сравнение с ранее опубликованными результатами [12].

Рассмотрена задача дифракции плоской электромагнитной волны с частотой $\omega = 15$ Ггц на системе рассеивателей, состоящей из неплоского экрана (четверть сферы $S_\lambda(-\frac{\lambda}{2} - 0.2, 0, 0)$) и неоднородного куба $Q = [-\frac{\lambda}{2}; \frac{\lambda}{2}]^3$ с относительной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} 4 + 2i, & x_2 > 0, \\ 2 + i, & x_2 \leq 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Приведенные на рисунке 4 и в таблице 4 результаты подтверждают внутреннюю сходимость метода Галеркина и описывают качественное поведение решения задачи дифракции, согласующемся с ее физической сутью.



(а), (б): $|\mathbf{u}_{m_1}|, |\mathbf{J}_{m_0}|(n = 20)$ (в), (г): $|\mathbf{u}_{m_1}|, |\mathbf{J}_{m_0}|(n = 20)$ (д)

Рис. 4: Модуль плотности поверхностного тока $|\mathbf{u}_{m_1}|$ на экране(а, в). Модуль вектора поляризации $|\mathbf{J}_{m_0}|$ в области неоднородности (б, г), в том числе в отсутствии экрана (д)

Таблица 4: Внутренняя сходимость метода Галеркина

	$n_1 = 8, n_2 = 10$	$n_1 = 10, n_2 = 12$	$n_1 = 12, n_2 = 18$
$\Delta(\mathbf{u})$	0.0200	0.0126	0.0043
$\Delta(\mathbf{E})$	0.1352	0.1051	0.0764

В третьем пункте обсуждается параллельная реализация метода Галеркина, необходимость которой обусловлена высокой трудоемкостью проекционного метода. Для разработки параллельного численного метода, реализованного на языке C++, использовался интерфейс MPI.

Для проверки эффективности параллельного алгоритма заполнения матрицы СЛАУ в методе Галеркина и решения СЛАУ методом Гаусса проведена серия вычислительных экспериментов.

В таблице 5 показана зависимость времени решения векторной задачи дифракции на системе «тело + экран» от числа используемых процессов. Эксперименты проведены [13] на ПК с процессором i9-12900 (16 ядер, 24 потока) и объемом оперативной памяти 64 Гб.

[12]Peter A., et al. A Weak Form of the Conjugate Gradient FFT Method for Plate Problems // IEEE transactions on antennas and propagation. – 1991. – Vol. 39, №2. – P. 224–228.

[13]Параллельный алгоритм реализован на ПК и протестирован О. С. Скворцовым (см. [17])

Автором были проведены расчеты на кластере «Ломоносов-2» НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова (реализован метод Галеркина для решения задачи дифракции, описанной в параграфе 1). Сравнение данных таблицы 5 с данными таблиц 6 и 7 говорит о неоспоримом преимуществе в использовании специализированных кластеров над многоядерным домашним ПК.

Таблица 5: Время t_f заполнения матрицы и время t_s решения СЛАУ методом Гаусса.

n_{proc}	2	4	10	12	20
t_f, с	180	115	63	52	40
t_s, с	9.4	7.8	7.6	7.4	7.3

Таблица 6: Время заполнения матрицы СЛАУ на кластере «Ломоносов-2»

Порядок матрицы N	**112**	**480**	**1984**	**8064**	**32512**
Число процессов M **4**	3.4	31	380	5649	96125
8	1.6	15	190	2824	49172
16	0.739	7.5	94	1400	25081
32	0.29	3.4	46	700	12813
64	0.08	1.6	23	358	6716

Таблица 7: Время решения СЛАУ методом Гаусса кластере «Ломоносов-2»

Порядок матрицы N	**112**	**480**	**1984**	**8064**	**32512**
Число процессов M **4**	0.0007	.031	2.4	288	4502
8	.0008	.018	1.8	163	2600
16	0.4	0.34	0.9	82	1393
32	0.82	0.77	1	56	812
64	2.31	1.7	2	36	450

В последнем параграфе пятой главы предложена оптимизация алгоритма заполнения матрицы СЛАУ, учитывающая блочно-теплицеву структуру ее блоков с элементами, которые определяются через интегралы по объемному рассеивателю. Показано (таблица 8), что эффективное использование равномерной сетки в объемном носителе позволяет уменьшить количество вычисляемых интегралов с n^6 до C^3_{n+2}.

Таблица 8: Время T заполнения матрицы СЛАУ в задаче дифракции на теле Q

Число разбиения n	8	12	20	32
Порядок матрицы N	512	1728	8000	32768
T **(без учета симметрии), с**	583	$6 \cdot 10^3$	10^5	10^9
T **(с учетом симметрии), с**	0.25	1.2	17	213

В **заключении** подводятся итоги проведенного исследования, перечисляются основные результаты диссертации, приводятся рекомендации по практическому использованию результатов.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах Web of Science, Scopus, RSCI

1. *Деревянчук, Е. Д.* Метод Галеркина решения скалярной задачи рассеяния препятствием сложной формы / Е. Д. Деревянчук, Е. Ю. Смолькин, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – Т. 32, № 4. – С. 57–68. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=23168639 [РИНЦ 0.306; 1.0/0.7].

2. *Медведик, М. Ю.* Скалярная задача дифракции плоской волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 8. – С. 1319–1331. – doi: 10.1134/S096554251408089l [WoS Q4: JIF 0.7; 1.1/0.7].

3. *Смирнов, Ю. Г.* Задача дифракции акустических волн на системе тел, экранов и антенн / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, А. А. Цупак, М. А. Москалева // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 1. – С. 109–118. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=28405096 [РИНЦ 0.426; 0.8/0.2].

4. *Смирнов, Ю. Г.* Метод интегральных уравнений в скалярной задаче дифракции на системе, состоящей из «мягкого» и «жесткого» экранов и неоднородного тела / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 9 .– С. 1164–1174. – doi: 10.1134/S0012266114090031 [WoS Q2: JIF 0.8; 0.9/0.7].

5. *Смирнов, Ю. Г.* Метод интегральных уравнений в скалярной задаче дифракции на частично экранированном неоднородном теле / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 9. – С. 1234–1244. – doi: 10.1134/S0012266115090128 [WoS Q2: JIF 0.8; 0.9/0.7].

6. *Смирнов, Ю. Г.* О существовании и единственности классического решения задачи дифракции электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом теле без потерь / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 4. – С. 702–709. – doi: 10.1134/S0965542517040108 [WoS Q4: JIF 0.7; 0.7/0.6].

7. *Смирнов, Ю. Г.* О фредгольмовости уравнения электрического поля в векторной задаче дифракции на объемном частично экранированном теле / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 9. – С. 1242–1251. – doi: 10.1134/S0012266116090111 [WoS Q2: JIF 0.8; 0.9/0.6].

8. *Цупак, А. А.* О единственности решения задачи дифракции акустической волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1. – С. 30–38. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=21685389 [РИНЦ 0.306].

9. *Цупак, А. А.* О фредгольмовости интегро-дифференциального оператора в задаче дифракции электромагнитной волны на объемном теле, частично экранированном системой плоских экранов / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4. – С. 3–11. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=25729029 [РИНЦ 0.306].

10. *Цупак, А. А.* Проекционный метод решения скалярной задачи дифракции на неплоском жестком экране / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2. – С. 3–12. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=44180516 [РИНЦ 0.306].

11. *Цупак, А. А.* Существование и единственность решения задачи дифракции акустической волны на объемном неоднородном теле, содержащем мягкий экран / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3. – С. 61–71. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=25360570 [РИНЦ 0.306].

12. *Цупак, А. А.* Существование и единственность решения скалярной задачи дифракции на объемном неоднородном теле с кусочно-гладким показателем преломления / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 3. – С. 17–26. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=37068906 [РИНЦ 0.306].

13. *Цупак, А. А.* Численный метод и параллельный алгоритм решения задачи дифракции электромагнитной волны на неплоском идеально проводящем экране / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 4. – С. 32–41. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=44766293 [РИНЦ 0.306].

14. *Цупак А. А.* Сходимость метода Галеркина в задаче дифракции электромагнитной волны на системе тел и неплоских экранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2023. – № 4. – С. 14–25. – URL: https://izvuz_fmn.pnzgu.ru/fmn2423 [РИНЦ 0.306].

15. *Цупак, А. А.* Решение задачи дифракции акустической волны на системе жестких экранов методом Галеркина / А. А. Цупак, Н. В. Романова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2. – С. 54–66. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=26931721 [РИНЦ 0.306; 1.0/0.7].

16. *Medvedik, M. Yu.* Vector problem of electromagnetic wave diffraction by a system of inhomogeneous volume bodies, thin screens, and wire antennas / M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik, A. A. Tsupak // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2016. – Vol. 30, № 8. – P. 1086–1100. – doi: 10.1080/09205071.2016.1172990 [WoS Q4: JIF 1.2; 0.9/0.3].

17. *Skvortsov, O. S.* Numerical Investigation of Electromagnetic Wave Scattering from an Inhomogeneous Solid and a Curvilinear Perfectly Conducting Screen / O. S. Skvortsov, A. A. Tsupak // Technical Physics. – 2023. – Vol. 68, № 8. – P. 187–198. – doi: 10.1134/S1063784223070034 [WoS Q4: JIF 1.1; 1.0/0.3].

18. *Smirnov, Yu. G.* Existence and uniqueness theorems in electromagnetic diffraction on systems of lossless dielectrics and perfectly conducting screens / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Applicable Analysis. – 2017. – Vol. 96, № 8. – P. 1326–1341. – doi 10.1080/09205071.2016.1172990 [WoS Q2: JIF 1.1; 1.2/0.9].

19. *Smirnov, Yu. G.* Integro-differential Equations of the Vector Problem of Electromagnetic Wave Diffraction by a System of Nonintersecting Screens and Inhomogeneous Bodies / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Advances in Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 2015, Article ID 945965, 6 pages. – doi: 10.1155/2015/945965 [WoS Q3: JIF 1.0; 0.5/0.4].

20. *Smirnov, Yu. G.* Investigation Of Electromagnetic Wave Diffraction From An Inhomogeneous Partially Shielded Solid / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Applicable Analysis. – 2018. – Vol. 97, № 11. – P. 1881–1895. – doi 10.1080/00036811.2017.1343467 [WoS Q3: JIF 1.1; 1.2/0.9].

21. *Smirnov, Yu. G.* On the volume singular integro-differential equation for the electromagnetic diffraction problem / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak, D. V. Valovik //

Applicable Analysis. – 2017. – Vol. 96, № 2. – P. 173–189. – doi 10.1080/00036811.2015.1115839 [WoS Q2: JIF 1.1; 1.3/0.3].

22. *Tsupak, A.A.* Electromagnetic Wave Scattering from Curvilinear Screens: Galerkin Method Convergence Proof // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, No. 9. – P. 4091–4100. – doi: 10.1134/S1995080223090433 [WoS Q2: JIF 0.8].

Монографии

23. *Смирнов, Ю. Г.* Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак. – Москва : КноРус, 2016. – 224 с. [14/11].

Smirnov, Yu. G. Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak. – Moscow : Ru-Science, 2016. – 214 p. [14/11].

Научное издание

ЦУПАК Алексей Александрович

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА СИСТЕМЕ ТЕЛ И ЭКРАНОВ

Специальность 1.1.6. Вычислительная математика
(физико-математические науки)

Редактор *А. А. Есавкина*
Компьютерная верстка *А. А. Цупака*

Подписано в печать 16.10.2024. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 2,09. Заказ № 501. Тираж 100.

Издательство ПГУ.
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: icc@pnzgu.ru